T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİK İZDÜŞÜM MATRİSLERİ İÇİN BAZI RANK EŞİTLİKLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

ÖZLEM BAŞAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

ÖZLEM BAŞAR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

DİK İZDÜŞÜM MATRİSLERİ İÇİN BAZI RANK EŞİTLİKLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

ÖZLEM BAŞAR

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 72 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanım ve teoremler ispatsız olarakifade edilmiştir. Üçüncü bölümde izdüşüm matrisleri ele alınarak bu matrisler için çeşitli rank formülleri elde edilmiştir. İki izdüşüm matrisin toplam ve farkı için rank bazı formülleri verilmiş, izdüşüm matrisleriyle ilgili çeşitli rank eşitlikleri sunulmuştur. Ayrıca izdüşüm matrislerinin çapımlarının ve farklarının Moore-Penrose inversleri ele alınmıştır. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiş ve beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Matris, Kare Matris, Nonsingüler Matris, İzdüşüm Matrisi, Determinant, Bir Matrisin Tersi, Bir Matrisin Sıfır uzayı, Rank.

ABSTRACT

SOME RANK EQUALITIES FOR ORTHOGONAL PROJECTOR MATRICES AND ITS SEVERAL APPLICATIONS

ÖZLEM BAŞAR

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 72 PAGES

SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, it is given an introduction and the aim of the thesis. In the second chapter, basic definitions and theorems in this thesis stated without proof. In the third chapter, projection matrices are considered and some rank formulae for these matrices ate obtained. It is given some rank equalities for sums and differences of two projection matrices. Also, the Moore-Penrose inverses of the products and differences of projection matrices are considered in this chapter. In the fourth chapter, it is given some results and propositions and references that used in this thesis are listed in fifth chapter.

Keywords: Matrix, Square Matrix, Singular Matrix, Projection Matrix, Determinant, Inverse of a Matrix, Null Space of a Matrix, Rank.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışmalarım boyunca her zaman engin bilgi ve deneyimleriyle yolumu aydınlatan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN' e içten teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde görev yapmakta olan tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: K cismi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_n^m$	: $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_n^m$ **veya** $\mathbb{C}^{mxn}$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
I_n	: $n \times n$ tipindeki birim matris
A^{T} **veya** A'	: A matrisinin transpozu
$\overline{A}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
A^*	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$A^{\perp}$	: A matrisinin komplementi (tamamlayıcısı)
$\lvert A \rvert$	: A matrisinin determinantı
$\mathrm{Ek}(A)$	: A matrisinin ek matrisi
A_{ij}	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
A^{-1}	: A matrisinin inversi
$\mathrm{ind}(A)$	: A matrisinin indeksi
$\ker(A)$	: A matrisinin çekirdeği
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$tr(A)$ **veya** $iz(A)$	: A matrisinin izi
$\mathcal{N}(A)$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\mathfrak{R}(A)$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
A^- **veya** $A^{(1)}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$A^{(2)}$	: A matrisinin dış inversi
$A^{\#}$	: A matrisinin grup inversi
A_0 **veya** $A^{(1,2)}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$A^{\dagger}$ **veya** A^+	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
köş(A)	: A matrisinin köşegen elemanları
$\oplus$	: Direkt toplam

1. GİRİŞ

Günümüzde matris teorisi, teorik matematik, istatistik, sosyoloji, kimya, fizik eğitimi ve elektrik mühendisliği gibi çeşitli teknik alanlar içinde gerekli matematiksel temel bilginin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir. Matris hesabı, 19. yüzyıl ortalarından beri bilinmektedir. İngiliz matematikçi Sylvester, 1850 yılında 'matris' kavramını kullanmıştır. 1853 yılında İngiliz bilgini Hamilton '*Lineer and Vector Functions*' isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerinden faydalanmış fakat matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi olan Cavley, 1858 yılında zamanında çok meşhur olan '*Memorie on the Theory of Matrices*' isimli çalışmasında matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. Daha sonraları Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde çalışmışlardır.

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao (1965) tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle bu invers, Moore–Penrose inversten farklıdır. Rao, daha sonraki çalışmalarında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olacak ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao (1965)' nun birçok çalışmasında yer almıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Matrisler üzerine yapılan bu çalışmada J.J. Koliha, V. Rakoceviç ve I. Staskraba tarafından yapılan çalışmalarda ele alınan İdempotent Matrisler ve İzdüşüm Matrisleri detaylı bir biçimde ele alınmıştır. Ayrıca kompleks alan üzerinde tanımlanan idempotent matrislerin sıfırlılık derecesinin ne anlama geldiği verilmiş, A ve B gibi iki idempotent matris verildiğinde bu matrislerin bir lineer kombinasyonun da hangi durumlarda idempotent olacağı verilmiştir.

İzdüşüm matrislerin ve bunların uygulamalarının araştırılmasında, çoğu kez idempotent matrislerden oluşan çeşitli matris ifadeleriyle karşılaşır. Örneğin P ve Q iki izdüşüm matris olmak üzere $PQ, P+Q,\ \lambda_1 P+\lambda_2 Q,\ PA-AQ,\ I_m-PQ, PQ\pm QP, (PQ)^2-PQ,\ AA^{+}\pm A^{+}A,\ AA^{-}\pm B^{-}B$ matrisleri göz önüne alınabilir. Öte yandan, $P_1, P_2, \dots, P_k$ izdüşüm matrisleri olmak üzere $A=P_1+P_2,\ A=P_1P_2+P_2P_1$, $A=P_1 \dots P_k$; matris parçalanışları da dikkate alınabilir. Bu gibi durumlarda, bu matris ifadelerinin bazı elementer özelliklerinin yani sıra bu matris ifadeleri arasındaki ilişkileri vermekte ilgi çekicidir.

Bu problemler araştırılırken, matris rankının izdüşüm matrislerinden oluşan matris ifadeleriyle başa çıkmak için çok zengin bir teknik olduğunu belirtelim. Bir matrisin rankı, matrisler için elementer matris işlemleri ve benzerlik dönüşümleri gibi bazı temel işlemler altında değişmez.

Matris rankı hakkında iyi bilinen bir gerçek şudur: Aynı mertebeden iki A ve B matrisinin benzer, yani $UAV=B$ olacak şekilde iki tersinir matris U ve V matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $r(A)=r(B)$ rank eşitliğinin sağlanmasıdır. Bir matrisin sütunlarının veya satırlarının doğrusal bağımsızlığını belirlemek için en basit yöntem, matrisin elementer matris işlemleri ile satır veya sütun eşelon matris formlarına indirgenmesidir.

Teorik olarak, izdüşüm matrislerinden oluşan herhangi bir matris ifadesi için, bu ifade ile ilişkili bazı rank eşitlikleri kurulabilir. Bu rank eşitliklerinden yararlanarak, bu ifadenin bazı önemli temel özellikleri elde edilebilir. Rank formülleri, çeşitli blok matrisler ve elementer blok matris işlemleri ile de oluşturulabilir. Bazı bilinen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$$r\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n-BA \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m-AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

$$r\begin{bmatrix} I_m & I_m-AB \\ B & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B-BAB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & I_m-AB \\ B & 0 \end{bmatrix},$$

$$r\begin{bmatrix} A & AB \\ BA & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B-BAB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A-ABA & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Son yıllarda, bu yöntemle birçok yeni ve önemli rank eşitlikleri elde edilmiş ve bu rank eşitliklerinden birçok sonuç çıkarılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Matrisler ve Matris Uzayları

Tanım 2.1.1 Bir K cismi üzerinde n bilinmeyenli m tane lineer denklemden oluşan bir denklem sistemi, genel olarak,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, 1 \leq i \leq m \tag{2.1.1}$$

biçiminde tanımlanır, burada x_j, $1 \leq j \leq n$, ler bilinmeyenleri, a_{ij}, $1 \leq i \leq m$ ler $m.n$ tane katsayıları ve b_i ler de bilinen sayıları göstermektedir. (2.1.1) sistemi açık biçimde yazılırsa

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin matris formatında yazılımı

$$\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12} \ldots . a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \ldots . a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, a_{m2} \ldots . a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.2 K bir cisim olsun. $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesini $B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olarak alalım. B kümesi üzerinde

$$f: B \rightarrow K$$

fonksiyonunu

$$(i, j) \rightarrow f(i, j) = a_{ij}$$

biçiminde tanımlayalım. $a_{ij} \in K$ elemanları

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12} \ldots . a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \ldots . a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, a_{m2} \ldots . a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

şeklinde düzenlendiğinde mn tane eleman ile oluşturulan bu tabloya $m \times n$ tipinde bir matris denir. Her $(i,j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ çiftine karşılık gelen a_{ij} elemanına ise bu matrisin (i,j) $-$yinci bileşeni denir.

Tanım 2.1.3 $A = [a_{ij}],\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir ve A matrisine mertebesi $m \times n$ olan bir matris denir. Mertebesi $m \times n$ olan ve bileşenleri bir K cisminden seçilen bütün matrislerin cümlesi K_n^m ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipindeki herhangi iki matris olmak üzere her (i,j) için

$$a_{ij} = b_{ij},\ 1 \leq i \leq m,\ \text{ve}\ \ 1 \leq j \leq n$$

ise bu iki matrise eşit matrisler denir ve $A = B$ şeklinde yazılır. Bu durumda $(=)$ işleminin K_n^m üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Tanım 2.1.5 Eğer bir $A = [a_{ij}]$ matrisinde her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine sıfır matrisi denir.

Tanım 2.1.6 İki $S = [s_{ij}]$ ve $T = [t_{ij}] \in K_n^m$ matrislerinin toplamı, (i,j) -yinci bileşeni $s_{ij} + t_{ij}$ olan bir matris olup

$$+: K_n^m \times K_n^m \to K_n^m$$

$$(S,T) \to S + T = [s_{ij}] + [t_{ij}]$$

$$S + T = \begin{bmatrix} s_{11} + t_{11} & s_{12} + t_{12} \ldots . s_{1n} + t_{1n} \\ s_{12} + t_{12} & s_{22} + t_{22} \ldots . s_{2n} + t_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ s_{m1} + t_{m1} & s_{m2} + t_{m2} \ldots . s_{mn} + t_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

$c \in K$ herhangi bir skaler olmak üzere $cT \in K_n^m$ matrisi (i,j) -yinci bileşeni ct_{ij} olan bir matristir. Yani

$$.: K \times K_n^m \to K_n^m$$

$$(c,T) \longrightarrow cT = \begin{bmatrix} ct_{11} & ct_{12} \ldots ct_{1n} \\ ct_{21} & ct_{22} \ldots ct_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ ct_{m1} & ct_{m2} \ldots ct_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1.5)$$

dir. O halde $\forall T \in K_n^m$ matrisi için $0 \in K$ olmak üzere $0T = 0 \in K_n^m$ $m \times n$ tipinde sıfır matristir.

Matrislerin toplamının ve skaler ile çarpımının özellikleri aşağıdaki teoremde toplanabilir.

Teorem 2.1.1 Bir K cismi üzerinde tanımlanan $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi K_n^m olsun. Bu takdirde herhangi $A, B, C \in K_n^m$ matrisleri ve herhangi $k_1, k_2 \in K$ skalerleri için

i) $(A + B) + C = A + (B + C)$

ii) $A + 0 = A$

iii) $A + (-A) = 0$

iv) $A + B = B + A$

v) $k_1(A + B) = k_1A + k_2B$

vi) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

vii) $(k_1k_2)A = k_1(k_2)A$

viii) $1.A = A$ ve $0.A = 0$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.1.7 $S = [s_{ik}] \in K_n^m$ ve $T = [t_{kj}] \in K_p^n$ olmak üzere S ve T matrislerinin çarpımı

$$\cdot : K_n^m \times K_p^n \to K_p^m$$

$$(S, T) \to S \cdot T = [s_{ik}][t_{kj}] = \left[\sum_{k=1}^{n} s_{ik}t_{kj}\right], 1 \le i \le m, 1 \le k \le n, 1 \le j \le p$$

biçiminde, yani,

$$S \cdot T = \begin{bmatrix} (s_{11}t_{11} + \cdots . s_{1n}t_{n1}) \ldots (s_{11}t_{1p} + \cdots + s_{1m}t_{mp}) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ (s_{m1}t_{11} + \cdots . s_{mn}t_{n1}) \ldots (s_{m1}t_{1p} + \cdots + s_{mn}t_{np}) \end{bmatrix} \tag{2.1.6}$$

şeklinde tanımlanır. O halde matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. Çalışmamızda herhangi iki S ve T matrisinin çarpımlarında $S \cdot T$ yerine ST gösterimini kullanacağız.

Tanım 2.1.8 Köşegen üzerindeki bileşenleri 1 ve köşegen dışındaki bileşenleri 0 olan $n \times n$ mertebeden bir matrise birim matris denir ve I_n ile gösterilir. Yani

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Herhangi bir $A \in K_n^m$ matrisi için $I_m A = A I_n = A$ dir.

Tanım 2.1.9 A ve $B \in K_n^n$ matrisleri $AB = BA = I_n$ bağıntılarını sağlayan birer $n \times n$ mertebeli matris iseler B matrisine A matrisinin tersi denir. Bir kare matrisinin tersi varsa tektir**.**

Tanım 2.1.10 $A \in K_n^m$ matrisinin transpozu A' veya A^T ile gösterilir ve (j, i) bileşeni A nın (i, j) bileşeni olan bir $n \times m$ matristir. Diğer bir ifadeyle A^T matrisi A matrisinin satır ve sütunlarının kendi aralarında yer değiştirilmesiyle elde edilir. O halde transpoz işlemi $K_n^m \to K_m^n$ şeklinde bir işlemdir**.**

Teorem 2.1.2 $\forall A, B \in K_n^m$ matrisi için

i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

ii) $(A^T)^T = A$

iii) $(kA)^T = kA^T,\ k \in K$ bir skalar

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.1.11 $A^2 = A$ koşulunu sağlayan kare matrislere idempotent matris denir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri birer idempotent matristir.

Tanım 2.1.12 $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi halde yani,

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

Tanım 2.1.13 $\boldsymbol{A} \in K_n^m$ K cismi üzerinde tanımlanan $m \times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisinin lineer bağımsız sütun vektörlerinin maksimum sayısına A matrisinin sütun rankı, A matrisinin lineer bağımsız satır vektörlerinin maksimum sayısına ise A matrisinin satır rankı adı verilir.

Teorem 2.1.3 K cismi üzerinde tanımlanan $m \times n$ tipindeki bir $A \in K_n^m$ matrisi için

i) Satır rankı ile sütun rankı aynı sayıya eşittir. Bu sayıya A matrisinin rankı denir ve $r(A)$ ile ifade edilir.

ii) A matrisine elementer satır ya da sütun işlemlerinin uygulanması ile A matrisinin rankı değişmez.

iii) A matrisinin rankı ile transpozunun rankı birbirine eşittir.[4]

Tanım 2.1.14 $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine bir nonsingüler matris denir. Aksi durumda, yani, $r(A) < n$ ise A matrisine bir singüler matris denir**.**

Tanım 2.1.15 i) $\{1,2, \ldots n\}$ kümesinin kendisi üzerine bir birebir ve örten bağıntısı veya eş değer olarak $1,2, \ldots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2, \ldots n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ nın işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir.

ii) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}.a_{2j_2}.\dots.a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi böyle $n!$ çarpım kapsar.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı det(A) veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani,

$$|A| = \sum_{\sigma}(sgn\sigma)a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n}(sgn\sigma)a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n mertebedendir.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

iii) 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir. Başka bir deyişle $A = [a]$ ise, bu durumda $\det(A) = |a| = a$ olur.

iv) 2×2 tipindeki bir A matrisi için

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur.

v) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanan minörü, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

vi) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. A matrisinin bir a_{ij} elemanının A_{ij} şeklinde gösterilen kofaktörü (işaretli minörü veya eş çarpanı),

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır.

vii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı her hangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi i ve j $(i, j = 1,2,3, \dots, n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k} a_{ik}|M_{ik}| \tag{2.1.7}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j} a_{kj}|M_{ik}| \tag{2.1.8}$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.1.7) açılımına, A matrisinin determinantının i–yinci satıra göre açılımı, her bir j için, (2.1.8) açılımına ise A matrisinin determinantının j–yinci sütuna göre açılımı denir.

viii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $|A| = 0$ ise, A matrisine singüler matris, $|A| \neq 0$ ise, A matrisine nonsingüler (veya regüler) matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.1.16 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$$\text{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

matrisine A matrisinin ek matrisi denir.

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine A matrisinin inversi denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.4 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A|I_n \tag{2.1.9}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.5 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.1.10}$$

dır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.1.17 $A: V \to W$ lineer dönüşümünde W nın $A(\alpha)$ elemanına $\alpha \in V$ nın A lineer dönüşümü altındaki görüntüsü denir. S$\subset V$ için

$$A(S) = \{A(\alpha): \alpha \in S\} \subset W$$

alt kümesine ise S kümesinin A lineer dönüşümü altındaki görüntüsü denir. V vektör uzayının

$$A^{-1}(0) = \{\alpha \in V: A(\alpha) = 0\}$$

altkümesine A lineer dönüşümünün sıfır uzayı (sıfırlığı) veya çekirdeği denir. Öte yandan W vektör uzayının

$$A(V) = \{A(\alpha): \alpha \in V\}$$

alt kümesine A lineer dönüşümünün değerler bölgesi denir.

Tanım 2.1.18 $A \in K_n^m$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$$\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin sıfır (null) uzayı adı verilir.

Tanım 2.1.19 $A \in K_n^m$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$$\mathcal{R}(A) = \{y: y = Ax\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin sütun (ranj) uzayı adı verilir.

Tanım 2.1.20 Eğer A matrisi $n \times n$ tipinde nonsingüler bir matris ise bu takdirde $AX = XA = I_n$ olacak şekilde bir X matrisi vardır. A^{-1} ile gösterilen X matrisi tektir ve bu matrise A matrisinin tersi denir. Bu durumda A ve B matrisleri tersleri olan aynı tipten matrisler ise

$$(\mathrm{A}^{-1})' = (\mathrm{A}')^{-1} \quad \text{v e} \quad (\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$$

eşitlikleri vardır.

2.2 Genelleştirilmiş İnversler

Tanım 2.2.1 A $m \times n$ tipinde bir matris ve $r(A) = r \leq min\{m, n\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki dört koşulu sağlayan $n \times m$ tipindeki bir matris olan X matrisine A matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi denir.

i) $AXA = A$
ii) $XAX = X$
iii) $(AX)^* = AX$
iv) $(XA)^* = XA$

Bir A matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi A^+ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2 Tanım 2.2.1 daki koşullardan yalnız (i) koşulunu sağlayan bir genelleştirilmiş terse koşullu genelleştirilmiş ters; (i) ve (ii) koşullarını sağlayan bir genelleştirilmiş terse iki koşullu genelleştirilmiş ters; (i), (ii), (iii) ya da (i), (ii), (iv) koşullarını sağlayan bir genelleştirilmiş terse ise üç koşullu genelleştirilmiş ters denir. Bir koşullu genelleştirilmiş terslerin kümesi $A^{\{1\}}$, iki koşullu genelleştirilmiş terslerin kümesi $A^{\{1,2\}}$ ve üç koşullu genelleştirilmiş terslerin kümesi ise $A^{\{1,2,3\}}$ veya $A^{\{1,2,4\}}$ ile gösterilir. Bu durumda bu tersler arasında

$$A^+ \subset A^{\{1,2,3\}}, A^{\{1,2,4\}} \subset A^{\{1,2\}} \subset A^{\{1\}}$$

bağıntısının sağlandığı açıktır.

Bir A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^+$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^+ matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^+ matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bir takım özellikleri verilecektir.

Teorem 2.2.1 Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^+ matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir.

Teorem 2.2.2 Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir ve yalnız bir tek A^+ matrisi vardır.

Teorem 2.2.3 $m \times n$ tipinde bir A matrisinin Moore–Penrose inversi $n \times m$ tipindedir.

Teorem 2.2.4 i) $m \times n$ tipinde bir A matrisinin tüm elemanları 1 ise, $A^+ = \frac{1}{m.n} A^*$ dir.

ii) $a,\ n \times 1$ tipinde bir sütun vektörü ise, bu durumda $a^+ = (a^* a)^{-1} a^*$ şeklindedir.

iii) $a,\ 1 \times n$ tipinde bir satır vektörü ise, bu durumda a^+, $a^+ = a^*(aa^*)^{-1}$ şeklindedir.

Teorem 2.2.5 A herhangi bir matris olmak üzere

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.2.1}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 2.2.6 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, herhangi bir A matrisi için, $(A^+)^+ = A$ olur.

Teorem 2.2.7 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin rankı kendi rankına eşittir. Yani, $r(A) = r(A^+)$ dır.

Bu teoremin sonucu olarak eğer A matrisinin rankı r ise, $A^+, AA^+, A^+A, AA^+A, A^+AA^+$ matrislerinin her birinin rankının da r olduğu görülür.

Teorem 2.2.8 Eğer A simetrik ve idempotent bir matris ise, bu takdirde $A^+ = A$ dir.

Teorem 2.2.9 $B = \text{Köş}\{\text{b}_{11}, \text{b}_{22}, \dots, \text{b}_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^+, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $\text{b}_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $\text{b}_{ii} = 0$ ise "0" olan bir köşegen matristir.

Teorem 2.2.10 i) A, $m \times n$ matrisi tam satır ranklı bir matris ise, bu takdirde

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} \text{ ve } AA^+ = I_m$$

dir.

ii) A, $m \times n$ matrisi tam sütun ranklı bir matris ise, bu takdirde

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* \text{ ve } A^+A = I_n$$

olur.

İspat: Her iki durum için verilen A^+ matrislerinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre,

i) (i) $AA^+A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A,$

(ii) $A^+AA^+ = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1}$

$$= A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1} = A^{+\dagger},$$

(iii) $(AA^+)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I$

$$= (AA^*)(AA^*)^{-1} = AA^*(AA^*)^{-1} = AA^+,$$

(iv) $(A^+A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^+A$

olur.

ii) (i) $AA^+A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A,$

(ii) $A^+AA^+ = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^*$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}A^* = A^+,$$

(iii) $(AA^+)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3 DİK İZDÜŞÜM MATRİSLERİ İÇİN BAZI RANK EŞİTLİKLERİ

3.1 Dik İzdüşümler için Bazı Eşitlikler ve İşlemler

A bir kompleks kare matris olmak üzere eğer $A^2 = A = A^*$ ise A matrisine bir dik (dik) izdüşüm adı verilir, burada A^* matrisi A matrisinin eşlenik transpozunu belirtir. Bu kısımda, dik izdüşümlerden oluşan matris ifadeleri ve matris rankları cinsinden bunların özellikleri kapsamlı bir şekilde incelenecektir. Öncelikle dik izdüşümler ve bunların işlemleri için iyi bilinen rank formülleri verilecek ve daha sonra dik izdüşümlerden oluşan matris ifadeleri için çeşitli yeni rank formülleri oluşturulacaktır. Uygulamalar olarak, dik izdüşümler ve bunların işlemleri üzerine çeşitli eşitliklerin sağlanması için gerek ve yeter şartlar geliştirilecektir.

mxn tipindeki tüm kompleks matrislerinin kümesini $\mathbb{C}^{mxn}$ ile gösterelim ve A^*, $r(A)$, $\Re(A)$ ve $N(A)$ sembolleri $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin sırasıyla eşlenik transpozunu, rankını, ranjını (sütun uzayını) ve çekirdeğini (sıfır uzayını), I_m m. mertebeden birim matris, $[A, B]$ ise A ve B den oluşan bir satır blok matrisi göstersin. $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin A^+ ile gösterilen Moore-Penrose inversi aşağıdaki dört matris denklemini sağlayan ve tek türlü belirli olan $X \in \mathbb{C}^{nxm}$ matrisi olarak tanımlanır.

$$(i)\ AXA = A;\ (ii)\ XAX = X,\ (iii)\ (AX)^* = AX,\ (iv)\ (XA)^* = XA$$

Öte yandan sadece (i) denkleminin sağlanması halinde X matrisine A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi denir ve $X = A^-$ ile gösterilir. Herhangi bir A matrisinin tüm genelleştirilmiş inverslerinin kümesi $\{A^-\}$ ile gösterilir. $r(A^2) = r(A)$ olan $A \in C^{mxm}$ matrisi için A' nın $A^\#$ ile gösterilen grup inversi aşağıdaki üç matris denklemini sağlayan vetek türlü olarak belirli olan X matrisi olarak tanımlanır.

$$(i)\ AXA = A,\ (ii) = XAX = X,\quad (iii) = AX = XA.$$

Bu durumda $A^\#$ matrisi için iyi bilinen bir formül $A^\# = A(A^3)^+A$ şeklinde verilebilir. Bilindiği gibi genelleştirilmiş inverslerin en önemli uygulamalarından biri, matris denklemlerinin genel çözümlerinde olduğu gibi blok parçalanmış matrislerin rankları için kapalı-form formüllerin türetilmesidir.

Bir $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ matrisi hem idempotent hem de hermityen ise, yani $A^2 = A = A^*$ ise bu durumda A matrisine bir dik izdüşüm denir. Eğer $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A)$ ve $X^2 = X = X^*$ eşitlikleri sağlanıyorsa bu durumda $X \in \mathbb{C}^{mxm}$ matrisine $A \in C^{mxn}$ matrisinin $\mathfrak{R}(A)$ ranj uzayı üzerine bir dik izdüşümü denir ve $X = P_A$ ile gösterilir. Moore-Penrose invers tanımından kolayca görülebilir ki AA^+ çarpımı $\mathfrak{R}(A)$ üzerine dik izdüşümdür, yani, $P_A = AA^+$ dır. Bu durumda $P_A^\perp = I_m - AA^+$ matrisi P_A matrisinin tamamlayıcı izdüşümü olarak adlandırılır. Geleneksel tanıma ek olarak, $X = P_A$ dik izdüşümü aşağıda gösterildiği gibi bazı farklı denklemlerle de tanımlanabilir.

Lemma 3.1.1 $X \in \mathbb{C}^{mxm}$ ve $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) $X = P_A$

(b) $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A)$ ve $X = XX^*$,

(c) $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(\mathrm{A})$ ve $A^*A = A^*$,

(d) $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(\mathrm{A})$ ve $XA = A$,

(e) $X = \underset{XA = A}{\operatorname{argmin}}\, tr(XX^*)$,

(f) $A^*X = A^*, XA = A$ ve $r(X) = r(A)$.

Dik izdüşümler, matris teorisi ve uygulamalarında sıkça kullanılan en basit matrislerden biridir. Her durumda, dik izdüşümler ve bunların cebirsel özellikleri kendi içlerinde ilginçtir. Dik izdüşümlerin lineer kombinasyonları ve dik izdüşüm polinomları ile bunların cebirsel özellikleri literatürde yaygın olarak ele alınmıştır. P_A dik izdüşümü hakkında ilginç sonuç, herhangi $b \in \mathbb{C}^{nx1}$ ve $x \in \mathbb{C}^{nx1}$ vektörleri için

$$(b - P_A b)^*(b - P_A b) \leq (b - Ax)^*(b - Ax)$$

ile verilen en küçük kareler özelliğidir. Dik izdüşümlerden oluşan çeşitli ifadeler veya eşitlikler matris teorisi ve uygulamalarında ortaya çıkar. Bu ifadeler ve eşitlikler genel olarak sırasıyla

$$p(P_1, P_2, \dots, P_k) \text{ ve } p(P_1, P_2, \dots, P_k) = q(Q_1, Q_2, \dots, Q_l)$$

şeklinde yazılabilir, burada $P_1, P_2, \dots, P_k, Q_1, Q_2, \dots, Q_l$ dik izdüşümlerdir. Bu durumda bu eşitliklerin sağlanması için gerek ve yeter şartlar gibi, bu ifadelerin bazı temel özelliklerinin türetilmesi oldukça önemlidir. Ayrıca dik izdüşümlerin incelenmesinde izdüşümlerin (eşzamanlı) ayrışımları ve bunlarla ilgili işlemler oldukça dikkate değerdir. İki veya daha fazla dik izdüşüme ve bunlarla ilgili işlemlere ilişkin bir diğer basit yaklaşım matrislerin ranklarını kullanmaktır. Bir matrisin rankı, matrisin sütun (satır) uzayının boyutu olarak tanımlanır. Bu durumda $A=0$ olması için gerek ve yeter şart $r(A)=0$ olması olduğunu hatırlayalım. Bu durumda $A=B$ olması için gerek ve yeter şart $r(A-B)=0$ olmasıdır. Dolayısıyla $A-B$ farkının rankı için bazı formüller türetilebilirse, bu formüller $A=B$ eşitliğini karakterize etmek için kullanılabilir. Matris rank metodu olarak bilinen bu metot çeşitli matris eşitlikleri oluşturmak ve bunların özelliklerini göstermek için kullanılabilir.

Bu kısımdaki amacımız, dik izdüşümlerden oluşan bazı tipik matris ifadelerine matris rank metodu yardımıyla bazı yeni yaklaşımlar vermektir. Bununla ilgili olarak dik izdüşüm matrisleri için bilinen bazı rank eşitliklerini literatüre kazandırmak, Dik izdüşümler içeren matris ifadeleri için değişik rank eşitlikleri vermek ve bu rank eşitliklerini kullanarak dik izdüşümlerin birçok önemli yeni özelliğini türetmek hedeflenmiştir.

Elementer matris işlemleri altında bir matrisin rankının değişmediğini hatırlayalım. Dolayısıyla, matris rank eşitlikleri çeşitli blok matrisler ve elementer blok matris işlemleri (EBMO'lar) yardımıyla kurulabilir. Örneğin, elementer blok matris işlemleri yardımıyla

$$r\begin{bmatrix} Im & A \\ B & Im \end{bmatrix} = m + r(I_n - BA) = r(I_m - AB) + n \qquad (3.1.1)$$

eşitliği kolayca gösterilebilir. Özel olarak, hem P hem de Q matris aynı mertebeden idempotent matrisler ise bu takdirde,

$$r\begin{bmatrix} -P & 0 & P \\ 0 & Q & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P, Q] = r(P) + r(Q) + r(P-Q) \qquad (3.1.2)$$

$$r\begin{bmatrix} -PQ & 0 & PQ \\ 0 & QP & Qp \\ PQ & QP & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} PQ \\ QP \end{bmatrix} + r[PQ, QP]$$

$$= r(PQ) + r(QP) + r(PQ - QP) \qquad (3.1.3)$$

olacaktır. Bu rank formülleri, farklı matris ifadeleri arasındaki ilişkileri karakterize etmek için kullanılabilir. (3.1.1)-(3.1.3) de verilenlere benzer çok sayıda rank eşitliği çeşitli elementer yöntemlerle oluşturulabilir. Dik izdüşümler idempotent olduğundan P_A ve P_{A^+} izdüşümlerinin

$$r(P_A - P_{A^*}) = 2r[A, A^*] - 2r(A) \qquad (3.1.4)$$

rank eşitliğini sağladığını (3.1.2) den kolayca görmek mümkündür. Bu rank formülü ise $P_A - P_{A^*}$ farkının rankının bir çift sayı olduğunu ve bu sayının $[A, A^*]$ ve A matrislerinin ranklarından hesaplanabileceğini gösterir. Dahası, bu formül aynı zamanda $AA^+ = A^+A$ olması için gerek ve yeter şartın $r[A, A^*] = r(A)$, yani $\Re(A) = \Re(A^*)$ olduğunu da gösterir.

Başka bir basit sonuç, eğer $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$ matrisi bir dik izdüşüm ise bu takdirde

$$r(A) = r(A_{11}) + r(A_{22}) - r(A_{12}) \qquad (3.1.5)$$

olduğudur. Bu durumda bu formülden A_{11} matrisinin A daki $A_{22} - A_{12}^*A_{11}^+A_{12}$ Schur komplementinin

$$r(A_{22} - A_{12}^*A_{11}^+A_{12}) = r(A_{22}) - r(A_{12}^*A_{11}^+A_{12}) \qquad (3.1.6)$$

rank çıkarımsallık şartını sağladığını da kolayca görmek mümkündür. Tüm bu sonuçlar, dik izdüşümlerin özelliklerinin ve dik izdüşümlerden oluşan eşitliklerin matris rank yöntemi ile karakterize edilebildiğini göstermektedir.

Bu kısımda, idempotent matrisler ve dik izdüşümler için verilmiş iyi bilinen bazı rank eşitliklerini sıralayacağız. Daha sonraki kısımlarda bunları tekrar tekrar kullanacağız.

Lemma 3.1.1 $A \in \mathbb{C}^{mxn}, B \in \mathbb{C}^{mxk}$ ve $C \in \mathbb{C}^{lxn}$ olsun. Bu takdirde,

$$r[A, B] = r(A) + r[(I_m - AA^+)B] = r(B) + r[(I_m - BB^+)A] \qquad (3.1.7)$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r[(I_m - BB^+)A(I_n - C^+C)] \qquad (3.1.8)$$

Lemma 3.1.2 $G_1, G_2, G_3 \in \mathbb{C}^{nxm}$ matrisleri $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin üç dış inversi olsun, yani $G_iAG_i = G_i$, $i = 1,2,3$ olsun ve $\Re(G_i) \subseteq \Re(G_1)$ ve $\Re(G_i^*) \subseteq \Re(G_1^*)$ $i = 2,3$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

$$r(G_1 - G_2 - G_3) = r(G_1) - r(G_2) - r(G_3) + r(G_2AG_3) + r(G_3AG_2) \qquad (3.1.9)$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda (3.1.7) eşitliği

$$r[P_A, P_B] = r(P_A) + r(P_A^{\perp} P_B) = r(P_B) + r(P_B^{\perp} P_A) \tag{3.1.10}$$

şeklinde de yazılabilir.

$M = [A, B]$ matrisi verilmiş olsun ve $P_A P_A^{\perp} P_B = 0$ olduğuna dikkat edelim. Bu durumda aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$P_M = P_{[P_A, P_B]} = P_A + P_{P_A^{\perp} P_B} = P_B + P_{P_B^{\perp} P_A} \tag{3.1.11}$$

Bu iyi bilinen bir sonuçtur.

Sonuç 3.1.1 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde,

$$r(P_A + P_B) = r[P_A, P_B], \tag{3.1.12}$$

$$r(P_A + P_B) = r(P_A) + r(P_B - P_A P_B) = r(P_B) + r(P_A - P_B P_A) \tag{3.1.13}$$

$$r[P_A, P_B] = r(P_A) + r(P_B) - m + r[P_A^{\perp}, P_B^{\perp}] \tag{3.1.14}$$

$$r(P_A + P_B) = r(P_A) + r(P_B) - m + r(P_A^{\perp} + P_B^{\perp}) \tag{3.1.15}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Herhangi bir M için $r(MM^*) = r(M)$ olduğunu hatırlayalım. Bu takdirde, (3.1.12) den $[P_A, P_B][P_A, P_B]^* = P_A + P_B$ olduğu görülür. Bu durumda (3.1.13) eşitliği (3.1.10) ve (3.1.12) eşitliklerinden elde edilir. (3.1.10) eşitliğinde P_A ve P_B izdüşümleri yerine sırasıyla bunların komplement izdüşümleri $P_A^{\perp}$ ve $P_B^{\perp}$ yazılır ve $r(P_A^{\perp}) = m - r(P_A)$ olduğu dikkate alınırsa bu takdirde (3.1.14) de istenildiği gibi

$$\begin{aligned} r[P_A^{\perp}, P_B^{\perp}] &= r(P_A^{\perp}) + r(P_B^{\perp} - P_A^{\perp} P_B^{\perp}) = m - r(P_A) + r(P_A P_B^{\perp}) \\ &= m - r(P_A) - r(P_B) + r[P_A, P_B] \end{aligned}$$

olduğu görülür. (3.1.15) eşitliği ise (3.1.12) ve (3.1.14) eşitliklerinden elde edilir.

İki idempotent matrisin rankına ilişkin aşağıdaki sonuç verilebilir:

Lemma 3.1.3 $A, B \in \mathbb{C}^{mxm}$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu takdirde,

$$r(A - B) = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r[A, B] - r(A) - r(B) \tag{3.1.16}$$

$$r(A - B) = r(A - AB) + r(AB - B) \text{ (rank toplamsallık şartı)} \tag{3.1.17}$$

$$r(A-B) \ = r(A-BA)+r(BA-B) \ \text{(rank toplamsallık şartı)} \qquad (3.1.18)$$

eşitlikleri sağlanır.

$M \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisi verilsin. $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrislerinin herhangi iki idempotent matris olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

$$r(AM-MB) = r\begin{bmatrix} AM \\ B \end{bmatrix} + r[MB, A] - r(A) - r(A), \qquad (3.1.19)$$

$$r(AM-MB) = r(AM-AMB) + r(AMB-MB) \qquad (3.1.20)$$

eşitlikleri sağlanır.

Lemma 3.1.3 ün P_A ve P_B dik izdüşüm çiftine uygulanması aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç 3.1.2 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde

$$r(P_A-P_B) = 2r[P_A, P_B] - r(P_A) - r(P_A), \qquad (3.1.21)$$

$$r(P_A-P_B) = r(P_B^{\perp}P_A) + r(P_A^{\perp}P_B), \qquad (3.1.22)$$

$$r(I_m-P_A-P_B) = r(P_A^{\perp}P_B^{\perp}) + r(P_A P_B), \qquad (3.1.23)$$

$$r(I_m-P_A-P_B) = m - r(P_A) - r(P_B) + 2r(P_A \ P_B) \qquad (3.1.24)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle,

$$P_A \ P_B = 0 \Leftrightarrow r(I_m - P_A - P_B) = m - r(P_A) - r(P_B);$$

$$P_A + P_B = I_m \Leftrightarrow P_A \ P_B = 0 \quad \text{ve} \quad r(P_A) + r(P_B) = m$$

ifadeleri doğrudur.

Lemma 3.1.4 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} r[A^*(I_m-P_B)(I_m-P_A)B] &= r[P_A(I_m-P_B)(I_m-P_A)B \\ &= r[A^*B - A^*BB^+(A^*)^+A^*B] \\ &= r[(P_A P_B)^2 - P_A P_B] \\ &= r[P_A, P_B] + r(P_A P_B) - r(P_A) - r(P_B) \qquad (3.1.25) \\ &= r[A, B] + r(A^*B) - r(A) - r(B) \qquad (3.1.26) \end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı,

(a) $r[A, B] \geq r(A) + r(B) - r(A^*B)$;

(b) Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $B^{+}(A^{*})^{+} \in \{(A^{*}B)^{-}\}$,

(ii) $(P_A P_B)^2 = P_A P_B$,

(iii) $r[A, B] = r(A) + r(B) - r(A^{*}B)$.

$A, B \in \mathbb{C}^{mxn}$ herhangi iki matris olmak üzere aşağıdaki rank eşitsizliğinin sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

$$r(A+B) \geq r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r[A, B] - r(A) - r(B) \tag{3.1.27}$$

Bu durumda Lemma 3.1.4(a) yı (3.1.27) eşitsizliğine uygularsak

$$r(A+B) \geq r(A) + r(B) - r(A^{*}B) - r(AB^{*}) \tag{3.1.28}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Lemma 3.1.5 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} r(P_A P_B - P_B P_A) &= 2r(P_A P_B - P_A P_B P_A) \\ &= 2r(P_A P_B - P_B P_A P_B) \\ &= 2r[P_A P_B - (P_A P_B)^2] \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

eşitlikleri sağlanır.

Lemma 3.1.5 gösterir ki $(P_A P_B)^2 = P_A P_B$ olması yani, $P_A P_B$ nin bir dik izdüşüm olması için gerek ve yeter şart $P_A P_B = P_B P_A$ olmasıdır. Bu durumda (3.1.26) ve (3.1.29) eşitlikleri birleştirilerek

$$r(P_A P_B - P_B P_A) = 2r[P_{A,} P_B] + 2r(P_A P_B) - 2r(P_A) - 2r(P_B) \tag{3.1.30}$$

olduğu görülür. Böylece,

$$P_A P_B = P_B P_A \Leftrightarrow r[P_A, P_B] = r(P_A) + (P_B) - r(P_A P_B) \tag{3.1.31}$$

yazılabilir. Bunun sonucu olarak bir $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ için (3.1.30) eşitliği $P_A P_{A^{*}} - P_{A^{*}} P_A$ komütatörüne uygulanarak,

$$r(\, P_A P_{A^{*}} - P_{A^{*}} P_A) = 2r[A, A^{*}] + 2r(A^2) - 4r(A)$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir.

Sonuç 3.1.3 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$(a)\ r[(P_A^{\perp}, P_B^{\perp}] + r(P_A^{\perp}P_B^{\perp}) - r(P_A^{\perp}) - r(P_B^{\perp})$$

$$= r[P_A, P_B\ ] + r(P_A P_B) - r(P_A) - r(P_B\ )$$

$$(b)\ \ r[(P_A^{\perp}P_B^{\perp})^2 - P_A^{\perp}P_B^{\perp}] = r[(P_A P_B)^2 - P_A P_B]$$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat. (3.1.30) eşitliğinde P_A ve P_B yerine sırasıyla , $P_A^{\perp}$ ve $P_B^{\perp}$ yazılırsa

$$r(P_A^{\perp}P_B^{\perp} - P_B^{\perp}P_A^{\perp}) = 2r[P_A^{\perp}, P_B^{\perp}] + 2r[P_A^{\perp}\ P_B^{\perp}] + 2r(P_A^{\perp}) - 2r(P_B^{\perp}) \qquad (3.1.32)$$

eşitliği yazılabilir. Öte yandan, $P_A^{\perp}P_B^{\perp} - P_B^{\perp}P_A^{\perp} = P_A P_B - P_B P_A$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$r(P_A^{\perp}P_B^{\perp} - P_B^{\perp}P_A^{\perp}) = 2r[P_A, P_B] + 2r(P_A P_B) - 2r(P_A) - 2r(P_B) \qquad (3.133)$$

eşitliği elde edilir. (3.1.32) ve (3.1.33) eşitliklerinin birleştirilmesiyle(a) daki sonuca ulaşılır. (b) deki sonuç ise (3.1.26) ve (a) şıkkından kolayca görülebilir.

Önceden bilinen rank eşitlikleri, dik izdüşümler için çeşitli eşitlikleri karakterize etmek için kullanılabilir, özellikle iki dik izdüşümün komutatifliğinin gösterilmesinde kullanılabilir. Örneğin, (3.1.29), (3.1.31) ve (3.1.32) eşitlikleri aşağıdaki ifadelerin eşdeğer olduğunu gösterir:

(a) $P_A P_B = P_B P_A$ dir, yani $P_A P_B$ Hermityendir.

(b) $P_A P_B = P_A P_B P_A = P_B P_A P_B = (P_A P_B)^2$

(c) $r[A, B] = r(A) + r(B) - r(A^* B)$,

(d) $r[P_A^{\perp}, P_B^{\perp}] = r(P_A^{\perp}) + r(P_B^{\perp}) - r[P_A^{\perp}\ P_B^{\perp}]$

Bu durumda $r(A^2\ - A) = r(A) + r(I_m - A) - m$ rank formülü $(P_A P_B)^2 - P_A P_B$ ve $(P_B P_A)^2 - P_B P_A$ ifadelerine uygulanırsa

$$r[(P_A P_B)^2\ - P_A P_B] = r(I_m\ - P_A P_B) + r(P_A P_B) - m \qquad (3.1.34)$$

$$r[(P_B P_A)^2\ - P_B P_A] = r(I_m\ - P_B P_A) + r(P_B P_A) - m \qquad (3.1.35)$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür.

$(P_A P_B)^2 - P_A P_B$ ve $(P_B P_A)^2 - P_B P_A$ matrisleri bir dik izdüşümler çifti tarafından oluşturulan polinomların özel bir durumu olarak kabul edilebilir. Bu durumda (3.1.26) ve (3.1.34) eşitlikleri birleştirilerek aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.4 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

(a) $r(I_m - P_A P_B) = r(I_m - P_B P_A) = r[A, B] - r(A) - r(B) + m,$

yani, $dim\,\mathcal{N}(I_m - P_A P_B) = dim\,\mathcal{N}(I_m - P_B P_A) = dim\Re(A) \cap \Re(B);$

(b) $\mathcal{N}(I_m - P_A P_B) = \mathcal{N}(I_m - P_B P_A) = \Re(A) \cap \Re(B);$

(c) $I_m - P_A P_B$ nonsingüler $\Leftrightarrow$ $I_m - P_B P_A$ nonsingüler $\Leftrightarrow \Re(A) \cap \Re(B) = \{0\};$

(d) Hem $P_A P_B$ ve hem de $P_B P_A$ çarpımı tamı tamına t tane $1'$e eşit özdeğere sahiptir, burada $t = dim[\Re(A) \cap \Re(B)]$ dir.

Aynı mertebeden herhangi iki idempotent P ve Q matris çifti için

$$r(aP + bQ) = r(P + Q) \tag{3.1.36}$$

rank eşitliği $a + b \neq 0$ olacak şekildeki her sıfırdan farklı iki a ve b skalerleri için sağlanır. Bu eşitlik iki idempotent matrisin lineer kombinasyonlarını içeren çeşitli rank eşitliklerini belirlemede de kullanılabilir. Örneğin, herhangi bir $a \neq 0, \pm 1$ için

$$r\begin{bmatrix} P & aQ \\ aQ & P \end{bmatrix} = r(P + aQ) + r(P - aQ) = 2r(P + Q)$$

eşitliği geçerlidir. Aşağıda (3.1.36)' nın bir sonucu verilmiştir.

Sonuç 3.1.5 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxk}$ olsun, $a + b \neq 0$ olacak şekildeki her sıfırdan farklı iki a ve b skalerleri için,

$$\Re(aP_A + bP_B) = \Re(P_A + P_B) = \Re[P_A, P_B]$$

eşitliği doğrudur.

Şimdi $(P_A P_B)^+ = P_B P_A$ ile ilişkili rank eşitlikleri verelim. $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxk}$ olsun. Bu durumda A^+A, BB^+ ve BB^+A^+A matrislerinin özdeş matrisler olmaları gerekmediğinden, $(AB)^+ = B^+ A^+$ invers alma kuralı her zaman doğru değildir. Diğer bir deyişle, $(AB)^+$ matrisi

$$(AB)^+ \ (AB)^+ = B^+ A^+ \ \text{ veya } \ (AB)^+ = B^+ A^+ + X, \tag{3.1.37}$$

şeklinde yazılabilir, burada X, matrisi A ve B' den oluşan kalan matristir. Bu durumda

$$(AB)^{+} = B^{+} A^{+} \Leftrightarrow \Re(A^{*}AB) \subseteq \Re(B) \text{ ve } \Re(BB^{*}A^{*}) \subseteq \Re(A) \tag{3.1.38}$$

olduğu ve özellikle,

$$A = \pm A^{*},\ B = \pm B^{*} \text{ ve } AB = \pm BA \Rightarrow (AB)^{+} = B^{+}A^{+} \text{ ve } (BA)^{+} = A^{+}B^{+} \tag{3.1.39}$$

olacaktır. Literatürde $(AB)^{+} = B^{+} A^{+}$ eşitliğinin sağlanması için birbirine denk olan birçok ifade verilmiştir. (3.1.37) eşitliğinden $(P_B\, P_A\,)^{+}$ için

$$(P_A\, P_B)^{+} = P_B\, P_A \text{ veya } (P_A\, P_B)^{+} = P_B\, P_A + X$$

yazılabilir. $(P_A\, P_B)^{t} = P_B\, P_A$ ile ilişkili bazı rank eşitlikleri aşağıdaki sonuçtan türetilebilir.

Lemma 3.1.6 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$r[(A^{+}\, AB\, B^{+})^{+} - A^{+}\, AB\, B^{+}] = r[A^{*}, B] + r(AB) - r(A) - r(B) \tag{3.1.40}$$

$$r[(AB\, B^{+})^{+} - B\, B^{+}A^{+}] = r[B, A^{*}AB] - r(B) \tag{3.1.41}$$

$$r[(A^{+}\, AB\,)^{+} - B^{+}A^{+}A] = r\begin{bmatrix} A \\ ABB^{*} \end{bmatrix} - r(A) \tag{3.142}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Lemma 3.1.6 daki A ve B matrislerinin yerleri P_A ve P_B matrisleriyle değiştirerek aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.1.1 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

(a) $r[(P_A\, P_B)^{+} - P_B\, P_A = r[(P_A\, P_B)^{2} - P_B\, P_A]$;

(b) $r[(P_A\, P_B)^{+} - P_B\, P_A = r[P_B, P_A\, P_B] - r(P_B) = r[P_A, P_B\, P_A] - r(P_A)$;

(C) $r[P_A, P_B\, P_A] = r[P_A, P_B\,] + r(P_A P_B) - r(P_B)$;

(d) Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $(P_A\, P_B)^{+} = P_B\, P_A$, yani $P_A P_B$ bir kısmi izometridir.

(ii) $\Re(P_A P_B) \subseteq \Re(P_B)$,

(iii) $\Re(P_B P_A) \subseteq \Re(P_A)$,

(iv) $r[P_A, P_B\,] = r(P_A) + r(P_B) - r(P_A P_B)$,

(v) $P_A P_B = P_B P_A$,

(vi) $P_A P_B$ bir dik izdüşümdür.

Eğer $(P_A\, P_B)^+ \neq P_B P_A$ ise, bu takdirde belirli bir kalan matris için $(P_A\, P_B)^+$

$$(P_A\, P_B)^+ = P_B P_A + X$$

şeklinde yazılabilir: Şimdi aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Lemma 3.1.7 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$(P_A\, P_B)^+ = P_B P_A - P_B (P_B^{\perp} P_A^{\perp})^+ P_A \tag{3.1.43}$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda (3.1.43) eşitliği dik izdüşümlerin çarpımları ile ilgili çeşitli eşitlikler oluşturmak için kullanılabilir.

Teorem 3.1.2 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

(a) $(P_A\, P_B)^2 = P_A P_B + P_A P_B (P_B^{\perp} P_A^{\perp})^+ P_A\; P_B$;

(b) $(P_A^{\perp} P_B^{\perp})^+ = P_B^{\perp} P_A^{\perp} - P_B^{\perp} (P_B P_A)^+ P_A^{\perp}$;

(c) $(P_A\, P_B P_A)^+ = P_A\, [I_m - (P_A^{\perp} P_B^{\perp})^+] P_B [I_m - (P_B^{\perp} P_A^{\perp})^+] P_A$

(d) $[(P_A\, P_B)^2\,]^+ = P_B [I_m - (P_B^{\perp} P_A^{\perp})^+] P_A\, [I_m - (P_A^{\perp} P_B^{\perp})^+] P_B [I_m - (P_B^{\perp} P_A^{\perp})^+] P_A$;

(e) $(P_A\, P_B)^{\#} = P_A [I_m - (P_A^{\perp} P_B^{\perp})^+] P_B [I_m - (P_B^{\perp} P_A^{\perp})^+] P_A\, [I_m - (P_A^{\perp} P_B^{\perp})^+] P_B$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat. (3.1.43) eşitliğinin her iki tarafını sağdan ve soldan $P_A\, P_B$ ile çarparak (a)' yı elde edebiliriz. Öte yandan (3.1.43) 'deki P_A ve P_B yerine sırasıyla $P_A^{\perp}$ ve $P_B^{\perp}$ ile değiştirirsek (b)' yi elde ederiz. Ayrıca

$$P_A\, P_B P_A = (P_A\, P_B)(P_A\, P_B)^* \tag{3.1.44}$$

olduğunu belirtelim. Eğer $(MM^*)^+ = (M^*)^+ M^+$ eşitliği ve (3.1.43) ifadesi (3.1.44) eşitliğine uygulanırsa (c) de iddia edildiği gibi

$$\begin{aligned}(P_A\, P_B P_A)^+ &= (P_B P_A)^+)(P_A\, P_B)^+ \\ &= P_A\, P_B - P_A\, (P_A^{\perp} P_B^{\perp})^+ P_B][P_B P_A - P_B\, (P_B^{\perp} P_A^{\perp})^+ P_A] \\ &= P_A\, [I_m - (P_A^{\perp} P_B^{\perp})^+] P_B [I_m - (P_B^{\perp} P_A^{\perp})^+\;] P_A\,,\end{aligned}$$

$e$lde edilir. $(P_A\, P_B)^2$ ifadesinin

$$(P_A\, P_B)^2 = (P_A\, P_B)(P_B\, P_A)(P_A\, P_B) = (P_A\, P_B)(P_A\, P_B)^*(P_A\, P_B) \tag{3.1.45}$$

şeklinde yazılabileceğini hatırlayalım. Bu durumda $(MM^*M)^+ = M^+(M^*)^+M^+$ basit formülü (3.1.45) eşitliğine uygulanırsa

$$[(P_A\, P_B)^2]^+ = (P_A\, P_B)^+[(P_A\, P_B)^+]^*(P_A\, P_B)^+ \tag{3.1.46}$$

olduğu görülür. (3.143) ifadesi (3.1.46) eşitliğinde yerine yazılırsa (d)' yi verir. Ayrıca, (3.1.45) den $r[(P_A\, P_B)^2] = r(P_A\, P_B)$ olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla, $(P_A\, P_B)$ nin grup inversi mevcut olup $(P_A\, P_B)^\#$ şu şekilde yazılabilir:

$$(P_A\, P_B)^\# = P_A\, P_B[(P_A\, P_B)^3]^+P_A\, P_B \tag{3.1.47}$$

Bu durumda, $(P_A\, P_B)^3 = (P_A\, P_B)(P_A\, P_B)^*(P_A\, P_B)(P_A\, P_B)^*(P_A\, P_B)$ yazılabileceğinden

$$[(P_A\, P_B)^3]^+ = (P_A\, P_B)^+(P_B\, P_A)^+(P_A\, P_B)^+(P_B\, P_A)^+(P_A\, P_B)^+$$

olacaktır. Bu ifadeyi (3.1.47) eşitliğinde yerine yazarak

$$(P_A\, P_B)(P_A\, P_B)^+(P_B\, P_A)^+ = (P_B\, P_A)^+ \text{ ve } (P_B\, P_A)^+(P_A\, P_B)^+(P_A\, P_B) = (P_B\, P_A)^+$$

eşitlikleri dikkate alınırsa

$$(P_A\, P_B)^\# = (P_B\, P_A)^+(P_A\, P_B)^+(P_B\, P_A)^+ \tag{3.1.48}$$

olduğu görülür. (3.1.43) ifadesi (3.1.48) de yerine yazılarak (e) deki sonuca ulaşılır.

Teorem 3.1.3 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$, $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ ve $C \in \mathbb{C}^{mxl}$ olsun. Bu takdirde,

$$(P_AP_BP_C)^+ = P_C\big[I_m - (P_C^\perp P^\perp_{(P_AP_B)^*})^+\big](P_A\, P_B)^+P_B(P_B\, P_C)^+$$
$$.\Big[I_m - \big(P^\perp_{(P_BP_C)}P^\perp{}_A\big)^+\Big]\, P_A \tag{3.1.49}$$

Teorem 3.1.3' ün doğrulanması Teorem 3.1.2 den kolayca görülebilir. Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.3 değişik matris ifadelerindeki kalan matrislerin, örneğin

$$(P_AP_B)^2 = P_AP_B + X,\;\; [(P_AP_B)^2]^+ = (P_BP_A)^2 + Y$$

ve

$$(P_AP_BP_C)^+ = P_CP_BP_A \; + Z$$

eşitliklerindeki X, Y ve Z matrislerinin veya

$$(P_A - P_B)^+ = P_A - P_B + X$$

ve

$$(P_A P_B - P_B P_A)^+ = P_A P_B - P_B P_A + Y$$

eşitliklerindeki X ve Y matrislerinin belirlenmesinde kullanılabilir. Aslında,

$$P_A - P_B = (P_A - P_A P_B) - (P_B - P_A P_B) = P_A P_B^{\perp} - P_A^{\perp} P_B$$

yazılabilir ve buradan da

$$(P_A P_B^{\perp})^* (P_A^{\perp} P_B) = (P_A^{\perp} P_B)(P_A P_B^{\perp})^* = 0$$

olduğu görülebilir. Bu takdirde,

$$(P_A - P_B)^+ = (P_A P_B^{\perp})^+ - (P_A^{\perp} P_B)^+ \tag{3.1.50}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak (3.143) ifadesi (3.1.50) eşitliğinde yerine yazılarak gerekli düzenleme yapılırsa

$$(P_A - P_B)^+ = P_A - P_B + P_B (P_B^{\perp} P_A)^+ - (P_B P_A^{\perp})^+ P_A \tag{3.1.51}$$

olduğu görülür.

$r\,[A, B] = r\,(A) + r\,(B) = m$ olsun ve $P_{\mathrm{A}\,|\mathrm{B}}$ de $\mathfrak{R}(B)$ boyunca $\mathfrak{R}(A)$ üzerindeki izdüşümü göstersin. Bu izdüşüm $P_{\mathrm{A}\,|\mathrm{B}} A = A$ ve $P_{\mathrm{A}\,|\mathrm{B}} B = 0$ denklemleriyle tek türlü olarak belirlenir. $P_{\mathrm{A}\,|\mathrm{B}}$ birçok farklı biçimde yazılabilir. $P_{\mathrm{A}\,|\mathrm{B}}$ nin bir ifadesi

$$P_{\mathrm{A}\,|\mathrm{B}} = (P_B^{\perp} P_A)^+ \tag{3.1.52}$$

şeklinde verilebilir. Bu durumda (3.1.43) eşitliği ve Teorem 3.1.2 (b) nin (3.1.52) eşitliğine uygulanması aşağıdaki sonucu verir.

Teorem 3.1.4 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olmak üzere $r[A, B] = r(A) + r(B) = m$ olsun. Bu takdirde,

(a) $P_{\mathrm{A}\,|\mathrm{B}} = P_A P_B^{\perp} - P_A P_{\mathrm{B}\,|\mathrm{A}} P_B^{\perp}$;

(b) $r\left(P_{\mathrm{A}\,|\mathrm{B}} - P_A P_B^{\perp}\right) = r(P_A P_B)$;

(c) $P_{\mathrm{A}\,|\mathrm{B}} = P_A$ olması için gerek ve yeter şart $P_A P_B = 0$ yani, $A^* B = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.1.5 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde,

$$r[P_B (P_B^{\perp} P_A^{\perp})^+ P_A] = r[(P_A P_B)^2 - P_A P_B] \tag{3.1.53}$$

$$r[P_B^{\perp} (P_B P_A)^+ P_A^{\perp}] = r[(P_A P_B)^2 - P_A P_B] \tag{3.1.54}$$

İspat. (3.1.43) eşitliği $(P_AP_B)^+ - P_BP_A = -P_B(P_B^{\perp}P_A^{\perp})^+P_A$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda, (3.1.53) eşitliği Teorem 3.1.2 (a) ifadesinden gelir. P_A ve P_B yi sırasıyla $P_A^{\perp}$ ve $P_B^{\perp}$ ile değiştirip Teorem 3.1.2 (a) ya uygularsak, (3.1.54) eşitliğini elde ederiz.

Şimdi bazı yeni rank eşitlikleri verilecektir.

Teorem 3.1.6 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$, $B \in \mathbb{C}^{mxk}$, $X \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $Y \in \mathbb{C}^{kxm}$ olsun. $M = [A, B]$ matrisini göz önüne alalım. Bu takdirde,

$$\min_{X \in \mathbb{C}^{nxm}} r\left(M - M\begin{bmatrix} X \\ B^+ \end{bmatrix}M\right) = \min_{Y \in \mathbb{C}^{kxm}} r\left(M - M\begin{bmatrix} A^+ \\ Y \end{bmatrix}M\right)$$
$$= r[(P_AP_B)^2 - P_AP_B] \qquad (3.1.55)$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle, aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(a) $\begin{bmatrix} X \\ B^+ \end{bmatrix} \in \{[A, B]^-\}$ olacak şekilde bir X mevcuttur.

(b) $\begin{bmatrix} A^+ \\ Y \end{bmatrix} \in \{[A, B]^-\}$ olacak şekilde bir Y mevcuttur.

(c) $(P_AP_B)^2 = P_AP_B$.

İspat. Rank formülleri uygulanarak,

$$\min_{X} r(A - BXC) = r[A, B] + r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

ve elemanter blok matris işlemleri uygulanarak,

$$\min_{Y} r\left(M - M\begin{bmatrix} A^+ \\ Y \end{bmatrix}M\right) = \min_{Y} r([0, B - AA^+B] - BY[A, B])$$
$$= [B - AA^+B, B] + r\begin{bmatrix} 0 & B - AA^+B \\ A & B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 0 & B - AA^+B & B \\ A & B & 0 \end{bmatrix}$$
$$= r[AA^+B, B] + r\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 0 & 0 & B \\ A & B & 0 \end{bmatrix}$$
$$= r[AA^+B, B] - r(B)$$
$$= r[AA^+B, (I_m - AA^+)B] - r(B)$$
$$= r(AA^+B) + r[(I_m - AA^+)B] - r(B)$$
$$= r[A, B] + r(A^*B) - r(A) - r(B)$$
$$= r[(P_AP_B)^2 - P_AP_B]$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

(3.1.30) eşitliğini kullanarak, $P_A P_B - P_B P_A$ komütatörü için başka bir rank eşitliği aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 3.1.7 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde,

$$r(P_A P_B - P_B P_A) = 2\mathrm{r}[P_B P_A, P_A P_B] - 2r(P_A P_B) \tag{3.1.56}$$

$$r[(P_A P_B)(P_A P_B)^+ - (P_A P_B)^+(P_A P_B)] = 2r[P_B P_A, P_A P_B] - 2r(P_A P_B) \tag{3.1.57}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle, aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(a) $(P_A P_B) = (P_B P_A)$ dir, yani, $P_B P_A$ Hermityendir.

(b) $\Re(P_A P_B) = \Re(P_B P_A)$ dir, yani $P_B P_A$ bir EP dir.

(c) $(P_A P_B)(P_A P_B)^+ = (P_A P_B)^+(P_A P_B)$;

(d) $[(P_A P_B)^2]^+ = [(P_A P_B)^+]^2\, P_A P_B$;

(e) $(P_A P_B)^\# = (P_A P_B)^+$;

(f) $\mathcal{N}(P_A P_B) = \mathcal{N}(P_B P_A)$;

(g) $\mathbb{C}^m = \Re(P_A P_B) \oplus \mathcal{N}(P_B P_A)$.

İspat. Eğer P ve Q aynı mertebeden idempotent matrisler ise, bu takdirde,

$$r(PQ - QP) = r\begin{bmatrix} PQ \\ QP \end{bmatrix} + r[PQ, QP] - r(PQ) - r(QP) \tag{3.1.58}$$

eşitliği yazılabilir. $P_A P_B - P_B P_A$ ya (3.1.58) eşitliği uygulayıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (3.1.56) ifadesi elde edilir. (3.1.57) ise (3.1.4) den görülebilir. (3.1.56) ve (3.1.57) eşitliklerinin sağ tarafını sıfıra eşitlersek, hemen $(a) - (c)$ nin eşdeğerini elde ederiz. Öte yandan bir A matrisinin bir EP olması demek $\Re(A) = \Re(A^*)$ olması demek olduğunu hatırlayalım. Bu durumda EP matrislerinin karakterizasyonu şu şekilde verilmiştir:

$$A \text{ matrisi EP dir} \Leftrightarrow AA^+ = A^+A \Leftrightarrow r(A^2) = r(A) \text{ ve } (A^2)^+ = (A^+)^2$$

$$\Leftrightarrow A^\# = A^+ \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{C}^m = \Re(A) \oplus \mathcal{N}(A)$$

dir. Bunların (c) durumuna uygulanması, $(c) - (g)$ nin eşdeğerliğini verir.

Herhangi iki $U, V \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisi için, $\Re(U) = \Re(V)$ ranj eşitliği $U = V$ matris eşitliğinden açıkça daha zayıftır. Bununla birlikte, Teorem 3.1.7 (a) ve (b), iki eşitliğin $U = P_A P_B$ ve $V = P_B P_A$ için eşdeğer olduğunu gösterir. Bu durumda (3.1.29) ve (3.1.56) eşitlikleri birleştirilerek aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.1.6 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde,

$$r[P_B P_A, P_A P_B] = r[P_A, P_B] = 2r(P_A P_B) - r(P_A) - r(P_B)$$

$$= r[(P_A P_B)^2 - P_A P_B] + r(P_A P_B)) \tag{3.1.59}$$

yazılabilir. İki $P_A P_B \pm P_B P_A$ matrisi için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Lemma 3.1.8 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

(a) $P_A P_B - P_B P_A = (P_A - P_B)(P_A + P_B - I_m) = -(P_A + P_B - I_m)(P_A - P_B)$;

(b) $P_A P_B + P_B P_A = (P_A + P_B)(P_A + P_B - I_m) = (P_A + P_B - I_m)(P_A + P_B)$;

(c) $r(P_A P_B - P_B P_A) = r(P_A - P_B) + r(P_A + P_B - I_m) - m$;

(d) $r(P_A P_B + P_B P_A) = r(P_A + P_B) + r(P_A + P_B - I_m) - m$;

(e) $r(P_A P_B + P_B P_A) - r(P_A P_B - P_B P_A) = r(P_A + P_B) - r(P_A - P_B)$;

(f) $P_A P_B = P_B P_A$ matrisinin bir nonsingüler matris olması için gerek ve yeter şart hem $P_A \pm P_B$ ve hem de $P_A + P_B - I_m$ matrsinin nonsingüler olmasıdır.

(g) $P_A P_B = P_B P_A \Leftrightarrow r(P_A - P_B) + r(P_A + P_B - I_m) = m$

Aşağıdaki teorem, Sonuç 3.1.6 ve Lemma 3.1.8 (d) ' den türetilmiştir.

Teorem 3.1.8 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde,

$$r(P_A P_B + P_B P_A) = r[P_A P_B, P_B P_A] \tag{3.1.60}$$

dir.

Ayrıca $P_A, P_B, P_A{}^{\perp}$ ve $P_B{}^{\perp}$ için rank eşitlikleri ve onların sonuçları aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1.9 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxp}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$r\left[P_B{}^{\perp} P_A, P_A{}^{\perp} P_B\right] = r\left(P_B{}^{\perp} P_A\right) + r\left(P_A{}^{\perp} P_B\right), \tag{3.1.61}$$

$$r\left[P_A P_B{}^{\perp}, P_B P_A{}^{\perp}\right] = r\left(P_A P_B{}^{\perp}\right) + r\left(P_B P_A{}^{\perp}\right), \tag{3.1.62}$$

$$r\left(P_B{}^{\perp}P_A \pm P_A{}^{\perp}P_B\right) = r\left(P_B{}^{\perp}P_A\right) + r\left(P_A{}^{\perp}P_B\right), \tag{3.1.63}$$

$$r\left(P_A P_B{}^{\perp} \pm P_B P_A{}^{\perp}\right) = r\left(P_A P_B{}^{\perp}\right) + r\left(P_B P_A{}^{\perp}\right), \tag{3.1.64}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $[P_B{}^{\perp}A, P_A{}^{\perp}B]$ matrisini

$$\begin{aligned}
[P_B{}^{\perp}A, P_A{}^{\perp}B] &= [A - BB^{+}A, B - AA^{+}B] \\
&= [A, B] - BB^{+}[A, 0] - AA^{+}[0, B] \\
&= [A, B] - [B, A]\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.1.65}$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda

$$r(D - CA^{+}B) = r\begin{bmatrix} A^{*}AA^{*} & A^{*}B \\ CA^{*} & D \end{bmatrix} - r(A),$$

formülünü (3.1.65) eşitliğine uygulayıp elemanter blok matris işlemleriyle gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
r\left[P_B{}^{\perp}A, P_A{}^{\perp}B\right] &= r\begin{bmatrix} B^{*}B & 0 & B^{*}A & 0 \\ 0 & A^{*}A & 0 & A^{*}B \\ B & A & A & B \end{bmatrix} - r(A) - r(B) \\
&= r[\begin{bmatrix} B^{*}B & 0 & B^{*}A & 0 \\ -A^{*}B & 0 & -A^{*}A & 0 \\ 0 & A & 0 & B \end{bmatrix} - r(A) - r(B) \\
&= r\begin{bmatrix} B^{*}B & B^{*}A \\ A^{*}B & A^{*}A \end{bmatrix} + r[A, B] - r(A) - r(B) \\
&= r\left(\begin{bmatrix} B^{*} \\ A^{*} \end{bmatrix}[B, A]\right) + r[A, B] - r(A) - r(B) \\
&= 2r[A, B] - r(A) - r(B) - r(B) \\
&= r\left(P_B{}^{\perp}A\right) + r\left(P_A{}^{\perp}B\right) \\
&= r(P_B{}^{\perp}P_A) + r(P_A{}^{\perp}P_B)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (3.1.62) de benzer şekilde gösterilebilir. (3.1.63) ve (3.1.64) eşitlikleri ise (3.1.61), (3.1.62) ve (3.1.27) eşitliklerinden türetilebilir. Öte yandan (3.1.11) den kolayca görülebilir ki

$$P_{[A,B]} - P_A = P_{P_A{}^{\perp}P_B} \quad \text{ve} \quad P_{[A,B]} - P_B = P_{P_B{}^{\perp}P_A}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\Re\left(P_{P_A{}^{\perp}P_B}\right) = \Re\left(P_A{}^{\perp}P_B\right) \text{ ve } \Re\left(P_{P_B{}^{\perp}P_A}\right) = \Re\left(P_B{}^{\perp}P_A\right)$$

olduğundan aşağıdaki sonuç Teorem 3.1.9 dan türetilmiştir.

Sonuç 3.1.7 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$, $B \in \mathbb{C}^{nxk}$ ve $M = [A, B]$ olsun. Bu takdirde,

$$r[P_M - P_A, P_M - P_B] = r(P_M - P_A) + r(P_M - P_B),$$

$$r[2P_M - P_A - P_B] = r(P_M - P_A) + r(P_M - P_B)$$

eşitlikleri sağlanır.

Sonuç 3.1.8 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$r[(P_A + P_B)^2 - (P_A + P_B)] = r[(P_AP_B)^2 - P_AP_B] + r(P_AP_B),$$

$$r[(P_A + P_B)^+ - (P_A + P_B)] = r[(P_AP_B)^2 - P_AP_B] + r(P_AP_B),$$

$$r[(P_A + P_B)^+ - (P_B{}^{\perp}P_AP_B{}^{\perp})^+ - (P_A{}^{\perp}P_BP_A{}^{\perp})^+] = r(P_A) + r(P_B) - r(P_A + P_B)$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

(a) $(P_A + P_B)^2 = P_A + P_B \Leftrightarrow (P_A + P_B)^+ = P_A + P_B \Leftrightarrow P_AP_B = 0$

$\Leftrightarrow P_A + P_B$ ortogonaldir.

(b) $(P_A + P_B)^+ = (P_B{}^{\perp}P_AP_B{}^{\perp})^+ + (P_A{}^{\perp}P_BP_A{}^{\perp})^+$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $r(P_A + P_B) = r(P_A) + r(P_B)$ rank eşitliğinin sağlanmasıdır.

3.2 İzdüşüm Matrislerinin Toplam ve Farkları

Bu kısımda izdüşümlerin toplamlarının tersinirliği hakkında yeni sonuçlar verilerek izdüşümlerin toplamları ve farklarının tersinirliği arasındaki ilişkiler ele alınacaktır. Groß ve Trenkler çalışmalarında genel matris izdüşümleri için $P - Q$ farkının nonsingülerliğini matris rank teorisini kullanarak incelemişlerdir. Bu kısımda ise matris rank teorisi kullanılmaksızın $P - Q$ farkının nonsingülerliği ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca $P - Q$ farkının nonsingülerliğinin $P + Q$ toplamının nonsingülerliği cinsinden yeni bir karakterizasyonunu verilerek $P + Q$ toplamının nonsingülerliği için gerek ve yeter şartlar ortaya konulmuş ve $P - Q$ farkının singüler veya nonsingüler olması durumları için ayrı ayrı olarak $P + Q$ nun inversi için formüller elde edilmiştir.

Lemma 3.2.1 $A, B \in \mathbb{C}_d^d$ olsun. Bu takdirde

$$\Re(A^*) + \Re(B^*) = \mathbb{C}_1^d \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\} \quad (3.2.1)$$

$$\Re(A^*) \cap \Re(B^*) = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(A) = \mathbb{C}_1^d \quad (3.2.2)$$

ifadeleri geçerlidir.

İspat. $M^\perp$ kümesi M kümesinin dik komplementi olsun. Bu durumda

$$(M \cap N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp, \ (M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$$

$\mathbb{C}_1^d$ nin herhangi iki alt uzayı M, N için geçerli tanımlama ve $\Re(A)^\perp = \mathcal{N}(A)$ eşitliğinden hareketle yukarıdaki sonuç elde edilebilir. Burada $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ olduğu gösterilerek $A \in \mathbb{C}_d^d$ matrisinin tersinirliği için basit ispat verilebilir. Eğer $P^2 = P$ ise $P \in \mathbb{C}_d^d$ matrisi bir izdüşüm matrisi, ayrıca bununla birlikte $P^\star = P$ olması durumunda P matrisi bir dik izdüşüm matrisi olacaktır.

Teorem 3.2.1 P ve Q matrisleri $\mathbb{C}_d^d$ uzayında iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine eşdeğerdir:

i) $\mathbb{C}_1^d = \Re(\mathrm{P}) \oplus \Re(\mathrm{Q})$ ve $\Re(P^*) \oplus \Re(Q^*) = \mathbb{C}_1^d$

ii) $\mathbb{C}_1^d = \Re(\mathrm{P}) \oplus \Re(\mathrm{Q})$ ve $\mathbb{C}_1^d = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$

iii) $\Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$ ve $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$

iv) $P - Q$ matrisi nonsingülerdir.

v) $I - PQ$ ve $P + Q - PQ$ matrisleri nonsingülerdir.

İspat. (i ⇒ii) Lemma 3.2.1 den kolaylıkla görülebilir..

(ii ⇒iii) direkt toplam tanımından kolaylıkla ispatlanabilir.

(iv ⇒v) $(P - Q)x = 0$ olsun. Bu durumda $Px = Qx \in \Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$ ve $x \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ dir. Böylece $\mathcal{N}(P - Q) = \{0\}$ ve $P - Q$ nonsingülerdir.

(iv⇒v) $\mathcal{N}(I - PQ) = \{0\}$ olduğu gösterilebilir. $(I - PQ)x = 0$ olsun. Bu durumda $x = PQx = Px$ ve $(P - Q)^2\, x = (I - PQ)x = 0$ eşitlikleri yazılabilir. Öte yandan $(P - Q)^2$ matrisi nonsingüler oduğundan $x = 0$ olacaktır. Yani $I - PQ$ matrisi de nonsingülerdir. $(I - P) - (I - Q) = Q - P$ olup $I - (I - P)(I - Q) = P + Q - PQ$ nun nonsingüler olduğu elde edilir.

(v⇒i) $P+Q-PQ$ matrisinin inversini W ile gösterelim. Bu durumda $W(P+Q-PQ\ )=I$ eşitliği yazılabilir. Buradan $I=WP+W(I-P)Q$ eşitliği ve dolayısıyla

$$\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)=\{0\}$$

eşitliği yazılabilir. Öte yandan eğer $(P+Q-PQ\ )W=I$ ise bu takdirde $I=P(I-Q)W+QW$ olacağı açıkça görülebilir. Bu nedenle $\mathbb{C}_1^d$=$\Re(\mathrm{P})+\Re(\mathrm{Q})$ eşitliği yazılabilir. Benzer şekilde $I-PQ=(I-P)+(I-Q)-(I-P)(I-Q)$ matrisinin nonsingüler olması bize

$$\mathcal{N}(I-P)\cap\mathcal{N}(I-Q)=\ \Re(P)\cap\Re(Q)=\{0\}$$

ve

$$\mathbb{C}_1^d=\Re(I-P)\oplus\Re(I-Q)=\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)$$

olduğunu gösterir. Böylece

$$\mathbb{C}_1^d=\Re(P)\oplus\Re(Q)=\mathcal{N}(P)\oplus\mathcal{N}(Q)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1 P ve Q matrisleri $\mathbb{C}_d^d$ uzayında izdüşüm matrisleri olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler:

i) $\Re(\mathrm{P})\oplus\Re(\mathrm{Q})=\mathcal{N}(P)\oplus\mathcal{N}(Q)=\mathcal{N}(P)\oplus\Re(Q)=\ \Re(P)\oplus\mathcal{N}(Q)=\mathbb{C}_1^d$

ii) $P-Q$ ve $I-P-Q$ matrisleri nonsingülerdir.

iii) $PQ-QP$ matrisi nonsingülerdir.

İspat. (i) ve (ii) denkliklerinin gösterilmesi için Teorem 3.2.1 in önce P ve Q matrislerine ve daha sonra da $(I-P)$ ve Q matrislerine uygulanması yeterlidir. (ii) ve (iii) nin denkliği için ise $PQ-QP=(I-P-Q)(P-Q)$ eşitliğini dikkate almak yeterlidir.

Teorem 3.2.2 P ve Q matrisleri $\mathbb{C}_d^d$ uzayında izdüşüm matrisleri olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.:

i) $P-Q$ nonsingülerdir.

ii) $P+Q$ ve $I-PQ$ nonsingülerdir.

İspat. (i ⇒ ii) Eğer $(P+Q\,)x=0$ ise bu takdirde $Px=-Qx\in\ \Re(P)\cap\Re(Q)=\{0\}$, ve $x\in\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)=\{0\}$ dır. Bu nedenle $\mathcal{N}(P+Q\,)=\{0\}$ olup $P+Q$ nonsingülerdir. $I-PQ$ nun nonsingülerliği ise benzer şekilde gösterilebilir.

(i⇒ ii) $(P-Q\,)x=0$ olsun. Bu takdirde $Px=Qx=QPx=PQPx$ yazılabilir. Bu durumda

$$Px=(I-PQ)^{-1}(I-PQ)Px=(I-PQ)^{-1}(Px-PQx)=0\ ,$$

$$(I-P)x=(P+Q)^{-1}(P+Q)(I-P)x=(P+Q)^{-1}(Qx-QPx)=0$$

ve

$$x=Px+(I-P)x=0$$

elde edilir. Buradan da $\mathcal{N}(P-Q)=\{0\}$ olduğu görülür.

P ve Q izdüşüm matrisleri $P-Q$ farkı nonsingüler olacak şekilde verilmiş olsun. Bu durumda $(P-Q)^{-1}$ ve $(P+Q)^{-1}$ ile ilgili açık formülleri elde etmek için

$$\mathbb{C}_1^d=\Re(P)\oplus\Re(\mathrm{Q})=\mathcal{N}(P)\oplus\mathcal{N}(Q)$$

ile ilgili izdüşümler kullanılabilir. Bu amaçla

$$F=P(P-Q)^{-1}=(P-Q)^{-1}(I-Q), \tag{3.2.3}$$

$$G=(P-Q)^{-1}P=(I-Q)(P-Q)^{-1}; \tag{3.2.4}$$

matrisleri tanımlanabilir. Bu durumda F ve G matrisleri de izdüşüm matrisleridir. Örnek olarak $F^2=F$ olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$$\begin{aligned}F^2&=(P-Q)^{-1}(I-Q)P(P-Q)^{-1}\\&=(P-Q)^{-1}(I-Q)P(P-Q)(P-Q)^{-1}\\&=(P-Q)^{-1}(I-Q)=F\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\Re(P)=\ \Re(Q),$$

$$\mathcal{N}(F)=\mathcal{N}(I-Q)=\Re(Q),$$

$$\Re(G)=\ \Re(I-Q)=\Re(Q),$$

$$\mathcal{N}(F)=\mathcal{N}(Q)$$

dır. Şimdi iki izdüşümün toplam ve farklarının terslerinin açık formülleri verilebilir.

Teorem 3.2.3 P ve $Q \in \mathbb{C}_d^d$ izdüşümleri $P-Q$ matris farkı nonsingüler olacak şekilde verilmiş olsun. F ve G matrisleri ise sırasıyla

$$F = P_{\Re(P),\Re(Q)} \text{ ve } G = P_{\mathcal{N}(Q),\mathcal{N}(P)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$(P-Q)^{-1} = F-(I-G), \tag{3.2.5}$$

$$(P+Q)^{-1} = I-(I-G)F-(I-F), \tag{3.2.6}$$

$$(P-Q)^{-1} = (P+Q)^{-1}(P-Q)(P+Q)^{-1}, \tag{3.2.7}$$

$$(P+Q)^{-1} = (P-Q)^{-1}(P+Q)(P-Q)^{-1} \tag{3.2.8}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. F ve G izdüşümleri yukarıda verildiği gibi olsun. Bu eşitliklerden aşağıdaki ifadeler kolaylıkla elde edilebilir.

$$FP = P\,,\, PF = F,\; FQ = 0\,,\;\; QF = Q+F-I,$$

$$GP = G,\;\; PG = P\,,\; GQ = Q+G-I,\;\; QG = 0.$$

Bu durumda bazı basit hesaplamalar yapılarak

$$(P-Q)(F+G-I) = I$$

$$(P+Q)(I-F-G+2GF) = I$$

olduğu görülebilir. Buradan da (3.2.5) ve (3.2.6) eşitliklerinin sağlandığı görülür. Öte yandan (3.2.7) ve (3.2.8) eşitlikleri ise aşağıdaki eşitliklerden kolayca elde edilebilir:

$$(P-Q)(F+G-I) = I$$

$$(P-Q)(I-F-G+2GF)(P-Q) = (P-Q).$$

Bunun sonucu olarak (3.2.5) ve (3.2.6) eşitlikleri aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$(P-Q)^{-1} = P_{\Re(P),\Re(Q)} - P_{\mathcal{N}(P),\mathcal{N}(Q)} \tag{3.2.9}$$

$$(P+Q)^{-1} = I - P_{\mathcal{N}(P),\mathcal{N}(Q)}P_{\Re(P),\Re(Q)} - P_{N(Q),\mathcal{N}(P)}P_{\Re(Q),\Re(P)} \tag{3.2.10}$$

P ve Q matrisleri $\mathbb{C}_d^d$ de iki izdüşüm matrisi olsun. Bu durumda $P+Q$ nun nonsingüler olması için $P-Q$ nun nonsingüler olması yeterlidir fakat gerekli değildir.

Örnek 3.2.1 P ve Q izdüşümleri aşağıdaki şekilde seçilsin.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde

$$P + Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P - Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacaktır. Bu durumda $P + Q$ nonsingüler olduğu halde, $P - Q$ singülerdir. $P - Q$ nonsingüler olduğu durumda (3.2.6) eşitliğinden ve dolayısıyla (3.2.10) eşitliğinden $P + Q$ nun tersi elde edilemez. Gerçekten de, (3.2.10) eşitliği

$$\mathbb{C}_1^d = \Re(\mathrm{P}) \oplus \Re(\mathrm{Q}) = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$$

direkt toplamlarının varlığını gerektirir ki bu da $P - Q$ farkının nonsingüler bir matris olduğunu ortaya koyar.

Teorem 3.2.4 $P, Q \in \mathbb{C}_d^d$ izdüşüm matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i) $(P + Q)$ matrisi nonsingülerdir

ii) $\Re\big(Q(I - P)\big) \cap \Re(P) = \{0\}$ ve $\mathcal{N}\big((I - P)Q\big) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$

iii) $\Re\big(Q(I - P)\big) + \Re(P) = \mathbb{C}_1^d$ ve $\mathcal{N}\big((I - P)Q\big) + \mathcal{N}(P) = \mathbb{C}_1^d$

İspat. (i ⇒ ii) $x \in \Re\big(Q(I - P)\big) \cap \Re(P)$ alalım. Bu takdirde herhangi bir $u \in \mathbb{C}_1^d$ keyfi vektörü için

$$x = Px = Qx = Q(I - P)u$$

ve

$$(P + Q)x = 2x = 2Q(I - P)u = (P + Q)(I - P)(2u)$$

eşitlikleri yazılabilir. Öte yandan $P + Q$ toplamı nonsingüler bir matris olduğundan $x = (I - P)u$ yazılabilir ve buradan da $x = Px = 0$ olduğu görülür. Bu ise bize $\Re\big(Q(I - P)\big) \cap \Re(P) = \{0\}$ olduğunu gösterir. şimdi $(I - P)Qx = 0$ ve $Px = 0$ alalım ve $y = (P + Q)x$ vektörünü tanımlayalım. Bu takdirde $Qy = y,\ Py = y$ ve

$(P+Q)y = 2y = 2(P+Q)x$ eşitlikleri yazılabilir. Bu nedenle $P+Q$ nonsingüler olduğundan $x = \frac{1}{2}y$ olur ve buradan da

$$Qx = \frac{1}{2}Qy = \frac{1}{2}y = x;\ x = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(P+Q)x$$

elde edilir. Dolayısıyla $x = 0$ olmalıdır. Bu ise bize $\mathcal{N}\big((I-P)Q\big) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$ eşitliğini gerektirir. Böylece (ii) durumu sağlanmış olur.

ii) ⇒ i): $(P+Q)x = 0$ alalım. Bu durumda $Px = -Qx = QPx$ ve

$$Px = -QPx - Q(I-P)x = -Px - Q(I-P)x$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan da $Q(I-P)(-x) = 2Px \in \Re\big(Q(I-P)\big) \cap \Re(P) = \{0\}$ olduğu elde edilir. Bu nedenle $Px = 0 = Qx$ ve $x \in \Re(P) = \{0\}$ olur ki bu da bize $x = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\mathcal{N}(P+Q) = \{0\}$ durumu ispatlanmış olur.

i) ile iii) ifadelerinin denkliğinin gösterimi için $P+Q$ toplamının nonsingüler olması için gerek ve yeter şartın $P^* + Q^*$ toplamının nonsingüler olması olduğunu belirttikten sonra (ii) ve (i) denkliklerini P ve Q yerine sırasıyla P^* ve Q^* alarak Lemma 3.2.1 ye uygulayalım. Bunun yanında $P+Q$ toplamının nonsingüler olması için gerek ve yeter şartın

$$\Re\big(Q(I-P)\big) \cap \Re(P) = \{0\} \text{ ve } \mathcal{N}(Q) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$$

olduğunu Grob ve Trenkler çalışmalarında ispat etmişlerdir.

Teorem 3.2.5 $P, Q \in \mathbb{C}_d^d$ izdüşüm matrisleri verilmiş olsun. Eğer

$$\mathcal{N}\big((I-P)Q\big) \oplus \mathcal{N}(P) = \mathbb{C}_d^d \text{ ve } \Re\big((I-P)Q\big) \oplus \Re(P) = \mathbb{C}_1^d$$

ise bu takdirde $P+Q$ matris toplamı nonsigülerdir.

Sonuç 3.2.2 $P, Q \in \mathbb{C}_d^d$ izdüşüm matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) $\mathbb{C}_1^d = \mathcal{N}(P) \oplus \Re(Q) = \Re(P) \oplus \mathcal{N}(\mathrm{Q})$ ve

$$\mathcal{N}\big((I-P)Q\big) \cap \mathcal{N}(P) = \Re\big((I-P)Q\big) \cap \Re(P) = \{0\}$$

ii) $P+Q$ ve $I-P-Q$ matrisleri nonsingülerdir.

iii) $PQ+QP$ matrisi nonsingülerdir.

İspat. $I-P$ ve Q matrislerine Teorem 3.2.1 den ve Teorem 3.2.5 in uygulanmasıyla sırasıyla (i) ve (ii) nin denklikleri sağlanabilir. Öte yandan bu eşitlik ise

$$(I-P-Q)((P+Q)^{-1}\ )=-(PQ+QP)$$

gerçeğinden kolayca görülebilir.

Şimdi de P, Q izdüşümleri için $P+Q$ toplamının nonsingüler fakat $P-Q$ farkının singüler olduğunu kabul edelim. Bu durumda bu formülde görülen izdüşümlerin oluşması zorunlu olmadığından $(\mathrm{P}+\mathrm{Q})^{-1}$ matrisini tanımlamak için herhangi bir eşitlik kullanılamaz. Ancak $P+Q$ toplamının tekil olmaması durumunda $\mathbb{C}_1^d$ uzayının başka bir birleşimi daha önce verilmişti.

Teorem 3.2.6 $P, Q \in \mathbb{C}_d^d$ izdüşüm matrisleri için $P+Q$ toplamı nonsingüler olsun. Bu takdirde

$$\mathbb{C}_1^d=\Re\big(Q(I-P)\big)\oplus\mathcal{N}\big((\mathrm{I}-\mathrm{P})\mathrm{Q}\big), \tag{3.2.11}$$

dir. Ayrıca

$$M=\Re\big(Q(I-P)\big), \qquad N=\mathcal{N}\big((I-P)Q\big),$$

$$U=\Re(P)\cap\Re(Q), \quad V=\mathcal{R}\big(Q(I-P)\big)\oplus\mathcal{N}(\mathrm{Q})$$

olmak üzere

$$(P+Q)^{-1}=\left(I-\tfrac{1}{2}P_{U,V}\right)\left(I-P_{\mathcal{N}(P),\mathcal{N}}P_{\Re(P),M}-P_{\mathcal{N},\mathcal{N}(P)}P_{M,\Re(P)}\right) \tag{3.2.12}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. $x \in \Re\big(Q(I-P)\big)\cap\mathcal{N}\big((I-P)Q\big)$ olsun. Bu takdirde $x=Qx$ ve $x=Px+(I-P)Qx=Px$ olacaktır. Böylece (3.2.4) eşitliğinden $x \in \Re\big(Q(I-P)\big)\cap\Re(P)=\{0\}$ olduğu elde edilir. Bu da

$$\Re\big(Q(I-P)\big)\cap\ \mathcal{N}\big((I-P)Q\big)=\{0\} \tag{3.2.13}$$

olduğunu gösterir. Öte yandan (3.2.13) eşitliği P, Q matrisleri yerine P^*, Q^* matrisleri kullanıldığında da geçerli olacaktır. Bu nedenle (3.2.13) eşitliğine Lemma 3.2.1 uygulandığında

$$\Re\big(Q(I-P)\big)+\ \mathcal{N}\big((I-P)Q\big)=\mathbb{C}_1^d \tag{3.2.14}$$

olduğu görülür. Öte yandan (3.2.13) ve (3.2.14) ifadeleri birleştirildiğinde (3.2.1) bağıntısı elde edilebilir. Şimdi de $S = P_{M,N}$ alalım. Bu takdirde $P + Q$ toplamı nonsingüler olduğundan Teorem 3.2.5 kullanılırsa

$$\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\} \text{ ve } \Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$$

olduğu görülür ki bu da

$$\mathcal{N}\big((I-P)Q\big) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\} \text{ ve } \Re(S) \cap \Re(P) = \{0\},$$

olduğu anlamına gelir. Bu durumda Teorem 3.2.1 in (iii)⇔(iv) durumuna göre $P - S$ farkı da nonsingülerdir ve dolayısıyla da $P + S$ toplamı da nonsingüler olacaktır. Bunun sonucu olarak da

$$N = \mathcal{N}\big((I-P)Q\big) = \mathcal{N}(Q) \oplus \big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big) = \mathcal{N}(Q) \oplus \mathrm{U}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten gerekli işlemler yapılırsa $\mathbb{C}^{d\times 1} = U \oplus \mathrm{V}$ olduğu elde edilir. Eğer $T = P_{U,V}$ tanımlanırsa bu takdirde $T + S = Q$ olduğu görülür. Öncelikle $U \subset N$ olduğundan $ST = P_{M,N}P_{U,V} = 0$ ve $M \subset V$ olduğundan $TS = 0$ eşitliği yazılabilir. Bunun sonucu olarak da $\mathcal{N}(T+S) = \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(S)$ ve $\Re(T + S) = \Re(T) \oplus \Re(S)$ eşitliklerinden haraketle $(T+S)^2 = T + S$ matrisinin de bir izdüşüm matrisi olduğu görülür. Öte yandan

$$\mathbb{C}_1^d = \mathcal{N}(T+S) \oplus \mathcal{R}(T+S) = \mathcal{N}(Q) \oplus (U \oplus M)$$

$U \oplus M \subset \Re(Q)$ olduğundan $\Re(T+S) = \Re(Q)$ ve dolayısıyla $T + S = Q$ olduğu elde edilir. Bu takdirde

$$P + S = P + S + T = (P+S)(I + (P+S)^{-1}T)$$

eşitliği yazılabilir. Sonuç olarak $I + (P+S)^{-1}T$ matrisi de nonsingüler olup

$$(P+Q)^{-1} = (I + (P+S)^{-1}T)^{-1}(P+S)^{-1}$$

olacaktır. Diğer yandan $P - S$ matris farkı nonsingüler olduğundan $P + S$ nin tersinin

$$(P+S)^{-1} = I - P_{\mathcal{N}(P),\mathcal{N}(S)}P_{\Re(P)\Re(S)} - P_{\mathcal{N}(S),\mathcal{N}(P)}P_{\Re(S),\Re(P)} \qquad (3.2.15)$$

şeklinde olduğu görülür. Bu durumda $(I + (P+S)^{-1}T)^{-1}$ ifadesini hesaplamak için

$$(P+S)T = PT + ST = PT = T$$

eşitliği kullanılır. Bu son eşitliğin ancak $\Re(T) \subset \Re(P)$ olması durumunda geçerli olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu durumda

$$(P+S)^{-1}T = T\ ,$$

$$(I+(P+S)^{-1}T)^{-1} = (I+T)^{-1} = I - \tfrac{1}{2}T,$$

$$(P+Q)^{-1} = \left(I - \tfrac{1}{2}T\right)(P+S)^{-1}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Örnek 3.2.2: P ve Q izdüşümleri daha önce Örnek 3.2.1 de verildikleri gibi olsun. Bu takdirde

$$Q(I-P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (I-P)Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu açıktır. Öte yandan (e_1, e_2, e_3) vektörü $\mathbb{C}^{d\times 1}$ uzayının standart bazı olmak üzere $\Re\big(Q(I-P)\big) = span\ (e_2)$ ve $\mathcal{N}\big((I-P)Q\big) = span(e_1 - e_2, e_3)$ olsun. Ayrıca $\mathcal{N}(P) = span\ (e_1)$ ve $\Re(P) \cap \Re(Q) = span\ (e_3)$ alalım. Bu takdirde

$$P_{U,V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{\mathcal{N}(P),N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_{\mathcal{R}(P),M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$P_{N,\mathcal{N}(P)} = I - P_{\mathcal{N}(P),N}, P_{M,\Re(P)} = I - P_{\Re(P),M}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\left(I - \tfrac{1}{2}U,V\right)\left(I - P_{\mathcal{N}(P),N}P_{\Re(P),M} - P_{N,\mathcal{N}(P)P_{M,\Re(P)}}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olacaktır. Bu da $(P+Q)^{-1}$ ile uyuşur.

Lemma 3.2.2 P_1, P_2 iki izdüşüm matrisi olmak üzere

$$A\colon \mathcal{N}(P_1) \to [(I-P_1)P_2\,]\mathcal{N}(P_1)\mathcal{N}(P_1)\ , \ \mapsto Ax = (I-P_1)P_2\,x$$

ile tanımlanan dönüşümü göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}[(I-P_1)P_2\,]\mathcal{N}(P_1) \text{ ve } \Re(A) = \Re[(I-P_1)P_2\,(I-P_1)] \qquad (3.2.16)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 3.2.7 P_1 ve P_2 iki izdüşüm matrisi, $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $c_1 + c_2 \neq 0$ olsun. Eğer A dönüşümü Lemma 3.2.2 deki gibi tanımlanırsa, bu takdirde $\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$ ve $\mathcal{N}(A)$ uzayları izomorftur.

İspat. İspat için Lemma 3.2.2 yi kullanalım. Bu durumda $\mathcal{N} = \mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$ ve $c \neq 0$ olsun. Öncelikle

$$\mathcal{N} \cong (I - P_1)\mathcal{N} \text{ ve } \mathcal{N}(A) \cong (cI - P_2)\mathcal{N}(A) \tag{3.2.17}$$

olduğunu göstermek için $x \in \mathcal{N}$ ve $(I - P_1)x = 0$ alalım. Bu takdirde

$$x = P_1x \text{ ve } (c_1 + c_2)P_2x = P_2(c_1P_1 + c_2P_2)x = 0$$

dir. Bu nedenle $P_2x = 0$ ve dolayısıyla $x = {c_1}^{-1}(c_1 + c_2)P_2x = 0$ yazılabilir. Bu nedenle $\mathcal{N}$ den $(I - P_1)\mathcal{N}$ ye uygulanan $I - P_1$ kısıtlaması bir izomorfizmadir. Öte yandan eğer $x \in \mathcal{N}(A)$ ve $(cI - P_2)x = 0$ ise bu takdirde $P_1x = 0, P_2x = P_1P_2x = cx$ olacağı açıktır. Sonuç olarak $P_2x = P_1cx = 0$, yani $x = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $\mathcal{N}(A)$ den $(cI - P_2)\,\mathcal{N}(A)$ ye uygulanan $cI - P_2$ kısıtlaması da bir izomorfizmadir. Şimdi $c \neq 0$ olmak üzere

$$(I - P_1)\mathcal{N} \subset \mathcal{N}(A) \text{ ve } (cI - P_2)\,\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}, \tag{3.2.18}$$

olduğunu gösterelim. $x \in \mathcal{N}$ alalım. Bu takdirde $P_1x = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right)P_2x$ olup

$$\begin{aligned} A(I - P_1)x &= (I - P_1)P_2\,(I - P_1)x = (I - P_1)(P_2x - P_2\,P_1x) \\ &= (I - P_1)\left(P_2x + \left(\tfrac{c_2}{c_1}\right)P_2x\right) \\ &= \tfrac{c_1 + c_2}{c_1c_2}\,(I - P_1)(c_1P_1x + c_2P_2x) = 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Yani $(I - P_1)x \in \mathcal{N}(A)$ dır. Bu da (3.2.18) eşitliğinin birinci kısmını ispat eder. Şimdi de $x \in \mathcal{N}(A)$ olduğunu kabul edelim ve $c = 1 + \frac{c_1}{c_2}$ olsun. Bu takdirde $P_1x = 0$ ve $P_1P_2x = P_2x$ olup

$$\begin{aligned} (c_1P_1 + c_2P_2)(cI - P_2)x &= c_1\,cP_1x - c_1P_1P_2x - c_2P_2x + c_2\,cP_2x \\ &= -(c_1 + c_2)P_2x + (c_1 + c_2)P_2x = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $(cI - P_2)x \in \mathcal{N}$ olur ki bu da (3.2.18) eşitliğinin ikinci kısmını ispat eder. Sonuç olarak (3.2.17) ve (3.2.18) eşitlikleri birleştirilerek ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.8 $P_1, P_2 \in P$ olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, c_1 + c_2 \neq 0$, ve A da Lemma 3.2.2 deki gibi tanımlansın. Bu takdirde $c_1P_1 + c_2P_2$ nin sıfırlık derecesi sabit olup

$$\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2) = \mathcal{N}(P_1 + P_2) = \mathcal{N}(A) = dim[\mathcal{N}[(I - P_1)P_2] \cap \mathcal{N}(P_1)]$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle $c_1P_1 + c_2P_2$ lineer kombinasyonunun nonsingüler olması için gerek ve yeter şart $P_1 + P_2$ matrisinin nonsingüler olmasıdır.

İspat. İspat Teorem 3.2.7 kullanılarak $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin nonsingüler olması için gerek ve yeter şartın $\mathcal{N}(A) = 0$ olması gerçeğinden kolayca görülebilir.

Teorem 3.2.9 $P_1, P_2 \in P$ olsun, $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, c_1 + c_2 \neq 0$ ve A matrisi de Lemma 3.2.2 deki gibi tanımlansın. Bu takdirde $c_1P_1 + c_2P_2$ nin rankı sabit olup

$$\begin{aligned} r(c_1P_1 + c_2P_2) &= r(P_1 + P_2) = r(P_1) + r(A) \\ &= r(P_1) + r[(I - P_1)P_2(I - P_1)] \\ &= n - dim[\mathcal{N}[(I - P_1)P_2] \cap \mathcal{N}(P_1)] \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

dir.

İspat. $r(c_1P_1 + c_2P_2) = n - \mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$ eşitliği sağlandığından, $c_1P_1 + c_2P_2$ matrisinin rankı sabittir ve bu rank Teorem 3.2.8 e göre $P_1 + P_2$ matrisinin rankına eşit olacaktır. Dolayısıyla Lemma 3.2.2 ve Teorem 3.2.7 dikkate alınırsa

$$r(A) = \mathcal{N}(P_1) - \mathcal{N}(A) = n - r(P_1) - \mathcal{N}(A)$$

eşitliği yazılabilir. Bu ise bize

$$r(P_1 + P_2) = n - \mathcal{N}(P_1 + P_2) = n - \mathcal{N}(A) = r(P_1) + r(A)$$

olduğunu gösterir.

3.3 Dik İzdüşümler için Yeni Rank Eşitlikleri

Bu kısımda, dik izdüşümlerden oluşan matris ifadeleri bazı yeni rank formülleri verilecek ve özellikle iki dik izdüşümün komutatifliği için dik izdüşümlerin bazı çeşitli özellikleri tartışılacaktır.

Bir $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ matrisi hem idempotent hem de hermityen ise, yani $A^2 = A = A^*$ ise bu durumda A matrisine bir dik izdüşüm matrisi denildiğini hatırlatalım. Tanımından kolayca görülebilir ki AA^+ çarpımı $\mathfrak{R}(A)$ üzerine dik izdüşümdür olup $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(AA^+)$ eşitliği sağlanır ve $P_A = AA^+$ ile gösterilir. Bu durumda $P_A^\perp = I_m - AA^+$ matrisi de P_A matrisnin tamamlayıcı izdüşümü olarak adlandırılır.

Eğer $r[A,B] = r(A)$ ise bu taktirde $AX = B$ matris denklemi tutarlı olacaktır. Bu nedenle $AX = B$ denkleminin çözümünün tek olması için gerek ve yeter şart A matrisinin tam sütun ranklı olmasıdır.

$A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$r[A,B] = r(A) + r[(I_m - P_A)B] = r(B) + r[(I_m - P_B)A] \tag{3.3.1}$$

rank eşitliğinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. Ayrıca $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri için

$$\begin{aligned} r[A^*(I_m - P_B)(I_m - P_A)B] &= r(A^*B - A^*BB^+AA^+B) \\ &= r[P_AP_B - (P_AP_B)^2] \\ &= r[A,B] + r(A^*B) - r(A) - r(B) \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

eşitliği sağlanır. Üstelik

$$\begin{aligned} r[P_AP_B - P_BP_A] &= 2r[P_AP_B - P_AP_BP_A] \\ &= 2r[P_AP_B - P_BP_AP_B] \\ &= 2r[P_AP_B - (P_AP_B)^2] \\ &= 2r[P_BP_A - (P_BP_A)^2] \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

rank eşitliğinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. (3.3.2) ve (3.3.3) eşitlikleri birleştirilirse

$$r[P_AP_B - P_BP_A] = 2r[A,B] + 2r(A^*B) - 2r(A) - 2r(B) \tag{3.3.4}$$

olduğu görülür. Aynı boyutta iki idempotent A ve B matrisi için

$$r[A - B] = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r[A,B] - 2r(A) - 2r(B) \tag{3.3.5}$$

$$= r(A - AB) + r(AB - B) \tag{3.3.6}$$

$$= r(A - BA) + r(BA - B) \tag{3.3.7}$$

ve herhangi bir $M \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisi ve idempotent $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxn}$ matris çifti için

$$r[AM - MB] = r\begin{bmatrix} AM \\ B \end{bmatrix} + r[MB, A] - r(A) - r(B) \tag{3.3.8}$$

$$= r(AM - AMB) + r(AMB - MB) \tag{3.3.9}$$

olacaktır. Yukarıda verilen rank eşitlikleri dik izdüşümler için farklı eşitlikleri karakterize etmek için kullanılabilir. Örneğin (3.3.3) ve (3.3.4) eşitlikleri P_A ve P_B matrislerinin komutatif olması için gerek ve yeter şart $P_AP_B = P_AP_BP_A = (P_AP_B)^2$ veya buna denk olarak $r[A, B] = r(A) + r(B) - r(A^*B)$ olmasıdır. Öte yandan $r(N - N^2) = r(N) + r(I_m - N) - m$ eşitliği yazılabilir. Bu takdirde (3.3.2) den

$$\begin{aligned} r[I_m - P_AP_B] &= r[I_m - P_BP_A] \\ &= r[A, B] - r(A) - r(B) + m \\ &= m - dim[\Re(A) \cap \Re(B)] \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

olduğu görülebilir. Bu rank eşitliğinden eğer $\Re(A) \cap \Re(B) = \{0\}$ ise bu takdirde $I_m - P_AP_B$ matrisinin nonsingüler olduğu görülür. Eğer $\Re(A) \cap \Re(B) \neq \{0\}$ ise P_AP_B çarpımı 1' e eşit olan $m - dim[\Re(A) \cap \Re(B)]$ tane özdeğere sahip olacaktır. Öte yandan

$$\begin{aligned} r[(P_AP_B)^+ - P_BP_A] &= r[(P_BP_A)^+ - P_AP_B] \\ &= r[A, B] + r(A^*B) - r(A) - r(B) \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

olduğu gösterilebilir. Bu takdirde (3.3.2) ve (3.3.11) eşitliklerinden $P_AP_B = P_BP_A$; $(P_AP_B)^+ = P_BP_A$ ve $(P_BP_A)^+ = P_AP_B$ eşitliklerinin denk olduğu görülür.

Bu kısmın temel sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.3.1 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$r(P_AP_B - P_BP_A) = 2r[P_BP_A, P_AP_B] - 2r(P_AP_B) \tag{3.3.12}$$

rank eşitliği gerçeklenir. Bu nedenle

$$P_AP_B = P_BP_A \Leftrightarrow \Re(P_AP_B) = \Re(P_BP_A)$$

dir.

İspat. Blok Gauss eliminasyon yöntemiyle,

$$r\begin{bmatrix} P_AP_B & 0 & P_AP_B \\ 0 & -P_BP_A & P_BP_A \\ P_AP_B & P_AP_B & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P_AP_B & 0 & 0 \\ 0 & -P_BP_A & 0 \\ 0 \quad 0 & & P_BP_A - P_AP_B \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P_AP_B) - r(\,P_AP_B - P_AP_B)$$

olduğu gösterilebilir. Öte yandan $P_A^2 = P_A$ ve $P_B^2 = P_B$ olacağından yine blok Gauss eliminasyon yöntemiyle

$$r\begin{bmatrix} P_AP_B & 0 & P_AP_B \\ 0 & -P_BP_A & P_BP_A \\ P_AP_B & P_AP_B & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P_AP_B & 0 & P_AP_B \\ P_BP_AP_B & 0 & P_BP_A \\ P_AP_B & P_BP_A & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & P_AP_B \\ 0 & 0 & P_BP_A \\ P_AP_B & P_BP_A & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P_AP_B \\ P_BP_A \end{bmatrix} + r[P_AP_B \quad , P_BP_A]$$

$$= 2r[P_AP_B \quad , P_BP_A]$$

olduğu gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

(3.3.4) ve (3.3.12) eşitlikleri birleştirilirse

$$r[P_BP_A \quad P_AP_B] = r[A, B] + r(A^*B) - r(A) - r(B) \tag{3.3.13}$$

olacaktır.

$A \in \mathbb{C}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxp}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde (3.3.2) eşitliği

$$r(AB - ABB^+A^+AB) = r[A^*, B] + r(AB) - r(A) - r(B)$$

olarak yeniden yazılabilir.

$\Re(M) = \Re(M^*)$ eşitliğini sağlayan bir M matrisine bir EP matris adı verildiğini hatırlayalım. Bu durumda Teorem 3.3.1 aşağıdaki formda da gösterilebilir:

Teorem 3.3.2 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxp}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$r(A^+ABB^+ - BB^+A^+A) = 2r[A^+ABB^+, BB^+A^+A] - 2r(AB)$$

$$= 2r[A^*, B] + 2r(AB) - 2r(A) - 2r(B)$$

yazılabilir. Bu nedenle aşağıdaki ifadeler denktir:

a) $\Re(A^+ABB^+) = \Re(BB^+A^+A)$, yani A^+ABB^+ matrisi EP dir.
b) $r[A^*, B] = r(A) + r(B) - r(AB)$, yani $B^+A^+ \in \{(AB^-\}$ dir.

(3.3.1)-(3.3.4), (3.3.10) ve (3.3.12) rank eşitliklerinin bir sonucu olarak aşağıdaki ifadelerin birbirine denk olacağı kolaylıkla gösterilebilir:

a) $B^+(A^*)^+ \in \{(A^*B^-\}$, yani $B^+(A^*)^+$, A^*B matrisinin genelleştirilmiş inversidir.
b) $r[A, B] = r(A) + r(B) - r(A^*B)$
c) $dim\{\Re(A) \cap \Re(B)\} = r(A^*B)$
d) $r(B - P_AB) = r(B) - r(P_AB)$
e) $r(A - AP_B) = r(A) - r(AP_B)$
f) $P_AP_B = P_BP_A$
g) $(P_AP_B)^+ = P_BP_A$
h) $(P_BP_A)^+ = P_AP_B$
i) $(P_AP_B)^2 = P_AP_B$
j) $(P_BP_A)^2 = P_BP_A$
k) $r[I_m - P_AP_B] = m - r(P_AP_B)$
l) $\Re(P_AP_B) = \Re(P_BP_A)$, yani P_AP_B matrisi bir EP matrisidir.

Öte yandan $P_AP_B = P_BP_A$ eşitliği için diğer bir denk şart $M = [A, B]$ olmak üzere

$$P_AP_B = P_BP_A \Leftrightarrow P_M = P_A + P_B - P_AP_B \tag{3.3.14}$$

şeklinde verilebilir. Bu durumda (3.3.14) denkliği yardımıyla

$$r(P_M - P_A - P_B + P_AP_B) = r[A, B] + r(A^*B) - r(A) - r(B) \tag{3.3.15}$$

$$= r(P_M) - r(P_A) - r(P_B) + r(P_AP_B) \tag{3.3.16}$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda (3.3.16) eşitliği

$$r(M) = r(P_M),\ r(A) = r(P_A),\ r(B) = r(P_B) \quad \text{ve} \quad r(A^*B) = r(P_AP_B)$$

eşitliklerinden kolayca görülebilir. Öte yandan

$$r(P_M - P_A - P_B) = r[A, B] + 2r(A^*B) - r(A) - r(B) \tag{3.3.17}$$

rank formülü (3.3.16) eşitliğinden türetilebilir. Bunu ispatlamak için eğer $A^*B = 0$ ve $B^*A = 0$ ise bu takdirde $r(A + B) = r(A) + r(B)$ olacağı gerçeğine ihtiyaç vardır. Bu durumda

$$P_M - P_A - P_B = (P_M - P_A - P_B + P_AP_B) - P_AP_B \tag{3.3.18}$$

eşitliğinden kolayca gösterilebilir ki

$$(P_AP_B)^*(P_M - P_A - P_B + P_AP_B) = (P_M - P_A - P_B + P_AP_B)(P_AP_B)^* = 0$$

olup buradan da

$$r(P_M - P_A - P_B) = r(P_M - P_A - P_B + P_AP_B) + r(P_AP_B) \tag{3.3.19}$$

yazılabilir. (3.3.15) eşitliğinde bu yerine yazılırsa (3.3.17) eşitliği elde edilir. Bu takdirde (3.3.13) ve (3.3.17) eşitlikleri birleştirilirse

$$r(P_M - P_A - P_B) = r[P_BP_A, P_AP_B] \tag{3.3.20}$$

olduğu görülür. Öte yandan (3.3.19) eşitliğinden

$$[A, B][A, B]^+ = AA^+ + BB^+ \Leftrightarrow A^*B = 0$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla (3.3.14) eşitliği dikkate alınırsa

$$P_AP_B = P_BP_A,\ P_AP_C = P_CP_A\ ,\quad P_BP_C = P_CP_B \tag{3.3.21}$$

olması durumunda $N = [A, B, C]$ olmak üzere

$$P_N = P_A + P_B + P_C - P_AP_B - P_AP_C - P_BP_C + P_AP_CP_B \tag{3.3.22}$$

eşitliği yazılabilir. Gerçekten eğer (3.3.21) sağlanırsa $P_M = P_A + P_B - P_AP_B$ ve dolayısıyla $P_MP_C = P_CP_M$ eşitliği sağlanır. Bu durumda (3.3.14) eşitliğine göre $P_N = P_M + P_C - P_MP_C$ yazılabilir. $P_M = P_A + P_B - P_AP_B$ ifadesi $P_N = P_M + P_C - P_MP_C$ ifadesinde yerine yazılırsa (3.3.22) eşitliği sağlanır. Bu takdirde (3.3.22) ile ilgili bir rank eşitliği aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 3.3.3 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$, $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ ve $C \in \mathbb{C}^{mxl}$ matrisleri verilmiş olsun. Ayrıca $N = [A, B, C]$ matrisi tanımlansın. Bu takdirde

$$r(P_N - P_A - P_B - P_C + P_AP_B + P_AP_C + P_BP_C - P_AP_BP_C)$$
$$= r\begin{bmatrix} A^*C & A^*B \\ B^*C & 0 \end{bmatrix} + r[A, B, C] - r(A) - r(B) - r(C) \tag{3.3.23}$$

eşitliği sağlanır. Gerçekten

$$P_N - P_A - P_B - P_C + P_A P_B + P_A P_C + P_B P_C - P_A P_B P_C$$
$$= (I_m - P_A)(P_M - P_B)(I_m - P_C)$$

yazılabilir. Bu durumda (3.3.1) eşitliği buna uygulanıp gerekli düzenleme yapılırsa (3.3.23) elde edilir. (3.3.23) den kolayca gösterilebilir ki (3.3.22) ayrışımının gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart

$$r\begin{bmatrix} A^*C & A^*B \\ B^*C & 0 \end{bmatrix} = r(A) + r(B) + r(C) - r[A, B, C]$$

olmasıdır, ki genel olarak bu (3.3.21) eşitliğine denk değildir.

Şimdi aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

Lemma 3.3.1 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisi verilmiş olsun. Ayrıca $P \in \mathbb{C}^{mxm}$ ve $Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde $A - PAQ$ matrisinin rankı

$$r(A - PAQ) = r\begin{bmatrix} A & AQ & P \\ PA & 0 & 0 \\ Q & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(P) - r(Q) \qquad (3.3.24)$$

şeklindedir.

İspat. $P \in \mathbb{C}^{mxm}$ ve $Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ idempotent olduğundan Gauss eliminasyon yöntemine göre (3.3.24) de istenildiği gibi

$$r\begin{bmatrix} A & AQ & P \\ PA & 0 & 0 \\ Q & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & 0 & P \\ 0 & -PAQ & -P \\ Q & -Q & 0 \end{bmatrix}$$
$$= r\begin{bmatrix} A & 0 & P \\ -PAQ & 0 & -P \\ 0 & -Q & 0 \end{bmatrix}$$
$$= r\begin{bmatrix} A - PAQ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P \\ 0 & -Q & 0 \end{bmatrix}$$
$$= r(A - PAQ) + r(P) + r(Q)$$

olduğu görülür.

Kullanacağımız diğer bir basit sonuç

$$\Re(X) = \Re(\mathrm{Y}) \Leftrightarrow \Re(AX) = \Re(\mathrm{AY}) \qquad (3.3.25)$$

ifadesidir. Yukarıdaki sonuçları kullanarak P_AP_B, P_BP_A çarpımları ve bunların farkları için bazı daha genel rank eşitlikleri de verilebilir.

Teorem 3.3.4 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde, her $k \geq 3$ için

$$r[(P_AP_B)^k - P_AP_B] = r[(P_AP_B)^2 - P_AP_B] \tag{3.3.26}$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle her $k \geq 2$ için

$$(P_AP_B)^k = P_AP_B \Leftrightarrow (P_AP_B)^2 - P_AP_B\,, \text{ yani, } P_AP_B = P_BP_A \tag{3.3.27}$$

sağlanır.

İspat. Bu durumda

$$\begin{aligned}(P_AP_B)^k - P_AP_B &= P_AP_B[(P_AP_B)^{k-1} - I_m]\\ &= P_AP_B(P_AP_B - I_m)[(P_AP_B)^{k-2} + \cdots + P_AP_B + I_m]\end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer yandan $[(P_AP_B)^{k-2} + \cdots + P_AP_B + I_m]$ matrisi nonsingüler bir matris olduğundan (3.3.26) da iddia edildiği gibi

$$r[(P_AP_B)^k - P_AP_B] = r[P_AP_B(P_AP_B - I_m)] = r[(P_AP_B)^2 - P_AP_B]$$

eşitliği sağlanır. (3.3.26) dan türetilen ilginç bir rank eşitliği aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.3.1 $P \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $Q \in \mathbb{C}^{nxp}$ olsun. Bu takdirde,

$$r(PQ - PQQ^+P^+PQ \,\ldots.\, Q^+P^+PQ) = r(PQ - PQQ^+P^+PQ) \tag{3.3.28}$$

olacaktır. Bu nedenle

$$Q^+P^+PQ \,\ldots.\, Q^+P^+ \in \{(PQ)^-\} \Leftrightarrow Q^+P^+ \in \{(PQ)^-\}$$

yazılabilir. Gerçekten

$$\begin{aligned}&r(PQ - PQQ^+P^+PQ \,\ldots.\, Q^+P^+PQ)\\ &\quad = r(P^+PQQ^+ - P^+PQQ^+PQ \ldots Q^+P^+PQQ^+)\\ &\quad = r[P^+PQQ^+ - (P^+PQQ^+)^k]\\ &\quad = r[P^+PQQ^+ - (P^+PQQ^+)^2]\\ &\quad = r[PQ - PQQ^+P^+PQ]\end{aligned}$$

olacaktır. Üstelik

$$(PQ)^{+} = Q^{+}P^{+}PQ \dots . Q^{+}P^{+} \Leftrightarrow (PQ)^{+} = Q^{+}P^{+}$$

yazılabileceğinden ispatın geri kalan kısmı kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.3.5 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde,

$$r[(P_A P_B)^2 - P_B P_A] = r[P_A P_B - P_B P_A] \tag{3.3.29}$$

dir, bu nedenle

$$(P_A P_B)^2 = P_B P_A \Leftrightarrow P_A P_B = P_B P_A \tag{3.3.30}$$

olacaktır.

İspat. Bu durumda

$$(P_A P_B)^2 - P_B P_A = P_A (P_B P_A) P_B - P_B P_A$$

yazılabileceğinden (3.3.24) uygulanırsa (3.3.29) da iddia edildiği gibi

$$\begin{aligned}
r(P_A (P_B P_A) P_B - P_B P_A) &= r\begin{bmatrix} P_B P_A & P_B P_A P_B & P_A \\ P_A P_B P_A & 0 & 0 \\ P_B & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(P_A) - r(P_B) \\
&= r\begin{bmatrix} 0 & P_B P_A P_B & P_A \\ P_A P_B P_A & 0 & 0 \\ P_B & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(P_A) - r(P_B) \\
&= r\begin{bmatrix} P_A P_B P_A \\ P_B \end{bmatrix} + r[P_B P_A P_B, \quad P_A] - r(P_A) - r(P_B) \\
&= r\begin{bmatrix} P_B P_A \\ P_B \end{bmatrix} + r[P_B P_A P_B, \quad P_A] - r(P_A) - r(P_B) \\
&= r(P_A P_B - P_B P_A)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.3.6 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde, her $k \geq 2$ için

$$r[(P_A P_B)^k - (P_B P_A)^k] = r[P_A P_B - P_B P_A] \tag{3.3.31}$$

dir, bu nedenle, her $k \geq 2$ için

$$(P_A P_B)^k - (P_B P_A)^k \Leftrightarrow P_A P_B = P_B P_A \tag{3.3.32}$$

olacaktır.

İspat. Bu durumda

$$(P_AP_B)^k-(P_B\,P_A)^k=P_A[P_B(P_AP_B)^{k-1}]-[(P_BP_A)^{k-1}P_B]P_A$$

yazılabilir, burada $P_B(P_AP_B)^{k-1}=(P_BP_A)^{k-1}P_B$ dir. Bu durumda (3.3.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned} r[(P_AP_B)^k-(P_B\,P_A)^k] &= r[(P_AP_B)^k-(P_AP_B)^kP_A]+r[P_A(P_BP_A)^k-(P_B\,P_A)^k] \\ &= 2r[(P_AP_B)^k-(P_AP_B)^kP_A] \\ &= 2r[(P_AP_B)^k(I_m-P_A)] \end{aligned}$$

yazılabilir. Öte yandan P_AP_B çarpımı köşegenleştirilebilir olduğundan

$$r[(P_AP_B)^k]=r(P_AP_B) \text{ ve } \Re[(P_AP_B)^k]=\Re(P_AP_B) \tag{3.3.33}$$

olacaktır. Bu nedenle

$$r[(P_AP_B)^k(I_m-P_A)]=r[(P_AP_B)(I_m-P_A)]=r[(P_AP_B-P_AP_BP_A)]$$

elde edilir. Bu da (3.3.3) e göre (3.3.31) in sağlandığını gösterir.

Teorem 3.3.7 $A\in\mathbb{C}^{mxn}$ ve $B\in\mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde,

$$r(P_A\,P_BP_A\;-P_B\,P_AP_B)=r(P_A\,P_B-P_B\,P_A\,) \tag{3.3.34}$$

dir, bu nedenle,

$$P_A\,P_BP_A\;=P_B\,P_AP_B \Leftrightarrow P_A\,P_B=P_B\,P_A \tag{3.3.35}$$

olacaktır.

İspat. Bu durumda blok Gauss eliminasyon yöntemine göre

$$\begin{aligned} & r\begin{bmatrix} P_A\,P_B\,P_A & 0 & P_A\,P_B\,P_A \\ 0 & -P_B\,P_A\,P_B & P_B\,P_A\,P_B \\ P_A\,P_B\,P_A & P_B\,P_A\,P_B & 0 \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} P_A\,P_B\,P_A & 0 & 0 \\ 0 & -\,P_B\,P_A\,P_B & 0 \\ 0 & 0 & P_B\,P_A\,P_B\;-P_A\,P_B\,P_A \end{bmatrix} \\ &= r(P_A\,P_BP_A)+r(P_B\,P_AP_B)+r(P_A\,P_BP_A-P_BP_A\,P_B\,) \\ &= 2r(P_A\,P_B)+r(P_A\,P_BP_A-P_BP_A\,P_B\,) \end{aligned}$$

yazılabilir. Öte yandan P_A ve P_B matrisleri idempotent olduğundan

$$r\begin{bmatrix} P_A\,P_B\,P_A & 0 & P_A\,P_B\,P_A \\ 0 & -P_B\,P_A\,P_B & P_B\,P_A\,P_B \\ P_A\,P_B\,P_A & P_B\,P_A\,P_B & 0 \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} P_A\,P_B\,P_A & 0 & P_A\,P_B\,P_A \\ P_B\,P_A\,P_B\,P_A & 0 & P_B\,P_A\,P_B \\ P_A\,P_B\,P_A & P_B\,P_A\,P_B & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & P_A P_B P_A \\ 0 & 0 & P_B P_A P_B \\ P_A P_B P_A & P_B P_A P_B & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P_A P_B P_A \\ P_B P_A P_B \end{bmatrix} - r[P_A P_B P_A, \quad P_B P_A P_B]$$

$$= 2r[P_A P_B P_A, \quad P_B P_A P_B]$$

$$= 2r[P_A P_B, \quad P_B P_A]$$

elde edilir. Böylece

$$r(P_A P_B P_A - P_B P_A P_B) = 2r[P_A P_B, \quad P_B P_A] - 2r(P_A P_B)$$

olacaktır. Bu son eşitlik (3.3.12) ile birleştirilirse (3.3.34) deki eşitlik elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

$$(P_A - P_B)^3 - (P_A - P_B) = P_B P_A P_B - P_A P_B P_A$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu nedenle (3.3.34) e göre

$$r[(P_A - P_B)^3 - (P_A - P_B)] = r(P_A P_B - P_B P_A)$$

olacaktır. Özel olarak

$$(P_A - P_B)^+ = (P_A - P_B) \Leftrightarrow P_A P_B = P_B P_A \tag{3.3.36}$$

elde edilir. Öte yandan $r(A^* - A^+) = r(A - AA^*A)$ eşitliği $(P_A - P_B)^+ - (P_A - P_B)$ ifadesine uygulanırsa

$$r[(P_A - P_B)^+ - (P_A - P_B)] = r[(P_A - P_B)^3 - (P_A - P_B)]$$

ve dolayısıyla da

$$r[(P_A - P_B)^+ - (P_A - P_B)] = r(P_A P_B - P_B P_A)$$

olduğu görülür. Özel olarak

$$(P_A - P_B)^+ = (P_A - P_B) \Leftrightarrow P_A P_B = P_B P_A \tag{3.3.37}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.8 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde, her $k \geq 2$ için

$$r[(P_A P_B P_A)^k - (P_B P_A P_B)^k] = r(P_A P_B - P_B P_A) \tag{3.3.38}$$

dir, bu nedenle, her $k \geq 2$ için

$$(P_A P_B P_A)^k = (P_B P_A P_B)^k \Leftrightarrow P_A P_B = P_B P_A$$

olacaktır.

Teorem 3.3.9 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri ve $k \geq 1$ tam sayısı verilmiş olsun. Bu takdirde

$$r\left[(P_A - P_B)^{2^k+1} - (P_A - P_B)\right] = r(P_A P_B - P_B P_A)$$

ve dolayısıyla

$$(P_A - P_B)^{2^k+1} - (P_A - P_B) \Leftrightarrow P_A P_B = P_B P_A$$

olacaktır. Bu durumda $(P_A P_B)^+$ ve $(P_B P_A)^+$ matrislerinin her ikisi de idempotent olduğundan (3.3.5) ve (3.3.12) eşitlikleri $(P_A P_B)^+ - (P_B P_A)^+$ ifadesine uygulanırsa aşağıdaki sonucun sağlandığı kolayca görülebilir.

Teorem 3.3.10 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$r[(P_A P_B)^+ - (P_B P_A)^+] = r(P_A P_B - P_B P_A) \qquad (3.3.39)$$

dir.

(3.3.20), (3.3.31), (3.3.38) ve (3.3.39) dan türetilen bazı ilginç ranj uzayı eşitlikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

$$\Re(P_M - P_A - P_B) = \Re[P_B P_A, P_A P_B],\ M = [A, B]$$

$$\Re[(P_A P_B)^k - (P_B P_A)^k] = \Re[(P_A P_B P_A)^l - (P_B P_A P_B)^l]\ k \geq 2,\ l \geq 1$$

$$= \Re(P_A P_B - P_B P_A)$$

$$\Re[(P_A P_B)^+ - (P_B P_A)^+] = \Re(P_A P_B - P_B P_A).$$

3.4 Dik İzdüşümlerin Çarpım ve Farklarının Moore-Penrose inversleri

$A \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde, Moore-Penrose invers kullanılarak A matrisinin $\Re(A)$ ranj uzayı üzerindeki P_A dik izdüşümünün $P_A = AA^+$ şeklinde olacağını hatırlayalım. Bu kısımda $P_A P_B$ çarpımı, $P_A - P_B$ farkı ve $P_A P_B - P_B P_A$ komütatörünün Moore-Penrose inversleri için bazı ifadeler geliştirip bunlardan bazı önemli sonuçlar türetilecektir. Bu durumda öncelikle aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 3.4.1 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$r[(AB)^{+} - B^{+}A^{+} + B^{+}T^{+}A^{+}] = r\begin{bmatrix} AB \\ ABB^{*}B \end{bmatrix} + r[AB, AA^{*}AB] - 2r(AB) \quad (3.4.1)$$

rank eşitliği sağlanır, burada $T = (I_n - BB^{+})(I_n - A^{+}A)$ dir. Ayrıca

$$(AB)^{+} = B^{+}A^{+} + B^{+}T^{+}A^{+} \quad (3.4.2)$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart A ve B matrislerinin

$$\Re(AA^{*}AB) = \Re(AB) \text{ ve } \Re[(ABB^{*}B)^{*}] = \Re[(AB)^{*}] \quad (3.4.3)$$

ranj eşitliklerini sağlamasıdır.

Eğer Lemma 3.4.1 iki dik izdüşümün $P_A P_B$ çarpımına uygulanırsa aşağıdaki önemli sonuç elde edilir:

Teorem 3.4.1 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$(P_A P_B)^{+} = P_B P_A - P_B[(I_m - P_B)(I_m - P_A)]^{+} P_A \quad (3.4.4)$$

olacaktır.

İspat. P_A ve P_B dik izdüşüm çifti için $P_A^2 = P_A = P_A^*$, $P_B^2 = P_B = P_B^*$, $P_A^+ = P_A$ ve $P_B^+ = P_B$ olduğunu belirtelim. Bu takdirde (3.4.3) deki ranj eşitliklerinin her ikisi de sağlanır. Bu nedenle (3.4.1) ifadesi (3.4.4) ifadesine dönüşür.

Lemma 3.4.2 M ve N aynı boyutlu iki matris olsun. Eğer $MN^{*} = N^{*}M = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu takdirde

$$(M + N)^{+} = M^{+} + N^{+} \quad (3.4.5)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.4.2 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}(P_A - P_B)^{+} &= (P_A - P_A P_B)^{+} + (P_A P_B - P_B)^{+} \\ &= (P_A - P_B P_A)^{+} + (P_B P_A - P_B)^{+} \quad (3.4.6)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. P_A ve P_B matrislerinin her ikisi de Hermityen olduğundan

$$(P_A - P_A P_B)(P_A P_B - P_B)^{*} = (P_A P_B - P_B)^{*}(P_A - P_A P_B) = 0$$

ve

$$(P_A - P_B P_A)(P_B P_A - P_B)^* = (P_B P_A - P_B)^*(P_A - P_B P_A) = 0$$

olacağı kolayca gösterilebilir. Bu nedenle Lemma 3.4.2 den (3.4.6) da verilen iki ifadenin sağlandığı görülür.

(3.4.6) eşitliğinde $X = (P_A - P_A P_B)^+$ ve $Y = -(P_B P_A - P_B)^+ = (P_B - P_B P_A)^+$ alalım. Bu durumda bir K matrisinin idempotent olması için gerek ve yeter şart $K = (FE)^+$ olacak şekilde iki dik izdüşüm matrisinin mevcut olması olduğunu ve bu durumda $K = EKF$ eşitliğinin sağlandığını hatırlarsak bu durumda X ve Y matrislerinin idempotent olduğu ve $X = P_A X(I_m - P_B)$ ve $Y = (I_m - P_A)Y - P_B$ eşitliklerini sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.4.3 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde $P_A - P_B$ matrisinin Moore-Penrose inversi

$$(P_A - P_B)^+ = X - Y \tag{3.4.7}$$

şeklinde yazılabilir, burada X ve Y matrisleri

$$X^2 = X,\ \ Y^2 = Y\ ,\ \ XY^* = Y^*X = 0 \tag{3.4.8}$$

eşitliklerini ve

$$\Re(X) \subseteq \Re(A),\ \Re(B) \subseteq ker(X)\ ,\ \Re(Y^*) \subseteq \Re(B),\ \Re(A) \subseteq ker(Y^*) \tag{3.4.9}$$

bağıntılarını sağlar.

Sonuç 3.4.1 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$P_A(P_A - P_B)^+ P_B = P_B(P_A - P_B)^+ P_A = 0 \tag{3.4.10}$$

dir.

İspat. İspat (3.4.7) ve (3.4.9) dan direkt olarak görülür.

$(P_A - P_B)(P_A - P_B)^+(P_A - P_B) = P_A - P_B$ olduğundan (3.4.10) eşitliğinden iki dik izdüşüm matris çifti için $P_A(P_A - P_B)^+ P_A - P_B(P_B - P_A)^+ P_B = P_A - P_B$ eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir. $P_A - P_A P_B = P_A(I_m - P_B)$, $P_A P_B - P_B = -(I_m - P_A)P_B$, $P_A - P_B P_A = (I_m - P_B)P_A$ ve $P_B P_A - P_B = -P_B(I_m - P_A)$ eşitlikleri dikkate alınırsa Teorem 3.4.1 den aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$(P_A - P_A P_B)^+ = P_A - P_B P_A - (I_m - P_B)(P_B - P_B P_A)^+ P_A,$$

$$(P_A P_B - P_B)^+ = -P_B + P_B P_A + P_B (P_A - P_B P_A)^+ (I_m - P_A),$$

$$(P_A - P_B P_A)^+ = P_A - P_A P_B - P_A (P_B - P_A P_B)^+ (I_m - P_B),$$

$$(P_B P_A - P_B)^+ = -P_B + P_A P_B + (I_m - P_A)(P_A - P_A P_B)^+ P_B.$$

Bu eşitlikler (3.4.6) ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$(P_A - P_B)^+ = P_A - P_B + P_B (P_A - P_B P_A)^+ (I_m - P_A) \\ -(I_m - P_B)(P_B - P_B P_A)^+ P_A \qquad (3.4.11)$$

ve

$$(P_A - P_B)^+ = P_A - P_B + (I_m - P_A)(P_A - P_A P_B)^+ P_B \\ -P_A (P_B - P_A P_B)^+ (I_m - P_B) \qquad (3.4.12)$$

elde edilir. Ayrıca

$$P_B (P_A - P_B P_A)^+ P_A - P_B (P_B - P_B P_A)^+ P_A = P_B (P_B - P_B)^+ P_A = 0$$

$$P_A (P_A - P_A P_B)^+ P_B - P_A (P_B - P_A P_B)^+ P_B = P_A (P_A - P_B)^+ P_B = 0$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu nedenle (3.4.11) ve (3.4.12) aşağıdaki sonuca dönüşür.

Teorem 3.4.4 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde $P_A - P_B$ matrisinin Moore-Penrose inversi için

$$(P_A - P_B)^+ = P_A - P_B + P_B (P_A - P_B P_A)^+ - (P_B - P_B P_A)^+ P_A, \qquad (3.4.13)$$

$$(P_A - P_B)^+ = P_A - P_B + (P_A - P_A P_B)^+ P_B - P_A (P_B - P_A P_B)^+, \qquad (3.4.14)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 3.4.5 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde $P_A - P_B$ matrisinin Moore-Penrose inversi için aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $(P_A - P_B)^+ = P_A - P_B$,
(b) $P_B (P_A - P_B P_A)^+ = (P_B - P_B P_A)^+ P_A$,
(c) $(P_A - P_B)^3 = P_A - P_B$,
(d) $P_A P_B = P_B P_A$.

İspat. (a) ve (b) nin denkliği (3.4.13) den kolayca görülür. Ayrıca $A^{+} = A^{*}$ olması için gerek ve yeter şart $AA^{*}A = A$ olmasıdır. Bu durumu $P_A - P_B$ farkına uygulayarak ve $(P_A - P_B)^{*} = P_A - P_B$ eşitliği kullanılarak (a) ve (c) nin denkliği elde edilir. Ayrıca

$$(P_A - P_B)^3 = P_A + P_B P_A P_B - P_A P_B P_A - P_B$$

olduğundan

$$(P_A - P_B)^3 = P_A - P_B \Leftrightarrow P_B P_A P_B = P_A P_B P_A$$

olacaktır. $P_B P_A P_B = P_A P_B P_A$ eşitliği ise $P_B P_A = P_A P_B$ eşitliğine denktir.

Teorem 3.4.2 ve Teorem 3.4.3 dikkate alınırsa, tersinir olması durumunda $P_A - P_B$ nin tersi hakkında aşağıdaki sonuç verilebilir:

Teorem 3.4.6 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(a) $P_A - P_B$ nin tersinir olması için gerek ve yeter şart $[A, B] = r(A) + r(B) = m$ olmasıdır.

(b) Bu durumda $P_A - P_B$ nin tersi

$$\begin{aligned}(P_A - P_B)^{-1} &= (P_A - P_A P_B)^{+} + (P_A P_B - P_B)^{+} \\ &= (P_A - P_B P_A)^{+} + (P_B P_A - P_B)^{+} \\ &= P_A - P_B + P_B(P_A - P_B P_A)^{+} + (P_B - P_B P_A)^{+} P_A \qquad (3.4.15)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. X ve Y matrisleri $X = (P_A - P_B P_A)^{+}$ ve $Y = (P_B P_A - P_B)^{+}$ olarak tanımlanırsa $(P_A - P_B)^{-1} = X - Y$ şeklindedir, burada

$$r(X) = r(A),\ r(Y) = r(B), \qquad (3.4.16)$$

$$X^2 = X,\ Y^2 = Y,\ XY^{*} = Y^{*}X = 0, \qquad (3.4.17)$$

$$\Re(X) = \Re(A), \Re(B) = ker(X),\ \Re(Y^{*}) = \Re(B),\ \Re(A) = ker(Y^{*}) \qquad (3.4.18)$$

eşitlikleri sağlanır.

Bu durumda $P_A - P_B$ farkının inversi göz önüne alınabilir. Dolayısıyla $P_A - P_B$ nin tersinir olması için gerek ve yeter şart

$$M^2 = M,\ \Re(M) = \Re(A) \text{ ve } \Re(B) = ker(M) \qquad (3.4.19)$$

olacak şekilde bir M matrisinin mevcut olmasıdır. Bu durumda

$$(P_A - P_B)^{-1} = M + M^* - I_m \tag{3.4.20}$$

dir. Gerçekten (3.4.19) eşitliğini sağlayan M matrisi tektir. (3.4.17) ve (3.4.18) eşitliklerinden $X = (P_A - P_B P_A)^+$ matrisinin (3.4.19) daki üç şartı sağladığı görülür. Böylece M matrisinin (3.4.19) eşitliğini sağlayan bir ifadesi

$$M = (P_A - P_B P_A)^+ \tag{3.4.21}$$

olarak yazılabilir. (3.4.21) deki tek türlü olan M matrisini (3.4.20) de yerine yazarsak

$$(P_A - P_B)^{-1} = (P_A - P_B P_A)^+ + (P_A - P_A P_B)^+ - I_m \tag{3.4.22}$$

olduğu görülür. (3.4.22) de P_A ile P_B matrisleri yer değiştirirse

$$(P_A - P_B)^{-1} = -(P_B - P_A P_B)^+ - (P_B - P_B P_A)^+ + I_m \tag{3.4.23}$$

olduğu görülür.

Eğer Teorem 3.4.2 ve Teorem 3.4.6 da P_A ile $I_m - P_A$ matrisleri yer değiştirirse aşağıdaki iki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.4.2 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$(I_m - P_A - P_B)^+ = [(I_m - P_A)(I_m - P_B)]^+ - (P_A P_B)^+ \tag{3.4.24}$$

$$= [(I_m - P_B)(I_m - P_A)]^+ - (P_B P_A)^+ \tag{3.4.25}$$

olacaktır.

Sonuç 3.4.3 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde $I_m - P_A - P_B$ matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart

$$r(A^* B) = r(A) = r(B) \tag{3.4.26}$$

olmasıdır. Bu durumda$I_m - P_A - P_B$ matrisinin tersi

$$(I_m - P_A - P_B)^{-1} = [(I_m - P_A)(I_m - P_B)]^+ - (P_A P_B)^+$$

$$= [(I_m - P_B)(I_m - P_A)]^+ - (P_B P_A)^+ \tag{3.4.27}$$

olarak yazılabilir. Ayrıca

$$(I_m - P_A - P_B)^{-1} = [(I_m - P_A)(I_m - P_B)]^+ + [(I_m - P_B)(I_m - P_A)]^+ - I_m \tag{3.4.28}$$

ve

$$(I_m - P_A - P_B)^{-1} = I_m - (P_A P_B)^+ - (P_B P_A)^+ \tag{3.4.29}$$

yazılabilir.

Yukarıda belirtilen sonuçlar ayrıca $P_A\, M{-}MP_B$ matris ifadesine de genişletilebilir.

Teorem 3.4.7 $A \in \mathbb{C}^{mxn}, B \in \mathbb{C}^{lxk}$ ve $M \in \mathbb{C}^{mxl}$ matrisleri verilmiş olsun. X ve Y matrisleri $X = (P_A M - P_A M P_B)^+$ ve $Y = -(P_A M P_B - M P_B)^+$ olarak tanımlanırsa

$$(P_A\, M - MP_B)^+ = X - Y \tag{3.4.30}$$

şeklindedir, burada

$$XMX = X,\;\; YMY = Y\;,\;\; XY^* = Y^*X = 0, \tag{3.4.31}$$

dir, ayrıca

$$P_B(P_A\, M - MP_B)^+ P_A = 0 \tag{3.4.32}$$

olacaktır.

İspat. $P_A\, M{-}MP_B$ matris ifadesini

$$P_A\, M{-}MP_B = (P_A\, M{-}P_A\, MP_B) + (P_A\, MP_B{-}MP_B)$$

olarak yazarsak

$$(P_A\, M{-}P_A\, MP_B)(P_A\, MP_B{-}MP_B)^* = (P_A\, M{-}P_A\, MP_B)^*(P_A\, MP_B{-}MP_B) = 0$$

olacağı kolayca görülebilir. Böylece Lemma 3.4.2 den (3.4.30) eşitliğinin sağlandığı görülür. (3.4.31) ve (3.4.32) eşitlikleri ise açıktır.

Sonuç 3.4.4 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxl}$ matrisleri verilmiş olsun. Ayrıca X matrisi de $X = (P_A P_B - P_A P_B P_A)^+$ olarak tanımlanırsa

$$(P_A\, P_B - P_B P_A)^+ = X - X^*$$

şeklindedir, burada $X^2 = 0$ ve $XP_BX = X$ dir, ayrıca $P_A(P_A\, P_B - P_B P_A)^+ P_A = 0$ olacaktır.

Yukarıda verilen sonuç $(P_A\, P_B)^k - (P_B P_A)^k$ ifadesine de genişletilebilir. Bunun için $P_B\,(P_A\, P_B)^{k-1} = (P_B P_A)^{k-1} P_B$ olmak üzere

$$(P_A\, P_B)^k - (P_B P_A)^k = P_A\,[P_B\,(P_A\, P_B)^{k-1}] - [(P_B P_A)^{k-1} P_B] P_A$$

yazmak yeterlidir. Yukarıdaki matris ifadesine Teorem 3.4.7 uygulanırsa aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.4.5 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxl}$ matrisleri verilmiş olsun. Ayrıca X matrisi de $X = [(P_A\, P_B)^k - (P_A\, P_B)^k P_A\,]^+$ olarak tanımlanırsa

$$[(P_A\, P_B)^k - (P_B\, P_A)^k]^+ \ = X - X^*$$

şeklindedir, burada $X^2 = 0$ ve $XP_B(P_A\, P_B)^{k-1}X = X$ dir. Ayrıca

$$P_A\,[(P_A\, P_B)^k - (P_B\, P_A)^k]^+ P_A = 0$$

olacaktır. Bunun sonucu olarak

$$(P_A P_B P_A - P_B P_A P_B)^+ = [P_A P_B P_A - (P_A\, P_B)^2]^+ + [(P_A\, P_B)^2 - P_B P_A P_B]^+$$

olduğu da yine Teorem 3.4.7 den gösterilebilir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında birinci bölümde öncelikle Matris Cebirinin tarihsel gelişimi ve kullanım alanından kısaca bahsedilmiştir. İkinci bölüm Matris ve Matris Uzayları ile ilgili bir takım temel kavramlardan oluşmakta olup bu bölümdeki teoremler genellikle ispatsız olarak verilmiştir. Üçüncü bölümde dik izdüşüm matrisleri ele alınarak bu matrisler için çeşitli rank formülleri elde edilmiştir. İki dik izdüşüm matrisinin toplam ve farkı için bazı rank formülleri verilmiş dik izdüşüm matrisleriyle ilgili çeşitli rank eşitlikleri elde edilmiştir. Ayrıca dik izdüşüm matrislerinin çarpımları ve farklarının Moore-Penrose inversleri ele alınmıştır.

Yapılan çalışmalara benzer olarak üç veya daha fazla dik izdüşüm matrisinin lineer kombinasyonları ile ilgili dik izdüşüm olup olmama durumları ve bu tip kombinasyonlar için rank eşitlikleri elde edilerek bunların özellikle ekonometri, istatistik ve mühendislik alanlarına uygulanabilirliği araştırılabilir. Çalışmada Moore-Penrose inversler için elde edilen bulguların ağırlıklı Moore-Penrose inversler ve Grup inversler için uygulanabilirliği araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Baksalary, J.K. and Baksalary, O.M. 2004, Nonsigularity of Linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra and its applications, 388, 25-29 s.

Baksalary, J.K., Baksalary, O.M. and Szule, T. 2002, A property of orthogonal projectors, Linear Algebra and its applications, 354, 35-39 s.

Baksalary, O.M. and Trenkler, G., 2009, Column space equalites for orthogonal projectors, Applied Mathematics and Computation, 355, 519-529 s.

Baksalary, O.M. Bernstein, D.S. and Trenkler, G., 2010, On the equality between rank and trace of an idempotent matrix, Applied Mathematics and Computation, 217, 4076-4080 s.

Ben-Israel, A. and Charnes, A. 1963, Contributions to the theory of generalized inverses. SIAM J. Appl. Math., Vol. 11, 667-699 s.

Benítez J. and Rakocevic, V. 2008, Applicatios of CS decomposition in linear combination of two orthogonal projectors, Appl. Math. Comput., 203(2), 761-769 s.

Benítez J. and Thome N. 2005, Characterizations and linear combinations of *k*-generalized projectors, Linear Algebra Appl., 410, 150–159 s.

Benítez J. and Thome N. 2006, *k*-group periodic matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 28(1), 9–25 s.

Bernstein D.S. 2009, Matrix Mathematics, 2. ed., Princeton Uni. Press, Princeton.

Branson, R., 1999 Matris İşlemleri, Schaum Serisi. (Editor: H. Hilmi Hacısalihoğlu) Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 212 s.

Buckholtz, D. 1997, Inverting the difference of hilbert space projections, Amer. Maht. Monthly, 104, 60-61 s.

Cheng S. and Tian Y. 2003, Moore–Penrose inverses of products and differences of orthogonal projectors, Acta Sci. Math. (Szeged) 69, 533–542 s.

Galperin A.M. and Waksman Z. 1980, On pseudo-inverses of operator products, Linear Algebra Appl., 33, 123–131 s.

Greville T.N.E., Solutions of the matrix equation $XAX = X$, and relations between oblique and orthogonal projectors, SIAM J. Appl. Math. 1974, 26(4), 828–832 s.

Groß J. 1999, On the product of orthogonal projectors, Linear Algebra Appl., 289,1-3, 141–150 s.

Groß, J. and Trenkler, G. 1999, Nonsingularity of the Difference of two Oblique Projektors, SIAM J.Matrix Anal. Appl. 21, 390-395 s.

Groß, J. and Trenkler, G. 2008, On the product of orthogonal projectors, Linear Multilinear Algebra, 44(3), 247-259 s.

Hacısalihoğlu H.H., 1977. *Lineer Cebir*. Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, 716 s.

Izumino S. 1982, The product of operators with closed range and an extension of the reverse order law, Tôhoku Math. J., 34(1), 43–52 s.

Koliha, J. J. and Rakocevic, V. 2002, Invertibility of the sum of idempotents, Linear and Multilinear Algebra 50, 285–292 s.

Koliha, J.J. and Rakocevic, V., 2003. Invertibility of the difference of idempotents, Linear and Multilinear Algebra 51, 97–110 s.

Koliha, J.J., Rakocevic, V. and Staskraba, I., 2004. The difference and sum of projectors, Linear Algebra and its applications, 388, 279-288.

Lancaster, P., 1969. Theory of matrices, Academic Pres, New York, 570 s.

Laurie, C., Mathes, B. and Radjavi,H., 1994. Sums of idempotents, Linear Algebra Appl. 208/209, 175–197 s.

Marsaglia, G. and Styan, G.P.H., 1974. Equalities and inequalities for ranks of matrices, Linear and Multilinear Algebra 2, 269–292 s.

Penrose, R., 1955, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413 s.

Penrose, R., 1956. On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 52, 17-19 s.

Rao, R. C., 1965, Linear Statistical Inference and its Applications, New York, Wiley.

Rao R.C. and Yanai H. 1979, General definition and decomposition of projector and some applications to statistical problems, J. Statist. Plann. Inf., 3(1), 1–17 s.

Rehder, W. 1980, On the commutativity of two projections, Elem. Math. 35, 437-441s.

Spitkovsky, I. 1994, Once more on algebras generated by two projections, Linear Algebra Appl. 208/209, 377-395 s.

Spitkovsky, I. 2006, On polinomials in two projections, Electron J. Linear Algebra 15, 15-158 s.

Tian, Y. 2004, Rank equalities for block matrices and their Moore-Penrose inverses, Houston J. Math., 30(4), 483-510 s.

Tian, Y. 2004, Using rank formulas to characterize equalities for Moore-Penrose inverses of matrix products, Applied Math. Comput., 147(2), 581-600 s.

Tian, Y. 2010, Equalities for orthogonal projectors and their operations, Cent. Eur. J. Math., 8(5), 855-870 s.

Zuo, K., 2010. Nonsingularity of the Difference and sum of two idempotent matrices, Linear Algebra and its applications 433, 476-482 s.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Özlem BAŞAR
Doğum Yeri	Vakfıkebir/Trabzon
Doğum Tarihi	30.05.1995
Uyruğu	■ T.C. ❐ Diğer:
Telefon	05536312826
E-Posta Adresi	basarozlem361@gmail.com_

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	02.02.2018
Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Yayınlar	
…..	