T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK ESNEK GRAFLAR ÜZERİNE

MİHRİBAN DURMUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Mihriban DURMUŞ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BULANIK ESNEK GRAFLAR ÜZERİNE

Mihriban DURMUŞ

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2020
Yüksek Lisans Tezi, 64s.

Danışman: Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Bu tezin amacı, bulanık esnek graf ve aralık değerli bulanık esnek graf yapılarını vermek, bu yapılara ait temel özellikleri araştırmak ve elde edilen sonuçları ortaya koymaktır.

Bu çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, tez konusu ile bağlantılı olan çalışmaları kapsayan bir literatür incelemesi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamızda faydalandığımız bazı temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, bulanık esnek graf kavramı ele alınmıştır ve bu kavrama ait temel özellikler araştırılmıştır. Ayrıca, bulanık esnek graf yapısı üzerinde birleşim, arakesit, kartezyen çarpım, güçlü çarpım ve bileşke gibi birtakım yeni işlemler tanımlanmıştır ve bazı temel özellikleri araştırılmıştır. Dördüncü bölümde, aralık değerli bulanık esnek kümelerle graf teori birleştirilmiştir ve aralık değerli bulanık esnek graf kavramı verilmiştir. Ayrıca, aralık değerli bulanık esnek graf yapısı üzerinde birleşim, arakesit, kartezyen çarpım, güçlü çarpım ve bileşke gibi birtakım yeni işlemler tanımlanmıştır ve bazı temel özellikleri araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık esnek küme, Aralık değerli bulanık esnek küme, Graf, Aralık değerli bulanık esnek graf.

ABSTRACT

ON FUZZY SOFT GRAPHS

Mihriban DURMUŞ

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Natural and Technology
Department of Mathematics, 2020
MSc. Thesis, 64p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yıldıray ÇELİK

The aim of this thesis is to give structures of fuzzy soft graph and interval valued fuzzy soft graph, to investigate the basic properties of these structures and to reveal the results obtained.

This study consists of four main sections. In the first chapter, a literature review covering the studies related to the thesis topic has been given. In the second chapter, some basic definitions and theorems that we have used in our study are expressed. In the third chapter, the fuzzy soft graph concept is discussed and the basic properties of this concept are investigated. In addition, some new operations such as combination, intersection, cartesian product, strong product and resultant are defined on the fuzzy soft graph structure and some of their basic properties have been investigated. In the fourth chapter, the graph theory is combined with interval-valued fuzzy soft sets and the concept of interval-valued fuzzy soft graph is given. In addition, some new operations such as combination, intersection, cartesian product, strong product and resultant are defined on the interval-valued fuzzy soft graph structure and some of their basic properties have been investigated.

Key Words: Fuzzy soft set, Interval valued fuzzy soft set, Graph, Interval valued fuzzy soft graph.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı süresince yardımlarını esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK olmak üzere Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine teşekkür ederim.

Aynı zamanda, her zaman yanımda olan, hiçbir yardımı esirgemeyen, manevi desteklerini her zaman üzerimde hissettiğim aileme ve canım eşime de sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$B(X)$	: X kümesi üzerinde tanımlı bütün bulanık kümelerin ailesi
$\mu \leq \eta$	: η, μ yü kapsar
$\vee$	: Bulanık kümelerin birleşimi
$\wedge$	: Bulanık kümelerin arakesiti
$AD(X)$	: X üzerinde tanımlı bütün aralık değerli bulanık kümelerin ailesi
$\subseteq_E$	: Esnek alt küme
$G^* = (V,E)$	: G^* basit grafı
G_E	: Esnek graf
$\tilde{G}_E$	: Bulanık esnek graf
$\tilde{G}_E \cup \widetilde{G'}_E$	: $\tilde{G}_E$ ve $\tilde{G'}_E$ graflarının birleşimi
$\tilde{G}_E \cap \widetilde{G'}_E$	: $\tilde{G}_E$ ve $\tilde{G'}_E$ graflarının arakesiti
$\tilde{G}_E \sqcup \widetilde{G'}_E$	: $\tilde{G}_E$ ve $\tilde{G'}_E$ graflarının daraltılmış birleşimi
$\tilde{G}_E \sqcap \widetilde{G'}_E$	: $\tilde{G}_E$ ve $\tilde{G'}_E$ graflarının genişletilmiş arakesiti
$\tilde{G}_E \times \widetilde{G'}_E$	: $\tilde{G}_E$ ve $\tilde{G'}_E$ graflarının kartezyen çarpımı
$\tilde{G}_E \otimes \widetilde{G'}_E$	: $\tilde{G}_E$ ve $\tilde{G'}_E$ graflarının güçlü çarpımı
$\tilde{G}_E \circ \widetilde{G'}_E$	: $\tilde{G}_E$ ve $\tilde{G'}_E$ graflarının bileşkesi
$\tilde{G}_I$	: Aralık değerli bulanık esnek graf
$\tilde{G}_I \tilde{\cup} \widetilde{G'}_I$	: $\tilde{G}_I$ ve $\tilde{G'}_I$ graflarının birleşimi

$\tilde{G}_I \,\tilde{\cap}\, \widetilde{G'}_I$: $\tilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ graflarının arakesiti

$\tilde{G}_I \,\tilde{\sqcup}\, \widetilde{G'}_I$: $\tilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ graflarının daraltılmış birleşimi

$\tilde{G}_I \,\tilde{\sqcap}\, \widetilde{G'}_I$: $\tilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ graflarının genişletilmiş arakesiti

$\tilde{G}_I \,\tilde{\times}\, \widetilde{G'}_I$: $\tilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ graflarının kartezyen çarpımı

$\tilde{G}_I \tilde{\otimes} \widetilde{G'}_I$: $\tilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ graflarının güçlü çarpımı

$\tilde{G}_I \,\tilde{\circ}\, \widetilde{G'}_I$: $\tilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ graflarının bileşkesi

1. GİRİŞ

Günlük hayatta belirsizlik içeren problemlerle zaman zaman karşılaşırız. Bu olayları her zaman kesin tanımlamalarla açıklamaya çalışmak mümkün olmayabilir. Belirsizliğin birçok türüne mühendislik, tıp bilimi, bilgisayar bilimi ve sosyal bilimler gibi birçok alanda sıkça rastlanmaktadır. Belirsizlik, net bir şekilde tanımlanmamış, muğlak ve geniş kapsamlı bir kavram olduğu için belirsizlikle ilgilenen birçok çalışma alanı bu durumu klasik matematiksel yöntemlerle çözme konusunda yetersiz kalmıştır. Bundan dolayı bilim adamları belirsizliği anlayabilmek, kavrayabilmek ve buna uygun çözümler geliştirebilmek için birçok teori ortaya koymuşlardır. Bulanık küme teorisi, esnek küme teorisi, yaklaşımlı küme teorisi, olasılık teorisi iyi bilinen ve belirsizlik içeren problemleri modellemek için sıkça kullanılan matematiksel yaklaşımlardır.

Bulanık küme teorisi kavramı ilk olarak Zadeh [40] tarafından ileri sürülmüştür. Bir bulanık küme, bir X evrensel kümesinin elemanlarını $[0,1]$ aralığına götüren bir üyelik fonksiyon yardımı ile karakterize edilir. Bulanık mantıkta, evrende bulunan herhangi bir nesne o evrendeki bir kümenin mutlaka elemanıdır fakat eleman olma derecesi farklıdır.

Klasik küme teorisinde bir olgu sadece 0 ve 1 değerlerinden birisi ile temsil edilirken, bulanık küme teorisinde $[0,1]$ aralığında sonsuz sayıda değer alabilir. Böylece bir olgu, bulanık mantık yaklaşımına göre kesin olmayan değerlere de sahip olabilir. Bulanık mantık denetleyicileri kullanılarak geliştirilen teknolojiler birçok alanda uygulama imkanı bulmuştur.

Aralık değerli bulanık küme kavramı, Zadeh [41] tarafından bulanık kümelerin bir devamı olarak ortaya konuldu. Bir aralık değerli bulanık küme bir aralık değerli üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Belirsizlik içeren problemler için daha yeterli tanımlamalar sundukları için, aralık değerli bulanık kümeler geleneksel bulanık kümelerden daha kullanışlı hale gelmiştir. Aralık değerli bulanık kümeler, bazı araştırmacılar tarafından büyük ölçüde incelenmiştir. Gorzalczany [13] aralık değerli bulanık kümeleri kullanarak, zekaya dayalı yaklaşık akıl yürütme problemi için bir çıkarım yöntemi verdi. Ayrıca Gorzalczany [12] aralık değerli bulanık kümeleri kullanarak çok değerli mantık üzerinde çalıştı. Roy ve Biswas [32] aralık değerli bulanık ilişkiler kavramını incelediler.

Esnek küme teorisi ilk olarak Molodtsov [27] tarafından belirsizlik içeren problemlere çözüm geliştirmek için yeni bir yaklaşım olarak ortaya konuldu. Esnek küme teorisi ekonomi, bilişim sistemleri, mühendislik, sosyal bilimler, tıp bilimi ve diğer birçok bilim dalında geniş bir uygulama imkanı buldu. Maji ve ark. [22] esnek kümelerin karar verme problemlerindeki ilk pratik uygulamasını ele aldılar ve ayrıca esnek kümelerle ilgili bazı temel kavramları vererek bunlara ait özellikleri araştırdılar. Daha sonraki süreçlerde birçok araştırmacı esnek kümelerin özelliklerini incelediler ve esnek küme teorisinin cebirsel yapılar üzerinde ki uygulamalarını ele aldılar. Aktaş ve Çağman [4] esnek küme teorisinin bulanık küme teorisi ve kaba küme teorisi ile olan ilişkisini incelediler. Ali ve ark. [5] esnek kümeler üzerinde yeni işlemler tanımladılar.

Daha sonra Maji ve ark. [23] bulanık kümeleri ve esnek kümeleri birleştirerek bulanık esnek küme kavramını verdiler. Birçok araştırmacı bu kavramı kullanarak bulanık esnek kümeler ile ilgili uygulamalar yaptılar. Yang ve ark. [39] bulanık esnek kümeler üzerinde yeni işlemler tanımladılar. Neog ve ark. [29] bulanık esnek birleşim, bulanık esnek arakesit, bulanık esnek komplement gibi yeni kavramları ortaya koydular ve bunlara ait özellikleri araştırdılar. Feng ve ark. [10] karar verme problemler için bulanık esnek kümelerin uygulanabilir bir yaklaşımını sundular. Jun ve ark. [16] bulanık esnek kümeleri BCK/BCI cebirlerine uyguladılar. Kharal ve Ahmad [18] bulanık esnek dönüşümleri verdiler. Kong ve ark. [19] bir karar verme probleminin çözümü için bulanık esnek kümelerin teorik bir yaklaşımını verdiler. Liu ve Xin [20] bulanık esnek grup kavramını verdiler ve bu kavrama ait özellikleri araştırdılar. Majumdar ve Samanta [24] genelleştirilmiş bulanık esnek küme kavramını verdiler.

Yang ve ark. [38] aralık değerli bulanık kümelerle esnek kümeleri birleştirerek, aralık değerli bulanık esnek küme kavramını tanımladılar ve bu kavrama ait özellikleri araştırdılar. Son [34] aralık değerli bulanık esnek kümelerin özelliklerini araştırdı.

Graf teori ilk kez 1735 yılında Euler [9] tarafından ortaya konulmuştur. Graflar, bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi ifade etmek için kullanılır. Her bir eleman köşe noktaları ve bunlara ait ilişkili kenarlar yardımıyla gösterilmektedir. Yakın zamana kadar pek uygulama olanağı bulunmayan graf teori bilgisayara dayanan yeni yöntemlerin gelişmesi ile elektrik mühendisliğinden yöneylem araştırmasına kadar geniş bir alanı kapsayan çalışmalarda aranan bir matematik kolu oldu.

Euler'in graf kavramını ortaya koymasından sonra Rosenfeld [31] bulanık graf teoriyi graf teorinin bir genellemesi olarak ortaya koydu. Rosenfeld, maksimum ve minimum operatörlerini kullanarak, graf teorinin teorik uygulamalarını ortaya koydu. Bulanık graf teorisi, sistemde bulunan bilgi seviyesinin farklı hassasiyet seviyelerine göre değiştiği gerçek zamanlı sistemlerin modellenmesinde artan sayıda uygulama bulmaktadır. Bulanık modeller, mühendislik ve bilimlerde kullanılan geleneksel sayısal modeller ile uzman sistemlerde kullanılan sembolik modeller arasındaki farklılıkları azaltma amacı nedeniyle kullanışlı hale gelmiştir. Bulanık graf uygulamaları, küme analizi, veri tabanı teorisi, karar verme ve ağların optimizasyonu gibi geniş bir yelpazeyi kapsar.

Bhattacharya [6] bulanık grafların bazı temel özelliklerini verdi. Mordeson ve Peng [28] bulanık graflar üzerinde yeni işlemler tanımladılar ve güçlü bulanık graf yapısını tanımladılar. Daha sonra birçok araştırmacı bulanık küme kavramını graf teori üzerinde ele alarak farklı yapılar tanımladılar ve bulanık garfların özelliklerini incelediler. Sunitha and Vijayakumar [35] bulanık grafların komplementi kavramını verdiler. Somasundaram [33] bulanık graflar üzerinde birleşim, bileşke, kartezyen çarpım gibi çeşitli işlemleri inceledi ve bunlara ait bir takım özellikler elde etti. Gani ve Ahmed [11] bulanık grafların büyüklüğü, sırası, derecesi gibi kavramları ele aldı ve bunlara ait özellikleri inceledi. Akram ve Dudek [2] bulanık grafları, aralık değerli bulanık graflara genişleterek aralık değerli bulanık graf kavramını ortaya koydular ve bu kavramın özelliklerini incelediler. Craine [7] aralık değerli bulanık grafların karakterizasyonunu verdi. Karunambigai ve Parvathy [17] sezgisel bulanık graflar üzerinde çalıştı. Parvathy ve ark. [30] sezgisel bulanık graflar üzerinde yeni işlemler tanımladılar ve bunlara ait özellikleri ortaya koydular.

Thumbakara ve George [36] esnek graf, esnek alt graf, esnek graf homomorfizması ve esnek tam graf kavramlarını verdiler ve bunlara ait özellikleri incelediler. Akram ve Nawaz [1] esnek graflar üzerinde bazı yeni cebirsel işlemler tanımladılar.

Mohinta ve Samanta [26] bulanık esnek graf kavramını verdiler ve bu kavrama ait özellikleri araştırdılar. Daha sonra Akram ve Nawaz [3] bulanık esnek grafların farklı uygulamalarını ele aldılar ve bunlara ait yeni sonuçlar elde ettiler. Masarwah ve Qamar [25] bulanık esnek graflar üzerinde bazı yeni kavramları ortaya koydular. Çelik [8] bipolar bulanık esnek graf kavramını verdi ve temel özelliklerini araştırdı.

Bu tez çalışmasında, bulanık esnek graf kavramı yeniden ele alınarak, bulanık esnek graf yapısı üzerinde birleşim, arakesit, kartezyen çarpım, güçlü çarpım ve bileşke gibi birtakım yeni işlemler tanımlanmıştır ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca aralık değerli bulanık esnek kümeler ile graf teori birleştirilerek aralık değerli bulanık esnek graf kavramı verilmiştir. Üstelik bu yapı üzerinde birleşim, arakesit, kartezyen çarpım, güçlü çarpım ve bileşke gibi birtakım yeni işlemler verilerek bazı temel özellikleri araştırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bulanık Kümeler, Aralık Değerli Bulanık Kümeler, Esnek Kümeler, Bulanık Esnek Kümeler ve Aralık Değerli Bulanık Esnek Kümeler

Tanım 2.1.1 [40] $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\mu : X \to [0,1]$ fonksiyonuna X'in bulanık alt kümesi denir ve $\mu = \{(x, \mu(x)) : x \in X,\ \ \mu(x) \in [0,1]\}$ şeklinde gösterilir. X kümesi üzerinde tanımlı bütün bulanık kümelerin ailesi $B(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 [40] $X \neq \emptyset$ bir küme ve μ, X üzerinde bir bulanık küme olsun. $\nu : X \times X \to [0,1]$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $\nu(x,y) \leq min\{\mu(x), \mu(y)\}$ ise ν ye X üzerinde bir bulanık bağıntı denir.

Tanım 2.1.3 [40] $\mu, \nu \in B(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise ν'ye μ'yü kapsar denir ve $\mu \leq \nu$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 [40] $\mu, \nu \in B(X)$ ve $x \in X$ olsun.

$$(\mu \vee \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x) = max\{\mu(x), \nu(x)\}$$
$$(\mu \wedge \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x) = min\{\mu(x), \nu(x)\}$$

ile tanımlanan bulanık alt kümelere sırasıyla μ ile ν'nün birleşimi ve arakesiti denir.

Tanım 2.1.5 [41] Int([0,1]), [0,1] aralığındaki tüm kapalı aralık değerli kümeler olmak üzere $\hat{X} : X \to$Int[0,1] şeklinde tanımlanan fonksiyona X üzerinde aralık değerli bulanık küme denir. X üzerinde tanımlı bütün aralık değerli bulanık kümelerin ailesi $AD(X)$ ile gösterilir. Her $\hat{X} \in AD(X)$ ve her $x \in X$ için bir x elemanın üyelik derecesi $\mu_{\widehat{X}} = [\mu^-_{\widehat{X}}(x), \mu^+_{\widehat{X}}(x)]$ şeklinde ifade edilir. Burada $\mu^-_{\widehat{X}}(x)$ ve $\mu^+_{\widehat{X}}(x)$, $x \in X$ elemanının alt ve üst üyelik derecesi olarak adlandırılır ve ayrıca $0 \leq \mu^-_{\widehat{X}}(x) \leq \mu^+_{\widehat{X}}(x) \leq 1$ dir.

Tanım 2.1.6 [41] $\widehat{X}$, X üzerinde aralık değerli bulanık küme olsun. X üzerinde bir aralık değerli bulanık bağıntı $R_{\widehat{X}} : X \times X \to$ Int[0,1] dönüşümü ile verilir. Burada $R_{\widehat{X}} = [R^-_{\widehat{X}}(x,y), R^+_{\widehat{X}}(x,y)]$ ve $R^-_{\widehat{X}} \leq R^+_{\widehat{X}}$ şeklindedir.

Tanım 2.1.7 [27] $X \neq \emptyset$ bir küme, E bir parametre kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F : A \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümü ile verilen (F, A) ikilisine X üzerinde bir esnek küme denir. $e \in A$ için $F(e)$ ye (F, A) esnek kümesinin e- yaklaşımlı elemanlarının kümesi denir.

Tanım 2.1.8 [27] (F, A) ve (G, B) X üzerinde iki esnek küme olsun. (F, A)'ya (G, B)'nin esnek alt kümesi denir $\Leftrightarrow$

i) $A \subseteq B$

ii) Her $e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$

Bu durum $(F, A) \subseteq_E (G, B)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.1.9 [23] X bir evrensel küme, E parametreler kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $B(X)$, X üzerindeki bütün bulanık alt kümelerinin kümesi olmak üzere $F : A \rightarrow B(X)$ ile verilen (F, A) ikilisine X üzerinde bir bulanık esnek küme denir.

Tanım 2.1.10 [23] (F, A) ve (G, B) X üzerinde iki bulanık esnek küme olsun. (F, A)' ya (G, B)'nin bulanık esnek alt kümesi denir $\Leftrightarrow$

i) $A \subseteq B$

ii) Her $e \in A$ için $F(e) \leq G(e)$

Bu durum $(F, A)\tilde{\subseteq}_E(G, B)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.1.11 [38] X bir evrensel küme, E parametreler kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $AD(X)$, X üzerindeki tüm aralık değerli bulanık kümelerin kümesi olmak üzere $F : A \rightarrow AD(X)$ ile verilen (F, A) ikilisine X üzerinde aralık değerli bulanık esnek küme denir. X üzerinde bir aralık değerli bulanık esnek küme X'in aralık değerli bulanık alt kümelerinin parametreleştirilmiş bir ailesidir. Üstelik aralık değerli bulanık esnek küme bir esnek kümenin özel bir durumudur. Her $e \in A$ için $F(e)$ bir aralık değerli bulanık küme olarak ele alınır. Bu küme; $F(e) = \{< x, \mu_{F(e)}(x) >: x \in X\}$ olarak yazılabilir. Eğer her $e \in A$, her $x \in X$ için $\mu^-_{F(e)}(x) = \mu^+_{F(e)}$ ise $F(e)$ standart bir bulanık küme ve (F, A)' da bir bulanık esnek küme olarak ele alınır.

2.2 Graflar, Bulanık Graflar, Aralık Değerli Bulanık Graf ve Esnek Graflar

Tanım 2.2.1 [9] Bir G^* grafı sonlu sayıda nesne içeren $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ köşe elemanları kümesi ile $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ kenar elemanları kümesinden oluşur ve $G^* = (V, E)$ ikilisiyle gösterilir. G^* bir graf olmak üzere $\{u, v\}$ kümesi G^* grafının bir kenarı olsun. Genellikle bu kenar uv veya vu şeklinde gösterilir. Eğer $e = uv$, G^* grafına ait bir kenar ise u ve v köşe noktalarının G^* grafında komşu (bağlantılı) olduğunu veya e nin u ve v köşe noktalarını birleştirdiğini söyleriz. Herhangi bir köşe ile bağlantılı olmayan bir köşeye ayrık köşe denir.

Tanım 2.2.2 [14] Bir grafın, bir köşesini yine kendisine bağlayan bir kenarına döngü denir. Bir grafta birden fazla kenar iki köşeyi birleştirirse bu kenarlara çoklu kenar denir. Döngü ve çoklu kenar içermeyen graflara basit graf denir.

Tanım 2.2.3 [14] Bir G^* grafının alt grafı, tüm köşe noktaları ve kenarları G^* tarafından kapsanan bir graftır.

Tanım 2.2.4 [14] $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ iki basit graf olmak üzere bu iki grafın birleşimi, köşe elemanları kümesinin birleşimi $V_1 \cup V_2$ ile kenar elemanları kümesinin birleşimi $E_1 \cup E_2$ kümelerinden oluşan basit graftır. Bu durum $G_1^* \cup G_2^* = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5 [14] $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ iki basit graf olmak üzere bu iki grafın arakesiti, köşe elemanları kümesinin arakesiti $V_1 \cap V_2$ ile kenar elemanları kümesinin arakesiti $E_1 \cap E_2$ kümelerinden oluşan basit graftır. G_1^* ve G_2^* graflarının arakesiti $G_1^* \cap G_2^* = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.6 [15] $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ iki basit graf olsun. G_1^* ve G_2^* nin kartezyen çarpımı $G^* = (V, E) = (V_1 \times V_2, E = \{(uv_1, uv_2) \mid u \in V_1,\ v_1v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1v, u_2v \mid v \in V_2,\ u_1u_2 \in E_1\})$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.7 [15] $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ iki basit graf olsun. G_1^* ve G_2^* nin güçlü çarpımı $G^* = (V, E) = (V_1 \times V_2, E = \{(uv_1, uv_2) \mid u \in V_1,\ v_1v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1v, u_2v) \mid v \in V_2,\ u_1u_2 \in E_1\} \cup \{(u_1v_1, u_2v_2) \mid u_1u_2 \in E_1,\ v_1v_2 \in E_2,\ u_1 \neq u_2,\ v_1 \neq v_2\})$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.8 [15] $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ iki basit graf olsun. G_1^* ve G_2^* nin bileşkesi $G^* = (V, E) = (V_1 \times V_2, E = \{(uv_1, uv_2) \mid u \in V_1,\ v_1v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1v, u_2v) \mid v \in V_2,\ u_1u_2 \in E_1\} \cup \{(u_1v_1, u_2v_2) \mid u_1u_2 \in E_1,\ v_1 \neq v_2\})$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.9 [31] $V \neq \emptyset$ bir küme, $\mu : V \to [0,1]$ ve $\nu : V \times V \to [0,1]$ olsun. Eğer her $x, y \in V$ için $\nu(x,y) \leq min\{\mu(x), \mu(y)\}$ ise $G = (\mu, \nu)$ ikilisine V üzerinde bir bulanık graf denir. Burada μ ve ν sırasıyla bulanık grafın bulanık köşelerini ve bulanık kenarlarını ifade eder.

Tanım 2.2.10 [31] $H = (\gamma, \rho)$ ve $G = (\mu, \nu)$ V üzerinde iki bulanık graf olsun. Eğer her $x, y \in V$ için $\gamma(x) \leq \mu(x)$ ve $\rho(x,y) \leq \nu(x,y)$ ise H ya G nin bulanık alt grafı denir.

Tanım 2.2.11 [31] $G^* = (V, E)$ bir basit graf olsun. $A = [\mu_A^-, \mu_A^+]$, V üzerinde bir aralık değerli bulanık küme ve $B = [\mu_B^-, \mu_B^+]$, E üzerinde bir aralık değerli bulanık bağıntı olsun. Eğer her $xy \in E$ için $\mu_B^-(xy) \leq min\{\mu_A^-(x), \mu_A^-(y)\}$ ve $\mu_B^+(xy) \leq min\{\mu_A^+(x), \mu_A^+(y)\}$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa $G_I = (A, B)$ ikilisine G^* üzerinde aralık değerli bulanık graf denir.

Tanım 2.2.12 [36] $G_E = (G^*, F, K, A)$ dörtlüsü aşağıdaki koşulları sağlıyor ise G_E ye bir esnek graf denir.

i) $G^* = (V, E)$ bir basit graftır.

ii) $A \neq \emptyset$ bir kümedir.

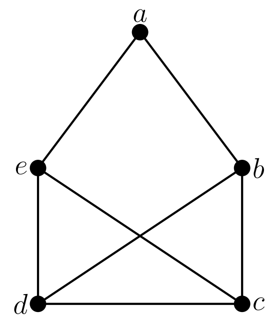
iii) (F, A), V üzerinde bir esnek kümedir.

iv) (K, A), E üzerinde bir esnek kümedir.

v) Her $e \in A$ için $H(e) = (F(e), K(e))$, $G^* = (V, E)$ grafının bir alt grafıdır.

Bir esnek graf $G_E = (F, K, A) = \{H(e) \mid e \in A\}$ şeklinde de gösterilebilir.

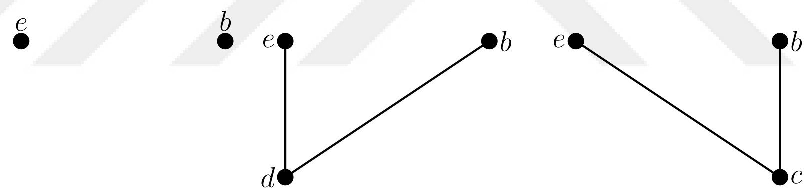
Örnek 2.2.1 $G^* = (V, E)$ basit grafı aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 2.1: $G^* = (V, E)$ basit grafı

$A = \{a, c, d\}$ bir parametre kümesi olmak üzere V üzerinde (F, A) esnek kümesi her $x \in A$ için $F(a) = \{b, e\}$, $F(c) = \{b, d, e\}$ ve $F(d) = \{b, c, e\}$ şeklinde verilsin.
E üzerinde (K, A) esnek kümesi her $x \in A$ için $K(a) = \emptyset$, $K(c) = \{bd, de\}$, $K(d) = \{bc, ce\}$ şeklinde verilsin.

G^* ın alt grafları her $x \in A = \{a, c, d\}$ için $H(a) = (F(a), K(a))$, $H(c) = (F(c), K(c))$ ve $H(d) = (F(d), K(d))$ şeklindedir.



$H(a)$ alt grafı $H(c)$ alt grafı $H(d)$ alt grafı

Şekil 2.2: $H(a), H(c), H(d)$ alt grafları

Sonuç olarak $G_E = \{H(a), H(c), H(d)\}$ kümesi $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir esnek graftır.

3. BULANIK ESNEK GRAFLAR

Bu bölümde bulanık esnek graf kavramını vereceğiz, bu kavrama ait bazı temel özellikleri araştıracağız ve elde edilen sonuçları değerlendireceğiz.

Tanım 3.0.1 Bir $\widetilde{G}_E = (G^*, F, K, A)$ dörtlüsü aşağıdaki kosulları sağlıyor ise $\widetilde{G}_E$ ye bulanık esnek graf denir.

i) $G^* = (V, E)$ bir basit graftır

ii) $A \neq \emptyset$ bir parametre kümesidir

iii) (F, A) V üzerinde bir bulanık esnek kümedir

iv) (K, A) E üzerinde bir bulanık esnek kümedir

v) Her $e \in A$ için $H(e) = (F(e), K(e))$, $G^* = (V, E)$ basit grafının bir bulanık alt grafıdır. Yani her $e \in A$ ve $xy \in V$ için $K(e)(xy) \leq min\{F(e)(x), F(e)(y)\}$ dır. Açıkca bir bulanık esnek graf, bulanık grafların parametreleştirilmiş bir ailesidir.

Örnek 3.0.1 $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını gözönüne alalım. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun. $F : A \to B(V)$ ve $K : A \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F, A) ve (K, A) bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F(e_1) = \{< x_1, 0.6 >, < x_2, 0.3 >, < x_3, 0.4 >\}$

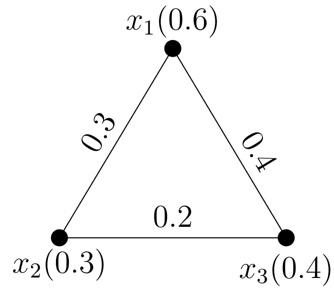
$F(e_2) = \{< x_1, 0.2 >, < x_2, 0.5 >, < x_3, 0.2 >\}$

$F(e_3) = \{< x_1, 0.4 >, < x_2, 0.8 >, < x_3, 0.2 >\}$

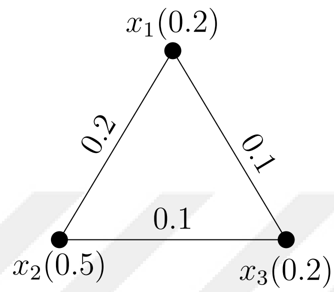
$K(e_1) = \{< x_1x_2, 0.3 >, < x_1x_3, 0.4 >, < x_2x_3, 0.2 >\}$

$K(e_2) = \{< x_1x_2, 0.2 >, < x_1x_3, 0.1 >, < x_2x_3, 0.1 >\}$

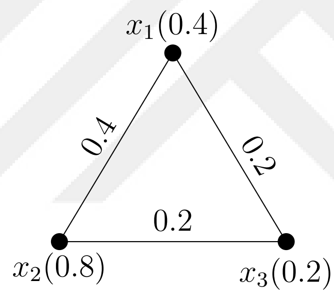
$K(e_3) = \{< x_1x_2, 0.4 >, < x_1x_3, 0.2 >, < x_2x_3, 0.2 >\}$



Şekil 3.1: e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ bulanık grafı



Şekil 3.2: e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ bulanık grafı



Şekil 3.3: e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ bulanık grafı

Açıkca $\widetilde{G}_E = (G^*, F, K, A)$ bir bulanık esnek graftır.

Örnek 3.0.2 $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını gözönüne alalım. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun. $F : A \to B(V)$ ve $K : A \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F, A) ve (K, A) bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F(e_1) = \{< x_1, 0.5 >, < x_2, 0.2 >, < x_3, 0.0 >\}$

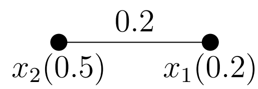
$F(e_2) = \{< x_1, 0.4 >, < x_2, 0.7 >, < x_3, 0.6 >\}$

$F(e_3) = \{< x_1, 0.5 >, < x_2, 0.9 >, < x_3, 0.3 >\}$

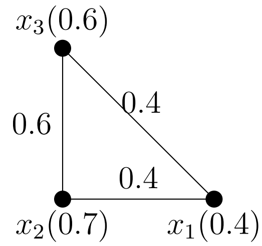
$K(e_1) = \{< x_1x_2, 0.2 >, < x_1x_3, 0.0 >, < x_2x_3, 0.0 >\}$

$K(e_2) = \{< x_1x_2, 0.4 >, < x_1x_3, 0.4 >, < x_2x_3, 0.6 >\}$

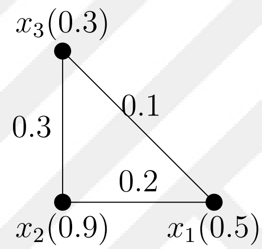
$K(e_3) = \{< x_1x_2, 0.2 >, < x_1x_3, 0.1 >, < x_2x_3, 0.3 >\}$



Şekil 3.4: e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ bulanık grafı



Şekil 3.5: e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ bulanık grafı



Şekil 3.6: e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ bulanık grafı

Açıkca $\widetilde{G}_E = (G^*, F, K, A)$ bir bulanık esnek graftır.

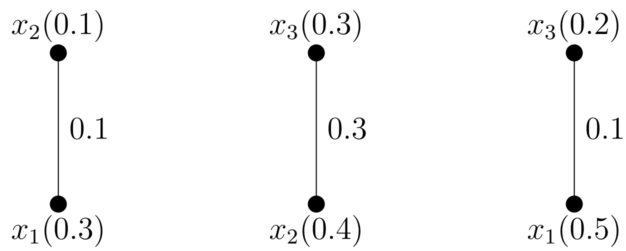
Tanım 3.0.2 $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, A)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G'}_E$'ye $\widetilde{G}_E$ nin bir bulanık esnek alt grafıdır denir.$\Leftrightarrow$ Her $e \in A$ ve $xy \in V$ için

i) $F_1(e)(x) \leq F_2(e)(x)$

ii) $K_1(e)(xy) \leq K_2(e)(xy)$ dir.

Örnek 3.0.3 $\widetilde{G}_E = (G^*, F, K, A)$ bulanık esnek grafı Örnek 3.0.2 deki gibi ele alınsın. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun. $F_1 : A \to \mathcal{P}(V)$ ve $K_1 : A \to \mathcal{P}(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_1, A) ve (K_1, A) bulanık esnek kümeleri aşağıdaki tanımlansın.
$F_1(e_1) = \{< x_1, 0.3 >, < x_2, 0.1 >, < x_3, 0.0 >\}$
$F_1(e_2) = \{< x_1, 0.0 >, < x_2, 0.4 >, < x_3, 0.3 >\}$
$F_1(e_3) = \{< x_1, 0.5 >, < x_2, 0.0 >, < x_3, 0.2 >\}$
$K_1(e_1) = \{< x_1x_2, 0.1 >, < x_1x_3, 0.0 >, < x_2x_3, 0.0 >\}$
$K_1(e_2) = \{< x_1x_2, 0.0 >, < x_1x_3, 0.0 >, < x_2x_3, 0.3 >\}$

$K_1(e_3) = \{< x_1x_2, 0.0 >, < x_1x_3, 0.1 >, < x_2x_3, 0.0 >\}$



e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ bulanık grafı

e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ bulanık grafı

e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ bulanık grafı

Şekil 3.7: $\widetilde{G'}_E$ bulanık esnek grafı

Açıkça $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ bir bulanık esnek graftır. Üstelik $\widetilde{G'}_E$, $\widetilde{G}_E$ nin bir bulanık esnek alt grafıdır.

Tanım 3.0.3 $\widetilde{G}_E = (G^*, F, K, A)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G}_E$ ya tam bulanık esnek graf denir $\Leftrightarrow$ Her $e \in A$ ve $xy \in V$ için $K(e)(xy) = min\{F(e)(x), F(e)(y)\}$ dır.

Örnek 3.0.4 $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını gözönüne alalım. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun. $F : A \to B(V)$ ve $K : A \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F, A) ve (K, A) bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F(e_1) = \{< x_1, 0.4 >, < x_2, 0.1 >, < x_3, 0.5 >\}$

$F(e_2) = \{< x_1, 0.3 >, < x_2, 0.6 >, < x_3, 0.5 >\}$

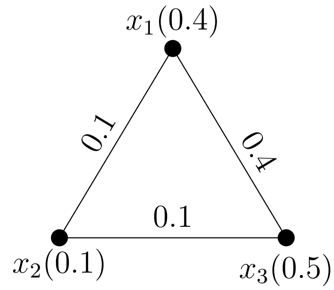
$F(e_3) = \{< x_1, 0.4 >, < x_2, 0.8 >, < x_3, 0.2 >\}$

$K(e_1) = \{< x_1x_2, 0.1 >, < x_1x_3, 0.4 >, < x_2x_3, 0.1 >\}$

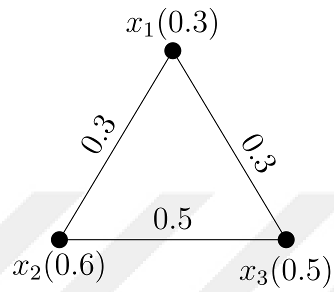
$K(e_2) = \{< x_1x_2, 0.3 >, < x_1x_3, 0.3 >, < x_2x_3, 0.5 >\}$

$K(e_3) = \{< x_1x_2, 0.4 >, < x_1x_3, 0.2 >, < x_2x_3, 0.2 >\}$

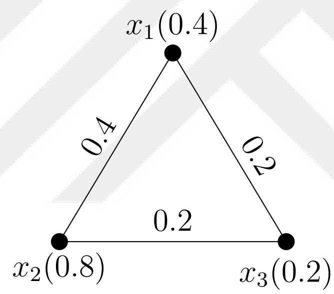
Açıkça $\widetilde{G}_E = (G^*, F, K, A)$, G^* basit grafı üzerinde tam bulanık esnek graftır.



Şekil 3.8: e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ bulanık grafı



Şekil 3.9: e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ bulanık grafı



Şekil 3.10: e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ bulanık grafı

Örnek 3.0.5 $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{x_1x_1, x_1x_3, x_3x_3\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını gözönüne alalım. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun. $F : A \to B(V)$ ve $K : A \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F, A) ve (K, A) bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F(e_1) = \{< x_1, 0.2 >, < x_2, 0.0 >, < x_3, 0.6 >\}$

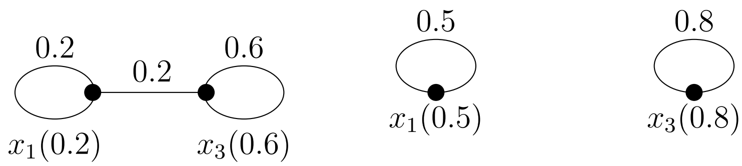
$F(e_2) = \{< x_1, 0.5 >, < x_2, 0.0 >, < x_3, 0.0 >\}$

$F(e_3) = \{< x_1, 0.0 >, < x_2, 0.0 >, < x_3, 0.8 >\}$

$K(e_1) = \{< x_1x_1, 0.2 >, < x_1x_3, 0.2 >, < x_3x_3, 0.6 >\}$

$K(e_2) = \{< x_1x_1, 0.5 >, < x_1x_3, 0.0 >, < x_3x_3, 0.0 >\}$

$K(e_3) = \{< x_1x_1, 0.0 >, < x_1x_3, 0.0 >, < x_3x_3, 0.8 >\}$



e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ bulanık grafı

e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ bulanık grafı

e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ bulanık grafı

Şekil 3.11: $\widetilde{G}_E$ tam bulanık esnek grafı

Açıkça $\widetilde{G}_E = (G^*, F, K, A)$, G^* basit grafı üzerinde tam bulanık esnek graftır.

Tanım 3.0.4 $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki bulanık esnek graf ve $V_1, V_2 \subseteq V$ olsun. $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin birleşimi $\widetilde{G}_E \cup \widetilde{G'}_E = (G^*, F_3, K_3, C)$ şeklinde gösterilir. Burada $C = A \cup B$ ve $V = V_1 \cup V_2$ olmak üzere (F, C) V üzerinde ve (K, C) E üzerinde bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_E \cup \widetilde{G}'_E$ nin köşe ve kenarlarının üyelik değerleri her $e \in C$ ve her $x \in V$, $xy \in E$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_3(e)(x) = \begin{cases} F_1(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ x \in V_1 \backslash V_2 \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ x \in V_2 \backslash V_1 \\ F_1(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ x \in V_1 \cap V_2 \\ F_2(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ x \in V_2 \backslash V_1 \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ x \in V_1 \backslash V_2 \\ F_2(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ x \in V_1 \cap V_2 \\ max\{F_1(e)(x), F_2(e)(x)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ x \in V_1 \cap V_2 \\ F_1(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ x \in V_1 \backslash V_2 \\ F_2(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ x \in V_2 \backslash V_1 \end{cases}$$

$$K_3(e)(x,y) = \begin{cases} K_1(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \\ K_1(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ K_2(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ K_2(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ max\{K_1(e)(x,y), K_2(a)(x,y)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ K_1(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ K_2(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \end{cases}$$

Örnek 3.0.6 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_2x_5, x_5x_6\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını gözönüne alalım. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ parametre kümesi ve $V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ olsun. $F_1 : A \to B(V_1)$ ve $K_1 : A \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_1, A) ve (K_1, A) bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F_1(e_1) = \{< x_1, 0.1 >, < x_2, 0.5 >, < x_3, 0.8 >, < x_4, 0.2 >\}$

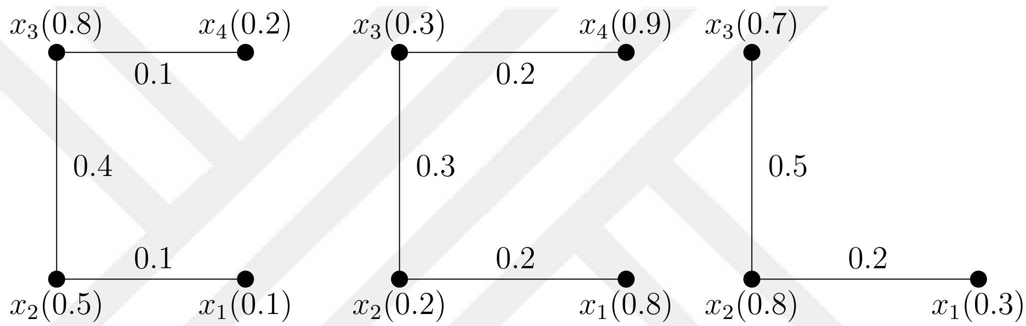
$F_1(e_2) = \{< x_1, 0.8 >, < x_2, 0.2 >, < x_3, 0.3 >, < x_4, 0.9 >\}$

$F_1(e_3) = \{< x_1, 0.3 >, < x_2, 0.8 >, < x_3, 0.7 >, < x_4, 0.0 >\}$

$K_1(e_1) = \{< x_1x_2, 0.1 >, < x_2x_3, 0.4 >, < x_3x_4, 0.1 >\}$

$K_1(e_2) = \{< x_1x_2, 0.2 >, < x_2x_3, 0.3 >, < x_3x_4, 0.2 >\}$

$K_1(e_3) = \{< x_1x_2, 0.2 >, < x_2x_3, 0.5 >, < x_3x_4, 0.0 >\}$



e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ bulanık grafı

e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ bulanık grafı

e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ bulanık grafı

Şekil 3.12: $\widetilde{G}_E$ bulanık esnek grafı

Açıkca $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ G^* üzerinde bir bulanık esnek graftır. Şimdi $B = \{e_2, e_3, e_4\}$ bir parametre kümesi ve $V_2 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ olsun. olsun. $F_2 : B \to B(V_2)$ ve $K_2 : B \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_2, B) ve (K_2, B) bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F_2(e_2) = \{< x_1, 0.2 >, < x_2, 0.3 >, < x_5, 0.9 >, < x_6, 0.7 >\}$

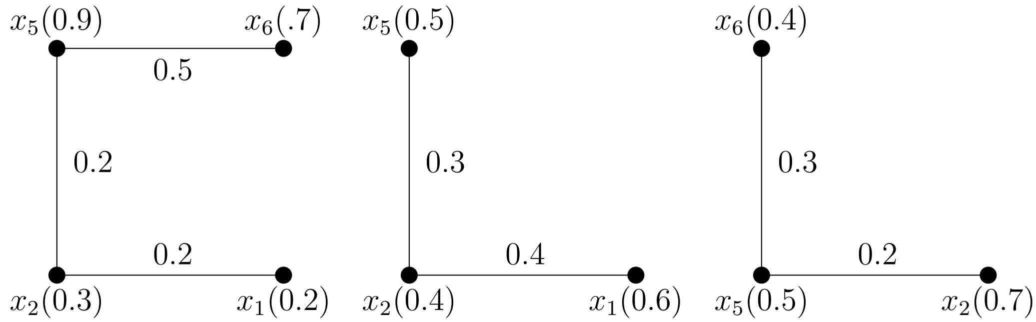
$F_2(e_3) = \{< x_1, 0.6 >, < x_2, 0.4 >, < x_5, 0.5 >, < x_6, 0.0 >\}$

$F_2(e_4) = \{< x_1, 0.0 >, < x_2, 0.7 >, < x_5, 0.5 >, < x_6, 0.4 >\}$

$K_2(e_2) = \{< x_1x_2, 0.2 >, < x_2x_5, 0.2 >, < x_5x_6, 0.5 >\}$

$K_2(e_3) = \{< x_1x_2, 0.4 >, < x_2x_5, 0.3 >, < x_5x_6, 0.0 >\}$

$K_2(e_4) = \{< x_1x_2, 0.0 >, < x_2x_5, 0.2 >, < x_5x_6, 0.3 >\}$



e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ bulanık grafı

e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ bulanık grafı

e_4 parametresine karşılık gelen $H(e_4)$ bulanık grafı

Şekil 3.13: $\widetilde{G'}_E$ bulanık esnek grafı

Açıkca $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ G^* üzerinde bulanık esnek graftır. Üstelik $C = A \cup B$ olup $F_3 : C \to B(V)$ ve $K_3 : C \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_3, C) ve (K_3, C) bulanık esnek kümeleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi elde edilir.

$F_3(e_1) = \{< x_1, 0.1 >, < x_2, 0.5 >, < x_3, 0.8 >, < x_4, 0.2 >, < x_5, 0.0 >, < x_6, 0.0 >\}$

$F_3(e_2) = \{< x_1, 0.8 >, < x_2, 0.3 >, < x_3, 0.3 >, < x_4, 0.9 >, < x_5, 0.9 >, < x_6, 0.7 >\}$

$F_3(e_3) = \{< x_1, 0.6 >, < x_2, 0.8 >, < x_3, 0.7 >, < x_4, 0.0 >, < x_5, 0.5 >, < x_6, 0.0 >\}$

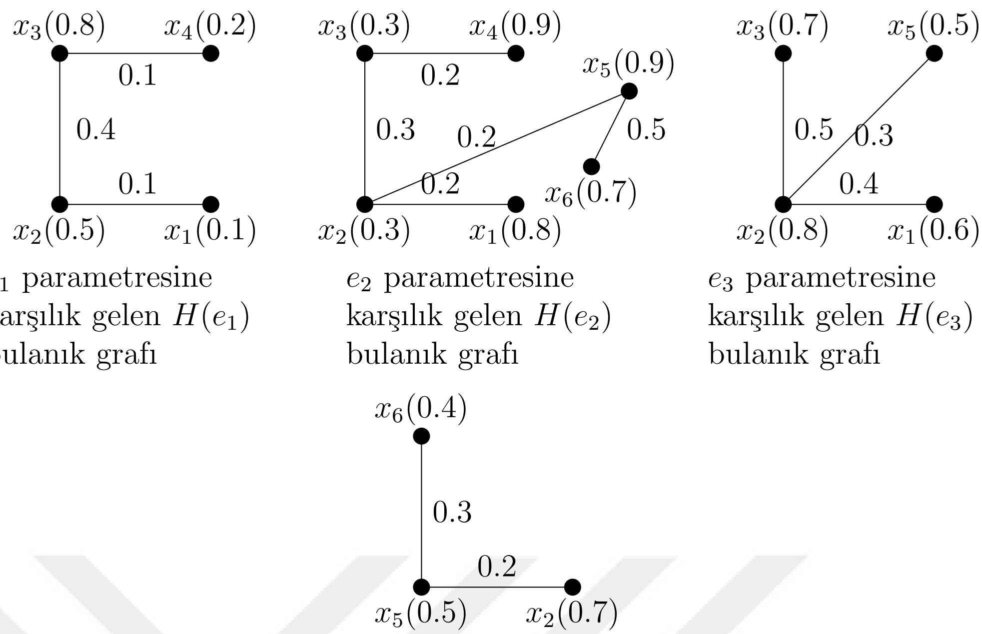
$F_3(e_4) = \{< x_1, 0.0 >, < x_2, 0.7 >, < x_3, 0.0 >, < x_4, 0.0 >, < x_5, 0.5 >, < x_6, 0.4 >\}$

$K_3(e_1) = \{< x_1x_2, 0.1 >, < x_2x_3, 0.4 >, < x_3x_4, 0.1 >, < x_2x_5, 0.0 >, < x_5x_6, 0.0 >\}$

$K_3(e_2) = \{< x_1x_2, 0.2 >, < x_2x_3, 0.3 >, < x_3x_4, 0.2 >, < x_2x_5, 0.2 >, < x_5x_6, 0.5 >\}$

$K_3(e_3) = \{< x_1x_2, 0.4 >, < x_2x_3, 0.5 >, < x_3x_4, 0.0 >, < x_2x_5, 0.3 >, < x_5x_6, 0.0 >\}$

$K_3(e_4) = \{< x_1x_2, 0.0 >, < x_2x_3, 0.0 >, < x_3x_4, 0.0 >, < x_2x_5, 0.2 >, < x_5x_6, 0.3 >\}$



e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ bulanık grafı

e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ bulanık grafı

e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ bulanık grafı

e_4 parametresine karşılık gelen $H(e_4)$ bulanık grafı

Şekil 3.14: $\widetilde{G}_E \cup \widetilde{G'}_E$ bulanık esnek grafı

Buradan $\widetilde{G}_E \cup \widetilde{G'}_E = (G^*, F_3, K_3, C)$ grafının da G^* üzerinde bulanık esnek graf olduğu görülür.

Teorem 3.0.1 $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_E \cup \widetilde{G'}_E$ de G^* üzerinde bir bulanık esnek graftır.

İspat. $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ bulanık esnek graflarının birleşimi $\widetilde{G''}_E = (G^*, F_3, K_3, C)$ olsun. Burada $C = A \cup B$ olmak üzere üç durum vardır.

i) Eğer $e \in A \setminus B$ ve $(x, y) \in (V_1 \times V_1) \setminus (V_2 \times V_2)$ ise

$$K_3(e)(x, y) = K_1(e)(x, y) \leq min\{F_1(e)(x), F_1(e)(y)\} = min\{F_3(e)(x), F_3(e)(y)\}$$

Eğer $e \in A \setminus B$ ve $(x, y) \in (V_2 \times V_2) \setminus (V_1 \times V_1)$ ise

$$K_3(e)(x, y) = 0 \leq min\{F_3(e)(x), F_3(e)(y)\}$$

Eğer $e \in A \setminus B$ ve $(x, y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2)$ ise

$K_3(e)(x,y) = K_1(e)(x,y) \leq min\{F_1(e)(x), F_1(e)(y)\} = min\{F_3(e)(x), F_3(e)(y)\}$

ii) Eğer $e \in B \setminus A$ ise her durum için $K_3(e)(x,y) \leq min\{F_3(e)(x), F_3(e)(y)\}$ dır.

iii) Eğer $e \in A \cap B$ ve $(x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2)$ ise

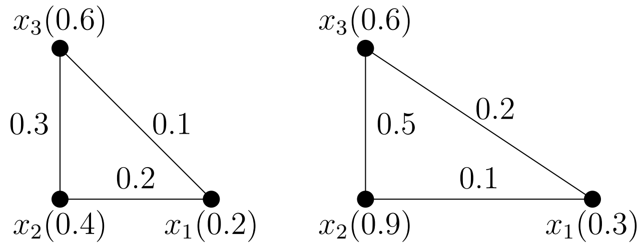
$K_3(e)(x,y) = max\{K_1(e)(x,y), K_2(e)(x,y)\} \leq$
$max\{min\{F_1(e)(x), F_1(e)(y)\}, min\{F_2(e)(x), F_2(e)(y)\}\} \leq$
$max\{min\{F_1(e)(x), F_2(e)(x)\}, min\{F_1(e)(y), F_2(e)(y)\}\} \leq$
$min\{max\{F_1(e)(x), F_2(e)(x)\}, max\{F_1(e)(y), F_2(e)(y)\}\} = min\{F_3(e)(x), F_3(e)(y)\}$

Eğer $e \in A \cap B$ ve $(x,y) \in (V_1 \times V_1) \setminus (V_2 \times V_2)$ yada $(x,y) \in (V_2 \times V_2) \setminus (V_1 \times V_1)$ ise açıkça $K_3(e)(x,y) \leq min\{F_3(e)(x), F_3(e)(y)\}$ dır.

Sonuç olarak $\widetilde{G''}_E = (G^*, F_3, K_3, C)$, G^* üzerinde bulanık esnek graftır.

Tanım 3.0.5 $G^* = (V,E)$ bir basit graf ve $V_1, V_2 \subseteq V$ olsun. $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ $G^* = (V,E)$ üzerinde iki bulanık esnek esnek graf olsun. $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin arakesiti $\widetilde{G}_E \cap \widetilde{G'}_E = (G^*, F, K, C)$ şeklinde gösterilir. Burada $C = A \cap B$ ve $V = V_1 \cap V_2$ olmak üzere (F,C) V üzerinde ve (K,C) E üzerinde bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_E \cap \widetilde{G'}_E$ nin köşe ve kenarlarının üyelik değerleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için $F(e)(x) = min\{F_1(e)(x), F_2(e)(x)\}$ ve $K(e)(x,y) = min\{K_1(e)(x,y), K_2(e)(x,y)\}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.0.7 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\}$ olmak üzere $G^* = (V,E)$ basit grafını gözönüne alalım. $A = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi ve $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ olsun. $F_1 : A \to B(V_1)$ ve $K_1 : A \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_1, A) ve (K_1, A) bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.
$F_1(e_1) = \{< x_1, 0.2 >, < x_2, 0.4 >, < x_3, 0.6 >\}$
$F_1(e_2) = \{< x_1, 0.3 >, < x_2, 0.9 >, < x_3, 0.6 >\}$
$K_1(e_1) = \{< x_1x_2, 0.2 >, < x_1x_3, 0.1 >, < x_2x_3, 0.3 >\}$
$K_1(e_2) = \{< x_1x_2, 0.1 >, < x_1x_3, 0.2 >, < x_2x_3, 0.5 >\}$
Açıkca $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ G^* üzerinde bir bulanık esnek graftır.



e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ bulanık grafı

e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ bulanık grafı

Şekil 3.15: $\widetilde{G}_E$ bulanık esnek grafı

Şimdi $B = \{e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi ve $V_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$ olsun. $F_2 : B \to B(V)$ ve $K_2 : B \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_2, B) ve (K_2, B) bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

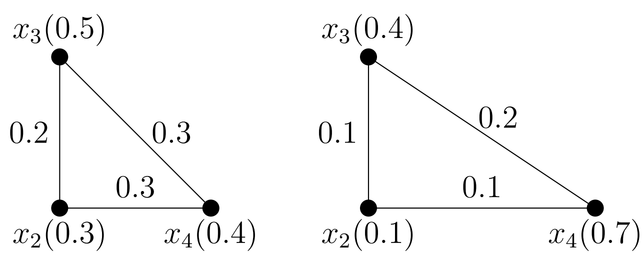
$F_2(e_2) = \{< x_2, 0.3 >, < x_3, 0.5 >, < x_4, 0.4 >\}$

$F_2(e_3) = \{< x_2, 0.1 >, < x_3, 0.4 >, < x_4, 0.7 >\}$

$K_2(e_2) = \{< x_2x_3, 0.2 >, < x_2x_4, 0.3 >, < x_3x_4, 0.3 >\}$

$K_2(e_3) = \{< x_2x_3, 0.1 >, < x_2x_4, 0.1 >, < x_3x_4, 0.2 >\}$

Açıkca $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ G^* üzerinde bir bulanık esnek graftır.



e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ bulanık grafı

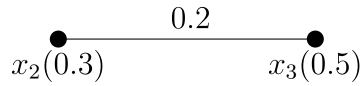
e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ bulanık grafı

Şekil 3.16: $\widetilde{G'}_E$ bulanık esnek grafı

Üstelik $C = A \cap B = \{e_2\}$ olup $F_3 : C \to B(V)$ ve $K_3 : C \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_3, C) ve (K_3, C) bulanık esnek kümeleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi elde edilir.

$F_3(e_2) = \{< x_2, 0.3 >, < x_3, 0.5 >\}$

$K_3(e_2) = \{< x_2x_3, 0.2 >\}$



e_2 parametresine
karşılık gelen $H(e_2)$
bulanık grafı

Şekil 3.17: $\widetilde{G}_E \cap \widetilde{G'}_E$ bulanık esnek grafı

Buradan $\widetilde{G}_E \cap \widetilde{G'}_E = (G^*, F_3, K_3, C)$ grafının da G^* üzerinde bir bulanık esnek graf olduğu görülür.

Teorem 3.0.2 $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ iki bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_E \cap \widetilde{G'}_E$ de G^* üzerinde bir bulanık esnek graftır.

İspat. $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ bulanık esnek graflarının arakesiti $\widetilde{G''}_E = (G^*, F_3, K_3, C)$ olsun. Burada $C = A \cap B$ olmak üzere her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için

$$\begin{aligned} K_3(e)(x,y) &= min\{K_1(e)(x,y), K_2(e)(x,y)\} \\ &\leq min\{min\{F_1(e)(x), F_1(e)(y)\}, min\{F_2(e)(x), F_2(e)(y)\}\} \\ &= min\{min\{F_1(e)(x), F_2(e)(x)\}, min\{F_1(e)(y), F_2(e)(y)\}\} \\ &= min\{F_3(e)(x), F_3(e)(y)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıkça $\widetilde{G''}_E = (G^*, F_3, K_3, B)$ bir bulanık esnek graftır.

Tanım 3.0.6 $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin daraltılmış birleşimi $\widetilde{G}_E \sqcup \widetilde{G'}_E = (G^*, F, K, C)$ şeklinde gösterilir. Burada $V = V_1 \cup V_2$ ve $C = A \cap B$ olmak üzere (F, C) V üzerinde ve (K, C) E üzerinde bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_E \sqcup \widetilde{G'}_E$ nin köşe ve kenarların üyelik değerleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_3(e)(x) = \begin{cases} F_1(e)(x) & \text{eğer} \quad x \in V_1 \backslash V_2 \\ F_2(e)(x) & \text{eğer} \quad x \in V_2 \backslash V_1 \\ max\{F_1(e)(x), F_2(e)(x)\} & \text{eğer} \quad x \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$$

$$K_3(e)(x,y) = \begin{cases} K_1(e)(x,y) & \text{eğer} \quad (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ K_2(e)(x,y) & \text{eğer} \quad (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \\ max\{K_1(e)(x,y), K_2(a)(x,y)\} & \text{eğer} \quad (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \end{cases}$$

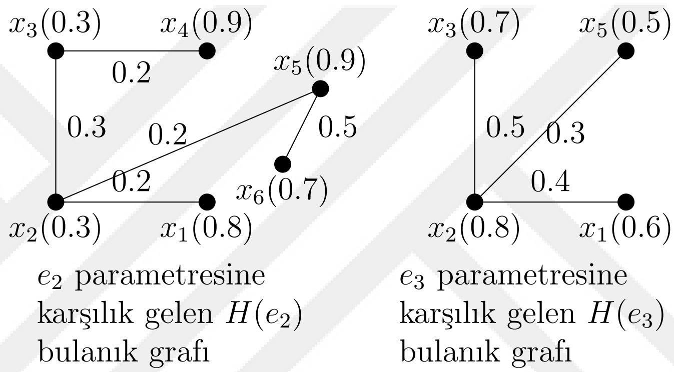
Örnek 3.0.8 $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ bulanık esnek grafları $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde Örnek 3.0.7 de ki gibi ele alınsın. $C = A \cap B$ ve $V = V_1 \cup V_2$ olmak üzere $F_3 : C \to B(V)$ ve $K_3 : C \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_3, C) ve (K_3, C) bulanık esnek kümeleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi elde edilir.

$F_3(e_2) = \{< x_1, 0.8 >, < x_2, 0.3 >, < x_3, 0.3 >, < x_4, 0.9 >, < x_5, 0.9 >, < x_6, 0.7 >\}$

$F_3(e_3) = \{< x_1, 0.6 >, < x_2, 0.8 >, < x_3, 0.7 >, < x_4, 0.0 >, < x_5, 0.5 >, < x_6, 0.0 >\}$

$K_3(e_2) = \{< x_1x_2, 0.2 >, < x_2x_3, 0.3 >, < x_3x_4, 0.2 >, < x_2x_5, 0.2 >, < x_5x_6, 0.5 >\}$

$K_3(e_3) = \{< x_1x_2, 0.4 >, < x_2x_3, 0.5 >, < x_3x_4, 0.0 >, < x_2x_5, 0.3 >, < x_5x_6, 0.0 >\}$



Şekil 3.18: $\widetilde{G}_E \sqcup \widetilde{G'}_E$ bulanık esnek grafı

Buradan $\widetilde{G}_E \sqcup \widetilde{G'}_E = (G^*, F_3, K_3, C)$ grafının da G^* üzerinde bulanık esnek graf olduğu görülür.

Teorem 3.0.3 $\widetilde{G}_{E_1} = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ iki bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_E \sqcup \widetilde{G'}_E$ de G^* üzerinde bir bulanık esnek graftır.

İspat. Tanım 3.0.6 yardımıyla Teorem 3.0.1 in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

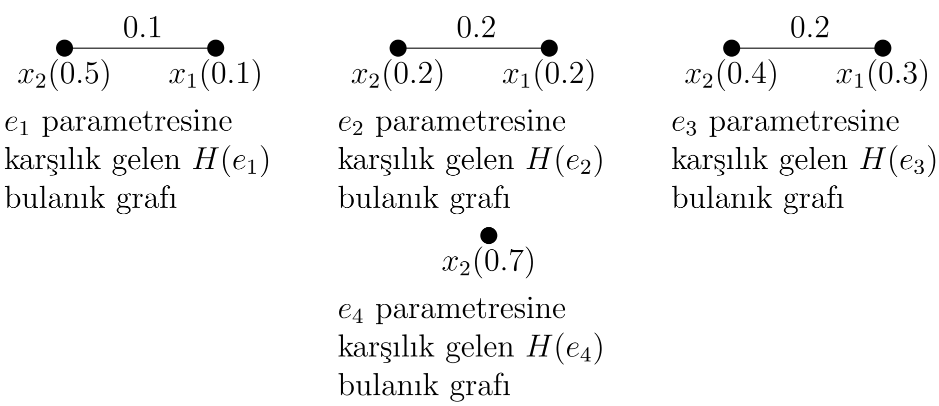
Tanım 3.0.7 $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin genişletilmiş arakesiti $\widetilde{G}_E \sqcap \widetilde{G'}_E = (G^*, F, K, C)$ şeklinde gösterilir. Burada $C = A \cup B$ ve $V = V_1 \cap V_2$ olmak üzere (F, C) V üzerinde ve (K, C) E üzerinde bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_E \sqcap \widetilde{G'}_E$ nin köşe ve kenarların üyelik değerleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_3(e)(x) = \begin{cases} F_1(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B \\ F_2(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A \\ min\{F_1(e)(x), F_2(e)(x)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B \end{cases}$$

$$K_3(e)(x,y) = \begin{cases} K_1(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B \\ K_2(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A \\ min\{K_1(e)(x,y), K_2(a)(x,y)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B \end{cases}$$

Örnek 3.0.9 $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ bulanık esnek grafları $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde Örnek 3.0.7 de ki gibi ele alınsın. $C = A \cup B$ ve $V = V_1 \cap V_2$ olmak üzere $F_3 : C \to B(V)$ ve $K_3 : C \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_3, C) ve (K_3, C) bulanık esnek kümeleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi elde edilir.

$F_3(e_1) = \{< x_1, 0.1 >, < x_2, 0.5 >\}$
$F_3(e_2) = \{< x_1, 0.2 >, < x_2, 0.2 >\}$
$F_3(e_3) = \{< x_1, 0.3 >, < x_2, 0.4 >\}$
$F_3(e_4) = \{< x_1, 0.0 >, < x_2, 0.7 >\}$
$K_3(e_1) = \{< x_1x_2, 0.1 >\}$
$K_3(e_2) = \{< x_1x_2, 0.2 >\}$
$K_3(e_3) = \{< x_1x_2, 0.2 >\}$
$K_3(e_4) = \{< x_1x_2, 0.0 >\}$



Şekil 3.19: $\widetilde{G}_E \sqcap \widetilde{G'}_E$ bulanık esnek grafı

Buradan $\widetilde{G}_E \sqcap \widetilde{G'}_E = (G^*, F_3, K_3, C)$ grafının da G^* üzerinde bulanık esnek graf olduğu görülür.

Teorem 3.0.4 $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ iki bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_E \sqcap \widetilde{G'}_E$ de G^* üzerinde bir bulanık esnek graftır.

İspat. Tanım 3.0.7 yardımıyla Teorem 3.0.2 nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 3.0.8 $\widetilde{G}_E = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin kartezyen çarpımı $\widetilde{G}_E \times \widetilde{G'}_E = (G^*, F_3, K_3, A \times B)$ şeklinde gösterilir. Burada $G^* = (V = V_1 \times V_2, E = E_1 \times E_2)$ olmak üzere $(F_3, A \times B)$ V üzerinde, $(K_3, A \times B)$ E üzerinde bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_E \times \widetilde{G'}_E$ nin köşe noktaları ve kenarlarının üyelik değerleri her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

i) Her $(x, w) \in V_1 \times V_2$ için $F_3(e_1, e_2)(x, w) = min\{F_1(e_1)(x), F_2(e_2)(w)\}$

ii) Her $x \in V_1$, $(w, z) \in E_2$ için $K_3(e_1, e_2)((x, w)(x, z)) = min\{F_1(e_1)(x), K_2(e_2)(w, z)\}$

iii) Her $w \in V_2$, $(x, y) \in E_1$ için $K_3(e_1, e_2)((x, w)(y, w)) = min\{K_1(e_1)(x, y), F_2(e_2)(w)\}$

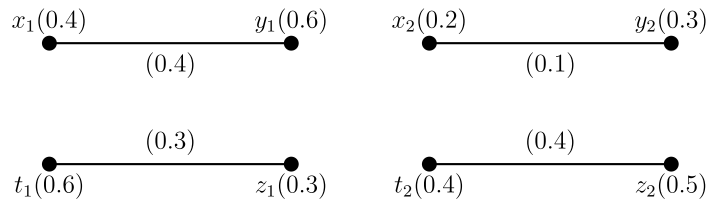
Örnek 3.0.10 $V_1 = \{x_1, y_1, z_1, t_1\}, E_1 = \{x_1y_1, z_1t_1\}$, $V_2 = \{x_2, y_2, z_2, t_2\}$ ve $E_2 = \{x_2y_2, z_2t_2\}$ olmak üzere $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit graflarını ele alalım. $A = \{e_1\}$ ve $B = \{e_2\}$ birer parametre kümesi olsun. (F_1, A), (K_1, A), (F_2, B) ve (K_2, B) bulanık esnek kümeleri V_1, E_1, V_2 ve E_2 üzerinde sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F_1(e_1) = \{(< x_1, 0.4 >, < y_1, 0.6 >, < z_1, 0.3 >, < t_1, 0.6 >)\}$

$K_1(e_1) = \{(< x_1y_1, 0.4 >, < z_1t_1, 0.3 >)\}$

$F_2(e_2) = \{(< x_2, 0.2 >, < y_2, 0.3 >, < z_2, 0.5 >, < t_2, 0.4 >)\}$

$K_2(e_2) = \{(< x_2y_2, 0.1 >, < z_2t_2, 0.4 >)\}$

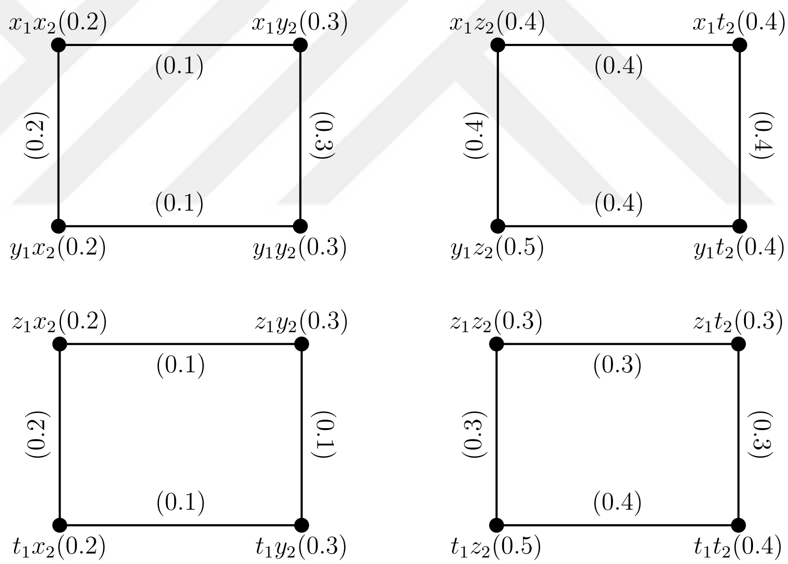


e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ bulanık grafı

e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ bulanık grafı

Şekil 3.20: $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ bulanık esnek grafları

Açıkca $\widetilde{G}_E = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla G_1^* ve G_2^* üzerinde bulanık esnek graflardır.
$\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.21: $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin kartezyen çarpımı

Teorem 3.0.5 $\widetilde{G}_E = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_E \times \widetilde{G'}_E$ de bulanık esnek graftır.

İspat. $\widetilde{G}_E = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki bulanık esnek graf olsun. Her $e_1 \in A$ ve $e_2 \in B$ için üç durum mevcuttur.

i) $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ ve her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için
$K_3(e_1, e_2)(x_1, x_2) = min\{F_1(e_1)(x_1), F_2(e_2)(x_2)\}$
$\leq min[(F_1(e_1) \times F_2(e_2))(x_1), (F_1(e_1) \times F_2(e_2))(x_2)]$
$= min\{F_3(e_1, e_2)(x_1), F_3(e_1, e_2)(x_2)\}$

ii) $x \in V_1$, $(x_2, y_2) \in E_2$ ve her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için
$K_3(e_1, e_2)((x, x_2)(x, y_2)) = min\{F_1(e_1)(x), K_2(e_2)(x_2, y_2)\}$
$\leq min[F_1(e_1)(x), min(F_2(e_2)(x_2), F_2(e_2)(y_2))]$
$= min[min(F_1(e_1)(x), F_2(e_2)(x_2)), min(F_1(e_1)(x), F_2(e_2)(y_2))]$
$= min[(F_1(e_1) \times F_2(e_2))(x, x_2), (F_1(e_1) \times F_2(e_2))(x, y_2)]$
$= min\{F_3(e_1, e_2)(x, x_2), F_3(e_1, e_2)(x, y_2)\}$

iii) $x \in V_2$, $(x_1, y_1) \in E_1$ ve her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için
$K_3(e_1, e_2)((x_1, z)(y_1, z)) = min\{K_1(e_1)(x_1, y_1), F_2(e_2)(z)\}$
$\leq min[F_2(e_2)(z), min(F_1(e_1)(x_1), F_1(e_1)(y_1))]$
$= min[min(F_1(e_1)(x_1), F_2(e_2)(z)), min(F_1(e_1)(y_1), F_2(e_2)(z))]$
$= min[(F_1(e_1) \times F_2(e_2))(x, z), (F_1(e_1) \times F_2(e_2))(y_1, z)]$
$= min\{F_3(e_1, e_2)(x, z), F_3(e_1, e_2)(y_1, z)\}$
Açıkça $\widetilde{G}_E \times \widetilde{G'}_E$ bir bulanık esnek graftır.

Tanım 3.0.9 $\widetilde{G}_E = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G_1^*, F_1, K_1, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde bulanık esnek graflar olsun. $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin güçlü çarpımı $\widetilde{G}_E \otimes \widetilde{G'}_E = (G^*, F_3, K_3, A \times B)$ şeklinde gösterilir. Burada $G^* = (V = V_1 \times V_2, E = E_1 \times E_2)$ olmak üzere $(F_3, A \times B)$ V üzerinde ve $(K_3, A \times B)$ E üzerinde bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_E \otimes \widetilde{G'}_E$ nin köşe noktaları ve kenarlarının üyelik değerleri her $(e_1, e_2) \in A \times B$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

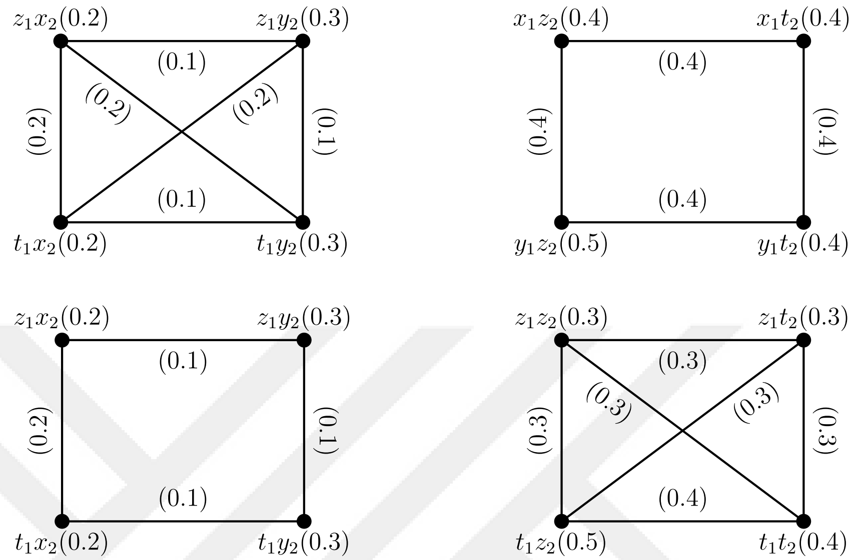
i) Her $(x, w) \in V_1 \times V_2$ için $F_3(e_1, e_2)(x, w) = min\{F_1(e_1)(x), F_2(e_2)(w)\}$

ii) Her $x \in V_1$, $(w, z) \in E_2$ için $K_3(e_1, e_2)((x, w)(x, z)) = min\{F_1(e_1)(x), K_2(e_2)(w, z)\}$

iii) Her $w \in V_2$, $(x, y) \in E_1$ için $K_3(e_1, e_2)((x, w)(y, w)) = min\{K_1(e_1)(x, y), F_2(e_2)(w)\}$

iv) Her $(x, y) \in E_1$, $(w, z) \in E_2$ için $K_3(e_1, e_2)((x, w)(y, z)) = min\{K_1(e_1)(x, y), K_2(e_2)(w, z)\}$

Örnek 3.0.11 $\widetilde{G}_E = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ bulanık esnek graflarını Örnek 3.0.10 da verildiği gibi alalım. Bu taktirde $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin güçlü çarpımı aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.22: $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nın güçlü çarpımı

Teorem 3.0.6 $\widetilde{G}_E = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde bulanık esnek graflar olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_E \otimes \widetilde{G'}_E$ de bulanık esnek graftır.

İspat. Tanım 3.0.9 yardımıyla Teorem 3.0.5 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 3.0.10 $\widetilde{G}_E = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde bulanık esnek grafı olsun. $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin bileşkesi $\widetilde{G}_E \circ \widetilde{G'}_E = (G^*, F_3, K_3, A \times B)$ şeklinde gösterilir. Burada $G = (V = V_1 \times V_2 , E = E_1 \times E_2)$ olmak üzere $(F_3, A \times B)$ V üzerinde ve $(K_3, A \times B)$ E üzerinde bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_E \circ \widetilde{G'}_E$ nin köşe noktaları ve kenarlarının üyelik değerli her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

i) Her $(x, w) \in V_1 \times V_2$ için $F_3(e_1, e_2)(x, w) = min\{F_1(e_1)(x), F_2(e_2)(w)\}$

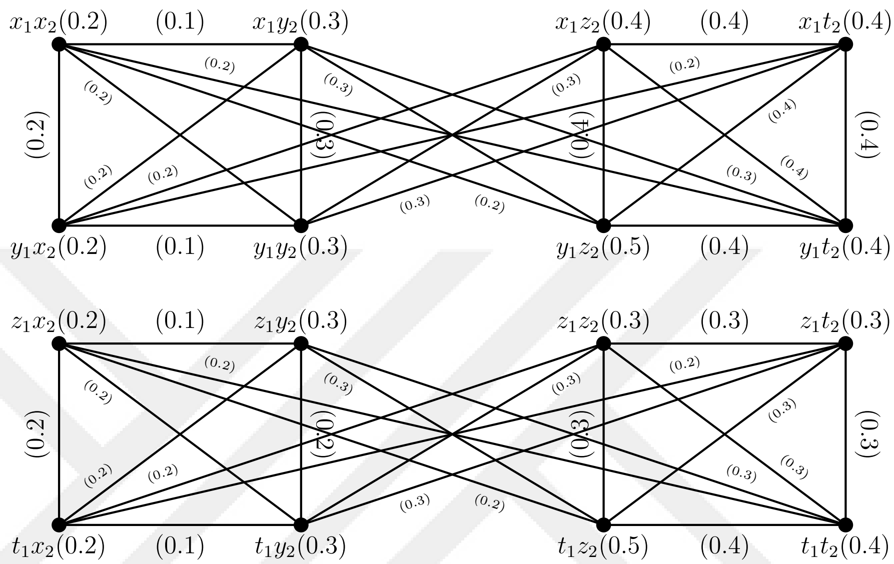
ii) Her $x \in V_1$,$(w, z) \in E_2$ için $K_3(e_1, e_2)((x, w)(x, z)) = min\{F_1(e_1)(x), K_2(e_2)(w, z)\}$

iii) Her $w \in V_2$,$(x, y) \in E_1$ için $K_3(e_1, e_2)((x, w)(y, w)) = min\{K_1(e_1)(x, y), F_2(e_2)(w)\}$

iv) Her $(x, y) \in E_1$,$(w, z) \in E_2$ için $K_3(e_1, e_2)((x, w)(y, z)) = min\{K_1(e_1)(x, y), K_2(e_2)(w, z)\}$

v) Her $(x, y) \in E_1$,$(w, z) \in V_2$,$w \neq z$ için $K_3(e_1, e_2)((x, w)(y, z)) = min\{F_2(e_2)(w), F_2(e_2)(z), K_1(e_1)(x, y)\}$

Örnek 3.0.12 $\widetilde{G}_E = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ bulanık esnek grafları Örnek 3.0.10 da verildiği gibi alalım. Bu taktirde $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin bileşkesi aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.23: $\widetilde{G}_E$ ve $\widetilde{G'}_E$ nin bileşkesi

Teorem 3.0.7 $\widetilde{G}_E = (G_1^*, F_2, K_2, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G_1^*, F_1, K_1, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde bulanık esnek graflar olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_E \circ \widetilde{G'}_E$ de bulanık esnek graftır.

İspat. Tanım 3.0.10 yardımıyla Teorem 3.0.5 in ispatına benzer şekilde yapılır.

4. ARALIK DEĞERLİ BULANIK ESNEK GRAFLAR

Bu bölümde aralık değerli bulanık esnek kümeleri graf yapısı üzerinde ele alacağız, aralık değerli bulanık esnek graf kavramını vereceğiz, bu kavrama ait bazı cebirsel özellikleri inceleyeceğiz ve elde edilen sonuçları değerlendireceğiz.

Tanım 4.0.1 Bir $\widetilde{G}_I = (G^*, F, K, A)$ dörtlüsü aşağıdaki koşulları sağlıyor ise $\widetilde{G}_I$ ye aralık değerli bulanık esnek graf denir.

i) $G^* = (V, E)$ bir basit graftır

ii) $A \neq \emptyset$ bir parametre kümesidir

iii) (F, A) V üzerinde bir aralık değerli bulanık esnek kümedir

iv) (K, A) E üzerinde bir aralık değerli bulanık esnek kümedir

v) Her $e \in A$ için $H(e) = (F(e), K(e))$ aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan $G^* = (V, E)$ basit grafının bir aralık değerli bulanık alt grafıdır. Yani her $\{xy\} \in E$ için $K^-(e)(xy) \leq min\{F^-(e)(x), (F^-(e)(y)\}$ ve $K^+(e) \leq min\{F^+(e)(x), F^+(e)(y)\}$ dir. Açıkca bir aralık değerli bulanık esnek graf, aralık değerli bulanık grafların parametreleştirilmiş bir ailesidir.

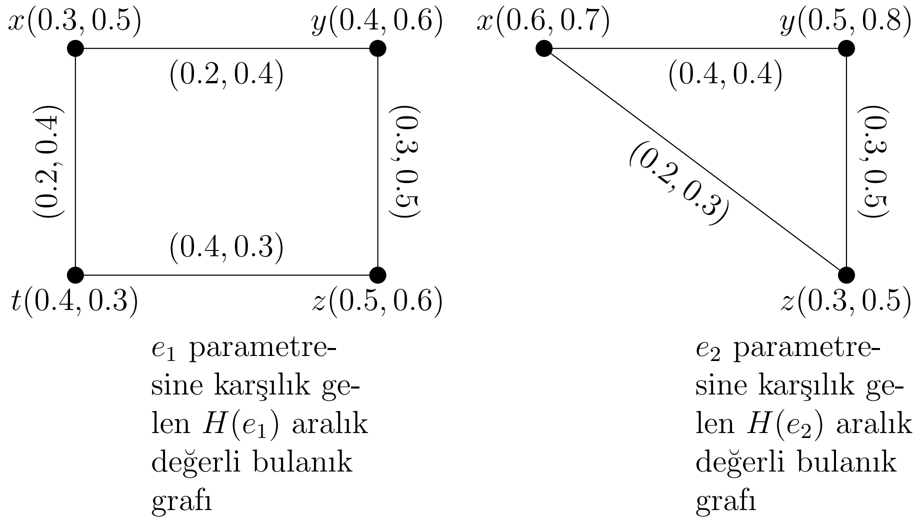
Örnek 4.0.1 $V = \{x, y, z, t\}$ ve $E = \{xy, yz, zt, tx\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $A = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi olmak üzere $F : A \to AD(V)$ ve $K : A \to AD(E)$ dönüşümleri ile verilen (F, A) ve (K, A) aralık değerli bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F(e_1) = \{< x, [0.3, 0.5] >, < y, [0.4, 0.6] >, < z, [0.5, 0.6] >, < t, [0.4, 0.3] >\}$

$F(e_2) = \{< x, [0.6, 0.7] >, < y, [0.5, 0.8] >, < z, [0.3, 0.5] >\}$

$K(e_1) = \{< xy, [0.2, 0.4] >, < yz, [0.3, 0.5] >, < zt, [0.4, 0.3] >< tx, [0.2, 0.3] >\}$

$K(e_2) = \{< xy, [0.4, 0.4] >, < yz, [0.3, 0.5] >, < zx, [0.2, 0.3] >\}$



Şekil 4.1: $\widetilde{G}$ aralık değerli bulanık esnek grafı

Açıkca $H(e_1) = (F(e_1), K(e_1))$ ve $H(e_2) = (F(e_2), K(e_2))$ sırasıyla e_1 ve e_2 parametrelerine karşılık gelen aralık değerli bulanık graflardır. Dolayısıyla $\tilde{G}_I = (G^*, F, K, A)$, $G^* = (V, E)$ üzerinde aralık değerli bulanık esnek graftır.

Tanım 4.0.2 $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_2, K_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G}_I$ grafına $\widetilde{G'}_I$ nin aralık değerli bulanık esnek alt grafı denir$\Leftrightarrow$

i) $A \subseteq B$

ii) Her $e \in A$ için $H_1(e) = (F_1(e), K_1(e))$, $H_2(e) = (F_2(e), K_2(e))$ nin aralık değerli bulanık alt grafıdır.

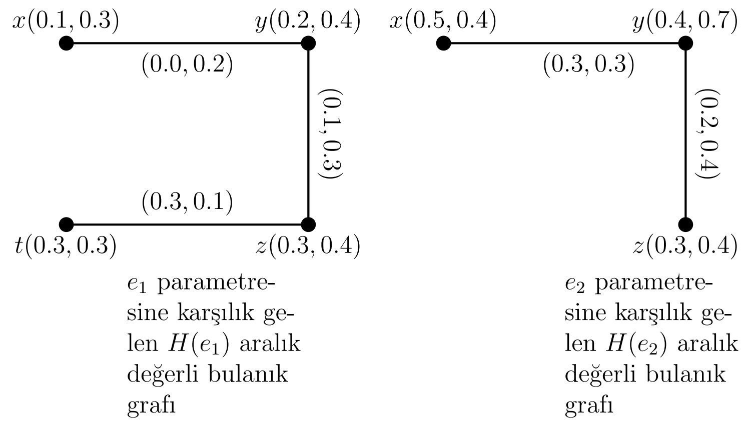
Örnek 4.0.2 Örnek 4.0.1 deki $\widetilde{G}_I = (G^*, F, K, A)$ aralık değerli bulanık esnek grafını gözönüne alalım. Şimdi $B = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi olsun. (F_1, B) ve (K_1, B) aralık değerli bulanık esnek kümeleri V ve E üzerinde aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F_1(e_1) = \{< x, [0.1, 0.3] >, < y, [0.2, 0.4] >, < z, [0.3, 0.4] >, < t, [0.3, 0.3] >\}$

$F_1(e_2) = \{< x, [0.5, 0.4] >, < y, [0.4, 0.7] >), < z, [0.3, 0.4] >\}$

$K_1(e_1) = \{< xy, [0.0, 0.2] >, < yz, [0.1, 0.3] >, < zt, [0.3, 0.1] >\}$

$K_1(e_2) = \{< xy, [0.3, 0.3] >, < yz, [0.2, 0.4] >\}$

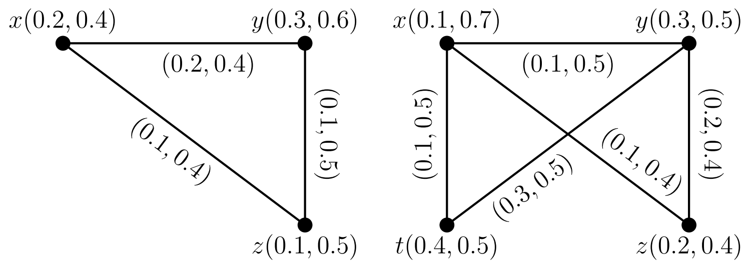


Şekil 4.2: $\widetilde{G'}_I$ aralık değerli bulanık esnek grafı

Açıkca $H_1(e_1) = (F_1(e_1), K_1(e_1))$ ve $H_1(e_2) = (F_1(e_2), K_1(e_2))$ sırasıyla e_1 ve e_2 parametrelerine karşılık gelen aralık değerli bulanık graflardır. Dolayısıyla $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_1, K_1, B)$, G^* üzerinde aralık değerli bulanık esnek graftır. Üstelik $\widetilde{G}_I$, $\widetilde{G'}_I$ nin aralık değerli bulanık esnek alt grafıdır.

Tanım 4.0.3 $\widetilde{G}_I = (G^*, F, K, A)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde aralık değerli bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G}_I$ ye G^* üzerinde tam aralık değerli bulanık esnek graf denir. $\Leftrightarrow$ Her $e \in A$ ve $xy \in E$ için
$K^-(e)(xy) = min\{F^-(e)(x), F^-(e)(y)\}$
$K^+(e)(xy) = min\{F^+(e)(x), F^+(e)(y)\}$ dir.

Örnek 4.0.3 $V = \{x, y, z, t\}$ ve $E = \{xy, yz, zx, xt, ty\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını ele alalım. $A = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi olsun. $F : A \to AD(V)$ ve $K : A \to AD(E)$ dönüşümleri ile verilen (F, A) ve (K, A) aralık değerli bulanık esnek kümeler aşağıdaki gibi tanımlansın.
$F(e_1) = \{(x, [0.2, 0.4]), (y, [0.3, 0.6]), (z, [0.1, 0.5]\}$
$F(e_2) = \{(x, [0.1, 0.7]), (y, [0.3, 0.5]), (z, [0.2, 0.4], (t, [0.4, 0.5])\}$
$K(e_1) = \{(xy, [0.2, 0.4]), (yz, [0.1, 0.5]), (zx, [0.1, 0.4]\}$
$K(e_2) = \{(xy, [0.1, 0.5]), (yz, [0.2, 0.4]), (zx, [0.1, 0.4], (xt, [0.1, 0.4]), (ty, [0.3, 0.5])\}$



e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ aralık değerli bulanık grafı

e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ aralık değerli bulanık grafı

Şekil 4.3: $\widetilde{G}_I$ aralık değerli bulanık esnek grafı

Açıkca $\widetilde{G}_I$, G^* üzerinde tam aralık değerli bulanık esnek graftır.

Tanım 4.0.4 $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_2, K_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf ve $V_1, V_2 \subseteq V$ olsun. $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G}'_I$ nin birleşimi $\widetilde{G}_I \tilde{\cup} \widetilde{G}'_I = (G^*, F_3, K_3, C)$ şeklinde gösterilir. Burada $C = A \cup B$ ve $V = V_1 \cup V_2$ olmak üzere (F, C) V üzerinde ve (K, C) E üzerinde aralık değerli bulanık esnek kümelerdir. Ayrıca $\widetilde{G}_I \tilde{\cup} \widetilde{G}'_I$ nin köşe ve kenarlarının üyelik değerleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_3^-(e)(x) = \begin{cases} F_1^-(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ x \in V_1 \backslash V_2 \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ x \in V_2 \backslash V_1 \\ F_1^-(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ x \in V_1 \cap V_2 \\ F_2^-(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ x \in V_2 \backslash V_1 \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ x \in V_1 \backslash V_2 \\ F_2^-(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ x \in V_1 \cap V_2 \\ max\{F_1^-(e)(x), F_2^-(e)(x)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ x \in V_1 \cap V_2 \\ F_1^-(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ x \in V_1 \backslash V_2 \\ F_2^-(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ x \in V_2 \backslash V_1 \end{cases}$$

$$F_3^+(e)(x) = \begin{cases} F_1^+(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B, \ x \in V_1 \backslash V_2 \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B, \ x \in V_2 \backslash V_1 \\ F_1^+(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B, \ x \in V_1 \cap V_2 \\ F_2^+(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A, \ x \in V_2 \backslash V_1 \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A, \ x \in V_1 \backslash V_2 \\ F_2^+(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A, \ x \in V_1 \cap V_2 \\ max\{F_1^+(e)(x), F_2^+(e)(x)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B, \ x \in V_1 \cap V_2 \\ F_1^+(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B, \ x \in V_1 \backslash V_2 \\ F_2^+(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B, \ x \in V_2 \backslash V_1 \end{cases}$$

$$K_3^-(e)(x,y) = \begin{cases} K_1^-(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B, \ (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \\ K_1^-(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ K_2^-(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A, \ (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ K_2^-(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ max\{K_1^-(e)(x,y), K_2^-(a)(x,y)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ K_1^-(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ K_2^-(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B, \ (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \end{cases}$$

$$K_3^+(e)(x,y) = \begin{cases} K_1^+(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B, \ (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \\ K_1^+(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ K_2^+(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A, \ (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \\ 0 & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ K_2^+(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ max\{K_1^+(e)(x,y), K_2^+(a)(x,y)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ K_1^+(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B, \ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ K_2^+(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \cap B, \ (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \end{cases}$$

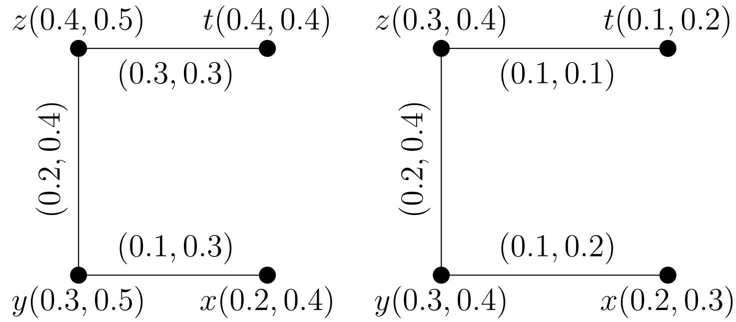
Örnek 4.0.4 $V = \{x, y, z, t, p, q\}$ ve $E = \{xy, yz, zt, yp, pq\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını ele alalım. $A = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi ve $V_1 = \{x, y, z, t\}$ olsun. $F_1 : A \to AD(V_1)$ ve $K_1 : A \to AD(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_1, A) ve (K_1, A) aralık değerli bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F_1(e_1) = \{< x, [0.2, 0.4] >, < y, [0.3, 0.5] >, < z, [0.4, 0.5] >, < t, [0.4, 0.4] >\}$

$F_1(e_2) = \{< x, [0.2, 0.3] >, < y, [0.3, 0.4] >, < z, [0.3, 0.4] >, < t, [0.1, 0.2] >\}$

$K_1(e_1) = \{< xy, [0.1, 0.3] >, < yz, [0.2, 0.4] >, < zt, [0.3, 0.3] >\}$

$K_1(e_2) = \{< xy, [0.1, 0.2] >, < yz, [0.2, 0.4] >, < zt, [0.1, 0.1] >\}$



e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ aralık değerli bulanık grafı

e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ aralık değerli bulanık grafı

Şekil 4.4: $\widetilde{G}_I$ aralık değerli bulanık esnek grafı

Açıkca $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$, G^* üzerinde aralık değerli bulanık esnek graftır.

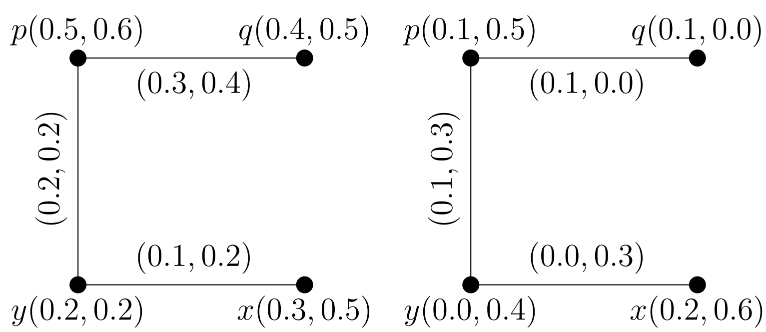
Şimdi $B = \{e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi ve $V_2 = \{x, y, p, q\}$ olsun. $F_2 : B \to AD(V_2)$ ve $K_2 : B \to AD(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_2, B) ve (K_2, B) aralık değerli bulanık esnek kümeler aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F_2(e_2) = \{< x, [0.3, 0.5] >, < y, [0.2, 0.2] >, < p, [0.5, 0.6] >, < q, [0.4, 0.5] >\}$

$F_2(e_3) = \{< x, [0.2, 0.6] >, < y, [0.0, 0.4] >, < p, [0.1, 0.5] >, < q, [0.1, 0.0] >\}$

$K_2(e_2) = \{< xy, [0.1, 0.2] >, < yp, [0.2, 0.2] >, < pq, [0.3, 0.4] >\}$

$K_2(e_3) = \{< xy, [0.0, 0.3] >, < yp, [0.1, 0.3] >, < pq, [0.1, 0.0] >\}$



e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ aralık değerli bulanık grafı

e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ aralık değerli bulanık grafı

Şekil 4.5: $\widetilde{G'}_I$ aralık değerli bulanık esnek grafı

Açıkca $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_2, K_2, B)$ G^* üzerinde arlık değerli bulanık esnek graftır.

Üstelik $C = A \cup B$ ve $V = V_1 \cup V_2$ olup $F_3 : C \to B(V)$ ve $K_3 : C \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_3, C) ve (K_3, C) aralık değerli bulanık esnek kümeleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi elde edilir.

$F_3(e_1) = \{< x, [0.2, 0.4] >, < y, [0.3, 0.5] >, < z, [0.4, 0.5] >, < t, [0.4, 0.4] >, < p, [0.0, 0.0] >, < q, [0.0, 0.0] >\}$

$F_3(e_2) = \{< x, [0.3, 0.5] >, < y, [0.3, 0.4] >, < z, [0.3, 0.4] >, < t, [0.1, 0.2] >, < p, [0.5, 0.6] >, < q, [0.4, 0.5] >\}$

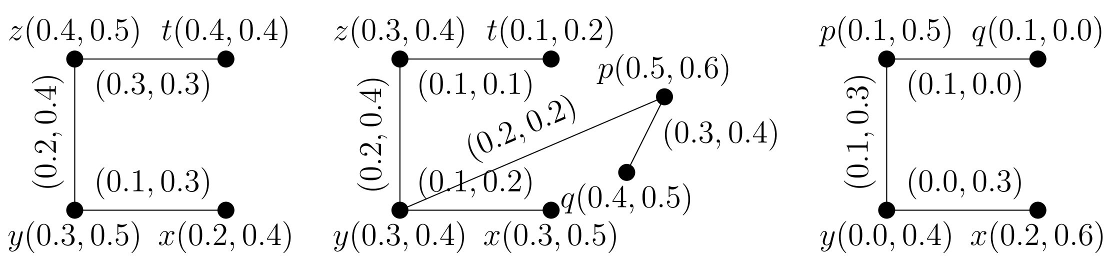
$F_3(e_3) = \{< x, [0.2, 0.6] >, < y, [0.0, 0.4] >, < z, [0.0, 0.0] >, < t, [0.0, 0.0] >, < p, [0.1, 0.5] >, < q, [0.1, 0.0] >\}$

$K_3(e_1) = \{< xy, [0.1, 0.3] >, < yz, [0.2, 0.4] >, < zt, [0.3, 0.3] >, < yp, [0.0, 0.0] >, < pq, [0.0, 0.0] >\}$

$K_3(e_2) = \{< xy, [0.1, 0.2] >, < yz, [0.2, 0.4] >, < zt, [0.1, 0.1] >, < yp, [0.2, 0.2] >, < pq, [0.3, 0.4] >\}$

$K_3(e_3) = \{< xy, [0.0, 0.3] >, < yz, [0.0, 0.0] >, < zt, [0.0, 0.0] >, < yp, [0.1, 0.3] >, < pq, [0.1, 0.0] >\}$

Buradan $\widetilde{G}_I \tilde{\cup} \widetilde{G'}_I = (G^*, F_3, K_3, C)$ G^* üzerinde bir aralık değerli bulanık esnek graftır.



e_1 parametresine karşılık gelen $H(e_1)$ aralık değerli bulanık grafı

e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ aralık değerli bulanık grafı

e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ aralık değerli bulanık grafı

Şekil 4.6: $\widetilde{G}_I \cup \widetilde{G'}_I$ aralık değerli bulanık esnek grafı

Teorem 4.0.1 $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_2, K_2, B)$ $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_I \tilde{\cup} \widetilde{G'}_I$ de G^* üzerinde aralık değerli bulanık esnek graftır.

İspat. $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_2, K_2, B)$ aralık değerli bulanık esnek graflarının birleşimi $\widetilde{G''}_I = (G^*, F_3, K_3, C)$ olsun. Burada $C = A \cup B$ olmak üzere üç durum vardır.

i) Eğer $e \in A \setminus B$ ve $(x,y) \in (V_1 \times V_1) \setminus (V_2 \times V_2)$ ise

$K_3^-(e)(x,y) = K_1^-(e)(x,y) \leq min\{F_1^-(e)(x), F_1^-(e)(y)\} = min\{F_3^-(e)(x), F_3^-(e)(y)\}$

Eğer $e \in A \setminus B$ ve $(x,y) \in (V_2 \times V_2) \setminus (V_1 \times V_1)$ ise

$K_3^-(e)(x,y) = 0 \leq min\{F_3^-(e)(x), F_3^-(e)(y)\}$

Eğer $e \in A \setminus B$ ve $(x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2)$ ise

$K_3^-(e)(x,y) = K_1^-(e)(x,y) \leq min\{F_1^-(e)(x), F_1^-(e)(y)\} = min\{F_3^-(e)(x), F_3^-(e)(y)\}$

ii) Eğer $e \in B \setminus A$ ise her durum için $K_3^-(e)(x,y) \leq min\{F_3^-(e)(x), F_3^-(e)(y)\}$ dır.

iii) Eğer $e \in A \cap B$ ve $(x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2)$ ise

$K_3^-(e)(x,y) = max\{K_1^-(e)(x,y), K_2^-(e)(x,y)\} \leq$
$max\{min\{F_1^-(a)(x), F_1^-(a)(y)\}, min\{F_2^-(a)(x), F_2^-(a)(y)\}\} \leq$
$max\{min\{F_1^-(a)(x), F_2^-(a)(x)\}, min\{F_1^-(a)(y), F_2^-(a)(y)\}\} \leq$
$min\{max\{F_1^-(a)(x), F_2^-(a)(x)\}, max\{F_1^-(a)(y), F_2^-(a)(y)\}\} = min\{F_3^-(a)(x), F_3^-(a)(y)\}$

Eğer $e \in A \cap B$ ve $(x,y) \in (V_1 \times V_1) \setminus (V_2 \times V_2)$ yada $(x,y) \in (V_2 \times V_2) \setminus (V_1 \times V_1)$ ise açıkça $K_3^-(a)(x,y) \leq min\{F_3^-(a)(x), F_3^-(a)(y)\}$ dır.

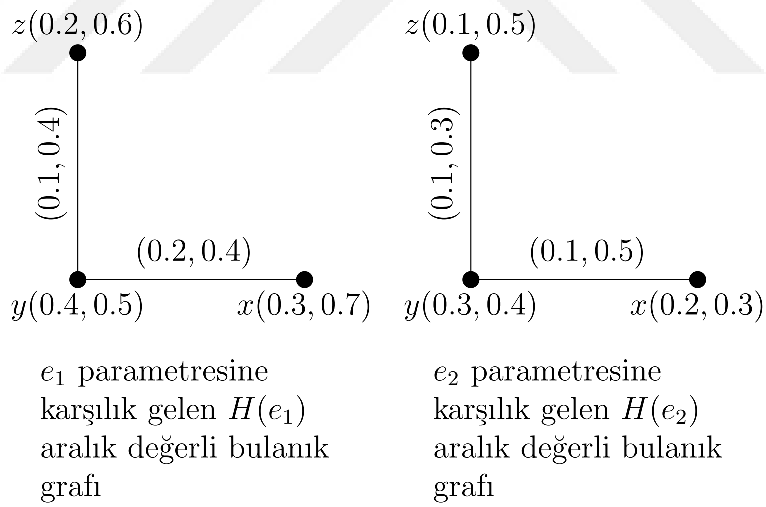
Üstelik $K_3^+(a)(x,y) \leq min\{F_3^+(a)(x), F_3^+(a)(y)\}$ eşitsizliğinin de her bir durum için sağlandığı benzer şekilde gösterilebilir.

Sonuç olarak $\widetilde{G''}_I = (G^*, F_3, K_3, C)$ grafı G^* üzerinde aralık değerli bulanık esnek graftır.

Tanım 4.0.5 $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_2, K_2, B)$ $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf ve $V_1, V_2 \subseteq V$ olsun. $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ nin arakesiti $\widetilde{G}_I \tilde{\cap} \widetilde{G'}_I = (G^*, F, K, C)$ şeklinde gösterilir. Burada $C = A \cap B$ ve $V = V_1 \cap V_2$ olmak üzere (F, C) V üzerinde ve (K, C) E üzerinde aralık değerli bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_I \tilde{\cap} \widetilde{G'}_I$ nin köşe ve kenarlarının üyelik değerleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$F^-(e)(x) = min\{F_1^-(e)(x), F_2^-(e)(x)\}$
$F^+(e)(x) = min\{F_1^+(e)(x), F_2^+(e)(x)\}$
$K^-(e)(xy) = min\{K_1^-(e)(xy), K_2^-(e)(xy)\}$
$K^+(e)(xy) = min\{K_1^+(e)(xy), K_2^+(e)(xy)\}$

Örnek 4.0.5 $V = \{x, y, z, t\}$ ve $E = \{xy, yz, zt, yt\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını ele alalım. $A = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi ve $V_1 = \{x, y, z\}$ olsun. $F : A \rightarrow AD(V_1)$ ve $K : A \rightarrow AD(E)$ dönüşümleri ile verilen (F, A) ve (K, A) aralık değerli bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi verilsin.
$F_1(e_1) = \{< x, [0.3, 0.7] >, < y, [0.4, 0.5] >, < z, [0.2, 0.6] >\}$
$F_1(e_2) = \{< x, [0.2, 0.8] >, < y, [0.3, 0.6] >, < z, [0.1, 0.5] >\}$
$K_1(e_1) = \{< xy, [0.2, 0.4] >, < yz, [0.1, 0.4] >\}$
$K_1(e_2) = \{< xy, [0.1, 0.5] >, < yz, [0.1, 0.3] >\}$

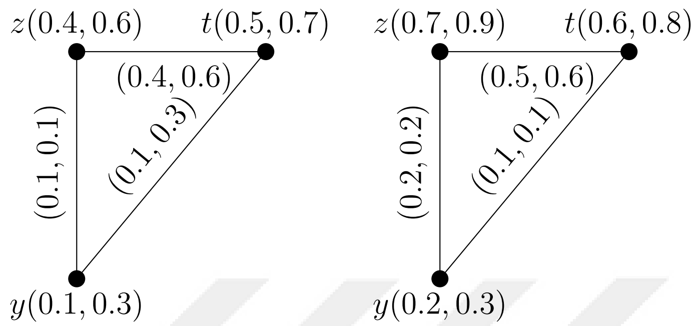


Şekil 4.7: $\widetilde{G}_I$ aralık değerli bulanık esnek grafı

Açıkca $\widetilde{G}_I = (G^*, F_3, K_3, C)$ grafı G^* üzerinde aralık değerli bulanık esnek graftır.

Şimdi $B = \{e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi ve $V_2 = \{y, z, t\}$ olsun $F : A \rightarrow AB(V_2)$ ve $K : A \rightarrow AD(E)$ dönüşümleri ile verilen (F, B) ve (K, B) aralık değerli bulanık esnek kümeler aşağıdaki gibi verilsin.
$F_2(e_2) = \{< y, [0.2, 0.3] >, < z, [0.7, 0.6] >, < t, [0.6, 0.8] >\}$

$F_2(e_3) = \{< y, [0.1, 0.3] >, < z, [0.4, 0.6] >, < t, [0.5, 0.7] >\}$
$K_2(e_2) = \{< yz, [0.1, 0.1] >, < zt, [0.4, 0.6] >, < yt, [0.1, 0.3] >\}$
$K_2(e_3) = \{< yz, [0.2, 0.2] >, < zt, [0.5, 0.6] >, < yt, [0.1, 0.1] >\}$



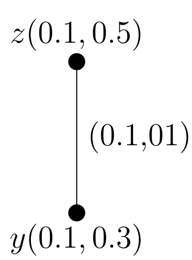
e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ aralık değerli bulanık grafı

e_3 parametresine karşılık gelen $H(e_3)$ aralık değerli bulanık grafı

Şekil 4.8: $\widetilde{G'}_I$ aralık değerli bulanık esnek grafı

Açıkca $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$, G^* üzerinde aralık değerli bulanık esnek graftır.

Üstelik $C = A \cap B = \{e_2\}$ ve $V = V_1 \cap V_2$ olup $F_3 : C \to B(V)$ ve $K_3 : C \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_3, C) ve (K_3, C) aralık değerli bulanık esnek kümeleri her $e \in C$, $x \in V$, $xy \in E$ için aşağıdaki gibi elde edilir.
$F_3(e_2) = \{< y, [0.1, 0.3] >, < z, [0.1, 0.5] >\}$
$K_3(e_2) = \{< yz, [0.1, 0.1] >\}$
Buradan $\widetilde{G}_I \widetilde{\cap} \widetilde{G'}_I = (G^*, F_3, K_3, C)$ G^* basit grafı üzerinde bir aralık değerli bulanık esnek graftır.



Şekil 4.9: $\widetilde{G}_I \tilde{\cap} \widetilde{G'}_I$ aralık değerli bulanık esnek grafı

Teorem 4.0.2 $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_2, K_2, B)$ $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_I \tilde{\cap} \widetilde{G'}_I$ de G^* üzerinde aralık değerli bulanık esnek graftır.

İspat. $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_2, K_2, B)$ aralık değerli bulanık esnek graflarının arakesiti $\widetilde{G''}_E = (G^*, F_3, K_3, C)$ olsun. Burada $C = A \cap B$ olmak üzere her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için

$$\begin{aligned} K_3^-(e)(x,y) &= min\{K_1^-(e)(x,y), K_2^-(e)(x,y)\} \\ &\leq min\{min\{F_1^-(e)(x), F_1^-(e)(y)\}, min\{F_2^-(e)(x), F_2^-(e)(y)\}\} \\ &= min\{min\{F_1^-(e)(x), F_2^-(e)(x)\}, min\{F_1^-(e)(y), F_2^-(e)(y)\}\} \\ &= min\{F_3^-(e)(x), F_3^-(e)(y)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $K_3^+(e)(x,y) \leq min\{F_3^+(e)(x), F_3^+(e)(y)\}$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir. Sonuç olarak $\widetilde{G''}_E = (G^*, F_3, K_3, B)$ G^* üzerinde bir bulanık esnek graftır.

Tanım 4.0.6 $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_2, K_2, B)$ $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ nin daraltılmış birleşimi $\widetilde{G}_I \tilde{\sqcup} \widetilde{G'}_I = (G^*, F, K, C)$ şeklinde gösterilir. Burada $V = V_1 \cup V_2$ ve $C = A \cap B$ olmak üzere (F, C) V üzerinde (K, C) E üzerinde aralık değerli bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_I \tilde{\sqcup} \widetilde{G'}_I$ nin köşe ve kenarların üyelik değerleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_3^-(e)(x) = \begin{cases} F_1^-(e)(x) & \text{eğer} \quad x \in V_1 \backslash V_2 \\ F_2^-(e)(x) & \text{eğer} \quad x \in V_2 \backslash V_1 \\ max\{F_1^-(e)(x), F_2^-(e)(x)\} & \text{eğer} \quad x \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$$

$$F_3^+(e)(x) = \begin{cases} F_1^+(e)(x) & \text{eğer} \quad x \in V_1 \backslash V_2 \\ F_2^+(e)(x) & \text{eğer} \quad x \in V_2 \backslash V_1 \\ max\{F_1^+(e)(x), F_2^+(e)(x)\} & \text{eğer} \quad x \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$$

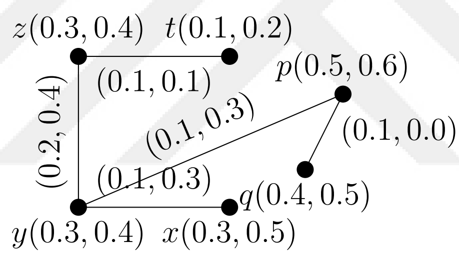
$$K_3^-(e)(x,y) = \begin{cases} K_1^-(e)(x,y) & \text{eğer} \quad (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ K_2^-(e)(x,y) & \text{eğer} \quad (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \\ max\{K_1^-(e)(x,y), K_2^-(e)(x,y)\} & \text{eğer} \quad (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \end{cases}$$

$$K_3^+(e)(x,y) = \begin{cases} K_1^+(e)(x,y) & \text{eğer} \quad (x,y) \in (V_1 \times V_1) \backslash (V_2 \times V_2) \\ K_2^+(e)(x,y) & \text{eğer} \quad (x,y) \in (V_2 \times V_2) \backslash (V_1 \times V_1) \\ max\{K_1^+(e)(x,y), K_2^+(e)(x,y)\} & \text{eğer} \quad (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \end{cases}$$

Örnek 4.0.6 $\widetilde{G}_E = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_E = (G^*, F_2, K_2, B)$ bulanık esnek grafları $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde Örnek 4.0.4 de ki gibi ele alınsın. $C = A \cap B$ ve $V = V_1 \cup V_2$ olmak üzere $F_3 : C \to B(V)$ ve $K_3 : C \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_3, C) ve (K_3, C) bulanık esnek kümeleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi elde edilir.

$F_3(e_2) = \{< x, [0.3, 0.5] >, < y, [0.3, 0.4] >, < z, [0.3, 0.4] >, < t, [0.1, 0.2] >, < p, [0.5, 0.6] >, < q, [0.4, 0.5] >\}$

$K_3(e_2) = \{< xy, [0.1, 0.3] >, < yz, [0.2, 0.4] >, < zt, [0.1, 0.1] >, < yp, [0.1, 0.3] >, < pq, [0.1, 0.0] >\}$



e_2 parametresine karşılık gelen $H(e_2)$ aralık değerli bulanık grafı

Şekil 4.10: $\widetilde{G}_I \tilde{\sqcup} \widetilde{G'}_I$ aralık değerli bulanık esnek grafı

Buradan $\widetilde{G}_I \tilde{\sqcup} \widetilde{G'} = (G^*, F_3, K_3, C)$ grafının da G^* üzerinde aralık değerli bulanık esnek graf olduğu görülür.

Teorem 4.0.3 $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G, F_2, K_2, B)$ $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_I \tilde{\sqcup} \widetilde{G'}_I$ de G^* üzerinde bir aralık değerli bulanık esnek graftır.

İspat. Tanım 4.0.6 yardımıyla Teorem 4.0.1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 4.0.7 $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_2, K_2, B)$ $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ nin genişletilmiş arakesiti $\widetilde{G}_I \tilde{\sqcap} \widetilde{G'}_I = (G^*, F, K, C)$ şeklinde gösterilir. Burada $V = V_1 \cap V_2$ ve $C = A \cup B$ olmak üzere (F, C) V üzerinde (K, C) E üzerinde aralık değerli bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_I \tilde{\sqcap} \widetilde{G'}_I$ nin köşe ve kenarların üyelik değerleri her $e \in A \cup B$, $x \in V$ ve $xy \in E$için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_3^-(e)(x) = \begin{cases} F_1^-(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ x \in V_1 \cap V_2 \\ F_2^-(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ x \in V_1 \cap V_2 \\ min\{F_1^-(e)(x), F_2^-(e)(x)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ x \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$$

$$F_3^+(e)(x) = \begin{cases} F_1^+(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ x \in V_1 \cap V_2 \\ F_2^+(e)(x) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ x \in V_1 \cap V_2 \\ min\{F_1^+(e)(x), F_2^+(e)(x)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ x \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$$

$$K_3^-(e)(x,y) = \begin{cases} K_1^-(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ K_2^-(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ min\{K_1^-(e)(x,y), K_2^-(e)(x,y)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \end{cases}$$

$$K_3^+(e)(x,y) = \begin{cases} K_1^+(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in A \backslash B,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ K_2^+(e)(x,y) & \text{eğer} \quad e \in B \backslash A,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \\ min\{K_1(e)^+(x,y), K_2^+(e)(x,y)\} & \text{eğer} \quad e \in A \cap B,\ (x,y) \in (V_1 \times V_1) \cap (V_2 \times V_2) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.0.7 $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G^*, F_2, K_2, B)$ aralık değerli bulanık esnek grafları $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde Örnek 4.0.4 de ki gibi ele alınsın. $C = A \cup B$ ve $V = V_1 \cap V_2$ olmak üzere $F_3 : C \to B(V)$ ve $K_3 : C \to B(E)$ dönüşümleri ile verilen (F_3, C) ve (K_3, C) aralık değerli bulanık esnek kümeleri her $e \in C$, $x \in V$ ve $xy \in E$ için aşağıdaki gibi elde edilir.

$F_3(e_1) = \{< x, [0.2, 0.4] >, < y, [0.3, 0.5]\}$

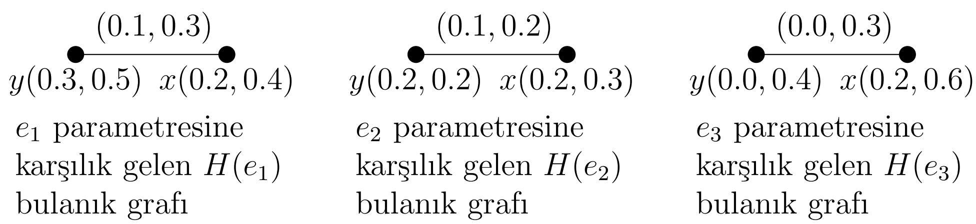
$F_3(e_2) = \{< x, [0.2, 0.3] >, < y, [0.2, 0.2] >\}$

$F_3(e_3) = \{< x, [0.2, 0.6] >, < y, [0.0, 0.4] >\}$

$K_3(e_1) = \{< xy, [0.1, 0.3] >\}$

$K_3(e_2) = \{< xy, [0.1, 0.2] >\}$

$K_3(e_3) = \{< xy, [0.0, 0.3] >\}$



Şekil 4.11: $\widetilde{G}_I \tilde{\sqcap} \widetilde{G'}_I$ aralık değerli bulanık esnek grafı

Buradan $\widetilde{G}_I \tilde{\sqcap} \widetilde{G'}_I = (G^*, F_3, K_3, C)$ grafının da G^* üzerinde aralık değerli bulanık esnek graf olduğu görülür.

Teorem 4.0.4 $\widetilde{G}_I = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G, F_2, K_2, B)$ $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_I \tilde{\sqcap} \widetilde{G'}_I$ de G^* üzerinde bir bulanık esnek graftır.

İspat. Tanım 4.0.7 yardımıyla Teorem 4.0.2 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 4.0.8 $\widetilde{G}_I = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ nin kartezyen çarpımı $\widetilde{G}_I \tilde{\times} \widetilde{G'}_I = (G^*, F_3, K_3, C)$ şeklinde gösterilir. Burada $G^* = (V = V_1 \times V_2, E = E_1 \times E_2)$ olmak üzere $(F_3, A \times B)$ V üzerinde ve $(K_3, A \times B)$ E üzerinde aralık değerli bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_I \tilde{\times} \widetilde{G'}_I$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının alt ve üst sınırlarının üyelik değerleri her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

i) Her $(x, w) \in V_1 \times V_2$ için
$F_3^-(e_1, e_2)(x, w) = min\{F_1^-(e_1)(x), F_2^-(e_2)(w)\}$
$F_3^+(e_1, e_2)(x, w) = min\{F_1^+(e_1)(x), F_2^+(e_2)(w)\}$

ii) Her $x \in V_1$, $(w, z) \in E_2$ için
$K_3^-(e_1, e_2))((x, w)(x, z)) = min\{F_1^-(e_1)(x), K_2^-(e_2)(w, z)\}$
$K_3^+(e_1, e_2)((x, w)(x, z)) = min\{F_1^+(e_1)(x), K_2^+(e_2)(w, z)\}$

iii) Her $w \in V_2$, $(x, y) \in E_1$ için

$K_3^-(e_1, e_2)((x, w)(y, w)) = min\{K_1^-(e_1)(x, y), F_2^-(e_2)(w)\}$

$K_3^+(e_1, e_2)((x, w)(y, w)) = min\{K_1^+(e_1)(x, y), F_2^+(e_2)(w)\}$

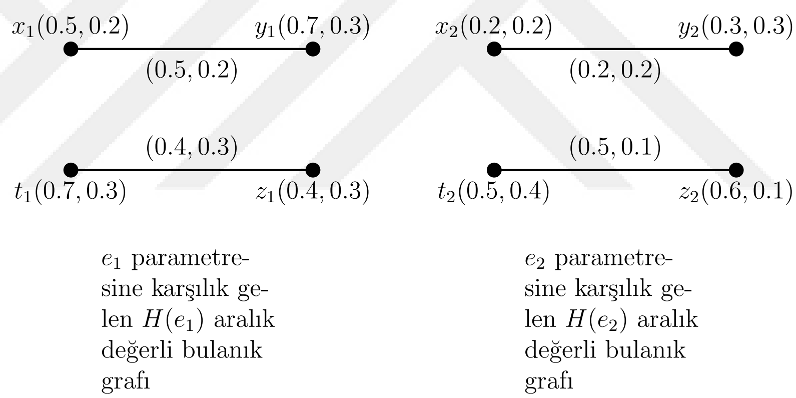
Örnek 4.0.8 $V_1 = \{x_1, y_1, z_1, t_1\}, E_1 = \{x_1y_1, z_1t_1\}, V_2 = \{x_2, y_2, z_2, t_2\}$ ve $E_2 = \{x_2y_2, z_2t_2\}$ ile verilen $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit graflarını gözönüne alalım. $A = \{e_1\}$ ve $B = \{e_2\}$ birer parametre kümesi olsun. (F_1, A), (K_1, A), (F_2, B) ve (K_2, B) aralık değerli bulanık esnek kümeleri V_1, E_1, V_2 ve E_2 üzerinde sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F_1(e_1) = \{(< x_1, [0.5, 0.2] >, < y_1, [0.7, 0.3] >, < z_1, [0.4, 0.3] >, < t_1, [0.7, 0.3] >)\}$

$K_1(e_1) = \{(< x_1y_1, [0.5, 0.2] >, < z_1t_1, [0.4, 0.3] >)\}$

$F_2(e_2) = \{(< x_2, [0.2, 0.2] >, < y_2, [0.3, 0.3] >, < z_2, [0.6, 0.1] >, < t_2, [0.5, 0.4] >)\}$

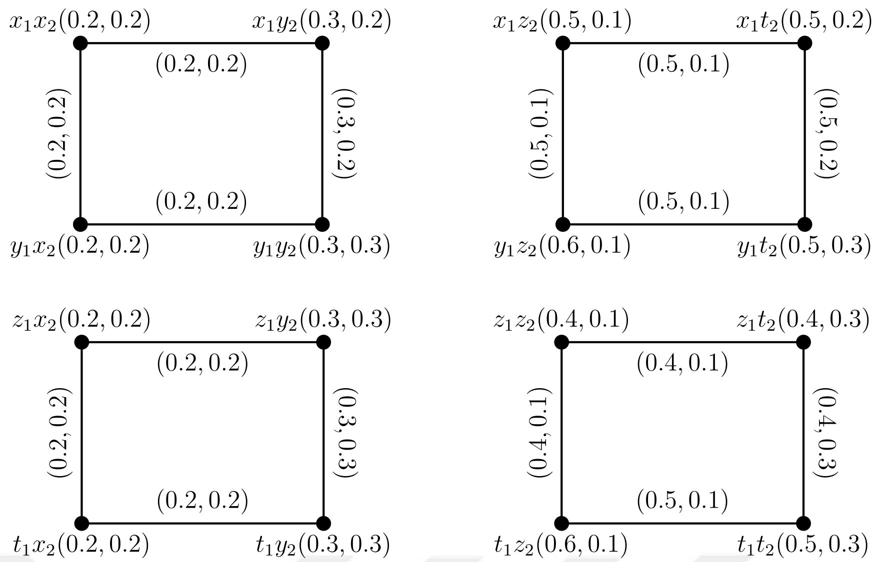
$K_2(e_2) = \{(< x_2y_2, [0.2, 0.2] >, < z_2t_2, [0.5, 0.1] >)\}$



Şekil 4.12: $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ aralık değerli bulanık esnek grafları

Açıkca $H(e_1) = (F_1(e_1), K_1(e_1))$ ve $H(e_2) = (F_2(e_2), K_2(e_2))$ aralık değerli bulanık graflardır. Üstelik $\tilde{G}_I = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\tilde{G'}_I = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla G_1^* ve G_2^* üzerinde aralık değerli bulanık esnek graflardır.

$\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ nin kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 4.13: $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ nın kartezyen çarpımı

Teorem 4.0.5 $\widetilde{G}_I = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_I \tilde{\times} \widetilde{G'}_I$ de aralık değerli bulanık esnek graftır.

İspat. $\widetilde{G}_I = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ aralık değerli bulanık esnek graflarının kartezyen çarpımı $\widetilde{G''}_I = (G_1^* \times G_2^*, F_3, K_3, A \times B)$ olsun. Her $e_1 \in A$ ve $e_2 \in B$ için üç durum mevcuttur.

i) $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ ve her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için
$$K_3^-(e_1, e_2)(x_1, x_2) = min\{F_1^-(e_1)(x_1), F_2^-(e_2)(x_2)\}$$
$$\leq min[(F_1^-(e_1) \times F_2^-(e_2))(x_1), (F_1^-(e_1) \times F_2^-(e_2))(x_2)]$$
$$= min\{F_3^-(e_1, e_2)(x_1), F_3^-(e_1, e_2)(x_2)\}$$
$$K_3^+(e_1, e_2)(x_1, x_2) = min\{F_1^+(e_1)(x_1), F_2^+(e_2)(x_2)\}$$
$$\leq min[(F_1^+(e_1) \times F_2^+(e_2))(x_1), (F_1^+(e_1) \times F_2^+(e_2))(x_2)]$$
$$= min\{F_3^+(e_1, e_2)(x_1), F_3^+(e_1, e_2)(x_2)\}$$

ii) $x \in V_1$, $(x_2, y_2) \in E_2$ ve her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için
$$K_3^-(e_1, e_2)((x, x_2)(x, y_2)) = min\{F_1^-(e_1)(x), K_2^-(e_2)(x_2, y_2)\}$$
$$\leq min[F_1^-(e_1)(x), min(F_2^-(e_2)(x_2), F_2^-(e_2)(y_2))]$$
$$= min[min(F_1^-(e_1)(x), F_2^-(e_2)(x_2)), min(F_1^-(e_1)(x), F_2^-(e_2)(y_2))]$$
$$= min[(F_1^-(e_1) \times F_2^-(e_2))(x, x_2), (F_1^-(e_1) \times F_2^-(e_2))(x, y_2)]$$

$= min\{F_3^-(e_1,e_2)(x,x_2), F_3^-(e_1,e_2)(x,y_2)\}$

$K_3^+(e_1,e_2)((x,x_2)(x,y_2)) = min\{F_1^+(e_1)(x), K_2^+(e_2)(x_2,y_2)\}$
$\leq min[F_1^+(e_1)(x), min(F_2^+(e_2)(x_2), F_2^+(e_2)(y_2))]$
$= min[min(F_1^+(e_1)(x), F_2^+(e_2)(x_2)), min(F_1^+(e_1)(x), F_2^+(e_2)(y_2))]$
$= min[(F_1^+(e_1) \times F_2^+(e_2))(x,x_2), (F_1^+(e_1) \times F_2^+(e_2))(x,y_2)]$
$= min\{F_3^-(e_1,e_2)(x,x_2), F_3^-(e_1,e_2)(x,y_2)\}$

iii) $x \in V_2$, $(x_1,y_1) \in E_1$ ve her $(e_1,e_2) \in A \times B$ için
$K_3^-(e_1,e_2)((x_1,z)(y_1,z)) = min\{K_1^-(e_1)(x_1,y_1), F_2^-(e_2)(z)\}$
$\leq min[F_2^-(e_2)(z), min(F_1^-(e_1)(x_1), F_1^-(e_1)(y_1))]$
$= min[min(F_1^-(e_1)(x_1), F_2^-(e_2)(z)), min(F_1^-(e_1)(y_1), F_2^-(e_2)(z))]$
$= min[(F_1^-(e_1) \times F_2^-(e_2))(x,z), (F_1^-(e_1) \times F_2^-(e_2))(y_1,z)]$
$= min\{F_3^-(e_1,e_2)(x,z), F_3^-(e_1,e_2)(y_1,z)\}$

$K_3^+(e_1,e_2)((x_1,z)(y_1,z)) = min\{K_1^+(e_1)(x_1,y_1), F_2^+(e_2)(z)\}$
$\leq min[F_2^+(e_2)(z), min(F_1^+(e_1)(x_1), F_1^+(e_1)(y_1))]$
$= min[min(F_1^+(e_1)(x_1), F_2^+(e_2)(z)), min(F_1^+(e_1)(y_1), F_2^+(e_2)(z))]$
$= min[(F_1^+(e_1) \times F_2^+(e_2))(x,z), (F_1^+(e_1) \times F_2^+(e_2))(y_1,z)]$
$= min\{F_3^+(e_1,e_2)(x,z), F_3^+(e_1,e_2)(y_1z)\}$
Sonuç olarak $\widetilde{G''}_I = (G_1^* \times G_2^*, F_3, K_3, A \times B)$ aralık değerli bulanık esnek graftır.

Tanım 4.0.9 $\widetilde{G}_I = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ güçlü çarpımı $\widetilde{G}_I \tilde{\otimes} \widetilde{G'}_I = (G^*, F_3, K_3, A \times B)$ şeklinde gösterilir. Burada $G^* = (V = V_1 \times V_2, E = E_1 \times E_2)$ olmak üzere $(F_3, A \times B)$ V üzerinde ve $(K_3, A \times B)$ E üzerinde aralık değerli bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_I \tilde{\otimes} \widetilde{G'}_I$ köşe noktalarının ve kenarlarının alt ve üst sınırlarının üyelik değerleri her $(e_1,e_2) \in A \times B$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

i) Her $(x,w) \in V_1 \times V_2$ için
$F_3^-(e_1,e_2)(x,w) = min\{F_1^-(e_1)(x), F_2^-(e_2)(w)\}$
$F_3^+(e_1,e_2)(x,w) = min\{F_1^+(e_1)(x), F_2^+(e_2)(w)\}$

ii) Her $x \in V_1$,$(w,z) \in E_2$ için

$K_3^-(e_1,e_2)((x,w)(x,z)) = min\{F_1^-(e_1)(x), K_2^-(e_2)(w,z)\}$

$K_3^+(e_1,e_2)((x,w)(x,z)) = min\{F_1^+(e_1)(x), K_2^+(e_2)(w,z)\}$

iii) Her $w \in V_2$,$(x,y) \in E_1$ için

$K_3^-(e_1,e_2)((x,w)(y,w)) = min\{K_1^-(e_1)(x,y), K_2^-(e_2)(w)\}$

$K_3^+(e_1,e_2)((x,w)(y,w)) = min\{K_1^+(e_1)(x,y), F_2^+(e_2)(w)\}$

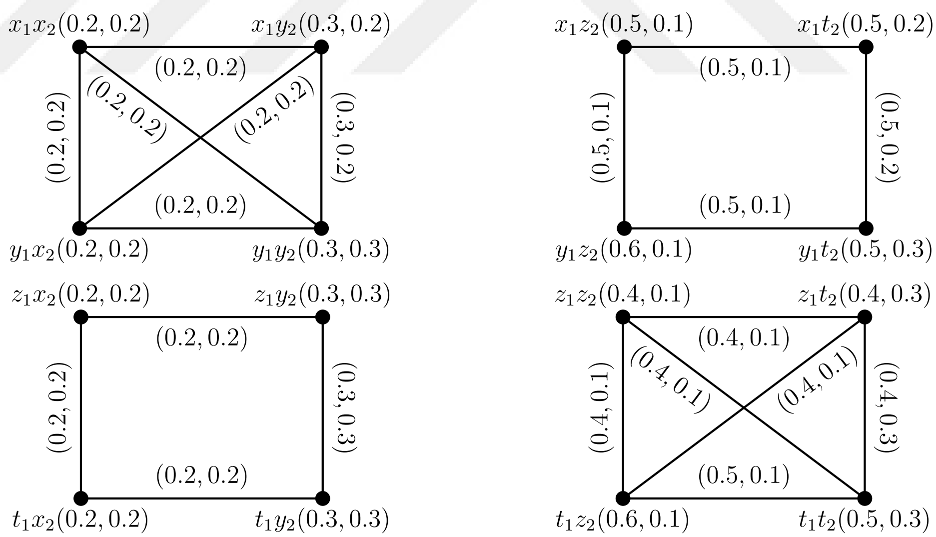
iv) Her $(x,y) \in E_1$ $(w,z) \in E_2$ için

$K_3^-(e_1,e_2)((x,w)(y,z)) = min\{K_1^-(e_1)(x,y), K_2^-(e_2)(w,z)\}$

$K_3^+(e_1,e_2)((x,w)(y,z)) = min\{K_1^+(e_1)(x,y), F_2^+(e_2)(w,z)\}$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.0.9 $\widetilde{G}_I = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ aralık değerli bulanık esnek grafların Örnek 4.0.8 da verildiği gibi alalım. $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ nın güçlü çarpımı aşağıdaki şekilde elde edilir.



Şekil 4.14: $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ nın güçlü çarpımı

Teorem 4.0.6 $\widetilde{G}_I = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_I \tilde{\otimes} \widetilde{G'}_I$ de aralık değerli bulanık esnek graftır.

İspat. Tanım 4.0.9 dan faydalanılarak Teorem 4.0.5 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 4.0.10 $\widetilde{G}_I = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ nin bileşkesi $\widetilde{G}_I \tilde{\circ} \widetilde{G'}_I = (G^*, F_3, K_3, A \times B)$ şeklinde gösterilir. Burada $G^* = (V = V_1 \times V_2, E = E_1 \times E_2)$ olmak üzere $(F_3, A \times B)$ V üzerinde ve $(K_3, A \times B)$ E üzerinde aralık değerli bulanık esnek kümelerdir. $\widetilde{G}_I \tilde{\circ} \widetilde{G'}_I$ köşe noktalarının ve kenarlarının alt ve üst sınırlarının üyelik değerleri her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

i) Her $(x, w) \in V_1 \times V_2$ için
$$F_3^-(e_1, e_2)(x, w) = min\{F_1^-(e_1)(x), F_2^-(e_2)(w)\}$$
$$F_3^+(e_1, e_2)(x, w) = min\{F_1^+(e_1)(x), F_2^+(e_2)(w)\}$$

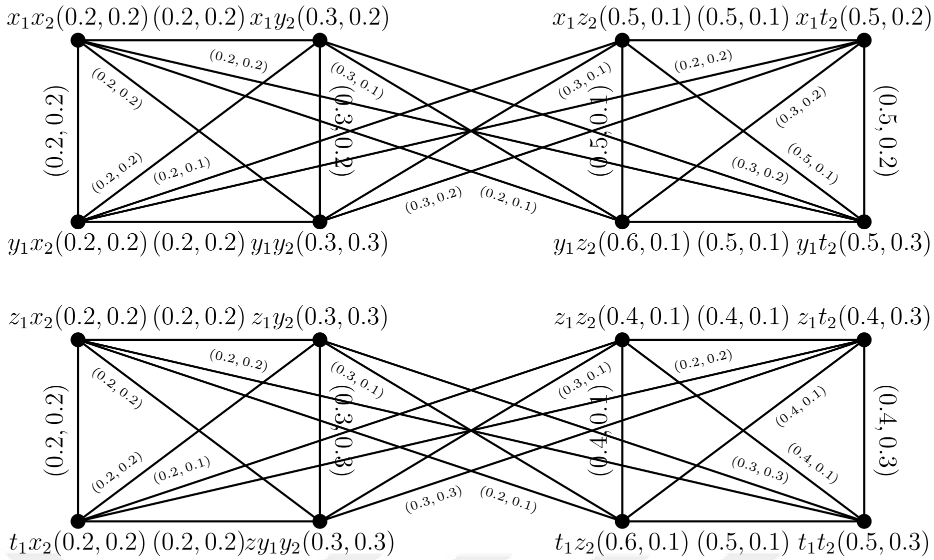
ii) Her $x \in V_1$,$(w, z) \in E_2$ için
$$K_3^-(e_1, e_2)((x, w)(x, z)) = min\{F_1^-(e_1)(x), K_2^-(e_2)(w, z)\}$$
$$K_3^+(e_1, e_2)((x, w)(x, z)) = min\{F_1^+(e_1)(x), K_2^+(e_2)(w, z)\}$$

iii) Her $w \in V_2$,$(x, y) \in E_1$ için
$$K_3^-(e_1, e_2)((x, w)(y, w)) = min\{K_1^-(e_1)(x, y), F_2^-(e_2)(w)\}$$
$$K_3^+(e_1, e_2)((x, w)(y, w)) = min\{K_1^+(e_1)(x, y), F_2^+(e_2)(w)\}$$

iv) Her $(x, y) \in E_1$,$(w, z) \in E_2$ için
$$K_3^-(e_1, e_2)((x, w)(y, z)) = min\{K_1^-(e_1)(x, y), K_2^-(e_2)(w, z)\}$$
$$K_3^+(e_1, e_2)((x, w)(y, z)) = min\{K_1^+(e_1)(x, y), K_2^+(e_2)(w, z)\}$$

v) Her $(x, y) \in E_1$,$(w, z) \in V_2$, $w \neq z$ için
$$K_3^-(e_1, e_2)((x, w)(y, z)) = min\{F_2^-(e_2)(w), F_2^-(e_2)(z), K_1^-(e_1)(x, y)\}$$
$$K_3^+(e_1, e_2)((x, w)(y, z)) = min\{F_2^+(e_2)(w), F_2^+(e_2)(z), K_1^+(e_1)(x, y)\}$$

Örnek 4.0.10 $\widetilde{G}_I = (G_1^*, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ aralık değerli bulanık esnek graflarını Örnek 4.0.8 de verildiği gibi alalım. $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ nin bileşkesi aşağıdaki şekilde elde edilir.



Şekil 4.15: $\widetilde{G}_I$ ve $\widetilde{G'}_I$ nın bileşkesi

Teorem 4.0.7 $\widetilde{G}_I = (G_1^*, F_1, F_1, K_1, A)$ ve $\widetilde{G'}_I = (G_2^*, F_2, K_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli bulanık esnek graf olsun. Bu taktirde $\widetilde{G}_I \tilde{\circ} \widetilde{G'}_I$ de aralık değerli bulanık esnek graftır.

İspat. Tanım 4.0.10 dan faydalanılarak Teorem 4.0.5 in ispatına benzer şekilde yapılır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde çalışmasında bulanık esnek kümeleri ve aralık değerli bulanık esnek kümeleri graf yapısı üzerinde ele aldık. Bulanık esnek graf ve aralık değerli bulanık esnek graf yapılarını inceledik.

Yaptığımız çalışmada elde ettiğimiz başlıca sonuçlar şunlardır:

1. Literatürde mevcut olan bulanık esnek graf kavramındaki eksiklikler giderilerek yeniden tanımlanmış, bulanık esnek kümelerde yeni ikili işlemler verilerek bulanık esnek graflar için bu ikili işlemlerin buradaki etkileri incelenmiştir.

2. Aralık değerli bulanık esnek graf yapısı üzerinde yeni cebirsel işlemler verilerek bunlara ait özellikler incelenmiş ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Elde ettiğimiz sonuçlar sonrasında başlıca önerilerimiz şunlardır:

1. Bulanık esnek graflar yardımıyla klasik grafların özellikleri incelenebilir.

2. Bulanık esnek grafların ve aralık değerli bulanık esnek grafların karar verme problemlerindeki uygulamaları ele alınabilir.

3. Bulanık esnek graflar ve aralık değerli bulanık esnek graflar bu alanda çalışan diğer araştırmacılara tanıtılarak farklı bilim dalları ile ortak çalışmalar yapılması hedeflenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Akram, M., & Nawaz, S. (2015). Operations on Soft Graphs. *Fuzzy Information and Engineering*, 7(4), 423–449.

[2] Akram, M., & Dudek, W.A. (2011). Interval-valued Fuzzy Graphs. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 289–299.

[3] Akram, M., & Nawaz, S. (2016). Fuzzy Soft Graphs with Applications. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 30(6), 3619–3632.

[4] Aktaş, H., & Çağman, N. (2007). Soft sets and soft groups. *Information Sciences*, 177, 2726–2735.

[5] Ali, M., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547–1553

[6] Bhattacharya, P. (1987). Some Remarks on Fuzzy Graphs. *Pattern Recognition Letters.* 6, 297–302.

[7] Craine, W. L. (1994). Characterization of Fuzzy Interval Graphs. *Fuzzy Sets and Systems*, 68, 181–193

[8] Çelik, Y. (2018). On Bipolar Fuzzy Soft Graphs. *Creative Mathematics and Informatics*, 27(2), 123–132.

[9] Euler, L. (1735). Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8, 128–140.

[10] Feng, F., Jun, Y. B., Liu, X., & Li, L. (2010). An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(1), 10–20.

[11] Gani, N. G., & Ahmed, M. B. (2003). Order and Size in Fuzzy Graph, *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, 22(1), 145–148.

[12] Gorzalczany, M. B. (1987). A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 21, 1–17.

[13] Gorzalczany, M. B. (1989). An interval-valued fuzzy inference method some basic properties. *Fuzzy Sets and Systems*, 31, 243–251.

[14] Gross, J. T., & Yellen, J. (2005). Graph Theory and Its Applications. 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 800 pp.

[15] Imrich, W., Klavzar, S., & Rall, F. (2008). Topics in Graph Theory: Graphs and Their Cartesian Products. *A K Peters. Ltd.*, Wellesley, MA, 219 pp.

[16] Jun, Y. B., Lee, K. J., & Park, C. H. (2010). Fuzzy soft set theory applied to BCK/BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(9), 3180–3192.

[17] Karunambigai, M. G, & Parvathi, R. (2006). Intuitionistic Fuzzy Graphs, Proceedings of 9th Fuzzy Days International Conference on Computational Intelligence, Advances in soft computing: Computational Intelligence,Theory and Applications, Springer-Verlag, 20, 139–150.

[18] Kharal, A., & Ahmad, B. (2009). Mappings on Fuzzy Soft Classes. *Advances in Fuzzy Systems*, doi:10.1155/2009/407890.

[19] Kong, Z., Gao, L., & Wong, L. (2009). Comment on A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 323(2), 540–542.

[20] Liu, Y., & Xin, X. (2013). General Fuzzy soft Groups and Fuzzy Normal Soft Groups. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6(2)), 391–400.

[21] Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(1), 555–562.

[22] Maji, P. K., Roy, A. R., & Biswas, R. (2002). An application of soft sets in a decision making problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(1), 1077–1083.

[23] Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2001). Fuzzy soft sets. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9(3), 589–602.

[24] Majumdar, P., & Samanta, S. K. (2010). Generalised Fuzzy Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(4), 1425–1432

[25] Masarwah, A. A., & Qamar, M. A. (2018). Some New Concepts of Fuzzy Soft Graphs. *Fuzzy Information and Engineering*, 8(4), 427–438.

[26] Mohinta, S., & Samanta, T. K. (2015). An Introduction to Fuzzy Soft Graph. *Mathematica Moravica*, 19(2), 35–48.

[27] Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory - First Results. *Compututers and Mathematics with Applications*, 37, 19–31.

[28] Mordeson J. N., & Peng, C. S. (1994). Operations on fuzzy graphs. *Information Sciences*, 79, 159–170.

[29] Neog, T. J., Sut, D. K., & Saikia, N. (2012). On Fuzzy Soft Complement and Related Properties. *Mathematics*, Corpus id:125011603.

[30] Parvathi, R., Karunambigai, M. G., & Atanassov, K. (2009). Operations on Intuitionistic Fuzzy Graphs. Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 1396–1401.

[31] Rosenfeld, A. (1975). Fuzzy graphs, (in: Zadeh, L. A., Fu, K. S., Tanaka K., Shimura, M. Eds.) *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes*, Academic Press, New York, 77–95.

[32] Roy, M. K., & Biswas, R. (1992). IV fuzzy relations and Sanchez's approach for medical diagnosis. *Fuzzy Sets Syst*, 47, 35–38.

[33] Somasundaram, A. (2005). Domination in products of fuzzy graphs. *Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl. Based Syst.*, doi:10.1142/S0218488505003394.

[34] Son, M. J. (2007). Interval-valued fuzzy soft sets. *Journal of Korean Institute of Intelligent Systems*, 17, 557–562.

[35] Sunitha, M. S., & Vijayakumar, A. (2002). Complement of a fuzzy graph. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 33(9), 1451–1464.

[36] Thumbakara, R. K., & George, B. (2014). Soft graphs. *General Mathematics Notes*, 21(2), 75–86.

[37] Vasudev, C. (2006). Graph theory with applications. *New Age International Publishers*, New Delhi, India.

[38] Yang, X., Lin, T. Y., Yang, J., Li, Y., & Yu, D. (2009). Combination of interval-valued fuzzy set and soft set. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(3), 521–527.

[39] Yang, X., Yu, D., Yang, J., & Wu, C. (2007). Generalization of soft set theory: from crisp to fuzzy case. Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of ICFIE 2007, *Advances in Soft Computing*, Springer, 40, 345–355.

[40] Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 338–353.

[41] Zadeh, L. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I., *Information Science*, 8, 199–249.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Mihriban DURMUŞ
Doğum Yeri	**:**	Trabzon
Doğum Tarihi	**:**	21.06.1994
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	mihribandurmus6161@gmail.com
İletişim Bilgileri	**:**	Şahincili Mah. 581. Sokak Ötükent Sitesi A Blok No:4 Altınordu/ORDU

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik Böl.	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2016