T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BULANIK ESNEK GRUP YAPISI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

ORHAN ÖNAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Orhan ÖNAL tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK danışmanlığında yürütülen "Sezgisel Bulanık Esnek Grup Yapısı ve Bazı Özellikleri" adlı bu tez, jürimiz tarafından 02 / 08 / 2019 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Başkan	:	Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :

ONAY:

06 / 08 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 06/08/ 2019 tarih ve 2019 / 473 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Enstitü Müdürü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Orhan ÖNAL

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

SEZGİSEL BULANIK ESNEK GRUP YAPISI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Orhan ÖNAL

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2019
Yüksek Lisans Tezi, 38s.

Danışman: Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Bu tezin amacı, literatürde mevcut olan sezgisel bulanık esnek grup kavramının (t,s)-normlar yardımıyla yeniden inşasını değerlendirmek, bu yeni yapıya ait temel özellikleri incelemek ve elde edilen sonuçları ortaya koymaktır.

Bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmamızda temel olan gruplar, t-normlar, s-normlar, esnek kümeler, bulanık kümeler, sezgisel bulanık kümeler ve sezgisel bulanık esnek kümeler hakkında bazı tanımlar ifade edilmiştir. İkinci bölümde sezgisel bulanık esnek grupların (t,s)-normlar yardımıyla inşası verilerek, sezgisel bulanık esnek gruplara ait özellikler araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, Sezgisel bulanık küme, Sezgisel bulanık esnek küme, Sezgisel bulanık esnek grup.

ABSTRACT

INTUITIONISTIC FUZZY SOFT GROUP STRUCTURE AND ITS SOME PROPERTIES

Orhan ÖNAL

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Natural and Technology
Department of Mathematics, 2019
MSc. Thesis, 38p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yıldıray ÇELİK

The aim of the present thesis is to evaluate the concept of the intuitionistic fuzzy soft group which exist in the literatüre with help of (t,s)-norms, to examine the basic properties of them, and is to present the results obtained from this structures.

This study consists of two main chapters. In first chapter, some definitions are crucial for our study such as groups, t-norms, s-norms, soft sets, fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and intuitionistic fuzzy soft sets are stated. In second chapter, by giving the construction of intuitionistic fuzzy soft group with help of (t,s)-norms, the algebraic properties belonging to these are examined.

Key Words: Fuzzy set, Intuitionistic fuzzy set, Intuitionistic fuzzy soft set, Intuitionistic fuzzy soft group.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı süresince yardımlarını esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK olmak üzere Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her zaman üzerimde hissettiğim aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge No

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathrm{SB(U)}$	: U üzerindeki bütün sezgisel bulanık kümeler
$\sqsubseteq$	: Sezgisel bulanık alt küme
$\sqcap$	: Sezgisel bulanık kümelerin arakesiti
$\sqcup$	: Sezgisel bulanık kümelerin birleşimi
$\mathrm{SBE(U)}$	: U üzerindeki bütün sezgisel bulanık esnek kümeler
$\tilde{\sqsubseteq}$	: Sezgisel bulanık esnek alt küme
$\gamma_{\emptyset}$	: Boş sezgisel bulanık esnek küme
$\gamma_{\hat{E}}$	: Evrensel sezgisel bulanık esnek küme
$\tilde{\sqcup}$	: Sezgisel bulanık esnek kümelerin birleşimi
$\tilde{\sqcap}$	: Sezgisel bulanık esnek kümelerin arakesiti
$\tilde{\cup}$	: Sezgisel bulanık esnek grupların genişletilmiş birleşimi
$\tilde{\cap}$	: Sezgisel bulanık esnek grupların genişletilmiş arakesiti
$\tilde{\wedge}$	: Sezgisel bulanık esnek kümelerin $\wedge$-arakesiti
$\tilde{\vee}$	: Sezgisel bulanık esnek kümelerin $\vee$-birleşimi
$\tilde{\times}$	: Sezgisel bulanık esnek kümelerin Kartezyen çarpımı

1. GİRİŞ

Belirsizlik problemi, filozoflar, mantıkçılar ve matematikçiler tarafından uzun zamandır ele alınmaktadır. Bu problem, özellikle yapay zeka alanında (risk analizi, tahmin, fonksiyonel aygıtların gelişimi) bilim adamları için önemli bir çalışma alanı oluşturmaktadır. Belirsizliği anlamak ve buna uygun çözümler bulmak için birçok yaklaşım metotları geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlardan en önemlileri bulanık kümeler (Zadeh, 1965), yaklaşımlı kümeler (Pawlak, 1982) ve esnek kümeler (Molodtsov, 1992) dir. Bulanık küme kavramı ilk olarak Lütfü Askerzade (Zadeh, 1965) tarafından ortaya konulmuştur. Bulanık mantığın dayandığı ana fikir, hayatın sadece doğru ve yanlıştan oluşmadığı ya da dünyada sadece siyahın ve beyazın var olmadığı, farklı renklerin de var olduğu ilkesine dayanır. Bulanık kümeler karakteristik fonksiyonla ifade edilen klasik kümeler yerine, dereceli üyelik fonksiyonuyla ifade edilen bir kavram olarak düşünülebilir. Yani bir çeşit çok-değerli küme kuramıdır. Bulanık küme kavramı uygulamalı bilimlerde kullanım alanı bulduğu kadar teorik bilimlerde de kullanılmaktadır. Çok sayıda araştırmacı bu kavramın cebirsel yapılar üzerindeki uygulamalarını çalışmışlardır. Rosenfeld (1971) bulanık küme kavramını kullanarak bulanık grup teoriyi geliştirmiştir. Bulanık grup teorinin temel özellikleri klasik grup teorideki sonuçlar kullanılarak elde edilmiştir. Das (1981) seviye alt grupları üzerine çalısmıstır. Daha sonra birçok bilim adamı tarafından bulanık küme kavramı farklı cebirsel yapılara uygulanmıştır. Liu (1983) bulanık grupları kullanarak daha karmaşık bulanık cebirsel yapılar olan bulanık halkalar ve bulanık idealler üzerine çalışmalar yaptı. Mukherjee ve Bhattacharya (1984) bulanık normal alt grupları ve bulanık yan sınıfları, Mukherjee ve Sen (1987) bulanık idealleri, Malik ve Mordeson (1990) bulanık asal idealleri tanımladılar. Dixit ve ark. (1992) bulanık halkaları incelediler. Ersoy (2003) bulanık alt grupların ve bulanık ideallerin kartezyen çarpımı üzerine çalıştılar. Fatih ve Salleh (2009) sezgisel bulanık grup kavramını verdiler.

Belirsizliklerle başa çıkabilmede kullanılan yeni bir matematiksel model olan esnek küme teorisi ise ilk olarak D. Molodtsov (1999) tarafından ortaya konuldu. Molodtsov (1999, 2004) sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teori, yöneylem araştırması, Rienmann integrali, Peron integrali, olasılık teori, ölçüm teori gibi birçok alana esnek küme teoriyi uyguladı.

Daha sonra Maji ve ark. (2003) esnek küme işlemlerini tanımladı. Maji ve ark. (2002), Pawlak (1982)'ın yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını yaptı ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladı. Esnek küme teorisi, özellikle esnek karar verme gibi birçok alanda geniş kapsamlı uygulamalarla dikkat çekici hızlı adımlardan geçmiştir (Maji ve ark., 2003; Ali ve ark., 2009; Çağman ve Enginoğlu, 2010). Esnek küme, hem teori hem de pratiğin dengeli bir kapsamını vurgular. Günümüzde, bilişim bilimleri, akıllı sistemler, karar verme sistemleri, kendini uyarlama ve kendi kendini örgütleme sistemleri, bilgi modelleme gibi alanlarda geniş bir uygulama imkanı buldu.

Daha sonrasında esnek kümelerin cebirsel özellikleri de bazı araştırmacılar tarafından çalışılmaya başlandı. İlk olarak Aktaş ve Çağman (2007) esnek grup kavramını vererek, bu kavramın temel özelliklerini ortaya koydular. Daha sonra birçok araştırmacı esnek küme kavramını farklı cebirsel yapılar üzerinde ele aldılar ve bu yapılar üzerindeki etkisini incelediler. Jun (2008) esnek kümeleri BCK/BCI-cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özeliklerini tartıştı. Feng ve ark. (2008) esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halka kavramını ortaya koydular ve bunlarla ilgili bazı özelikleri incelediler. Sun ve ark. (2008) esnek modülleri tanımlayarak buna ait bazı temel özellikleri elde ettiler. Acar ve ark. (2010) esnek halkaları tanımladılar ve esnek halkaların bazı temel özelliklerini incelediler. Feng ve ark. (2010) bulanık kümeler, kaba kümeler ve esnek kümelerin hepsini birleştirmek için bir yapı oluşturdular. Çelik ve ark. (2011) esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler verdiler ve esnek halkalarla ilgili yeni özellikler elde ettiler. Kaygısız (2012) esnek kesişimsel grup kavramını verdi ve bu yapıya ait bazı özellikleri araştırdı. Çağman ve ark. (2012) esnek kesişimsel grupların klasik grup teorisi ile olan ilişkisini incelediler ve grup teorisi üzerinde bir uygulamasını ele aldılar.

Bulanık esnek küme teorisi ise esnek küme teorisinin bir genellemesi olarak ilk kez Maji ve ark. (2001) tarafından ortaya konuldu. Daha sonra bulanık esnek küme kavram birçok araştırmacı tarafından farklı cebirsel yapılara uygulandı (Jun ve ark., 2010; İnan ve Öztürk, 2011; Xiao ve ark., 2012; Çağman ve Enginoğlu, 2012; Çelik ve ark., 2013). Aygünoğlu ve Aygün (2009) bulanık esnek grupları tanımladılar ve bunlara ait özellikleri araştırdılar. Manemaran (2011) bulanık esnek gruplar üzerinde birtakım işlemeler tanımladı ve bunlara bağlı sonuçlar elde etti. Patel ve ark. (2015) normal bulanık esnek grup kavramını verdiler ve normal bulanık esnek alt grupların seviye alt kümelerini tanımladılar. Çelik (2015) $(\in, \in \vee q)$-bulanık esnek grup kavramını verdi, bu kavrama ait özellikleri araştırdı ve karakteristik yapısını inceledi.

Maji ve ark. (2004) sezgisel bulanık esnek küme kavramını vererek bununla ilgili özellikleri araştırdılar. Jiang ve ark. (2010) aralık değerli sezgisel bulanık esnek küme kavramını verdiler ve bu kavrama ait özellikleri ortaya koydular. Jiang ve ark. (2011) sezgisel bulanık esnek kümelerin bir karar verme problemi üzerinde ki uygulamasını ele aldılar. Zhou ve ark. (2011) sezgisel bulanık esnek küme kavramını yarı gruplara uyguladılar. Karaaslan ve ark. (2013) sezgisel bulanık esnek grup kavramını verdiler ve bazı temel özelliklerini araştırdılar.

Biz bu çalışmada, literatürde mevcut olan sezgisel bulanık esnek grup kavramının (t,s)-normlar yardımıyla yeniden inşasını değerlendireceğiz, bazı yeni özelliklerini inceleyeceğiz ve elde edilen sonuçları ortaya koyacağız. Bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmamızda temel olan gruplar, t-normlar, s-normlar, esnek kümeler, bulanık kümeler, sezgisel bulanık kümeler ve sezgisel bulanık esnek kümeler hakkında bazı tanımlar ifade edilmiştir. İkinci bölümde sezgisel bulanık esnek grupların (t,s)-normlar yardımıyla inşası verilerek, sezgisel bulanık esnek gruplara ait yeni özellikler araştırılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1. (Bhattacharya and Jain, 1972) $\emptyset \neq G$ bir küme ve '$\cdot$' G üzerinde bir ikili işlem olsun. G'ye bir grup denir. $\Leftrightarrow$

G1) Her $x, y, z \in G$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

G2) $\exists\ e \in G$ öyle ki her $x \in G$ için $e.x = x.e = x$

G3) Her $x \in G$ için $\exists\ y \in G$ öyle ki $x.y = y.x = e$

Burada e elemanına G grubunun birim elemanı denir. $x.y = y.x = e$ eşitliğini sağlayan y elemanına x elemanının tersi denir ve $y = x^{-1}$ veya $y = -x$ ile gösterilir.

Tanım 2.2. (Bhattacharya and Jain, 1972) $(G, \bullet)$ bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. H'ye G'nin bir alt grubu denir $\Leftrightarrow \forall\ x, y \in H$ için $x.y^{-1} \in H$. Bu durum $H \leq G$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.3. (Nguyen ve Walker, 2006) $\Delta: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dönüşümü verilsin. Her $x, y, z, w \in [0,1]$ için;

i) $x\Delta 1 = x$

ii) $x\Delta y = y\Delta x$

iii) $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$

iv) Eğer $y \leq z$ ise $x\Delta y \leq x\Delta z$

koşullarını sağlayan Δ fonksiyonuna bir t-norm denir.

Tanım 2.4. (Nguyen ve Walker, 2006) $\nabla: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dönüşümü verilsin. Her $x, y, z, w \in [0,1]$ için;

i) $x\nabla 0 = x$

ii) $x\nabla y = y\nabla x$

iii) $x\nabla(y\nabla z) = (x\nabla y)\nabla z$

iv) Eğer $y \leq z$ ise $x\nabla y \leq x\nabla z$

koşullarını sağlayan ∇ fonksiyonuna bir s-norm denir.

Örnek 2.1. Aşağıda bazı bilinen temel t-normlar verilmiştir.

$$\Delta_{\mathrm{M}}(x, y) = \min(x, y)$$

$$\Delta_{\mathrm{P}}(x, y) = x.y$$

$\Delta_{\mathrm{L}}(x,y) = \max(x+y-1,0)$

$$\Delta_{\mathrm{D}}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in [0,1]^2 \\ \min(x,y), & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

Δ_{M}, Δ_{P}, Δ_{L} ve Δ_{D} t-normlarına sırasıyla minimum t-norm, çarpım t-norm, Lukasiewicz t-norm ve drastic t-norm denir.

Örnek 2.2. Aşağıda bazı bilinen temel s-normlar verilmiştir.

$\nabla_{\mathrm{M}}(x,y) = \max(x,y)$

$\nabla_{\mathrm{P}}(x,y) = x+y-x.y$

$\nabla_{\mathrm{L}}(x,y) = \min(x+y,1)$

$$\nabla_{\mathrm{D}}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in [0,1]^2 \\ \max(x,y), & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

∇_{M}, ∇_{P}, ∇_{L} ve ∇_{D} s-normlarına sırasıyla maksimum s-norm, çarpım s-norm, Lukasiewicz s-norm ve drastic s-norm denir.

Tanım 2.5. (Çağman ve Enginoğlu, 2010) U $\neq \emptyset$ bir evren, P(U) U'nun güç kümesi, E $\neq \emptyset$ ve $A \subseteq$ E olsun. U üzerinde f_A:E $\rightarrow$ P(U) dönüşümü ile verilen (f_A, E) ikilisine U üzerinde bir esnek küme denir. Burada $f_A = \{(x, f_A(x)) : x \in \mathrm{E},\ f_A(x) \in P(\mathrm{U})\}$ şeklindedir.

Des(f_A, E) ={ $x \in$ E : $f_A(x) \neq \emptyset$} kümesine (f_A, E) esnek kümesinin desteği denir. Eğer Des(f_A, E) $\neq \emptyset$ ise (f_A, E) esnek kümesine boştan farklı esnek küme denir.

Tanım 2.6. (Aktaş ve Çağman, 2007) G bir grup ve (f_A, E) G üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun. Eğer her $x \in$ E için $f_A(x)$, G'nin bir alt grubu oluyorsa (f_A, E) ye G üzerinde bir esnek grup denir.

Tanım 2.7. (Zadeh, 1965) X boştan farklı bir küme olsun. μ_A: X $\rightarrow$ [0,1] fonksiyonu tarafından karakterize edilen A={$(x, \mu_A(x)|x \in$ X} kümesine X de bir bulanık küme denir. Her $x \in$ X için $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ değerine x in A ya ait olma derecesi denir.

A={$(x, \mu_A(x)|x \in$ X} ve B={$(x, \nu_B(x)|x \in$ X} X de iki bulanık küme olmak üzere her $x \in$ X için $\mu_A(x) \leq \nu_B(x)$ ise B, A'yı kapsar denir ve $A \leq B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8. (Mordeson and Malik, 1998) G bir grup, μ_A G üzerinde bir bulanık küme olsun. μ_A'ya G'nin bulanık alt grup denir. ⟺ Her x, y ∈G için

i) $\mu_A(xy) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$

ii) $\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$

Tanım 2.9. (Atanassov, 1986) X üzerinde bir A sezgisel bulanık kümesi $A = \{\langle x, \mu_A(x), \eta_A(x)\rangle : x \in \mathrm{X}\}$ şeklinde tanımlanır. Burada $\mu_A : \mathrm{X} \to [0,1]$ ve $\eta_A : \mathrm{X} \to [0,1]$ fonksiyonları bir $x \in \mathrm{X}$ elemanının sırasıyla üyelik derecesini ve üye olmama derecesini ifade eder ve her $x \in \mathrm{X}$ için $0 \leq \mu_A(x) + \eta_A(x) \leq 1$ dir. Ayrıca her $x \in \mathrm{X}$ için $\widetilde{\mathrm{X}} = \{\langle x, 1{,}0\rangle : x \in \mathrm{X}\}$ ve $\widetilde{\emptyset} = \{\langle x, 0{,}1\rangle : x \in \mathrm{X}\}$ kümeleri sırasıyla sezgisel bulanık evrensel kümeyi ve sezgisel bulanık boş kümeyi ifade etmektedir. U üzerindeki bütün sezgisel bulanık kümeler $\mathrm{SB(U)}$ ile gösterilir.

Tanım 2.10. (Atanassov, 1986) $\mathrm{A} = \{\langle x, \mu_A(x), \eta_A(x)\rangle : x \in \mathrm{X}\}$ ve $\mathrm{B} = \{\langle x, \mu_B(x), \eta_B(x)\rangle : x \in \mathrm{X}\}$ iki sezgisel bulanık küme olsun. Eğer her $x \in$ X için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)\ ve\ \eta_A(x) \geq \eta_B(x)$ oluyor ise A'ya B'nin alt kümesi denir ve $\mathrm{A} \sqsubseteq \mathrm{B}$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.11. (Atanassov, 1986) $\mathrm{A} = \{\langle x, \mu_A(x), \eta_A(x)\rangle : x \in \mathrm{X}\}$ ve $\mathrm{B} = \{\langle x, \mu_B(x), \eta_B(x)\rangle : x \in \mathrm{X}\}$ iki sezgisel bulanık küme olsun. A ve B'nin arakesiti ve birleşimi aşağıdaki gibi tanımlanır.

i) $\mathrm{A} \sqcap \mathrm{B} = \{\langle x, min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, max\{\eta_A(x), \eta_B(x)\}\rangle : x \in \mathrm{X}\}$

ii) $\mathrm{A} \sqcup \mathrm{B} = \{\langle x, max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, min\{\eta_A(x), \eta_B(x)\}\rangle : x \in \mathrm{X}\}$

Tanım 2.12. (Palaniappan ve ark., 2009) *G* bir grup, $\mathrm{A} = \{\langle x, \mu_A(x), \eta_A(x)\rangle : x \in G\}$ *G* üzerinde sezgisel bulanık küme olsun. A'ya *G*'nin sezgisel bulanık alt grubu denir. ⟺ Her $x, y \in G$ için

i) $\mu_A(xy) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$

ii) $\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x)$

iii) $\eta_A(xy) \leq \max\{\eta_A(x), \eta_A(y)\}$

iv) $\eta_A(x^{-1}) = \eta_A(x)$

Tanım 2.13. (Maji ve ark., 2001) U bir evren, E parametreler kümesi ve $A \subseteq \mathrm{E}$ olsun. U üzerinde bir γ_A sezgisel bulanık esnek küme $\gamma_A : \mathrm{E} \to \mathrm{SB(U)}$ şeklinde bir fonksiyondur. Burada $\gamma_A(x)$ değerleri U üzerinde sezgisel bulanık kümelerdir. Yani,

$\gamma_A(x) = \left\{\langle u/\overline{\gamma}_{A(x)}(u)/\underline{\gamma}_{A(x)}(u)\rangle : x \in \mathrm{E}, u \in \mathrm{U}\right\}$ şeklindedir. Burada $\bar{\gamma}_{A(x)}(u)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(u)$ sırasıyla x parametresi için u nun üyelik derecesini ve üye olmama derecesini ifade etmektedir. U üzerindeki bütün sezgisel bulanık esnek kümeler SBE(U) ile gösterilir.

Tanım 2.14. (Maji ve ark., 2001) γ_A ve γ_B U üzerinde iki sezgisel bulanık esnek küme olsun. γ_A ya γ_B nin sezgisel bulanık esnek alt kümesi denir. ⇔

i) A ⊆ B

ii) Her $x \in$ A için $\gamma_A(x)$, $\gamma_B(x)$ in sezgisel bulanık alt kümesidir.

Bu durum $\gamma_A \mathrel{\tilde{\sqsubseteq}} \gamma_B$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.15. (Maji ve ark., 2001) γ_A ve γ_B U üzerinde sezgisel bulanık esnek kümeler olsun. γ_A ve γ_B ye sezgisel bulanık esnek eşittir deni$r$. ⇔ $\gamma_A \mathrel{\tilde{\sqsubseteq}} \gamma_B$ ve $\gamma_B \mathrel{\tilde{\sqsubseteq}} \gamma_A$ dir. Bu durum $\gamma_A \cong \gamma_B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.16. (Maji ve ark., 2001) γ_A , U üzerinde bir sezgisel bulanık esnek küme olsun. Eğer her $x \in$ E için $\gamma_A(x) = \widetilde{\emptyset}$ ise γ_A ya boş sezgisel bulanık esnek küme denir ve $\gamma_\emptyset$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.17. (Maji ve ark., 2001) γ_A , U üzerinde bir sezgisel bulanık esnek küme olsun. Eğer her $x \in$ A için $\gamma_A(x) = \widetilde{\mathrm{U}}$ ise γ_A ya A-evrensel sezgisel bulanık esnek küme denir ve $\gamma_{\hat{A}}$ ile gösterilir. Eğer A=E ise A-evrensel sezgisel bulanık esnek küme, evrensel sezgisel bulanık esnek küme olarak adlandırılır ve $\gamma_{\hat{E}}$ ile gösterilir.

Tanım 2.18. (Maji ve ark., 2001) $\gamma_A, \gamma_B \in$ SBE(U) olsun. $\gamma_A \mathbin{\tilde{\sqcup}} \gamma_B = \left\{\left(x, \gamma_{A\tilde{\sqcup}B}(x)\right): x \in \mathrm{E}\right\}$ ile verilen $\gamma_A \mathbin{\tilde{\sqcup}} \gamma_B$ kümesine γ_A ve γ_B nin birleşimi denir. Burada,

$$\gamma_{A\tilde{\sqcup}B}(x) = \gamma_A(x) \sqcup \gamma_B(x)$$

$$= \left\{\langle u/max\{\bar{\gamma}_{A(x)}(u), \bar{\gamma}_{B(x)}(u)\}/min\left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(u), \underline{\gamma}_{B(x)}(u)\right\}\rangle : u \in \mathrm{U}\right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.19. (Maji ve ark., 2001) $\gamma_A, \gamma_B \in$ SBE(U) olsun. $\gamma_A \mathbin{\tilde{\sqcap}} \gamma_B = \left\{\left(x, \gamma_{A\tilde{\sqcap}B}(x)\right): x \in \mathrm{E}\right\}$ ile verilen $\gamma_A \mathbin{\tilde{\sqcap}} \gamma_B$ kümesine γ_A ve γ_B nin arakesiti denir. Burada,

$\gamma_{A\tilde{\sqcap}B}(x) = \gamma_A(x) \sqcap \gamma_B(x)$

$$= \left\{ \langle u/min\{\bar{\gamma}_{A(x)}(u), \bar{\gamma}_{B(x)}(u)\}/max\left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(u), \underline{\gamma}_{B(x)}(u)\right\}\rangle : u \in \mathrm{U} \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.20. (Jiang ve ark., 2011) $\gamma_A \in \mathrm{SBE(U)}$ ve $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta \leq 1$ olsun. Bu takdirde, γ_A nın (α, β) −seviye kümesi ${}^{\alpha}_{\beta}\gamma_A$ şeklinde gösterilir ve her $x \in A$ için ${}^{\alpha}_{\beta}\gamma_A(x) = \left\{u \in U\colon \bar{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsupseteq \alpha \ \ ve \ \ \underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsubseteq \beta\right\}$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.1. (Jiang ve ark., 2011) γ_A, $\gamma_B \in \mathrm{SBE(U)}$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

i) Her $\alpha, \beta \in [0,1]$ için $\gamma_A \mathrel{\tilde{\sqsubseteq}} \gamma_B$ ise ${}^{\alpha}_{\beta}\gamma_A \mathrel{\tilde{\sqsubseteq}} {}^{\alpha}_{\beta}\gamma_B$ dir.

ii) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in [0,1]$ için eğer $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ve $\beta_2 \leq \beta_1$ ise ${}^{\alpha_2}_{\beta_2}\gamma_A \mathrel{\tilde{\sqsubseteq}} {}^{\alpha_1}_{\beta_1}\gamma_A$ dir.

iii) Her $\alpha, \beta \in [0,1]$ için $\gamma_A \cong \gamma_B \Leftrightarrow {}^{\alpha}_{\beta}\gamma_A \cong {}^{\alpha}_{\beta}\gamma_B$ dir.

Tanım 2.21. $\gamma_{\mathrm{A}}, \gamma_{\mathrm{B}} \in \mathrm{SBE(U)}$ olsun. $\gamma_A \mathbin{\tilde{\sqcap}} \gamma_B = \gamma_C = \{(x, \gamma_C(x))\colon x \in \mathrm{E}\}$ ile verilen γ_C kümesine γ_{A} ve γ_{B} nin genişletilmiş arakesiti denir. Burada $C = A \cup B$ olmak üzere $\gamma_C(x) = \left\{\langle u/\bar{\gamma}_{C(x)}(u)/\underline{\gamma}_{C(x)}(u)\rangle : x \in \mathrm{E}, u \in \mathrm{U}\right\}$ şeklinde olup $\bar{\gamma}_{C(x)}$ ve $\underline{\gamma}_{C(x)}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{\gamma}_{C(x)}(u) = \begin{cases} \bar{\gamma}_{A(x)}(u) & \text{eğer } x \in \mathrm{A}\backslash\mathrm{B} \\ \bar{\gamma}_{B(x)}(u) & \text{eğer } x \in \mathrm{B}\backslash\mathrm{A} \\ min\left\{\bar{\gamma}_{A(x)}(u), \bar{\gamma}_{B(x)}(u)\right\} & \text{eğer } x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \end{cases}$$

$$\underline{\gamma}_{C(x)}(u) = \begin{cases} \underline{\gamma}_{A(x)}(u) & \text{eğer } x \in \mathrm{A}\backslash\mathrm{B} \\ \underline{\gamma}_{B(x)}(u) & \text{eğer } x \in \mathrm{B}\backslash\mathrm{A} \\ max\left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(u), \underline{\gamma}_{B(x)}(u)\right\} & \text{eğer } x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \end{cases}$$

Tanım 2.22. $\gamma_A, \gamma_B \in \mathrm{SBE(U)}$ olsun. $\gamma_A \mathbin{\tilde{\sqcup}} \gamma_B = \gamma_C = \{(x, \gamma_C(x))\colon x \in \mathrm{E}\}$ ile verilen γ_C kümesine γ_A ve γ_B nin genişletilmiş birleşimi denir. Burada $C = A \cup B$ olmak üzere $\gamma_C(x) = \left\{\langle u/\bar{\gamma}_{C(x)}(u)/\underline{\gamma}_{C(x)}(u)\rangle : x \in \mathrm{E}, u \in \mathrm{U}\right\}$ şeklinde olup $\bar{\gamma}_{C(x)}$ ve $\underline{\gamma}_{C(x)}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{\gamma}_{C(x)}(u) = \begin{cases} \bar{\gamma}_{A(x)}(u) & \text{eğer } x \in \mathrm{A} \backslash \mathrm{B} \\ \bar{\gamma}_{B(x)}(u) & \text{eğer } x \in \mathrm{B} \backslash \mathrm{A} \\ max\left\{\bar{\gamma}_{A(x)}(u), \bar{\gamma}_{B(x)}(u)\right\} & \text{eğer } x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \end{cases}$$

$$\underline{\gamma}_{C(x)}(u) = \begin{cases} \underline{\gamma}_{A(x)}(u) & \text{eğer } x \in \mathrm{A} \backslash \mathrm{B} \\ \underline{\gamma}_{B(x)}(u) & \text{eğer } x \in \mathrm{B} \backslash \mathrm{A} \\ min\left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(u), \underline{\gamma}_{B(x)}(u)\right\} & \text{eğer } x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \end{cases}$$

Tanım 2.23. $\gamma_A, \gamma_B \in$ SBE(U) olsun. $\gamma_A \tilde{\wedge} \gamma_B = \{((x,y), \gamma_{A\tilde{\wedge}B}(x,y)) : x, y \in \mathrm{E}\}$ ile verilen $\gamma_A \tilde{\wedge} \gamma_B$ ye γ_A ve γ_B'nin $\wedge -$ arakesiti denir.

Burada,

$$\gamma_{A\tilde{\wedge}B}(x,y) = \gamma_A(x) \sqcap \gamma_B(y)$$
$$= \left\{\langle u/min\{\bar{\gamma}_{A(x)}(u), \bar{\gamma}_{B(y)}(u)\} /max\left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(u), \underline{\gamma}_{B(y)}(u)\right\} >: u \in \mathrm{U}\right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.24. $\gamma_A, \gamma_B \in$ SBE(U) olsun. $\gamma_A \tilde{\vee} \gamma_B = \{(x,y), \gamma_{A\tilde{\vee}B}(x,y) : x, y \in \mathrm{E}\}$ ile verilen $\gamma_A \tilde{\vee} \gamma_B$ ye γ_A ve γ_B'nin $\vee -$ birleşimi denir.

Burada,

$$\gamma_{A\tilde{\vee}B}(x,y) = \gamma_A(x) \sqcup \gamma_B(y)$$
$$= \left\{\langle u/max\{\bar{\gamma}_{A(x)}(u), \bar{\gamma}_{B(y)}(u)\} /min\left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(u), \underline{\gamma}_{B(y)}(u)\right\} >: u \in \mathrm{U}\right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.25. γ_A ve γ_B sırasıyla U_1 ve U_2 üzerinde sezgisel bulanık esnek kümeler olsun. $\gamma_A \tilde{\times} \gamma_B$=$\{(x,y), \gamma_{A\tilde{\times}B}(x,y) : x, y \in \mathrm{E}\}$ ile verilen $\gamma_A \tilde{\times} \gamma_B$ ye γ_A ve γ_B'nin kartezyen çarpımı denir.

Burada,

$\gamma_{A\tilde{\times}B}(x,y) = \left\{\langle (u,v)/min\{\bar{\gamma}_{A(x)}(u), \bar{\gamma}_{B(y)}(v)\} /max\left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(u), \underline{\gamma}_{B(y)}(v)\right\} >: u \in \mathrm{U}_1,\ v \in \mathrm{U}_2\right\}$ şeklindedir.

Tanım 2.26. (Karaaslan ve ark., 2013) $f: A \to B$ bir fonksiyon ve γ_A, $\gamma_B \in$ SBE(U) olsun. γ_A nın f fonksiyonu altındaki görüntüsü ve γ_B nin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü sırasıyla her $y \in B$ için

$$f(\gamma_A)(y) = \begin{cases} \sqcup \{\gamma_A(x): x \in \mathrm{A}, f(x) = y\}, & \text{eğer } f(x) \in f(\mathrm{A}) \\ \gamma_{\emptyset,} & \text{eğer } f(x) \notin f(\mathrm{A}) \end{cases}$$

Her $x \in A$ için $f^{-1}(\gamma_B)(y) = \gamma_B(f(x))$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.3. (Karaaslan ve ark., 2013) $\mathrm{U} = \{u_{1,}u_2, u_3\}$ evrensel küme, $A = \{-1,0,1,2\}$ ve $B = \{0,1,2,3,4\}$ parametre kümeleri ve $f: A \to B$ $f(x) = x^2$ olsun. U üzerinde γ_A ve γ_B sezgisel bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi verilsin.

$\gamma_A = \{(-1, \{\langle u_1/0.5/0.3\rangle, \langle u_2/0.6/0.1\rangle, \langle u_3/0.4/0.5\rangle\}),$

$= (0, \{\langle u_1/0.7/0.2\rangle, \langle u_2/0.4/0.3\rangle, \langle u_3/0.2/0.6\rangle\}),$

$= (1, \{\langle u_1/0.7/0.1\rangle, \langle u_2/0.8/0.2\rangle, \langle u_3/0.5/0.3\rangle\}),$

$= (2, \{\langle u_1/0.3/0.6\rangle\}, \langle u_2/0.5/0.2\rangle, \langle u_3/0.4/0.5\rangle)\}$

$\gamma_B = \{(0, \{\langle u_1/0.4/0.3\rangle, \langle u_2/0.6/0.1\rangle, \langle u_3/0.7/0.2\rangle\}),$

$= (1, \{\langle u_1/0.5/0.3\rangle, \langle u_2/0.6/0.2\rangle, \langle u_3/0.1/0.7\rangle\}),$

$= (2, \{\langle u_1/0.3/0.5\rangle, \langle u_2/0.4/0.2\rangle, \langle u_3/0.4/0.4\rangle\}),$

$= (3, \{\langle u_1/0/1\rangle, \langle u_2/0/1\rangle, \langle u_3/0/1\rangle\}),$

$= (4, \{\langle u_1/0.5/0.5\rangle\langle u_2/0.4/0.3\rangle, \langle u_3/0.3/0.5\rangle\})\}$

Buradan

$f(\gamma_A) = \{(0, \{\langle u_1/0.7/0.2\rangle, \langle u_2/0.4/0.3\rangle, \langle u_3/0.2/0.6\rangle\}),$

$= (1, \{\langle u_1/0.7/0.1\rangle, \langle u_2/0.8/0.1\rangle, \langle u_3/0.5/0.3\rangle\}),$

$= (2, \{\langle u_1/0/1\rangle, \langle u_2/0/1\rangle, \langle u_3/0/1\rangle\}),$

$= (3, \{\langle u_1/0/1\rangle, \langle u_2/0/1\rangle, \langle u_3/0/1\rangle\}),$

$= (4, \{\langle u_1/0.3/0.6\rangle, \langle u_2/0.5/0.2\rangle, \langle u_3/0.4/0.5\rangle\})\}$ ve

$f^{-1}(\gamma_B) = \{(1, \{\langle u_1/0.5/0.3\rangle, \langle u_2/0.6/0.2\rangle, \langle u_3/0.1/0.7\rangle\}),$

$= (0, \{\langle u_1/0.4/0.3\rangle, \langle u_2/0.6/0.1\rangle, \langle u_3/0.7/0.2\rangle\}),$

$= (-1, \{\langle u_1/0.5/0.3\rangle, \langle u_2/0.6/0.2\rangle, \langle u_3/0.1/0.7\rangle\}),$

$= (2, \{\langle u_1/0.5/0.5\rangle, \langle u_2/0.4/0.3\rangle, \langle u_3/0.3/0.5\rangle\})\}$

3. SEZGİSEL BULANIK ESNEK GRUPLARIN (T,S)-NORMLAR YARDIMIYLA İNŞASI VE BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 3.1. *G* bir grup ve $\gamma_A \in$ SBE(*G*) olsun. γ_A'ya *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek grup denir. ⟺ Her $x \in A$ ve $u, v \in G$ için

i) $\overline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u) \Delta \overline{\gamma}_{A(x)}(v)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u) \nabla \underline{\gamma}_{A(x)}(v)$

ii) $\overline{\gamma}_{A(x)}(u) = \overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1})$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(u) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1})$

Tanım 3.2. *G* bir grup, γ_A *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek grup ve e, G nin birim elemanı olsun. γ_A'nin e-kümesi ${\gamma_A}^e$ ile gösterilir ve her $x \in A$ için ${\gamma_A}^e(x) = \left\{u \in G : \overline{\gamma}_{A(x)}(u) = \overline{\gamma}_{A(x)}(e), \underline{\gamma}_{A(x)}(u) = \underline{\gamma}_{A(x)}(e)\right\}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1. $G = \mathbb{Z}_4$ grubunu dikkate alalım. A=$\{p, q, r\}$ parametre kümesi olmak üzere *G* üzerinde γ_A sezgisel bulanık esnek kümesi aşağıdaki gibi verilsin.

Çizelge 3.1. γ_A sezgisel bulanık esnek kümesi

γ_A	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
p	(0.6,0.2)	(0.4,0.5)	(0.5,0.3)	(0.4,0.5)
q	(0.5,0.4)	(0.3,0.6)	(0.4,0.5)	(0.3,0.6)
r	(0.7,0.4)	(0.4,0.4)	(0.6,0.2)	(0.4,0.4)

Açıkça her $a, b \in [0,1]$ için Δ ve ∇ t-norm ve s-normları sırasıyla, $a \Delta b$=min$\{a, b\}$ ve $a \nabla b$=max$\{a, b\}$ şeklinde alınırsa γ_A'nın G üzerinde sezgisel bulanık esnek grup olduğu görülür.

Örnek 3.2. *G* = $\{e, x, y, z\}$ grubu aşağıdaki ikili işlem ile verilsin.

Çizelge 3.2. *G* = $\{e, x, y, z\}$ grubu

.	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	z	e	y
y	y	e	z	x
z	z	y	x	e

A= $\{p, q, r, s\}$ parametre kümesi olsun. *G* üzerinde γ_A sezgisel bulanık esnek kümesi her bir parametreye göre aşağıdaki gibi verilsin.

$\gamma_{A(p)} = \{\langle e, 0.65, 0.34\rangle, \langle x, 0.75, 0.25\rangle, \langle y, 0.71, 0.22\rangle, \langle z, 0.67, 0.32\rangle\}$

$\gamma_{A(q)} = \{\langle e, 0.88, 0.12\rangle, \langle x, 0.83, 0.11\rangle, \langle y, 0.71, 0.19\rangle, \langle z, 0.75, 0.21\rangle\}$

$\gamma_{A(r)} = \{\langle e, 0.72, 0.21\rangle, \langle x, 0.69, 0.31\rangle, \langle y, 0.84, 0.16\rangle, \langle z, 0.79, 0.19\rangle\}$

$\gamma_{A(s)} = \{\langle e, 0.69, 0.31\rangle, \langle x, 0.58, 0.41\rangle, \langle y, 0.62, 0.32\rangle, \langle z, 0.71, 0.27\rangle\}$

Her a, $b \in [0,1]$ için Δ ve ∇ t-norm ve s-normları sırasıyla, $a\Delta b=\max\{a+b-1,0\}$ ve $a\nabla b=\min\{a+b,1\}$ şeklinde alınırsa γ_A'nın G üzerinde sezgisel bulanık esnek grup olduğu görülür.

Önerme 3.1. *G* bir grup ve γ_A, *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek grup olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

i) Her $x \in A$, $u \in G$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\overline{\gamma}_{A(x)}(u^n) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u)$, $\underline{\gamma}_{A(x)}(u^n) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u)$

ii) Her $x \in A$ ve $u \in G$ için $\overline{\gamma}_{A(x)}(\mathrm{e}) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u)$, $\underline{\gamma}_{A(x)}(\mathrm{e}) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u)$

iii) Her $x \in A$ ve $u, v \in G$ için $\overline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(v) \Leftrightarrow \overline{\gamma}_{A(x)}(u) = \overline{\gamma}_{A(x)}(e)$, $\underline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(v) \Leftrightarrow \underline{\gamma}_{A(x)}(u) = \underline{\gamma}_{A(x)}(e)$

Teorem 3.1. *G* bir grup ve $\gamma_A \in$ SBE(*G*) olsun. γ_A, *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur. $\Leftrightarrow$ Her $x \in A$ ve u, $v \in G$ için $\overline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u)\,\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(v)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v)$.

İspat: γ_A, *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek grup olsun. Açıkça, her $x \in A$ ve u, $v \in G$ için

$\overline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u)\,\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(v^{-1}) = \overline{\gamma}_{A(x)}(u)\,\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(v)$ ve

$\underline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v^{-1}) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v)$ dir.

Yani her u, $v \in G$ için $\overline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u)\,\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(v)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v)$ elde edilir.

Tersine, $\overline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u)\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(v)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v)$ olsun. Her $u \in G$ için $\overline{\gamma}_{A(x)}(eu) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(e)\,\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(u) = \overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1})$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(eu) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(e)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(u) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1})$ olduğundan,

$\overline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1})$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1})$ dir. Diğer taraftan $\overline{\gamma}_{A(x)}(eu^{-1}) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(e)\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(u) = \overline{\gamma}_{A(x)}(u)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(eu^{-1}) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(e)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(u) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u)$

olduğundan $\overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) \sqsubseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u)$ dir. Buradan $\overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1})= \overline{\gamma}_{A(x)}(u)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) =\underline{\gamma}_{A(x)}(u)$ elde edilir. Ayrıca, $\overline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u)\, \Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(v^{-1}) =\overline{\gamma}_{A(x)}(u)\, \Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(v)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v^{-1}) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v)$ olduğundan her *u*, *v* ∈G için $\overline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u)\, \Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(v)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v)$ elde edilir. Böylece γ_A, *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

Önerme 3.2. γ_A, *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek grup olsun. Eğer her $x \in A$ ve *u*, *v* ∈*G* için $\overline{\gamma}_{A(x)}(u) =\overline{\gamma}_{A(x)}(e)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(u) = \underline{\gamma}_{A(x)}(e)$ ise $\overline{\gamma}_{A(x)}(uv)= \overline{\gamma}_{A(x)}(v)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(uv)= \underline{\gamma}_{A(x)}(v)$ dir.

Teorem 3.2. γ_A ve γ_B, *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek gruplar olsun. Bu takdirde, $\gamma_A \mathbin{\tilde{\wedge}} \gamma_B$ de *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

İspat: $\gamma_A \mathbin{\tilde{\wedge}} \gamma_B = \gamma_C$ olsun. Burada *C*=*A*×*B* ve her (*x*,*y*) ∈ *A*×*B* için $\gamma_{C(x,y)} = \gamma_{A(x)} \sqcap \gamma_{B(y)}$ dir. γ_A ve γ_B, *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek gruplar olduğu için her *u*,*v* ∈*G* için

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}_{C(x,y)}(uv) &= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}\right)(uv)\\ &= \overline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}(uv)\\ &\sqsupseteq \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(u)\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(v)\right) \sqcap \left(\overline{\gamma}_{B(y)}(u)\Delta\overline{\gamma}_{B(y)}(v)\right)\\ &= \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}(u)\right) \Delta \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(v) \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}(v)\right)\\ &= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}\right)(u)\, \Delta \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}\right)(v)\\ &= \overline{\gamma}_{C(x,y)}(u)\, \Delta\, \overline{\gamma}_{C(x,y)}(v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}_{C(x,y)}(u^{-1}) &= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}\right)(u^{-1})\\ &= \overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}(u^{-1})\\ &= \overline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}(u)\\ &= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}\right)(u)\\ &= \overline{\gamma}_{C(x,y)}(u) \text{ elde edilir.}\end{aligned}$$

Diğer taraftan benzer şekilde,

$$\underline{\gamma}_{C(x,y)}(uv) = \left(\underline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \underline{\gamma}_{B(y)}\right)(uv)$$
$$= \underline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqcap \underline{\gamma}_{B(y)}(uv)$$
$$\sqsubseteq \left(\underline{\gamma}_{A(x)}(u) \nabla \underline{\gamma}_{A(x)}(v)\right) \sqcap \left(\underline{\gamma}_{B(y)}(u) \nabla \underline{\gamma}_{B(y)}(v)\right)$$
$$= \left(\underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcap \underline{\gamma}_{B(y)}(u)\right) \nabla \left(\underline{\gamma}_{A(x)}(v) \sqcap \underline{\gamma}_{B(y)}(v)\right)$$
$$= \left(\underline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \underline{\gamma}_{B(y)}\right)(u) \nabla \left(\underline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \underline{\gamma}_{B(y)}\right)(v)$$
$$= \underline{\gamma}_{C(x,y)}(u) \nabla \underline{\gamma}_{C(x,y)}(v)$$
$$\underline{\gamma}_{C(x,y)}(u^{-1}) = \left(\underline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \underline{\gamma}_{B(y)}\right)(u^{-1})$$
$$= \underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) \sqcap \underline{\gamma}_{B(y)}(u^{-1})$$
$$= \underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcap \underline{\gamma}_{B(y)}(u)$$
$$= \left(\underline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \underline{\gamma}_{B(y)}\right)(u)$$
$$= \underline{\gamma}_{C(x,y)}(u)$$ elde edilir.

Böylece $\gamma_A \mathbin{\widetilde{\wedge}} \gamma_B$, G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

Teorem 3.3. γ_A ve γ_B , G üzerinde sezgisel bulanık esnek grup olsun. Bu takdirde, $\gamma_A \mathbin{\widetilde{\vee}} \gamma_B$ de G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

İspat: $\gamma_A \mathbin{\widetilde{\vee}} \gamma_B = \gamma_C$ olsun. Burada $C=A\times B$ ve her $(x,y) \in A\times B$ için $\gamma_{C(x,y)} = \gamma_{A(x)} \sqcup \gamma_{B(y)}$ dir. γ_A *ve* γ_B, G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruplar olduğu için her $u,v \in G$ için

$$\overline{\gamma}_{C(x,y)}(uv) = \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \overline{\gamma}_{B(y)}\right)(uv)$$
$$= \overline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqcup \overline{\gamma}_{B(y)}(uv)$$
$$\sqsupseteq \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(u) \Delta \overline{\gamma}_{A(x)}(v)\right) \sqcup \left(\overline{\gamma}_{B(y)}(u) \Delta \overline{\gamma}_{B(y)}(v)\right)$$
$$= \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcup \overline{\gamma}_{B(y)}(u)\right) \Delta \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(v) \sqcup \overline{\gamma}_{B(y)}(v)\right)$$
$$= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \overline{\gamma}_{B(y)}\right)(u) \Delta \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \overline{\gamma}_{B(y)}\right)(v)$$
$$= \overline{\gamma}_{C(x,y)}(u) \Delta \overline{\gamma}_{C(x,y)}(v)$$
$$\overline{\gamma}_{C(x,y)}(u^{-1}) = \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \overline{\gamma}_{B(y)}\right)(u^{-1})$$
$$= \overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) \sqcup \overline{\gamma}_{B(y)}(u^{-1})$$

$= \overline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcup \overline{\gamma}_{B(y)}(u)$

$= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \overline{\gamma}_{B(y)}\right)(u)$

$= \overline{\gamma}_{C(x,y)}(u)$ elde edilir.

Diğer taraftan benzer şekilde,

$$\underline{\gamma}_{C(x,y)}(uv) = \left(\underline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}\right)(uv)$$
$$= \underline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}(uv)$$
$$\sqsubseteq \left(\underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v)\right) \sqcup \left(\underline{\gamma}_{B(y)}(u)\nabla \underline{\gamma}_{B(y)}(v)\right)$$
$$= \left(\underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}(u)\right) \nabla \left(\underline{\gamma}_{A(x)}(v) \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}(v)\right)$$
$$= \left(\underline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}\right)(u) \nabla \left(\underline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}\right)(v)$$
$$= \underline{\gamma}_{C(x,y)}(u) \nabla\underline{\gamma}_{C(x,y)}(v)$$

$$\underline{\gamma}_{C(x,y)}(u^{-1}) = \left(\underline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}\right)(u^{-1})$$
$$= \underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}(u^{-1})$$
$$= \underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}(u)$$
$$= \left(\underline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}\right)(u)$$
$$= \underline{\gamma}_{C(x,y)}(u) \text{ elde edilir.}$$

Böylece $\gamma_A \,\widetilde{\nabla}\, \gamma_B$ *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

Teorem 3.4. γ_A ve γ_B, *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek gruplar olsun. Bu takdirde, $\gamma_A \,\widetilde{\sqcap}\, \gamma_B$ de *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

İspat: $\gamma_A \,\widetilde{\sqcap}\, \gamma_B = \gamma_C$ olsun. Burada $C=A\cup B$ dir ve her $x\in C$ için $\gamma_{C(x)}=\gamma_{A(x)} \sqcap \gamma_{B(x)}$ dir. Her $u,v \in G$ için aşağıdaki üç durum söz konusudur.

1.durum: Eğer $x \in A - B$ ise

$\overline{\gamma}_{C(x)}(uv) = \overline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u) \,\Delta\, \overline{\gamma}_{A(x)}(v) = \overline{\gamma}_{C(x)}(u) \,\Delta\, \overline{\gamma}_{C(x)}(v)$ ve

$\overline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) = \overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) = \overline{\gamma}_{A(x)}(u) = \overline{\gamma}_{C(x)}(u)$ dir.

Ayrıca

$\underline{\gamma}_{C(x)}(uv) = \underline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v) = \underline{\gamma}_{C(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{C(x)}(v)$ ve

$\underline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u) = \underline{\gamma}_{C(x)}(u)$ dir.

2.durum: Eğer $x \in B - A$ ise

$\overline{\gamma}_{C(x)}(uv) = \overline{\gamma}_{B(x)}(uv) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{B(x)}(u) \, \Delta \, \overline{\gamma}_{B(x)}(v) = \overline{\gamma}_{C(x)}(u) \, \Delta \, \overline{\gamma}_{C(x)}(v)$ ve

$\overline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) = \overline{\gamma}_{B(x)}(u^{-1}) = \overline{\gamma}_{B(x)}(u) = \overline{\gamma}_{C(x)}(u)$ dir.

Ayrıca

$\underline{\gamma}_{C(x)}(uv) = \underline{\gamma}_{B(x)}(uv) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{B(x)}(u) \nabla \underline{\gamma}_{B(x)}(v) = \underline{\gamma}_{C(x)}(u) \nabla \underline{\gamma}_{C(x)}(v)$ ve

$\underline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) = \underline{\gamma}_{B(x)}(u^{-1}) = \underline{\gamma}_{B(x)}(u) = \underline{\gamma}_{C(x)}(u)$ dir.

3.durum: Eğer $x \in A \cap B$ ise

$$
\begin{aligned}
\overline{\gamma}_{C(x)}(uv) &= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \overline{\gamma}_{B(x)}\right)(uv) \\
&= \overline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqcap \overline{\gamma}_{B(X)}(uv) \\
&\sqsupseteq \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(u) \Delta \overline{\gamma}_{A(x)}(v)\right) \sqcap \left(\overline{\gamma}_{B(x)}(u) \Delta \overline{\gamma}_{B(x)}(v)\right) \\
&= \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcap \overline{\gamma}_{B(x)}(u)\right) \Delta \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(v) \sqcap \overline{\gamma}_{B(x)}(v)\right) \\
&= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \overline{\gamma}_{B(x)}\right)(u) \, \Delta \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \overline{\gamma}_{B(x)}\right)(v) \\
&= \overline{\gamma}_{C(x)}(u) \, \Delta \, \overline{\gamma}_{C(x)}(v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) &= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \overline{\gamma}_{B(x)}\right)(u^{-1}) \\
&= \overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) \sqcap \overline{\gamma}_{B(x)}(u^{-1}) \\
&= \overline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcap \overline{\gamma}_{B(x)}(u) \\
&= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcap \overline{\gamma}_{B(x)}\right)(u) \\
&= \overline{\gamma}_{C(x)}(u) \quad \text{elde edilir.}
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde $\underline{\gamma}_{C(x)}(uv) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{C(x)}(u) \nabla \underline{\gamma}_{C(x)}(v)$ ve $\underline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) = \underline{\gamma}_{C(x)}(u)$ olduğu gösterilebilir. Böylece $\gamma_A \tilde{\cap} \gamma_B$ G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

Teorem 3.5. γ_A ve γ_B, G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruplar olsun. Bu takdirde, $\gamma_A \tilde{\cup} \gamma_B$ de G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

İspat: $\gamma_A \tilde{\cup} \gamma_B = \gamma_C$ olsun. Burada C=A∪B dir ve her x∈C için $\gamma_{C(x)} = \gamma_{A(x)} \sqcup \gamma_{B(x)}$ dir. Her $u,v \in G$ için aşağıdaki üç durum söz konusudur.

1.durum: Eğer $x \in A - B$ ise

$\overline{\gamma}_{C(x)}(uv) = \overline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u) \, \Delta \, \overline{\gamma}_{A(x)}(v) = \overline{\gamma}_{C(x)}(u) \, \Delta \, \overline{\gamma}_{C(x)}(v)$ ve

$\overline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) = \overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) = \overline{\gamma}_{A(x)}(u) = \overline{\gamma}_{C(x)}(u)$ dir.

Ayrıca

$\underline{\gamma}_{C(x)}\ (uv) = \underline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u) \nabla \underline{\gamma}_{A(x)}(v) = \underline{\gamma}_{C(x)}(u) \nabla \underline{\gamma}_{C(x)}(v)$ ve

$\underline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u) = \underline{\gamma}_{C(x)}(u)$ dir.

2.durum: Eğer $x \in B - A$ ise

$\overline{\gamma}_{C(x)}(uv) = \overline{\gamma}_{B(x)}(uv) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{B(x)}(u)\ \Delta\ \overline{\gamma}_{B(x)}(v) = \overline{\gamma}_{C(x)}(u)\ \Delta\ \overline{\gamma}_{C(x)}(v)$ ve

$\overline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) = \overline{\gamma}_{B(x)}(u^{-1}) = \overline{\gamma}_{B(x)}(u) = \overline{\gamma}_{C(x)}(u)$ dir.

Ayrıca

$\underline{\gamma}_{C(x)}\ (uv) = \underline{\gamma}_{B(x)}(uv) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{B(x)}(u) \nabla \underline{\gamma}_{B(x)}(v) = \underline{\gamma}_{C(x)}(u) \nabla \underline{\gamma}_{C(x)}(v)$ ve

$\underline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) = \underline{\gamma}_{B(x)}(u^{-1}) = \underline{\gamma}_{B(x)}(u) = \underline{\gamma}_{C(x)}(u)$ dir.

3.durum: Eğer $x \in A \cap B$ ise

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma}_{C(x)}(uv) &= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \overline{\gamma}_{B(x)}\right)(uv) \\
&= \overline{\gamma}_{A(x)}\ (uv) \sqcup \overline{\gamma}_{B(X)}(uv) \\
&\sqsupseteq \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(u) \Delta \overline{\gamma}_{A(x)}(v)\right) \sqcup \left(\overline{\gamma}_{B(x)}(u) \Delta \overline{\gamma}_{B(x)}(v)\right) \\
&= \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcup \overline{\gamma}_{B(x)}(u)\right) \Delta \left(\overline{\gamma}_{A(x)}(v) \sqcup \overline{\gamma}_{B(x)}(v)\right) \\
&= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \overline{\gamma}_{B(x)}\right)(u) \Delta \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \overline{\gamma}_{B(x)}\right)(v) \\
&= \overline{\gamma}_{C(x)}(u)\ \Delta\ \overline{\gamma}_{C(x)}(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) &= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \overline{\gamma}_{B(x)}\right)(u^{-1}) \\
&= \overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) \sqcup \overline{\gamma}_{B(x)}(u^{-1}) \\
&= \overline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqcup \overline{\gamma}_{B(x)}(u) \\
&= \left(\overline{\gamma}_{A(x)} \sqcup \overline{\gamma}_{B(x)}\right)(u) \\
&= \overline{\gamma}_{C(x)}(u) \text{elde edilir.}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\underline{\gamma}_{C(x)}(uv) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{C(x)}(u)\ \nabla \underline{\gamma}_{C(x)}(v)$ ve $\underline{\gamma}_{C(x)}(u^{-1}) = \underline{\gamma}_{C(x)}(u)$ olduğu gösterilebilir. Böylece $\gamma_A\ \tilde{\cup}\ \gamma_B$ G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

Teorem 3.6. γ_A ve γ_B, G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruplar olsun. Bu takdirde, $\gamma_A\ \tilde{\sqcap}\ \gamma_B$ ve $\gamma_A\ \tilde{\sqcup}\ \gamma_B$ de G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruplardır.

İspat: Teorem 3.4 ve Teorem 3.5'in ispatlarından açıktır.

Tanım 3.3. G_1 ve G_2 iki grup olmak üzere $\gamma_A \times \gamma_B$, $G_1 \times G_2$ üzerinde sezgisel bulanık esnek küme olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\gamma_A \times \gamma_B$' ye $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ üzerinde bir sezgisel bulanık esnek grup denir.

Her $(x,y) \in A{\times}B$ ve $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in G_1 \times G_2$ için

i) $\overline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}\big((u_1,v_1)(u_2,v_2)\big) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_1,v_1)\ \Delta\ \overline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_2,v_2)$

ii) $\underline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}\big((u_1,v_1)(u_2,v_2)\big) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_1,v_1)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_2,v_2)$

iii) $\overline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_1,v_1) = \overline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}((u_1,v_1)^{-1})$ ve

$\underline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_1,v_1) = \underline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}((u_1,v_1)^{-1})$

Teorem 3.7. G_1 ve G_2 iki grup olmak üzere γ_A ve γ_B sırasıyla G_1 ve G_2 üzerinde sezgisel bulanık esnek gruplar olsun. Bu takdirde, $\gamma_A \times \gamma_B$ de $G_1 \times G_2$ üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

İspat: γ_A ve γ_B sırasıyla G_1 ve G_2 üzerinde sezgisel bulanık esnek gruplar, $(x,y) \in$ A×B ve $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in G_1 \times G_2$ olsun.

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}\big((u_1,v_1)(u_2,v_2)\big) &= \overline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_1u_2, v_1v_2)\\
&= \overline{\gamma}_{A(x)}(u_1u_2) \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}(v_1v_2)\\
&\sqsupseteq \left\{\overline{\gamma}_{A(x)}(u_1)\Delta\,\overline{\gamma}_{A(x)}(u_2)\right\} \sqcap \left\{\overline{\gamma}_{B(y)}(v_1)\Delta\,\overline{\gamma}_{B(y)}(v_2)\right\}\\
&= \left\{\overline{\gamma}_{A(x)}(u_1) \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}(v_1)\right\}\Delta\left\{\overline{\gamma}_{A(x)}(u_2) \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}(v_2)\right\}\\
&= \overline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_1,v_1)\ \Delta\ \overline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_2,v_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\underline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}\big((u_1,v_1)(u_2,v_2)\big) &= \underline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_1u_2, v_1v_2)\\
&= \underline{\gamma}_{A(x)}(u_1u_2) \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}(v_1v_2)\\
&\sqsubseteq \left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(u_1)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(u_2)\right\} \sqcup \left\{\underline{\gamma}_{B(y)}(v_1)\nabla\underline{\gamma}_{B(y)}(v_2)\right\}\\
&= \left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(u_1) \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}(v_1)\right\}\nabla\left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(u_2) \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}(v_2)\right\}\\
&= \underline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_1,v_1)\ \nabla\ \underline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_2,v_2) \quad \text{dir.}
\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}((u_1,v_1)^{-1}) &= \overline{\gamma}_{A(x)}({u_1}^{-1}) \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}({v_1}^{-1})\\
&= \overline{\gamma}_{A(x)}(u_1) \sqcap \overline{\gamma}_{B(y)}(v_1)\\
&= \overline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_1,v_1)
\end{aligned}$$

ve

$\underline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}((u_1,v_1)^{-1}) = \underline{\gamma}_{A(x)}({u_1}^{-1}) \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}({v_1}^{-1})$

$= \underline{\gamma}_{A(x)}(u_1) \sqcup \underline{\gamma}_{B(y)}(v_1)$

$= \underline{\gamma}_{A(x)\times B(y)}(u_1,v_1)$ dir.

Böylece $\gamma_A \times \gamma_B$, $G_1 \times G_2$ üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

Teorem 3.8. γ_A, G üzerinde sezgisel bulanık esnek küme olsun. γ_A, G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur. $\Leftrightarrow$ Eğer $\alpha,\beta \in [0,1]$ ve $x \in A$ için ${}_{\beta}^{\alpha}A(x) \neq \emptyset$ ise ${}_{\beta}^{\alpha}\gamma_A$ G üzerinde esnek gruptur.

İspat: γ_A, G üzerinde sezgisel bulanık esnek grup, $\alpha,\beta \in [0,1]$ ve $x \in A$ olmak üzere $u,v \in {}_{\beta}^{\alpha}A(x)$ olsun. Buradan, $\overline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsupseteq \alpha$, $\underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsubseteq \beta$ ve $\overline{\gamma}_{A(x)}(v) \sqsupseteq \alpha$, $\underline{\gamma}_{A(x)}(v) \sqsubseteq \beta$ dir. γ_A, G üzerinde sezgisel bulanık esnek grup olduğundan, $\overline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(u)\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(v) \sqsupseteq \alpha\Delta\,\alpha = \alpha$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(uv) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v)$ $\sqsubseteq \beta\nabla\beta = \beta$ dır. Buradan $uv \in {}_{\beta}^{\alpha}A(x)$ dir. Ayrıca $\overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) = \overline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsupseteq \alpha$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1}) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsubseteq \beta$ dir. Buradan da $u^{-1} \in {}_{\beta}^{\alpha}A(x)$ dir. Yani ${}_{\beta}^{\alpha}A(x)$ G nin bir alt grubudur. Üstelik ${}_{\beta}^{\alpha}\gamma_A$ G üzerinde esnek gruptur.

Tersine varsayalım ki, $p,q \in G$ ve $x \in$ A için $\overline{\gamma}_{A(x)}(p.q^{-1}) \not\sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(p)\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(q)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(pq^{-1}) \not\sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(p)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(q)$ olsun.

Buradan $\overline{\gamma}_{A(x)}(pq^{-1}) \sqsubset \overline{\gamma}_{A(x)}(p)\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(q)$ dir. $\overline{\gamma}_{A(x)}(p) = \alpha_1$, $\overline{\gamma}_{A(x)}(q) = \alpha_2$ *ve* $\overline{\gamma}_{A(x)}(pq^{-1}) = \alpha_3$ olsun. Eğer $\alpha = \alpha_1\Delta\alpha_2$ alırsak $pq^{-1} \notin {}_{\beta}^{\alpha}A(x)$ dir. Diğer yandan $\overline{\gamma}_{A(x)}(p) = \alpha_1 \sqsupseteq \alpha_1\Delta\alpha_2 = \alpha$ ve $\overline{\gamma}_{A(x)}(q) = \alpha_2 \sqsupseteq \alpha_1\Delta\alpha_2 = \alpha$ dir. Her bir β için $\underline{\gamma}_{A(x)}(p) \sqsubseteq \beta$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(q) \sqsubseteq \beta$ koşulu sağlanır ve buradan $p,q \in {}_{\beta}^{\alpha}A(x)$ elde ederiz. Bu ise $\gamma_A{}'$nın G üzerinde esnek grup olmasıyla çelişir. O halde $\overline{\gamma}_{A(x)}(p.q^{-1}) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(p)\Delta\overline{\gamma}_{A(x)}(q)$ dir.

Benzer şekilde $\underline{\gamma}_{A(x)}(p.q^{-1}) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(p)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(q)$ elde edilir. Yani γ_A, G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

Önerme 3.3. γ_A ve γ_B G üzerinde sezgisel bulanık esnek kümeler olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

i) ${}_{\beta}^{\alpha}\gamma_A \mathbin{\tilde{\sqcup}} {}_{\beta}^{\alpha}\gamma_B = {}_{\beta}^{\alpha}\gamma_{A\tilde{\sqcup}B}$

ii) $_{\beta}^{\alpha}\gamma_A \tilde{\sqcap}\, _{\beta}^{\alpha}\gamma_B = _{\beta}^{\alpha}\gamma_{A\tilde{\sqcap}B}$

iii) $_{\beta}^{\alpha}\gamma_A \tilde{\cap}\, _{\beta}^{\alpha}\gamma_B = \gamma_{A\tilde{\sqcap}B}$

iv) $_{\beta}^{\alpha}\gamma_A \tilde{\cup}\, _{\beta}^{\alpha}\gamma_B = \gamma_{A\tilde{\cup}B}$

İspat:

i) Her $x \in$ E için

$\left(_{\beta}^{\alpha}\gamma_A \tilde{\sqcup}\, _{\beta}^{\alpha}\gamma_B\right)(x) = \left(_{\beta}^{\alpha}\gamma_A\right)(x) \sqcup \left(_{\beta}^{\alpha}\gamma_B\right)(x)$

$= \left\{u: \bar{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsupseteq \alpha \text{ ve } \underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsubseteq \beta\right\} \sqcup \left\{u: \bar{\gamma}_{B(x)}(u) \sqsupseteq \alpha \text{ ve } \underline{\gamma}_{B(x)}(u) \sqsubseteq \beta\right\}$

$= \left\{u: \left(\bar{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsupseteq \alpha \text{ veya } \bar{\gamma}_{B(x)}(u) \sqsupseteq \alpha\right) \text{ ve } \left(\underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsubseteq \beta \text{ veya } \underline{\gamma}_{B(x)}(u) \sqsubseteq \beta\right)\right\}$

$= \left\{u: \bar{\gamma}_{A\tilde{\sqcup}B(x)}(u) \sqsupseteq \alpha \text{ ve } \underline{\gamma}_{A\tilde{\sqcup}B(x)}(u) \sqsubseteq \beta\right\}$

$= _{\beta}^{\alpha}\gamma_{A\tilde{\sqcup}B}(x)$ dir.

Buradan $_{\beta}^{\alpha}\gamma_A \tilde{\sqcup}\, _{\beta}^{\alpha}\gamma_B = _{\beta}^{\alpha}\gamma_{A\tilde{\sqcup}B}$ elde edilir.

ii) Her $x \in$ E için

$\left(_{\beta}^{\alpha}\gamma_A \tilde{\sqcap}\, _{\beta}^{\alpha}\gamma_B\right)(x) = \left(_{\beta}^{\alpha}\gamma_A\right)(x) \sqcap \left(_{\beta}^{\alpha}\gamma_B\right)(x)$

$= \left\{u: \bar{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsupseteq \alpha \text{ ve } \underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsubseteq \beta\right\} \sqcap \left\{u: \bar{\gamma}_{B(x)}(u) \sqsupseteq \alpha \text{ ve } \underline{\gamma}_{B(x)}(u) \sqsubseteq \beta\right\}$

$= \left\{u: \left(\bar{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsupseteq \alpha \text{ ve } \bar{\gamma}_{B(x)}(u) \sqsupseteq \alpha\right) \text{ ve } \left(\underline{\gamma}_{A(x)}(u) \sqsubseteq \beta \text{ ve } \underline{\gamma}_{B(x)}(u) \sqsubseteq \beta\right)\right\}$

$= \left\{u: \bar{\gamma}_{A\tilde{\sqcap}B(x)}(u) \sqsupseteq \alpha \text{ ve } \underline{\gamma}_{A\tilde{\sqcap}B(x)}(u) \sqsubseteq \beta\right\}$

$= _{\beta}^{\alpha}\gamma_{A\tilde{\sqcap}B}(x)$ dir.

Buradan $_{\beta}^{\alpha}\gamma_A \tilde{\sqcap}\, _{\beta}^{\alpha}\gamma_B = _{\beta}^{\alpha}\gamma_{A\tilde{\sqcap}B}$ elde edilir.

iii) ve iv)'nin ispatları da benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.9. *G* bir grup ve γ_A *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek grup olsun. Bu takdirde her $x \in A$ için $\gamma_A{}^e(x) \leq G$ dir.

İspat: $e \in \gamma_A{}^e(x)$ olduğundan $\gamma_A{}^e(x) \neq \emptyset$ dir. $u, v \in \gamma_A{}^e(x)$ olsun. Buradan $\bar{\gamma}_{A(x)}(u) = \bar{\gamma}_{A(x)}(e) = \bar{\gamma}_{A(x)}(v)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(u) = \underline{\gamma}_{A(x)}(e) = \underline{\gamma}_{A(x)}(v)$ dir. Ayrıca γ_A *G* üzerinde sezgisel bulanık esnek grup olduğundan $\bar{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsupseteq \bar{\gamma}_{A(x)}(u)\Delta\bar{\gamma}_{A(x)}(v) = \bar{\gamma}_{A(x)}(e)\Delta\bar{\gamma}_{A(x)}(e) = \bar{\gamma}_{A(x)}(e)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(u)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(v) = \underline{\gamma}_{A(x)}(e)\nabla\underline{\gamma}_{A(x)}(e) = \underline{\gamma}_{A(x)}(e)$ dir. Diğer yandan Önerme 3.1

ii) ile $\overline{\gamma}_{A(x)}(e) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1})$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(e) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1})$ dir. Böylece $\overline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) = \overline{\gamma}_{A(x)}(e)$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(uv^{-1}) = \underline{\gamma}_{A(x)}(e)$ dir. Buradan $uv^{-1} \in {\gamma_{A(x)}}^{e}$ elde edilir. Üstelik ${\gamma_A}^e(x) \leq$ G dir.

Tanım 3.4. $\gamma_{\mathrm{A}}, \gamma_{\mathrm{B}} \in$ SBE(G) olsun. $\gamma_A * \gamma_B = \gamma_C = \{(x, \gamma_C(x)) : x \in \mathrm{E}\}$ ile verilen γ_C kümesine γ_{A} ve γ_{B} nin çarpımı denir. Burada $\gamma_C(x) = \{\langle u/\overline{\gamma}_{C(x)}(u)/\underline{\gamma}_{C(x)}(u)\rangle : u \in \mathrm{G}\}$ şeklinde olup $\overline{\gamma}_{C(x)}$ ve $\underline{\gamma}_{C(x)}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\overline{\gamma}_{C(x)}(u) = \sqcup \left\{ \overline{\gamma}_{A(x)}(v) \Delta \overline{\gamma}_{B(x)}(q) : v, q \in \mathrm{G}\ ve\ vq = u \right\}$

$\underline{\gamma}_{C(x)}(u) = \sqcup \left\{ \underline{\gamma}_{A(x)}(v) \nabla \underline{\gamma}_{B(x)}(q) : v, q \in \mathrm{G}\ ve\ vq = u \right\}$

Tanım 3.5. $\gamma_{\mathrm{A}} \in$ SBE(G) olsun. ${\gamma_A}^{-1} = \gamma_C = \{(x, \gamma_C(x)) : x \in \mathrm{E}\}$ ile verilen γ_C kümesine γ_{A} nın tersi denir. Burada $\gamma_C(x) = \{\langle u/\overline{\gamma}_{C(x)}(u)/\underline{\gamma}_{C(x)}(u)\rangle : u \in \mathrm{G}\}$ şeklinde olup $\overline{\gamma}_{C(x)}$ ve $\underline{\gamma}_{C(x)}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\overline{\gamma}_{C(x)}(u) = \overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1})$

$\underline{\gamma}_{C(x)}(u) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1})$

Önerme 3.4. $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C \in$ SBE(G) olsun. Bu taktirde $(\gamma_A * \gamma_B) * \gamma_C = \gamma_A * (\gamma_B * \gamma_C)$ dir.

İspat: $\gamma_A * \gamma_B = \gamma_\theta$ olmak üzere $(\gamma_A * \gamma_B) * \gamma_C = \gamma_\theta * \gamma_C = \gamma_W$ olsun.
$\gamma_B * \gamma_C = \gamma_R$ olmak üzere $\gamma_A * (\gamma_B * \gamma_C) = \gamma_A * \gamma_R = \gamma_T$ olsun. Tanım 3.4 ile $u \in$ G olmak üzere

$\overline{\gamma}_{W(x)}(u) = \sqcup \left\{ \overline{\gamma}_{\theta(x)}(v) \Delta \overline{\gamma}_{C(x)}(r) : v, r \in \mathrm{G}, \quad v.r = u \right\}$

$= \sqcup \left\{ \sqcup \left\{ (\overline{\gamma}_{A(x)}(k) \Delta \overline{\gamma}_{B(x)}(t)) : k.t = v \right\} \Delta \overline{\gamma}_{C(x)}(r) : v.r = u,\ v, r \in \mathrm{G} \right\}$

$= \sqcup \left\{ (\overline{\gamma}_{A(x)}(k) \Delta \overline{\gamma}_{B(x)}(t)) \Delta \overline{\gamma}_{C(x)}(r) : k.t.r = u,\ k, t, r \in \mathrm{G} \right\}$

$= \sqcup \left\{ \overline{\gamma}_{A(x)}(k) \Delta \left(\overline{\gamma}_{B(x)}(t) \Delta \overline{\gamma}_{C(x)}(r) \right) : k.t.r = u,\ k, t, r \in \mathrm{G} \right\}$

$= \sqcup \left\{ \overline{\gamma}_{A(x)}(k) \Delta \left\{ \overline{\gamma}_{B(x)}(t) \Delta \overline{\gamma}_{C(x)}(r) : t.r = s,\ t, r \in \mathrm{G} \right\} : k.s = u,\ k, s \in \mathrm{G} \right\}$

$= \sqcup \left\{ \overline{\gamma}_{A(x)}(k) \Delta \overline{\gamma}_{R(x)}(s) : k.s = u,\ k, s \in \mathrm{G} \right\}$

$= \overline{\gamma}_{T(x)}(u)$

Yani $\overline{\gamma}_{W(x)} = \overline{\gamma}_{T(x)}$ dir. Benzer şekilde,

$\underline{\gamma}_{W(x)}(u) = \sqcup\left\{\underline{\gamma}_{\theta(x)}(v)\nabla\, \underline{\gamma}_{C(x)}(r) : v, r \in \mathrm{G}, \quad v.r = u\right\}$

$= \sqcup\left\{\sqcup\left\{(\underline{\gamma}_{A(x)}(k)\nabla\, \underline{\gamma}_{B(x)}(t)) : k.t = v\right\}\nabla \underline{\gamma}_{C(x)}(r) : v.r = u,\ v, r \in \mathrm{G}\right\}$

$= \sqcup\left\{(\underline{\gamma}_{A(x)}(k)\nabla\underline{\gamma}_{B(x)}(t))\nabla\underline{\gamma}_{C(x)}(r) : k.t.r = u,\ \ k, t, r \in \mathrm{G}\right\}$

$= \sqcup\left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(k)\nabla\left(\underline{\gamma}_{B(x)}(t)\nabla\, \underline{\gamma}_{C(x)}(r)\right) : k.t.r = u,\ \ k, t, r \in \mathrm{G}\right\}$

$= \sqcup\left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(k)\nabla\left\{\underline{\gamma}_{B(x)}(t)\nabla\, \underline{\gamma}_{C(x)}(r) : t.r = s,\ \ t, r \in \mathrm{G}\right\} : k.s = u,\ \ k, s \in \mathrm{G}\right\}$

$= \sqcup\left\{\underline{\gamma}_{A(x)}(k)\nabla\, \underline{\gamma}_{R(x)}(s) : k.s = u,\ \ k, s \in \mathrm{G}\right\}$

$= \underline{\gamma}_{T(x)}(u)$

Yani $\overline{\gamma}_{W(x)} = \overline{\gamma}_{T(x)}$ dir.

Buradan $\gamma_W = \gamma_T$ dir. Yani $(\gamma_A * \gamma_B) * \gamma_C = \gamma_A * (\gamma_B * \gamma_C)$ elde edilir.

Önerme 3.5. *G* bir grup ve $\gamma_A, \gamma_B \in \mathrm{SBE(G)}$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

i) $\left[(\gamma_A{}^{-1})\right]^{-1} = \gamma_A$

ii) $\gamma_A \,\widetilde{\sqsubseteq}\, \gamma_A{}^{-1} \Leftrightarrow \gamma_A{}^{-1} \,\widetilde{\sqsubseteq}\, \gamma_A \Leftrightarrow \gamma_A{}^{-1} = \gamma_A$

iii) $\gamma_A \,\widetilde{\sqsubseteq}\, \gamma_B \Leftrightarrow \gamma_A{}^{-1} \,\widetilde{\sqsubseteq}\, \gamma_B{}^{-1}$

iv) $(\gamma_A * \gamma_B)^{-1} = \gamma_B{}^{-1} * \gamma_A{}^{-1}$

Teorem 3.10. $\gamma_A \in \mathrm{SBE(G)}$ olsun. Bu takdirde γ_A, G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur. $\Leftrightarrow$

i) $(\gamma_A * \gamma_A) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, \gamma_A$

ii) $\gamma_A{}^{-1} \,\widetilde{\sqsubseteq}\, \gamma_A$ (veya $\gamma_A{}^{-1} \,\widetilde{\sqsupseteq}\, \gamma_A$ veya $\gamma_A{}^{-1} \,\widetilde{\sqsubseteq}\, \gamma_A$)

İspat: $\gamma_A * \gamma_A = \gamma_C$ olsun. Her $x \in \mathrm{E}$ için

$\overline{\gamma}_{C(x)}(u) = \sqcup\left\{\overline{\gamma}_{A(x)}(v)\Delta\, \overline{\gamma}_{A(x)}(q) : v, q \in \mathrm{G}, vq = u\right\}$

$\sqsubseteq \sqcup\left\{\overline{\gamma}_{A(x)}(vq) : v, q \in \mathrm{G}, vq = u\right\}$

$= \overline{\gamma}_{A(x)}(u)$

Yani $(\gamma_A * \gamma_A) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, \gamma_A$ dır.

Benzer şekilde

$$\underline{\gamma}_{C(x)}(u) = \sqcup \left\{ \underline{\gamma}_{A(x)}(v) \nabla \underline{\gamma}_{A(x)}(q) : v, q \in \mathrm{G}, vq = u \right\}$$

$$\sqsupseteq \sqcup \left\{ \underline{\gamma}_{A(x)}(vq) : v, q \in \mathrm{G}, vq = u \right\}$$

$$= \underline{\gamma}_{A(x)}(u) \text{ dir.}$$

Yani $(\gamma_A * \gamma_A) \,\tilde{\sqsupseteq}\, \gamma_A$ dır.

Buradan $(\gamma_A * \gamma_A) \cong \gamma_A$ elde edilir. Önerme 3.5 iii) ve Tanım 3.1 ile $\gamma_A{}^{-1} \,\tilde{\sqsubseteq}\, \gamma_A$ (veya $\gamma_A{}^{-1} \,\tilde{\sqsupseteq}\, \gamma_A$ veya $\gamma_A{}^{-1} \cong \gamma_A$) olduğu açıktır.

Tersine $(\gamma_A * \gamma_A) \cong \gamma_A$ olsun. Buradan $(\gamma_A * \gamma_A) \,\tilde{\sqsubseteq}\, \gamma_A$ ve $(\gamma_A * \gamma_A) \,\tilde{\sqsupseteq}\, \gamma_A$ dır. $\gamma_A * \gamma_A = \gamma_C$ olsun. Açıkça $\gamma_C \,\tilde{\sqsubseteq}\, \gamma_A$ ise

$$\overline{\gamma}_{C(x)}(u) = \sqcup \left\{ \overline{\gamma}_{A(x)}(v) \Delta \overline{\gamma}_{A(x)}(q) : v, q \in \mathrm{G}, vq = u \right\}$$

$$\sqsubseteq \sqcup \left\{ \overline{\gamma}_{A(x)}(vq) : v, q \in \mathrm{G}, vq = u \right\}$$

Yani $\overline{\gamma}_{A(x)}(vq) \sqsupseteq \overline{\gamma}_{A(x)}(v) \Delta \overline{\gamma}_{A(x)}(q)$ dir.

Benzer şekilde $\gamma_C \,\tilde{\sqsupseteq}\, \gamma_A$ ise

$$\underline{\gamma}_{C(x)}(u) = \sqcup \left\{ \underline{\gamma}_{A(x)}(v) \nabla \underline{\gamma}_{A(x)}(q) : v, q \in \mathrm{G}, vq = u \right\}$$

$$\sqsupseteq \sqcup \left\{ \underline{\gamma}_{A(x)}(vq) : v, q \in \mathrm{G}, vq = u \right\}$$

Yani $\underline{\gamma}_{A(x)}(vq) \sqsubseteq \underline{\gamma}_{A(x)}(v) \nabla \underline{\gamma}_{A(x)}(q)$ dir.

Diğer taraftan eğer $\gamma_A{}^{-1} \,\tilde{\sqsubseteq}\, \gamma_A$ (veya $\gamma_A{}^{-1} \,\tilde{\sqsupseteq}\, \gamma_A$ veya $\gamma_A{}^{-1} \cong \gamma_A$) ise Tanım 3.5 ile $\overline{\gamma}_{A(x)}(u) = \overline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1})$ ve $\underline{\gamma}_{A(x)}(u) = \underline{\gamma}_{A(x)}(u^{-1})$ dir.

Sonuç olarak γ_A, G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

Teorem 3.11. γ_A ve γ_B G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruplar olsun. Bu takdirde $\gamma_A * \gamma_B$ G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur. $\Leftrightarrow$ $\gamma_A * \gamma_B = \gamma_B * \gamma_A$ dır.

İspat: Açıkça $\gamma_A * \gamma_B = \gamma_A{}^{-1} * \gamma_B{}^{-1} = (\gamma_B * \gamma_A)^{-1} = \gamma_B * \gamma_A$ dır.

Tersine, $\gamma_A * \gamma_B = \gamma_B * \gamma_A$ olsun. Buradan,

$$(\gamma_A * \gamma_B) * (\gamma_A * \gamma_B) = \gamma_A * (\gamma_B * \gamma_A) * \gamma_B$$

$$= \gamma_A * (\gamma_A * \gamma_B) * \gamma_B$$

$$= (\gamma_A * \gamma_A) * (\gamma_B * \gamma_B)$$

$$\cong \ \gamma_A * \gamma_B$$

ve $(\gamma_A * \gamma_B)^{-1} = (\gamma_B * \gamma_A)^{-1} = {\gamma_A}^{-1} * {\gamma_B}^{-1} = \gamma_A * \gamma_B$ elde edilir. Sonuç olarak $\gamma_A * \gamma_B$ G üzerinde sezgisel bulanık esnek gruptur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında (t,s)-normlar kullanılarak inşa edilmiş sezgisel bulanık esnek grup yapısını ele aldık, bu yapıya ait temel özellikleri inceledik ve elde edilen sonuçları ortaya koyduk.

Bu sonuçlara dayanarak, sezgisel bulanık esnek halkalar ve sezgisel bulanık esnek modüller gibi farklı cebirsel yapıların (t,s)-normlar yardımıyla inşası üzerine farklı çalışmalar yapılabilir ve bu yapılara ait özellikler araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B. 2010. Soft sets and soft rings. Computers and Mathematics with Applications, 59(11): 3458-3463.

Aktaş, H., Çağman, N. 2007. Soft sets and soft groups. Information sciences, 177(2007): 2726-2735.

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M. 2009. On some new operations in soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 57(9): 1547-1553.

Atanassov, K.T. 1986. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 20(1): 87-96.

Aygünoğlu, A., Aygün, H. 2009. Introduction to fuzzy soft groups. Computers and Mathematics with Applications, 58:1279-1286.

Bhattacharya P.B., Jain S.K. 1972. First Course in Group Theory, New Delhi.

Çağman, N., Enginoğlu, S. 2010. Soft set theory and uni–int decision making. European Journal of Operational Research, 207: 848-855.

Çağman, N., Çıtak, F., Aktaş, H. 2012. Soft int-group and its applications to group theory. Neural Computing and Applications, 21(1): 151-158.

Çağman, N., Enginoğlu, S. 2012. Fuzzy soft matrix theory and its applications in decision making. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 9(1):109-119.

Çelik Y., Ekiz C., Yamak S. 2011. A new view on soft rings. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40(2): 273-286.

Çelik Y., Ekiz C., Yamak S. 2013. Applicationo of fuzzy soft sets in ring theory. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics,5(3): 451-462.

Çelik, Y., 2015. $(\in, \in \vee q)$-Fuzzy Subgroup Theory via Soft Sets, British Journal of Mathematics and Computer Science, 7(3):181-190.

Das, P.S, 1981. Fuzzy groups and level subgroups. Journal Of Mathematical Analysis and Aplications, 84: 264-269.

Dixit, V.N., Kumar, R., Ajmal, N. 1992. On fuzzy rings. Fuzzy Sets and Systems, 49: 205-213.

Ersoy, B.A. 2003. A generalization of cartesian product of fuzzy subgroups and ideals. Pakistan Journal of Applied Sciences, 3(2): 100-102.

Fatih, M., Salleh, A.R. 2009. Intuitionistic fuzzy group. Asian Journal of Algebra, 2(1): 1-10.

Feng, F., Jun, Y.B., Zhao, X. 2008. Soft semirings. Computers and Mathematics with Applications, 56(10): 2621-2628.

Feng, F., Jun, Y. B., Liu, X., Li, L. 2010. An adjustable approach to fuzzy soft set baseddecision making. Journal of Computation aland Applied Mathematics, 234: 10-20.

İnan, E., Öztürk, M.A. 2011. Fuzzy soft rings and fuzzy soft ideals. Neural Computing and Applications, 21(1):1-8.

Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Liu, H., Tang, J. 2010. Interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and their properties. Computers and Mathematics with Applications, 60(3): 906-918.

Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q. 2011. An adjustable approach to intuitionistic fuzzy soft sets based decision making. Applied Mathematical Modelling, 35(2): 824-836.

Jun, Y.B. 2008. Soft bck/bci-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 56(5): 1408-1413.

Jun, Y.B., Lee, K.J., Park, C.H. 2010. Fuzzy soft set theory applied to BCK/BCI- algebras, Computers and Mathematics with Applications, 59: 3180-3192.

Karaaslan, F., Kaygısız, K., Çağman, N. 2013. On Intuitionistic Fuzzy Soft Groups. Journal of New Results in Science, 3: 72-86.

Kaygısız, K. 2012. On soft int-groups. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 4(2): 365-375.

Liu W.J. 1983. Operations on fuzzy ideals. Fuzzy Sets Systems, 11: 31-41.

Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A. 2003. Soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 45(4-5): 555-562.

Maji, P.K., Roy, A.R., Biswas, R. 2002. An application of soft sets in a decision making problem. Computers and Mathematics with Applications, 44(8-9): 1077-1083.

Maji P.K., Biswas R., Roy A.R. 2001. Fuzzy Soft Sets. The Journal of Fuzzy Mathematics, 9: 589-602.

Maji P.K., Biswas R., Roy A.R. 2004. On Intuitionistic Fuzzy Soft Sets. The Journal of Fuzzy Mathematics, 12(3): 669-683.

Malik, D.S., Mordeson, J.N. 1990. Fuzzy prime ideals of a ring. Fuzzy Sets and Systems, 37: 93-9887

Manemaran, S.V. 2011. On Fuzzy Soft Groups. Internaional Journal of Computer Application, 15(7): 38-44.

Molodtsov, D. 1999. Soft set theory—first results. Computers and Mathematic swith Applications, 37(4-5): 19-31.

Molodtsov D. 2004.The Theory of Soft Sets, URSS Publishers, Moscow.

Mukherjee, N., Bhattacharya, P. 1984. Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets. Information Science, 34: 225-239

Mukherjee, T.K., Sen, M.K. 1987. On fuzzy ideals of a ring I. Fuzzy Sets and Systems, 21: 99-104

Nguyen, H.T., Walker, E.A. 2006. A First Course in Fuzzy Logic, 3rd Edn, Chapman and Hall/CRC Taylor and Francis Group.

Palaniappan, N., Naganathan, S., Arjunan, K. 2009. A Study on Intuitionistic L-Fuzzy Subgroups. Applied Mathematical Sciences, 3(53): 2619-2624.

Patel, H.R., Bhardwaj, R., Choudhary, S., Garge, S. 2015. On Normal Fuzzy Soft Group. Mathematical Theory and Modeling, 5(7): 26-32.

Pawlak Z. 1982. Rough sets. International Journal of Information and Computer Sciences, 11(1): 341-356.

Rosenfeld A. 1971. Fuzzy groups. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35: 512-517.

Sun Q-M., Zhang Z-L., Liu J. 2008. Soft Sets and Soft Modules. Rough Sets and Knowledge Technology, Springer, China, 403-409pp.

Xiao, G., Xiang, D., Zhan, J. 2012. Fuzzy soft modules. East Asian Mathematical Journal, 28(1): 1-11.

Zadeh L. A. 1965. Fuzzy Sets. Information and Control, 8: 338-353.

Zhou, J., Li, Y., Yin, Y. 2011. Intuitionistic fuzzy soft semigroups. Mathematica Aeterna, 1(3): 173-183.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Orhan ÖNAL

Doğum Yeri : Keçiören

Doğum Tarihi : 01/03/1989

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail : orhan_3047@hotmail.com

İletişim Bilgileri : Ordu Üniv. Fen Edebiyat Fak. Matematik Böl. ORDU

Öğrenim Durumu :

Derece	Bölüm/ Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik Böl.	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2011