T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERMITE-HADAMARD TİPLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER VE SÜREKLİ RASGELE DEĞİŞKENLERİN MOMENTLERİ İÇİN UYGULAMALARI

MEHMET GÖKPINAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Mehmet GÖKPINAR tarafından hazırlanan ve Prof. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "Hermite-Hadamard Tipli Bazı Eşitsizlikler ve Sürekli Rasgele Değişkenlerin Momentleri için Uygulamaları" adlı bu tez, jürimiz tarafından 27 / 06 / 2019 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Prof. Dr. Selahattin MADEN	
Başkan	:	Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

27 / 06 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 28/06/2019.. tarih ve 2019 / 302 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

MEHMET GÖKPINAR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HERMİTE-HADAMARD TİPLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER VE SÜREKLİ RASGELE DEĞİŞKENLERİN MOMENTLERİ İÇİN UYGULAMALARI

MEHMET GÖKPINAR

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2019
Yüksek Lisans Tezi, 86s.

Danışman: Prof. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde eşitsizlikler ve olasılık teorisinin tarihsel gelişimini veren bir giriş yapılmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde konveks fonksiyonlarla ilgili Hermite - Hadamard tipli bazı integral eşitsizlikleri ve bu eşitsizliklerin sürekli rastgele değişkenlerin momentleri için bazı uygulamaları ele alınmıştır. Dördüncü bölümde ise bazı sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Konveks küme, Konveks fonksiyon, Hermite - Hadamard eşitsizliği, Olasılık Uzayı, Rasgele Değişken, Beklenen Değer, Varyans, Standart Sapma, Moment.

ABSTRACT

SOME HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES AND ITS APPLICATIONS FOR MOMENTS OF CONTINUOUS RANDOM VARIABLES

MEHMET GÖKPINAR

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2019
MSc. Thesis, 86p.

Supervisor: Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis consists of four chapters. In the first chapter it is given an introduction about historical development on inequalites and probability theory. We given some definitions and theorems which are used in this thesis in the second chapter. In the third chapter, it is given some Hermite - Hadamard type integral inequalities for convex functions and their some applications for moments of continuous random variables. It is given some results and propositions in the fourth chapter.

Key Words: Convex set, Convex function, Hermite- Hadamard inequalitiy, Probability space, Random variable, Expectation, Variance, Standart derivation, Moment.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Prof. Dr. Selahattin MADEN’ e içten teşekkürlerimi sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$P(A)$	: A olayının olasılığı
$P(x_i)$	: $X = x_i$ olma olasılığı
$f(x)$	: X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F(x)$	: X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu
$f(x,y)$	: (X,Y) rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F(x,y)$	: (X,Y) rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu
$E(X)$	: X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$V(X)$	: X rastgele değişkeninin varyansı
$\mathbb{R}^+$	: $(0,\infty)$ Aralığı
$\mathbb{R}_0^+$	: $[0,\infty)$ Aralığı
${}_R D_{a+}^{\alpha}$	: α −Mertebeden Riemann Liouville Kesirli Türev
${}_H D_{a+}^{\alpha}$	: α −Mertebeden Hadamard Kesirli Türev
f'	: f Fonksiyonun Birinci Mertebeden Türevi
f''	: f Fonksiyonun İkinci Mertebeden Türevi
f'''	: f Fonksiyonun Üçüncü Mertebeden Türevi
Γ	: Gamma Fonksiyonu
I	: $\mathbb{R}$'de herhangi bir aralık
I^0	: I'nın içi
${}_R J^{\alpha}$	: α −Mertebeden Riemann Liouville Kesirli İntegral
${}_H J^{\alpha}$	: α −Mertebeden Hadamard Kesirli İntegral
$K_m(b)$	: m −Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	: $(\alpha,m)-$ Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	: İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$L[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilir Fonksiyonlar Kümesi
$\beta(x,y)$	: x,y Pozitif Reel Sayılarının Beta Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Konvekslik, M. Ö. 250 yılında Archimedes’ in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Archimedes bir konveks şeklin çevre uzunluğunun onu çevreleyen diğer bir şeklin çevre uzunluğundan daha küçük olduğunu önemle ifade etmiştir.

Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm alanlarında önemli bir rol oynar. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934’te Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan “Inequelities” adlı kitaptır (1952). Bu salt eşitsizlikler konusunu ele alan ve birçok yeni eşitsizlikler ve uygulamaları içeren ilk kaynak kitaptır. E.F. Beckenbach ve R. Bellman (1961) tarafından 1934-1960 döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren ”Inequalities” adlı ikinci kitap yazılmıştır. Mitrinoviç’ in 1970’ te yayınlanan “Analytic Inequalities” adlı kitabı yukarıda bahsedilen iki kitapta da yer almayan yeni konular içerir. Son yıllarda da S. S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893’ te Hadamard’ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen’ in bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Beckenbach ve Bellman (1961) ve Mitrinoviç (1970) gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak Pecaric (1987) tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts ve Varberg (1973), Niculescu ve Persson (2005, 2006) gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgi çok sayıda çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve matematiğin diğer birçok alanında doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların uygulamaları vardır. Bununla birlikte konveks fonksiyonlar, eşitsizlikler teorisiyle yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamalarının sonucudur. Örneğin; Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri gibi genel eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin sonucudur. Bu bağlamda, konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin özel bir yere sahip olduğu ifade edilebilir. Aslında konveks fonksiyonun kendi tanımı da bir eşitsizliktir. 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında pek çok eşitsizlik bulunmuştur. Bu eşitsizliklerin bazıları konveks fonksiyonlar sınıfı için yazılan temel eşitsizlikler haline gelmiştir. 1881 yılında Hermite tarafından ifade edilen ve bugün birçok kaynakta Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılan eşitsizlik bunlardan bir tanesidir. Bu eşitsizlik üzerine günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük bir bölümü S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından 2000 yılında ”Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” adlı kaynakta toplanmıştır.

On yedinci yüzyılda doğan olasılık teorisi, rastgele olayların ve rastlantı değişkenlerinin çizdiği çerçeveyi kendisine konu edinmiştir. Bu nedenle olasılık teorisi, rastgele olaylara egemen olan kanunları matematiksel metotlarla inceleyen bir bilimdir. Şans değişmelerine bağlı hemen hemen bütün gözlemleri, bu şans değişmelerinin doğal özelliğini incelemek olasılık kuramıdır. Şans kavramları ve onunla birlikte “Şans” tarih öncesine kadar gider, ancak bunların matematiksel incelenmesi 300 yıl eskiye dayanır. Olasılık hesabı başlangıçta şans oyunları ya da kumar oyunlarıyla canlandırıldı. Bir çift zarı 24 kez atıp en az bir kez düşeş getirme olasılığının 4 zarı bir kez atıp en az bir şeş getirmenin olasılığına eşit olacağını düşünen Chevalier de Mere adlı kumarbaz kumar masalarında harcadığı ömründen edindiği deneyiminin bu düşüncesini doğrulamadığını görür. Bunun üzerine derdine deva olur umuduyla dönemin ünlü matematikçilerinden Blaise Pascal’a başvurur. Pascal (1623-1662) ve Pierre de Fermat’ın (1601-1665) ortak çalışmaları, bir yandan Mere’ nin derdine deva olurken öte yandan da olasılık teorisinin doğmasına neden olmuştur.

Onyedinci yüzyılın geri kalan kısmında, de Mere tarafından gündeme getirilen benzer nitelikteki problemler ve benzerleri tartışılmış ancak ne genel bir çerçeve ne de teorik bir taban oluşturulamamıştır.

On sekizinci yüzyılın hemen başlarında Jacob Bernoulli (1654-1705) ve Abraham de Moivre'in (1667-1754) çalışmaları olasılık hesabı teorisinin başlamasını sağlamıştır. Bernoulli, ölümünden sonra 1713 yılında yayınlanan Ars Conectandi (The Art of Conjecture) adlı kitabında, önemli diğer çalışmalarının yanı sıra, adıyla anılan ve olasılığı, belirli bazı elemanter problemlerin çözümünde kullanılan bir araç olma seviyesinden bilimsel bir disiplin olma seviyesine yükselten teoremi, bilim dünyasının hizmetine sunmuştur. Olasılık teorisinin temel kanunlarından biri olan "Büyük Sayılar Kanunu" nu ilk defa J.Bernoulli ispat etmiştir ve ilk kez bir olayın olasılığını, bu olayın frekansının limiti olarak tanımlamıştır. De Moivre (1667-1754), 1718 yılında The Doctrine of Chances adlı kitabını yayınlayarak olasılık teorisine çarpım kuralını hediye etmiş ve normal olasılık yoğunluk fonksiyonunun oluşumuna ilk katkıyı yapmıştır.

Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855), Markov (1856-1922), Tchebychev (1821-1891) olasılık teorisinin gelişimine hız kazandırmışlardır. Olasılık teorisinin temel taşlarından biri olan "Merkezi limit teoremi" (Moivre-Laplace teoremi) ilk kez Laplace tarafından ispat edilmiş ve birçok dikkate değer uygulamaları yapılmıştır. Quetelet ve arkadaşları, Maxwell, Boltzman ve Gibbs çalışmalarında olasılık teorisinden şans oyunlarında, fizik ve astronomi sahalarında, sigortacılıkta, özellikle de ölüm istatistiklerinin oluşturulmasında, istatistiksel mekanikte bol miktarda yararlanmışlardır.

2. GENEL BİLGİLER

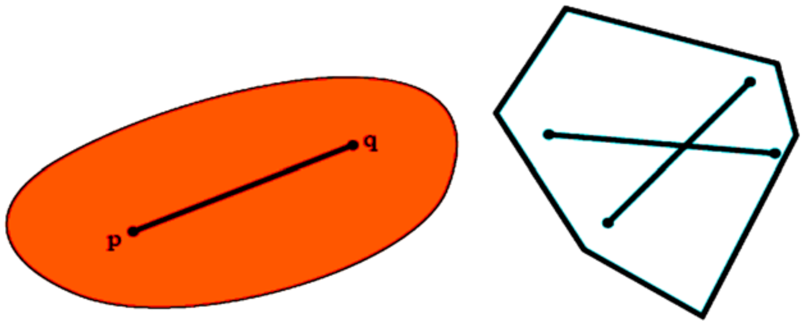
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılacak bazı temel tanım ve teorem verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve A ⊆ L olmak üzere $\forall x, y \in A$ için

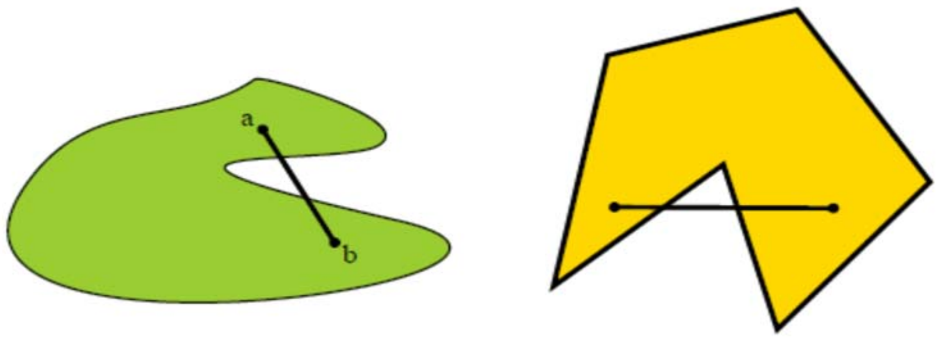
$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümesidir (Bayraktar, 2000).



Şekil 2.1. Konveks Kümeler

Konveks olmayan kümelere ise konkav küme adı verilir(bkz. Şekil 2.1).

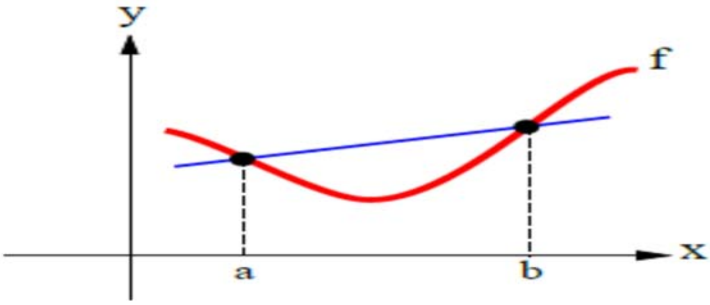


Şekil 2.2. Konkav Kümeler

Tanım 2.1.2 (Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$' de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

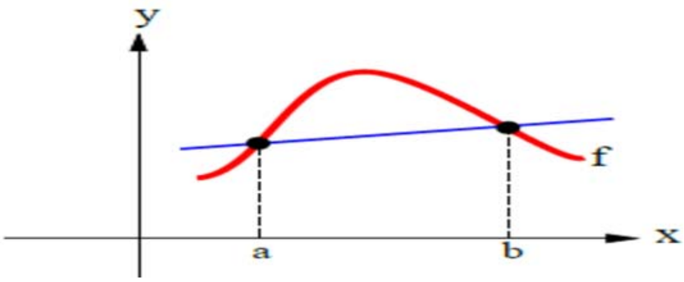
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Bakınız Şekil 2.3).

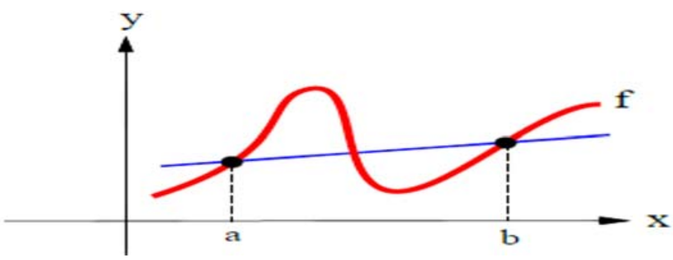


Şekil 2.3. Aralık Üzerinde Konveks Fonksiyon

Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde bir konveks fonksiyondur. Eğer $-f$ fonksiyonu konveks ise f ye konkavdır denir (Bakınız Şekil 2.4).



Şekil 2.4. Aralık Üzerinde Konkav Fonksiyon



Şekil 2.5. Aralık Üzerinde Konveks ve Konkav Olmayan Fonksiyon

Sonuç 2.1.1 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I' da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ için $p + q > 0$ olan $\forall p, q \geq 0$ için

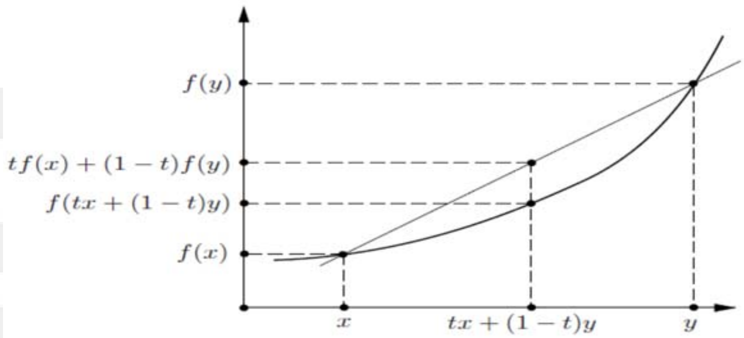
$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

olmasıdır (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992). I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f' nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bu durum Şekil 2.6 da görülmektedir.

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise bu takdirde her $x \in (a, b)$ için,

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0)$$

eşitsizliği yazılır (Roberts ve Varberg, 1973).



Şekil 2.6. Konveks Fonksiyonun İncelenmesi

Tanım 2.1.3 (Süreklilik) $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$|x - x_0| < \delta \quad olan \quad \forall x \in S \quad için \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.4 (Lipschitz Şartı) $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar, 2010).

Sonuç 2.1.2 f, S de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S de düzgün süreklidir (Bayraktar, 2010).

Teorem 2.1.1 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde

a. f, (a, b) aralığında süreklidir,
b. f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia, 1994).

Tanım 2.1.5 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar) f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $x_1 < x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in I$ için eğer

i. $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

ii. $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

iii. $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

iv. $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır,

denir (Adams ve Essex, 2010).

Teorem 2.1.2 I, ℝ' de bir aralık, f, I kümesi üzerinde sürekli ve I^0 üzerinde ise diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

ii. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

iii. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

iv. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır(Azpeitia, 1994).

Sonuç 2.1.3 f ve g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu da konvekstir (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.3 Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I^0' de artandır (kesin artandır) (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.4 f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart f'' nin artan (kesin artan) olmasıdır (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.5 f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi mevcutsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in I$ için,

$f''(x) \geq 0$ olmasıdır (Mitrinovic, Pecaric ve Fink, 1991).

Tanım 2.1.6 (Gamma Fonksiyonu) $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanan fonksiyon gamma fonksiyonu olarak tanımlanır (Jeffrey ve Dai, 2008). Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)},\ 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(\mathrm{n})\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2\mathrm{n})$

Tanım 2.1.7 (Beta Fonksiyonu) $Re(x), Re(y) > 0$ için

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır (Dragomir ve Pearce, 2000). Beta fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülebilir (Jeffrey ve Dai, 2008).

i. $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y),\ x,y \in (0,\infty)$

ii. $\beta(1,y) = \frac{1}{y}$

iii. $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt,\ x,y > 0$

iv. $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\ x,y > 0$

v. $\beta(x,y) = \beta(y,x)$

Tanım 2.1.8 (Bazı Özel Ortalamalar)8: Bu başlık altında a, b gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir (Bullen, Mitrinovic ve Vasis, 1988).

1. Aritmetik ortalama:

$$A = A(a,b) := \frac{a+b}{2}$$

2. Geometrik ortalama:

$$G = G(a,b) := \sqrt{ab}$$

3. Harmonik ortalama:

$$H = H(a,b) := \frac{2ab}{a+b}$$

4. Logaritmik ortalama:

$$L = L(a,b) := \begin{cases} a & ,\quad a = b \\ \frac{b-a}{lnb - lna} & ,\quad a \neq b \end{cases}$$

5. Identrik ortalama:

$$I = I(a,b) \coloneqq \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

6. p-logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) \coloneqq \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \left[\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

7. Seiffert ortalama:

$$S = S(a,b) \coloneqq \frac{a-b}{2arcsin\frac{a-b}{a+b}}$$

8. Bencze ortalama:

$$B = B(a,b) \coloneqq \frac{a-b}{arctg\frac{a-b}{a+b}}$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasında

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A$$

şeklinde bir ilişkinin olduğu kolayca görülebilir.

2.2. Olasılık Teorisiyle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1 (Rastgele Deney): Sonuçlarının kümesi belli, ancak gerçekleştiğinde hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden bilinmeyen bir deneye ise rastgele deney, raslantı deneyi, stokastik deney ya da olasılık deneyi adı verilir.

Tanım 2.2.2 (Örnek Uzay, Örnek Nokta, Olay) Bir rastgele deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesine örnek uzay, örnek uzaydaki her bir noktaya örnek nokta, örnek uzayın herhangi bir altkümesine ise olay denir. Her küme kendisinin altkümesi ve boş küme her kümenin altkümesi olacağından örnek uzayın kendisi ve boş küme de birer olay olacaktır. Örnek uzaya kesin olay ve boş kümeye imkânsız olay denir. A ve B gibi herhangi iki olayın aynı anda gerçekleşmemesi durumunda bu iki olaya ayrık olaylar adı verilir (Maden, 2013).

Tanım 2.2.3 ($\sigma -$cebir): Bir Ω kümesi üzerindeki bir U sınıfı verildiğinde, eğer

(i) $\Omega \in U$

(ii) Her $A \in U$ için $\overline{A} \in U$

(iii) Her n için $A_n \in U$ olan bir (A_n) dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

koşulları sağlanıyorsa U sınıfına Ω üzerinde $\sigma-$cebir adı verilir (Maden, 2013).

Tanım 2.2.4. (Olasılık Ölçüsü): Bir E rastgele deneyi verilsin. Ω bu deney ile ilgili örnek uzay ve U bu uzay üzerinde tanımlı bir $\sigma-$cebir olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşulları sağlayan bir P: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Ω üzerinde bir olasılık ölçüsü, $P(A)$ değerine A olayının olasılığı, (Ω, U, P) üçlüsüne de bir olasılık uzayı adı verilir:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) Eğer $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$. ikişer ikişer ayrık olaylar ise bu takdirde

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Tanım 2.2.5 (Rastgele Değişken) (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun. Eğer X: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir ise X fonksiyonuna bir rastgele değişken denir (Maden, 2013).

Bu tanıma göre rastgele değişken tanım kümesi örnek uzayı ve değer kümesi ise gerçek sayılar kümesinin uygun bir alt kümesi olan bir fonksiyondur. Rastgele değişkenleri genel olarak *X, Y, Z*, . . . gibi harflerle göstereceğiz. O halde bir rastgele değişkeni X: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olarak yazarız. Böylece E bir deney ve Ω de bu deneyle ilgili bir örnek uzayı olmak üzere her $w \in \Omega$ elamanına bir $X(w) = x$ gerçek sayısı karşılık getiren bir X fonksiyonuna bir rastgele değişken denir.

Tanım 2.2.6 (Olasılık) Bir deneyin birbirinden ayrık ve her biri aynı şansa sahip olmak koşuluyla n tane mümkün sonucundan m tanesi bir A olayının olmasını gerektiriyorsa bu takdirde $P(A) = \frac{m}{n}$ oranına A olayının olasılığı denir (Maden, 2013).

Tanım 2.2.7 (Rastgele değişken) Bir örnek uzay üzerinde tanımlanmış gerçek değerli bir fonksiyona rastgele değişken adı verilir (Maden, 2013).

Tanım 2.2.8 X bir rastgele değişken olmak üzere X'in alabileceği değerlerin kümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuz bir küme ise X'e bir kesikli rastgele değişken denir. X

rastgele değişkeninin alabileceği değerlerin kümesi bir aralık yada aralıkların birleşimi şeklinde ise X'e sürekli rastgele değişken adı verilir (Maden, 2013).

Tanım 2.2.9 X bir kesikli rastgele değişken ve bu rastgele değişkenin tanım kümesi $R_x = \{x_1, x_2, \dots\}$ olmak üzere $P(X = x_i) = p(x_i), i = 1,2, \dots$ olsun. Bu durumda aşağıda verilen koşulların sağlanması halinde $p: R_x \to [0,1]$ fonksiyonuna X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu denir (Maden, 2013).

$i)\ p(x_i) \geq 0, i = 1,2, \dots$

$ii)\ \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.$

Tanım 2.2.10 X bir sürekli rastgele değişken olsun. Genelliği sağlamak için bu X rastgele değişkenin $(-\infty, +\infty)$ aralığında değerler aldığı varsayılır. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f(x)$ fonksiyonuna X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu adı verilir (Maden, 2013).

$i)\ f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$

$ii)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Tanım 2.2.11 X kesikli veya sürekli bir rasgele değişken olsun. X in kümülatif (birikimli) dağılım fonksiyonu (k.d.f. olarak kısaltılır) F ile gösterilir ve

$$F(x) = P(X \leq x)$$

olarak tanımlanır. Buna tanıma göre,

a) Eğer X bir kesikli rasgele değişken ise bu takdirde

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_j p(x_j)$$

dır, burada toplam $x_j \leq x$ koşulunu sağlayan tüm j indisleri üzerinden alınmıştır.

b) Eğer X rasgele değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rastgele değişken ise

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

olacaktır (Maden, 2013).

Tanım 2.2.12 X rastgele değişkeni $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ mümkün değerlerini sırasıyla $p(x_i) = P(X = x),\ i = 1,2, \ldots, n, \ldots$ olasılıklarıyla alan kesikli bir rastgele değişken olsun. Bu takdirde *X* rastgele değişkeninin $E(X)$ ile gösterilen beklenen değeri

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p(x_i)$$

olarak tanımlanır (Maden, 2013). Burada $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p(x_i)$ serisi mutlak yakınsak, yani $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot p(x_i) < \infty$ olmalıdır. Bu sayıya *X*' in ortalama değeri olarak da bakılabilir.

Tanım 2.2.13 *X* rastgele değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rastgele değişken olsun. Bu durumda *X* rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

olarak tanımlanır. Yine bu genelleştirilmiş integral yakınsak olmayabilir. Bu nedenle $E(X)$'in mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$$

integralinin sonlu olmasıdır (Maden, 2013).

Tanım 2.2.14 Bir *X* rastgele değişkeninin $V(X)$ veya σ_x^2 ile gösterilen varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$V(X) = \sigma_x^2 = E[X - E(X)]^2$$

Bu şekilde tanımlanan $V(X)$ sayısının pozitif kareköküne ise *X* rastgele değişkeninin standart sapması denir ve σ_x ile gösterilir (Maden, 2013).

3. RASGELE DEĞİŞKENLERİN MOMENTLERİ İÇİN EŞİTSİZLİKLER

3.1. Bazı Özel Eşitsizlikler

Dağılım fonksiyonları ve olasılık yoğunluk fonksiyonları verilen bir rasgele değişkenin olasılık dağılımını tam olarak belirleyen özel fonksiyonlardır. Ancak, bunlar bizim iki farklı dağılım arasında bir karşılaştırma yapmamız için yeterli değildir. Makul koşullarda olasılık dağılımını karakterize eden momentler sınıfı bu karşılaştırmayı yapmada bize yardımcı olacaktır. Öte yandan, bir rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunun bilinmesi durumunda bu rasgele değişkeninin momentlerinin belirlenebileceğini biliyoruz. Bununla birlikte, olasılık dağılımlarının açık formlarının tam olarak bilinmediği veya matematiksel olarak hesaplanamadığı ve bu nedenle de momentlerinin belirlenemediği uygulamalar da mevcuttur. Bu durum bizi bir olasılık dağılımının momentleri için alternatif tahminler bulmaya yönlendirir. Matematiksel eşitsizlikleri uygulayarak, rastgele değişkenlerin momentleri için bazı tahminler birçok bilim insanı tarafından verilmiştir. Bu kısımda, matematiksel eşitsizlikler kullanılarak sonlu bir aralıkta tanımlı bir rasgele değişkenin momentleri için bazı tahminler verilecektir. Bunula ilgili olarak öncelikle bazı özel eşitsizliklere yer verilecektir.

Tanım 3.1.1 (Hölder Eşitsizliği) $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ iki reel veya kompleks sayı n-lisi olsun. Bu takdirde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere eğer, $p > 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ve $p < 0$ veya $q < 0$ ise

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Mitrinovic 1970).

Tanım 3.1.2 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel fonksiyonlar olmak üzere eğer $|f|^p$ ve $|g|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic ve Ark., 1973).

Tanım 3.1.3 (İntegraller için Minkowski Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir reel fonksiyonlar olmak üzere eğer

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty \quad \text{ve} \quad \int_a^b |g(x)|^q \, dx < \infty$$

ise bu takdirde

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic ve Ark., 1973).

Tanım 3.1.4 (Power-Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic ve Ark., 1973).

Teorem 3.1.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir. Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği bir konveks fonksiyonun ortalama değerinin hesabını sağlar (Pachpatte 2005).

İspat: f fonksiyonu I aralığı üzerinde konveks olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \leq \int_0^1 [tf(a) + (1-t)f(b)] dt$$

$$= \int_0^1 tf(a) dt + \int_0^1 (1-t)f(b) dt = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

elde edilir. Öte yandan, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)$$
$$\leq\frac{1}{2}\left[f(ta+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınarak

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\int_0^1\left[f(ta+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\right]dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt+\int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)dt\right]$$

elde edilir. Eğer bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci integralde $1-t=s$ ve $dt=-ds$ değişken değişimi yapılırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt+\int_0^1 f(sa+(1-s)b)ds\right]$$
$$=\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt$$

bulunur ve buradan da

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(ta+(1-t)b)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olduğu elde edilir. $\int_a^b f(ta+(1-t)b)dx$ integral ifadesinde $ta+(1-t)b=x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_a^b f(ta+(1-t)b)dx\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olduğu kolaylıkla görülür ve bu da teoremin ispatını tamamlar.

Tanım 3.1.5 (Üçgen Eşitsizliği) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ sayıları için

$$|x+y|\leq|x|+|y|$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizliğe üçgen eşitsizliği denir (Mitrinovic ve Ark., 1973).

Tanım 3.1.6 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Formu) f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^x|f(x)|dx+\int_x^b|f(x)|dx$$

eşitsizliğine üçgen eşitsizliğinin integral formu denir (Mitrinovic ve Ark., 1973).

Teorem 3.1.2 (Hermite-Hadamard-Fejér Eşitsizliği): $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks ve $w:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $w \geq 0$, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik ise bu durumda

$$f(\tfrac{a+b}{2}) \int_a^b w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer f konkav ise eşitsizlikler yön değiştirmelidir. $w \equiv 1$ olması durumunda klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir (Mitrinovic ve Ark., 1973).

Tanım 3.1.7 (Ostrowski Eşitsizliği) $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o kümesi üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I$, $a < b$ için $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'(x)| \leq K$ ise

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \leq K(b-a) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] \tag{3.3}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Mitrinovic ve Ark., 1973).

Bu sonuç literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak bilinir. Ostrowski eşitsizliği ile ilgili bazı genelleştirmeler ve yeni sonuçlar için kaynaklara bakılabilir.

Lemma 3.1.1 $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° da türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise bu takdirde $\forall t \in [0,1]$ için

$$f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du = (b-a) \int_0^1 p(t)\, f'(ta + (1-t)b)\, dt$$

eşitliği sağlanır, burada $\forall x \in [a,b]$ için

$$p(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[0, \frac{b-x}{b-a}\right] \\ t-1, & t \in \left(\frac{b-x}{b-a}, 1\right] \end{cases}$$

dir (Mitrinovic ve Ark., 1973).

Lemma 3.1.2 $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° da türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise bu takdirde $\forall x \in [a,b]$ için

$$f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du = \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 t f'(tx + (1-t)a)\, dt$$

$$- \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 t f'(tx + (1-t)b)\, dt$$

eşitliği sağlanır (Mitrinovic ve Ark., 1973).

Teorem 3.1.3 $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° da türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I$ ve $a < b$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ de konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{6}\left[\left(4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 - 3\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 + 1\right)|f'(a)| + \left(9\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 - 4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 6\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + 2\right)|f'(b)|\right]$$

eşitsizliği yazılabilir. $\frac{1}{6}$ sabiti, daha küçük olan yerine geçemeyeceği anlamında, mümkün olanın en iyisidir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.1.4 $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8} \tag{3.4}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.1.5 $I^\circ \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ de konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q} \tag{3.5}$$

ve

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q} \tag{3.6}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Lemma 3.1.3 $f: I \subseteq [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o kümesi üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L_1([a, b])$ ise

$$\frac{1}{8}\left[f(a) + 6f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{b-a}{4}\int_0^1 \left[\left(\frac{3}{4} - t\right)f'\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - t\right)f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right)\right]dt \tag{3.7}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Kısmi integrasyon uygulanarak

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{4} - t\right) f'\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dt$$
$$= -\frac{2}{b-a}\left[\left(\frac{3}{4} - t\right) f\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 f\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dt\right]$$
$$= -\frac{2}{b-a}\left[-\frac{1}{4}f(a) - \frac{3}{4}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dt$$
$$= \frac{2}{b-a}\left[\frac{1}{4}f(a) + \frac{3}{4}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$$

ve

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - t\right) f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right) dt$$
$$= -\frac{2}{b-a}\left[\left(\frac{1}{4} - t\right) f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right) dt\right]$$
$$= -\frac{2}{b-a}\left[-\frac{3}{4}f(\frac{a+b}{2}) - \frac{1}{4}f(b)\right] - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right) dt$$
$$= \frac{2}{b-a}\left[\frac{3}{4}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{4}f(b)\right] - \frac{4}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2 Rasgele Değişkenlerin Dağılım Fonksiyonları için Eşitsizlikler

Bu kısımda sonlu bir aralık üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin birikim dağılım fonksiyonu için bazı yeni eşitsizlikler elde edilecektir.

X sonlu bir $[a,b], a < b,$ aralığı üzerinde değerler alan bir rasgele değişken olmak üzere $F(x) = P(X \leq x)$ bu rasgele değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu olsun.

Teorem 3.2.1 X ve F yukarıdaki gibi olsun. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|P(X \leq x) - \frac{b-E(X)}{b-a}\right| \leq \frac{1}{b-a}\left[[2x-(a+b)]P(X \leq x) + \int_a^b sgn(t-x)F(t)dt\right]$$
$$\leq \frac{1}{b-a}[(b-x)P(X \geq x) + (x-a)P(X \leq x)]$$
$$\leq \frac{1}{2} + \frac{|x-(a-b)/2|}{b-a} \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: $p(x,t) = \begin{cases} t-a, & t \in [a,x] \\ t-b, & t \in (x,b] \end{cases}$ ile tanımlanan $p(x,t)\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ çekirdek fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için $\int_a^b p(x,t)dF(t)$ Riemann-Stieltjes integrali mevcut olup

$$\int_a^b p(x,t)dF(t) = \int_a^x (t-a)dF(t) + \int_x^b (t-b)dF(t)$$

$$= (t-a)F(t)|_a^x - \int_a^x F(t)dt + (t-b)F(t)|_x^b - \int_x^b F(t)\,dt$$

$$= (b-a)F(x) - \int_a^b F(t)dt \tag{3.9}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$E(X) := \int_a^b t.dF(t) = tF(t)|_a^b - \int_a^b F(t)\,dt$$

$$= bF(b) - aF(a) - \int_a^b F(t)dt = b - \int_a^b F(t)\,dt \tag{3.10}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. (3.9) ve (3.10) eşitliklerinden her $x \in [a,b]$ için

$$(b-a)F(x) + E(X) - b = \int_a^b p(x,t)dF(t) \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\left|\int_a^b p(x,t)dF(t)\right| = \left|\int_a^x (t-a)dF(t) + \int_x^b (t-b)dF(t)\right|$$

$$\leq \left|\int_a^x (t-a)dF(t)\right| + \left|\int_x^b (t-b)dF(t)\right|$$

$$\leq \int_a^x |t-a|dF(t) + \int_x^b |t-b|dF(t)$$

$$= (t-a)F(t)|_a^x - \int_a^x F(t)dt - (b-t)F(t)|_x^b - \int_x^b F(t)\,dt$$

$$= [2x-(a+b)]F(x) - \int_a^x F(t)dt + \int_x^b F(t)\,dt$$

$$= [2x-(a+b)]F(x) + \int_a^b sgn(t-x)F(t)dt \tag{3.12}$$

yazılabilir. (3.11) eşitliği ve (3.12) eşitsizliği dikkate alınırsa (3.8) in birinci kısmı sağlanmış olur. Öte yandan biliyoruz ki

$$\int_a^b sgn(t-x)F(t)dt = -\int_a^x F(t)dt + \int_x^b F(t)\,dt$$

dir. F fonksiyonu $[a,b]$ de monoton azalmayan olduğundan

$$\int_a^x F(t)dt \geq (x-a)F(a) = 0 \ , \quad \int_x^{xb} F(t)dt \leq (b-x)F(b) = b-x$$

olup buradan da her $x \in [a,b]$ için

$$\int_a^b sgn(t-x)F(t)dt \leq b-x$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
&[2x-(a+b)]F(x)+\int_a^b sgn(t-x)F(t)dt \\
&\qquad \le [2x-(a+b)]F(x)+(b-x) \\
&\qquad = (b-x)[1-F(x)]+(x-a)F(x) \\
&\qquad = (b-x)P(X\ge x)+(x-a)P(X\le x)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece (3.8) in ikinci kısmı sağlanmış olur. Son olarak

$$
\begin{aligned}
&(b-x)P(X\ge x)+(x-a)P(X\le x) \\
&\qquad \le max\{b-x,x-a\}[P(X\ge x)+P(X\le x)] \\
&\qquad = \frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|
\end{aligned}
$$

olup (3.8) in son kısmı da sağlanmış olur. Böylece ispat tamamlanır.

Öte yandan $P(X\ge x)=1-P(X\le x)$ eşitliği göz önüne alınırsa (3.8) eşitsizliğine denk olarak her $x\in[a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
\left|P(X\ge x)-\frac{E(X)-a}{b-a}\right| &\le \frac{1}{b-a}\left[[2x-(a+b)]P(X\le x)+\int_a^b sgn(t-x)F(t)dt\right] \\
&\le \frac{1}{b-a}[(b-x)P(X\ge x)+(x-a)P(X\le x)] \\
&\le \frac{1}{2}+\frac{|x-(a-b)/2|}{b-a} \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği yazılabilir. Özel olarak

$$\left|P(X\le\frac{a+b}{2})-\frac{b-E(X)}{b-a}\right|\le\int_a^b sgn\left(t-\frac{a+b}{2}\right)F(t)dt\le\frac{1}{2} \qquad (3.14)$$

ve

$$\left|P(X\ge\frac{a+b}{2})-\frac{E(X)-a}{b-a}\right|\le\int_a^b sgn\left(t-\frac{a+b}{2}\right)F(t)dt\le\frac{1}{2} \qquad (3.15)$$

ilginç eşitsizlikleri de yazılabilir. Aşağıdaki sonuç pratikte oldukça kullanışlıdır.

Sonuç 3.2.1 Yukarıdaki varsayımlar altında

$$\frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2}-E(X)\right]\le P\left(X\le\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2}-E(X)\right]+1 \qquad (3.16)$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: (3.14) eşitsizliğinden

$$-\frac{1}{2}+\frac{b-E(X)}{b-a} \le P(X \le \frac{a+b}{2}) \le \frac{1}{2}+\frac{b-E(X)}{b-a}$$

yazılabilir. Fakat

$$-\frac{1}{2}+\frac{b-E(X)}{b-a} = \frac{-b+a+2b-2E(X)}{2(b-a)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2}-E(X)\right]$$

ve

$$\frac{1}{2}+\frac{b-E(X)}{b-a} = 1+\frac{b-E(X)}{b-a}-\frac{1}{2} = 1+\frac{-b+a+2b-2E(X)}{2(b-a)} = 1+\frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2}-E(X)\right]$$

eşitlikleri yazılabileceğinden eşitsizlik ispatlanmış olur.

Uyarı 3.2.1 $0 \le \varepsilon \le 1$ olsun ve $E(X) \ge \frac{a+b}{2}+(1-\varepsilon)(b-a)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) \le \varepsilon$ dir. Gerçekten (3.16) eşitsizliğinin sağ tarafı dikkate alınırsa

$$P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2}-E(X)\right]+1 \le \frac{(\varepsilon-1)(b-a)}{b-a}+1=\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Uyarı 3.2.2 $0 \le \varepsilon \le 1$ olmak üzere eğer $E(X) \le \frac{a+b}{2}-\varepsilon(b-a)$ ise bu takdirde (3.16) eşitsizliğinin sağ tarafı dikkate alınırsa

$$P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2}-E(X)\right] \ge \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a}=\varepsilon$$

yani $P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) \ge \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 3.2.2 Teorem 3.2.1 in varsayımları altında her $x \in [a,b]$ için

$$\frac{1}{b-x}\int_a^b \frac{1+sgn(t-x)}{2}F(t)dt \ge P(X \ge x) \ge \frac{1}{x-a}\int_a^b \frac{1-sgn(t-x)}{2}F(t)dt \qquad (3.17)$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: (3.8) eşitsizliğinden

$$P(X \le x)-\frac{b-E(X)}{b-a} \le \frac{1}{b-a}\left[[2x-(a+b)]P(X \le x)+\int_a^b sgn(t-x)F(t)dt\right]$$

yazılabilir ki bu eşitsizlik

$$(b-a)P(X \le x) - [2x-(a+b)]P(X \le x)$$
$$\le b - E(X) + \int_a^b sgn(t-x)F(t)dt$$

yani

$$(b-a)P(X \le x) \le b - E(X) + \int_a^b sgn(t-x)F(t)dt$$

eşitsizliğine denktir. Öte yandan $b - E(X) = \int_a^b F(t)dt$ olup yukarıdaki eşitsizlik (3.17) nin birinci kısmının sağlandığı görülür. Benzer şekilde

$$P(X \le x) - \frac{b-E(X)}{b-a} \ge -\frac{1}{b-a}\left[[2x-(a+b)]P(X \le x) + \int_a^b sgn(t-x)F(t)dt\right]$$

eşitsizliği kullanılarak kolayca gösterilebilir.

Uyarı 3.2.3 (3.17) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa bu takdirde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \left[1 + sgn\left(t - \frac{a+b}{2}\right)\right] F(t)dt \ge P\left(X \ge \frac{a+b}{2}\right)$$
$$\ge \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[1 - sgn\left(t - \frac{a+b}{2}\right)\right] F(t)dt \qquad (3.18)$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 3.2.1 X rasgele değişkeni

$$f(x;p,q) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}, \quad 0 < x < 1$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip (p,q) parametreli bir Beta rasgele değişkeni olsun, burada $\Omega = \{(p,q): p,q > 0\}$ ve $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ dir. Ayrıca

$$E(X) = \frac{1}{B(p,q)}\int_0^1 x.x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{B(p-1,q)}{B(p,q)},$$

yani $E(X) = \frac{p}{p+q}$ olacaktır. Bu takdirde Teorem 3.2.1 e göre her $x \in [a,b]$ için

$$\left|P(X \le x) - \frac{p}{p+q}\right| \le \frac{1}{2} + \left|x - \frac{1}{2}\right| \quad \text{ve} \quad \left|P(X \ge x) - \frac{p}{p+q}\right| \le \frac{1}{2} + \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Özel olarak

$$\left|P(X \le \tfrac{1}{2}) - \frac{p}{p+q}\right| \le \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \left|P(X \ge \tfrac{1}{2}) - \frac{p}{p+q}\right| \le \frac{1}{2}$$

olduğu da kolayca görülür.

Teorem 3.2.2 $f \in L_\infty[a,b]$ ve $\|f\|_\infty = sup_{t\in[a,b]} f(t) < \infty$ olsun. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|P(X \leq x) - \frac{b-E(X)}{b-a}\right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(x-(a+b)/2)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f\|_\infty \quad (3.19)$$

veya buna denk olarak

$$\left|P(X \geq \frac{a+b}{2}) - \frac{E(X)-a}{b-a}\right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(x-(a+b)/2)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f\|_\infty \quad (3.20)$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: $x, y \in [a,b]$ olsun. Bu takdirde

$$|F(x) - F(y)| \leq \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq |x-y|\|f\|_\infty$$

yazılabilir ki bu F nin $[a,b]$ aralığında $\|f\|_\infty -$ Lipsichitzian olduğunu gösterir.

$$p(x,t) = \begin{cases} t-a, & t \in [a,x] \\ t-b, & t \in (x,b] \end{cases}$$

ile tanımlanan $p(x,t): [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ çekirdek fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için $\int_a^b p(x,t)dF(t)$ Riemann-Stieltjes integrali mevcut olup

$$\int_a^b p(x,t)dF(t) = (b-a)F(x) - \int_a^b F(t)dt$$

yazılabilir. Ayrıca $E(X) = b - \int_a^b F(t)\,dt$ olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece her $x \in [a,b]$ için

$$(b-a)F(x) + E(X) - b = \int_a^b p(x,t)dF(t)$$

eşitliği elde edilir. Buradan her $x \in [a,b]$ için

$$\left|F(x) - \frac{E(X)-a}{b-a}\right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(x-(a+b)/2)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f\|_\infty$$

olduğu görülür ki bu da (3.19) sağlanmasıdır. Öte yandan $P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$ eşitliği göz önüne alınırsa (3.20) nin de sağlandığı kolayca görülür.

Sonuç 3.2.3 Teorem 3.2.2 nin varsayımları altında

$$b - \frac{1}{2}(b-a)^2\|f\|_\infty \leq E(X) \leq a + \frac{1}{2}(b-a)^2\|f\|_\infty \quad (3.21)$$

olduğu görülür (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: $a \leq E(X) \leq b$ olduğu açıktır. (3.19) da $x = a$ alınırsa

$$\left|\frac{b-E(X)}{b-a}\right| \leq \frac{1}{2}(b-a)\|f\|_\infty$$

yani $b - E(X) \leq \frac{1}{2}(b-a)^2\|f\|_\infty$ olur ki bu da (3.21) deki birinci eşitsizliğe denktir. Ayrıca (3.19) da $x = b$ alınırsa

$$\left|1 - \frac{b-E(X)}{b-a}\right| \leq \frac{1}{2}(b-a)\|f\|_\infty$$

yani $E(X) - a \leq \frac{1}{2}(b-a)^2\|f\|_\infty$ olur ki bu da (3.21) deki ikinci eşitsizliğe denktir.

Sonuç 3.2.4 Teorem 3.2.2 nin varsayımları altında

$$\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{1}{2}(b-a)^2\left[\|f\|_\infty - \frac{1}{b-a}\right]$$

olduğu görülür (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: (3.21) eşitsizliğinden

$$b - \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}(b-a)^2\|f\|_\infty \leq E(X) - \frac{a+b}{2} \leq a - \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}(b-a)^2\|f\|_\infty$$

ve dolayısıyla

$$-\frac{(b-a)^2}{2}\left[\|f\|_\infty - \frac{1}{b-a}\right] \leq E(X) - \frac{a+b}{2} \leq \frac{(b-a)^2}{2}\left[\|f\|_\infty - \frac{1}{b-a}\right]$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.5 Teorem 3.2.2 nin varsayımları altında $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{b-a} + \frac{2\,\varepsilon}{(b-a)^2}$$

ise bu takdirde $\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \varepsilon$ olduğu görülür (Barnett ve Ark. 2002).

Sonuç 3.2.6 Teorem 3.2.2 nin varsayımları altında

$$\left|P\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)\|f\|_\infty + \frac{1}{b-a}\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{3}{4}(b-a)\|f\|_\infty - \frac{1}{2}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: (3.19) da $x = a$ alınırsa

$$\left|P(X \leq x) - \frac{b-E(X)}{b-a}\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)\|f\|_\infty$$

elde edilir ki bu da açık olarak

$$\left|P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{1}{4}(b-a)\|f\|_\infty$$

olması demektir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\left|P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\right|$$

$$= \left|P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\le \left|P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right| + \left|\frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\le \frac{1}{4}(b-a)\|f\|_\infty + \frac{1}{b-a}\left|\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{3}{4}(b-a)\|f\|_\infty - \frac{1}{2}$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.2.7 Teorem 3.2.2 nin varsayımları altında

$$\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \le \frac{1}{4}(b-a)^2\|f\|_\infty + (b-a)\left|P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\right|$$

eşitsizliği gerçekleşir (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: Sonuç 3.2.6 da olduğu gibi

$$\frac{1}{b-a}\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right|$$

$$= \left|P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right) - P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\right|$$

$$\le \left|P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right| + \left|P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\right|$$

$$\le \frac{1}{4}(b-a)\|f\|_\infty + \left|P\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\right|$$

elde edilir.

Örnek 3.2.2 X rasgele değişkeni (p, q) parametreli bir Beta rasgele değişkeni olsun. Bu durumda $0 < p < 1$ için

$$\|f(.\,; p, q)\|_\infty = \sup_{x\in(0,1)} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)} = \infty$$

olduğunu belirtelim. $p, q \ge 1$ olduğu varsayılarak

$$\frac{df(x;p,q)}{dx} = \frac{1}{B(p,q)}[(p-1)x^{p-2}(1-x)^{q-1} - (q-1)x^{p-1}(1-x)^{q-2}]$$

$$= \frac{x^{p-2}(1-x)^{q-2}}{B(p,q)}[(p-1)(1-x)-(q-1)x]$$

$$= \frac{x^{p-2}(1-x)^{q-2}}{B(p,q)}[-(p+q-2)x-(p-1)]$$

elde edilir. Öte yandan $p, q \geq 1$ varsayımından $\frac{df(x;p,q)}{dx} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x_0 = (p-1)/(p+q-2)$ olacaktır. Bu nedenle $(0, x_0)$ aralığında $\frac{df(x;p,q)}{dx} > 0$ ve $(x_0, 1)$ aralığında $\frac{df(x;p,q)}{dx} < 0$ dır. Sonuç olarak

$$\|f(.;p,q)\|_\infty = f(x_0;p,q) = \frac{(p-1)^{p-1}(q-1)^{q-1}}{B(p,q)(p+q-2)^{p+q-2}}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2.2 den X rasgele değişkeni (p,q) parametreli bir Beta rasgele değişken ve $(p,q) \in [1,\infty) \times [1,\infty)$ olduğunda her $x \in [0,1]$ için

$$\left|P(X \leq x) - \frac{q}{p+q}\right| \leq \left[\frac{1}{4} + (x - \frac{1}{2})^2\right] \frac{(p-1)^{p-1}(q-1)^{q-1}}{B(p,q)(p+q-2)^{p+q-2}}$$

ve

$$\left|P(X \geq x) - \frac{q}{p+q}\right| \leq \left[\frac{1}{4} + (x - \frac{1}{2})^2\right] \frac{(p-1)^{p-1}(q-1)^{q-1}}{B(p,q)(p+q-2)^{p+q-2}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Özel olarak

$$\left|P(X \leq \tfrac{1}{2}) - \frac{q}{p+q}\right| \leq \frac{1}{4} . \frac{(p-1)^{p-1}(q-1)^{q-1}}{B(p,q)(p+q-2)^{p+q-2}}$$

ve

$$\left|P(X \geq \tfrac{1}{2}) - \frac{q}{p+q}\right| \leq \frac{1}{4} . \frac{(p-1)^{p-1}(q-1)^{q-1}}{B(p,q)(p+q-2)^{p+q-2}}$$

olduğu görülür (Barnett ve Ark. 2002).

Teorem 3.2.3 $f \in L_p[a,b], p > 1$ olsun. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\left|P(X \leq x) - \frac{b-E(X)}{b-a}\right| \tag{3.22}$$

$$\leq \frac{q}{q+1}\|f\|_p (b-a)^{1/q}\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{(1+q)/q} + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{(1+q)/q}\right] \leq \frac{q}{q+1}\|f\|_p (b-a)^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: Hölder eşitsizliğinden her $x, y \in [a,b]$ için

$$|F(x) - F(y)| \leq \left|\int_x^y dt\right|^{1/q} \left|\int_x^y |f(t)|^p dt\right|^{1/p} \leq |x-y|^{1/q} \|f\|_p \qquad (3.23)$$

eşitsizliği yazılabilir, burada $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

$L_p[a,b]$ üzerindeki alışılmış p −normdur. (3.23) eşitsizliği gösterir ki F fonksiyonu $r - H$ −Hölder tipindendir yani her $x, y \in [a,b]$ için $0 < H = \|f\|_p$ ve $r = 1/q \in (0,1)$ olmak üzere

$$|F(x) - F(y)| \leq H|x-y|^r$$

dir. (3.23) eşitsizliğinden $y \in [a,b]$ üzerinden integral alınırsa her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
\left|F(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b F(y)dy\right| &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |F(x) - F(y)|dy \leq \frac{1}{b-a}\|f\|_p \int_a^b |x-y|^{1/q} dy \\
&= \frac{1}{b-a}\|f\|_p \int_a^x (x-y)^{1/q} dy + \int_x^b (y-x)^{1/q} dy \\
&= \frac{1}{b-a}\|f\|_p \left[\frac{(x-a)^{\frac{1}{q}+1}}{\frac{1}{q}+1} + \frac{(b-x)^{\frac{1}{q}+1}}{\frac{1}{q}+1}\right] \\
&= \frac{q}{q+1}\frac{1}{b-a}\|f\|_p \left[(x-a)^{\frac{1}{q}+1} + (b-x)^{\frac{1}{q}+1}\right] \\
&= \frac{q}{q+1}\frac{1}{b-a}\|f\|_p \left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{q}+1} + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{q}+1}\right] \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $E(X) = b - \int_a^b F(t)\,dt$ olduğundan (3.24) eşitsizliğinden (3.22) deki birinci eşitsizlik sağlanmış olur. İkinci eşitsizlik için her $x \in [a,b]$ için

$$\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{q}+1} + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{q}+1} \leq 1$$

olduğunu belirtmek yeterlidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 3.2.4 (3.22) eşitsizliği her $x \in [a,b]$ için

$$\left|P(X \leq x) - \frac{b-E(X)}{b-a}\right|$$

$$\leq \frac{q}{q+1}\|f\|_p (b-a)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{q}+1} + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{q}+1}\right] \leq \frac{q}{q+1}\|f\|_p (b-a)^{1/q}$$

eşitsizliğine denktir.

Sonuç 3.2.8 Teorem 3.2.3 ün varsayımları altında

$$b-\frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1+\frac{1}{q}} \leq E(X) \leq a+\frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1+\frac{1}{q}} \tag{3.25}$$

olduğu görülür (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: $a \leq E(X) \leq b$ olduğu açıktır. (3.22) da $x=a$ alınırsa

$$\left|\frac{b-E(X)}{b-a}\right| \leq \frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1/q}$$

yani

$$b-E(X) \leq \frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1+\frac{1}{q}}$$

elde edilir ki bu da (3.25) deki birinci eşitsizliğe denktir. (3.22) da $x=b$ alınırsa

$$\left|1-\frac{b-E(X)}{b-a}\right| \leq \frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1/q}$$

yani

$$E(X)-a \leq \frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1+\frac{1}{q}}$$

olur ki bu da (3.25) deki ikinci eşitsizliğe denktir.

Sonuç 3.2.9 Teorem 3.2.3 ün varsayımları altında

$$\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right| \leq (b-a)\left[\frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{\frac{1}{q}}-\frac{1}{2}\right]$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: (3.25) eşitsizliğinden

$$b-\frac{a+b}{2}-\frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1+\frac{1}{q}} \leq E(X)-\frac{a+b}{2} \leq a-\frac{a+b}{2}+\frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1+\frac{1}{q}}$$

yani

$$\frac{b-a}{2}+\frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1+\frac{1}{q}} \leq E(X)-\frac{a+b}{2} \leq -\frac{b-a}{2}+\frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1+\frac{1}{q}}$$

elde edilir ki bu da

$$\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1+\frac{1}{q}}-\frac{b-a}{2}=(b-a)\left[\frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{\frac{1}{q}}-\frac{1}{2}\right]$$

eşitsizliğine denktir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.10 Teorem 3.2.3 ün varsayımları altında $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer

$$\|f\|_p \leq \frac{q+1}{2q}\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}} + \frac{\varepsilon(q+1)}{q(b-a)^{1+\frac{1}{q}}}$$

ise bu takdirde

$$\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

Sonuç 3.2.10 Teorem 3.2.3 ün varsayımları altında

$$\left|P\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{q}{2^{\frac{1}{q}}(q+1)}\|f\|_p(b-a)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{b-a}\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right|$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: (3.22) de eğer $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\left|P\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-E(X)}{b-a}\right| \leq \frac{q}{2^{\frac{1}{q}}(q+1)}\|f\|_p(b-a)^{\frac{1}{q}}$$

olur ki bu da

$$\left|P\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{q}{2^{\frac{1}{q}}(q+1)}\|f\|_p(b-a)^{\frac{1}{q}}$$

olduğuna denktir. Üçgen eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|P\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| \\
&\quad = \left|P\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right| \\
&\quad \leq \left|P\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{1}{b-a}\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \\
&\quad \leq \frac{q}{2^{\frac{1}{q}}(q+1)}\|f\|_p(b-a)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{b-a}\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right|
\end{aligned}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.11 Teorem 3.2.3 ün varsayımları altında

$$\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{q}{2^{\frac{1}{q}}(q+1)}\|f\|_p(b-a)^{1+\frac{1}{q}} + (b-a)\left|P\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\right|$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

3.3 Beklenen Değer ve Standart Sapma için Eşitsizlikler

Bu kısımda sonlu bir aralık üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin beklenen değer ve varyans gibi momentleri için bazı yeni eşitsizlikler elde edilecektir.

X sonlu bir $[a,b], a<b$, aralığı üzerinde değerler alan bir rasgele değişken olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bu rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun. X in dağılım fonksiyonunu, beklenen değerini ve standart sapmasını sırasıyla $F(X), E(X)$ ve $\sigma(X)$ ile gösterelim ve f fonksiyonunun sınırlı olduğunu yani her $t\in[a,b]$ için $0\le\gamma\le f(t)\le\varphi\le 1$ olacak şekilde γ,φ sabitleri mevcut olsun.

Bu amaçla öncelikle Matic ve Ark.(1999) tarafından, $t\in[a,b]$ için $\gamma\le f(t)\le\varphi$ ve tüm integral mevcut ve sonlu olmak üzere

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t).g(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right|$$

$$\le\frac{1}{2}(\varphi-\gamma)\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (g(t))^2dt-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.26}$$

ile verilen ve pre-Grüss eşitsizliği olarak bilinen eşitsizliği ifade edelim.

Teorem 3.3.1 X $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olmak üzere her $t\in[a,b]$ için $0\le\gamma\le f(t)\le\varphi\le 1$ olacak şekilde γ,φ sabitleri mevcut olsun. Bu takdirde

$$\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right|\le\frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi-\gamma)(b-a)^2 \tag{3.27}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: (3.26) eşitsizliğinde $g(t)=t$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b t.f(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.\frac{1}{b-a}\int_a^b tdt\right|$$

$$\le\frac{1}{2}(\varphi-\gamma)\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b t^2dt-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b tdt\right)^2\right]^{1/2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca

$$\int_a^b t.f(t)dt=E(X)\ ,$$

$$\int_a^b f(t)dt=1\ ,$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b t\,dt = \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b t^2 dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b t\,dt\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

eşitlikleri dikkate alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.2 X $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. Eğer $\mu \in [a,b]$ olmak üzere

$$\sigma_\mu(X) = \left(\int_a^b (t-\mu)^2 . f(t)dt\right)^{1/2}$$

ise bu takdirde

$$\left|\sigma_\mu{}^2(X) - \left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{12}\right|$$
$$\le \frac{1}{2}(\varphi-\gamma)(b-a)^2\left[\frac{1}{3}\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{180}\right]^{1/2}$$
$$\le \frac{1}{3\sqrt{5}}(\varphi-\gamma)(b-a)^3 \tag{3.28}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: (3.26) eşitsizliğinde $g(t) = (t-\mu)^2$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^2 . f(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt . \frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^2 dt\right|$$
$$\le \frac{1}{2}(\varphi-\gamma)\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^4 dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^2 dt\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.29}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca

$$\int_a^b f(t)dt = 1 \ ,$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^2 dt = \frac{(b-\mu)^3-(\mu-a)^3}{3(b-a)} = \left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{12} \ ,$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^4 dt = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^2 dt\right)^2$$
$$= \frac{1}{45}[4[(b-\mu)^2-(\mu-a)^2]^2 + 2(b-\mu)^2(\mu-a)^2$$
$$+(b-\mu)(\mu-a)[(b-\mu)^2-(\mu-a)^2] =: A$$

eşitlikleri yazılabilir. Bununla beraber

$$(b-\mu)^2-(\mu-a)^2 = (b-a)(b+a-2\mu) = 2(b-a)\left(\frac{a+b}{2} - \mu\right),$$

$$(b-\mu)(\mu-a)=\frac{1}{4}(b-a)^2-\left(\mu-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$(b-\mu)^2+(\mu-a)^2=\frac{1}{2}(b-a)^2+2\left(\mu-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

eşitlikleri dikkate alınırsa

$$A=\frac{1}{45}(b-a)^2\left[15\left(\mu-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(b-a)^2\right]$$

$$=(b-a)^2\left[\frac{1}{3}\left(\mu-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{180}(b-a)^2\right]$$

olduğu görülür. Buradan (3.29) eşitsizliğini kullanarak (3.27) elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.1 Teorem 3.3.2 nin varsayımları altında eğer $\sigma_0(X):=\sigma_{\frac{a+b}{2}}(X)$ ise bu takdirde

$$\left|{\sigma_0}^2(X)-\frac{(b-a)^2}{12}\right|\leq\frac{1}{12\sqrt{5}}(\varphi-\gamma)(b-a)^3 \tag{3.30}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

Teorem 3.3.3 X $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. Eğer $\mu\in[a,b]$ olmak üzere

$$A_\mu(X):=\int_a^b|t-\mu|.f(t)dt$$

ise bu takdirde her $\mu\in[a,b]$ için

$$\left|A_\mu(X)-\frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)^2}{4}+\left(\mu-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}(\varphi-\gamma)(b-a)\left[\frac{(b-a)^2}{48}+\frac{1}{(b-a)^2}\left(\mu-\frac{a+b}{2}\right)^2\left[\frac{(b-a)^2}{2}+\left(\mu-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\right]^{1/2} \tag{3.31}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: (3.26) eşitsizliğinde $g(t)=|t-\mu|$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b|t-\mu|.f(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.\frac{1}{b-a}\int_a^b|t-\mu|dt\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}(\varphi-\gamma)\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b|t-\mu|^2dt-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b|t-\mu|dt\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.32}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca

$$\int_a^b f(t)dt = 1 \ ,$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |t-\mu| dt = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^\mu (\mu - t)dt + \int_\mu^b (t-\mu)dt\right]$$

$$= \frac{(b-\mu)^2+(\mu-a)^2}{2(b-a)} = \frac{1}{(b-a)}\left[\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{4}\right] \ ,$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^2 dt = \frac{(b-\mu)^3+(\mu-a)^3}{3(b-a)} = \left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |t-\mu|^2 dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |t-\mu| dt\right)^2$$

$$= \left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{12} - \left[\frac{1}{b-a}\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)}{4}\right]^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{48} + \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{(b-a)^2}\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^4$$

$$= \frac{(b-a)^2}{48} + \frac{1}{(b-a)^2}\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2\left[\frac{1}{2}(b-a)^2 - \left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

olduğu görülür. Buradan (3.32) eşitsizliğini kullanarak (3.31) elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.2 Teorem 3.3.3 ün varsayımları altında $\mu = \ \mu_0 := \frac{a+b}{2}$ için (3.31) den

$$\left|A_{\mu_0}(X) - \frac{b-a}{4}\right| \le \frac{1}{8\sqrt{3}}(\varphi - \gamma)(b-a)^2 \tag{3.33}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: $g(\mu) := \frac{(b-a)^2}{48} + \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{1}{(b-a)^2}\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^4$

dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$\frac{dg(\mu)}{d\mu} := \left(\mu - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2}\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^3 = \left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)\left[1 - \frac{4}{(b-a)^2}\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

olur. Buradan eğer $\mu = a,\ \mu - \frac{a+b}{2}$ veya $\mu = b$ ise $\frac{dg(\mu)}{d\mu} = 0$ olup $\mu \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ için $\frac{dg(\mu)}{d\mu} < 0$ ve $\mu \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ için $\frac{dg(\mu)}{d\mu} > 0$ olacağından $\mu = \frac{a+b}{2}$ noktası bir yerel minimum noktasıdır ve $g(\mu_0) := \frac{(b-a)^2}{48}$ olduğundan (3.33) eşitsizliği (3.31) den elde edilebilen en iyi eşitsizliktir.

Teorem 3.3.4 $X,\ f,\ E(X),\ \gamma,\ \varphi$ yukarıda verildiği gibi olmak üzere $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ fonksiyonu X rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu olsun. Bu takdirde her $x\in[a,b]$ için

$$\left|E(X)+(b-a)F(x)-x-\frac{b-a}{2}\right|\leq\frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi-\gamma)(b-a)^2 \tag{3.34}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: $x\in[a,b]$ olmak üzere

$$p(x,t)=\begin{cases}t-a, & t\in[a,x]\\ t-b, & t\in(x,b]\end{cases}$$

ile tanımlanan $p(x,t)\colon[a,b]^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alalım. Bu takdirde

$$(b-a)F(x)+E(X)-b=\int_a^b p(x,t)dF(t)=\int_a^b p(x,t)f(t)dt$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda $g(t)=p(x,t)$ için (3.26) ile verilen pre-Grüss eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t).p(x,t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}(\varphi-\gamma)\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b(p(x,t))^2dt-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.35}$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt=x-\frac{a+b}{2}$$

$$D:=\frac{1}{b-a}\int_a^b(p(x,t))^2dt-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\right)^2$$

$$=\frac{(b-x)^3-(x-a)^3}{3(b-a)}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(b-x)^2-(b-x)(x-a)+(x-a)^2}{3}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

yazılabilir. Buradan

$$(b-x)^2-(b-x)(x-a)+(x-a)^2=3\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(b-a)^2$$

olduğundan $D=\frac{1}{12}(b-a)^2$ olduğu görülür. Böylece (3.35) kullanılarak (3.34) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 3.3.1 (3.34) eşitsizliğinde $x = a$ veya $x = b$ seçilirse bu takdirde

$$\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi - \gamma)(b-a)^2$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.3.2 (3.34) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse bu takdirde

$$\left|E(X) + (b-a)P\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - b\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi - \gamma)(b-a)^2$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.5 X, f, F, $E(X)$, γ, φ yukarıda verildiği gibi olsun. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|E(X) + \frac{(b-a)}{2}F(x) - \frac{b+x}{2}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(\varphi - \gamma)\left[\frac{1}{4}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$
$$\leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi - \gamma)(b-a)^2 \tag{3.36}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$p(x,t) = \begin{cases} t-a, & t \in [a,x] \\ t-b, & t \in (x,b] \end{cases}$$

ile tanımlanan $p(x,t)\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alalım. Bu takdirde

$$(b-a)F(x) + E(X) - b = \int_a^x (t-a)dF(t) + \int_x^b (t-b)dF(t)$$
$$= \int_a^x (t-a)f(t)dt + \int_x^b (t-b)f(t)dt$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda $g(t) = (t-a)$ için (3.26) ile verilen pre-Grüss eşitsizliği uygulanırsa $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t).(t-a)dt - \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt \, . \frac{1}{x-a}\int_a^x (t-a)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}(\varphi - \gamma)\left[\frac{1}{x-a}\int_a^x (t-a)^2 dt - \left(\frac{1}{x-a}\int_a^x (t-a)dt\right)^2\right]^{1/2}$$
$$\leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi - \gamma)(x-a) \tag{3.37}$$

ve benzer şekilde

$$\left|\frac{1}{b-x}\int_x^b f(t).(t-b)dt - \frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)dt\,.\frac{1}{b-x}\int_x^b (t-b)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi-\gamma)(b-x) \tag{3.38}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.37) ve (3.38) den sırasıyla her $x \in [a,b]$ için

$$\left|\int_a^x f(t).(t-a)dt - \frac{x-a}{2}F(x)\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi-\gamma)(x-a)^2$$

ve

$$\left|\int_x^b f(t).(t-b)dt - \frac{b-x}{2}[1-F(x)]\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi-\gamma)(b-x)^2$$

elde edilir. Son iki eşitsizlik taraf tarafa toplanıp üçgen eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\int_a^x f(t).(t-a)dt + \int_x^b f(t).(t-b)dt - \frac{b-a}{2}F(x) + \frac{b-x}{2}\right|$$

$$\leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi-\gamma)[(x-a)^2+(b-x)^2]$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(\varphi-\gamma)\left[\frac{1}{4}(b-a)^2 + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

olduğu görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 3.3.3 (3.36) eşitsizliğinde $x=a$ veya $x=b$ seçilirse bu takdirde

$$\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi-\gamma)(b-a)^2 \tag{3.39}$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.3.4 (3.36) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse bu takdirde

$$\left|E(X) + (b-a)P\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - b\right| \leq \frac{1}{8\sqrt{3}}(\varphi-\gamma)(b-a)^2 \tag{3.40}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi de Matic ve Ark.(1999) tarafından verilen ve $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyonlar, $f',g':[a,b] \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonları $L_\infty[a,b]$ sınıfından olmak üzere

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t).g(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\,.\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{12}(b-a)^2\,\|f'\|_\infty\|g'\|_\infty \tag{3.41}$$

ile verilen ve pre-Chebychev eşitsizliği olarak bilinen eşitsizliği ifade edelim. Bu durumda tüm integraller mevcut ve sonlu olmak şartıyla

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t).g(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\,.\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right| \tag{3.42}$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(b-a)\,\|f'\|_\infty \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (g(t))^2 dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^x g(t)dt\right)^2\right]^{1/2}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Teorem 3.3.6 X $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. f $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli ve $f' \in L_\infty[a,b]$ ise bu takdirde

$$\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{1}{12}(b-a)^2\,\|f'\|_\infty \tag{3.43}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: (3.42) eşitsizliğinde $g(t) = t$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b t.f(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\,.\frac{1}{b-a}\int_a^b t.dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(b-a)\,\|f'\|_\infty \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b t^2 dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^x t.dt\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.44}$$

olup

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b t^2 dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^x t.dt\right)^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

yazılabileceğinden istenen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.3.7 X ve f yukarıdaki gibi olsun. Eğer $\mu \in [a,b]$ olmak üzere

$$\sigma_\mu(X) = \left(\int_a^b (t-\mu)^2.f(t)dt\right)^{1/2}$$

ise bu takdirde

$$\left|\sigma_\mu{}^2(X) - \left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{12}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(b-a)^2\left[\frac{1}{3}\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{180}\right]\|f'\|_\infty$$

$$\leq \frac{1}{3\sqrt{5}}(b-a)^3\|f'\|_\infty \tag{3.45}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: (3.42) eşitsizliğinde $g(t) = (t-\mu)^2$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t).(t-\mu)^2 dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\,.\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^2 dt\right| \tag{3.46}$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(b-a)\,\|f'\|_\infty \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^4 dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^2 dt\right)^2\right]^{1/2}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bununla beraber

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^2 dt = \left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-\mu)^4 dt = \frac{(b-\mu)^5-(\mu-a)^5}{5(b-a)} - \left[\frac{(b-\mu)^3-(\mu-a)^3}{3(b-a)}\right]^2$$

$$= \frac{(b-\mu)^5-(\mu-a)^5}{5(b-a)} - \left[\frac{(b-\mu)^3-(\mu-a)^3}{3(b-a)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{45}[4[(b-\mu)^2-(\mu-a)^2]^2 + 2(b-\mu)^2(\mu-a)^2$$

$$+(b-\mu)(\mu-a)[(b-\mu)^2-(\mu-a)^2] =: A$$

olup basit bir hesaplamayla

$$A = \frac{1}{45}(b-a)^2\left[15\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^2\right]$$

$$= (b-a)^2\left[\frac{1}{3}\left(\mu - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{180}(b-a)^2\right]$$

olduğu görülür. Buradan (3.46) eşitsizliğini kullanarak (3.45) elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.3 Teorem 3.3.7 nin varsayımları altında eğer $\sigma_0(X) := \sigma_{\frac{a+b}{2}}(X)$ ise bu takdirde

$$\left|\sigma_0{}^2(X) - \frac{(b-a)^2}{12}\right| \leq \frac{1}{12\sqrt{5}}(b-a)^3\|f'\|_\infty \tag{3.47}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

Teorem 3.3.8 $X,\ f,\ E(X),\ \gamma,\ \varphi$ yukarıda verildiği gibi olmak üzere $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ fonksiyonu X rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu olsun. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|E(X)+(b-a)F(x)-x-\frac{b-a}{2}\right| \le \frac{1}{12}(b-a)^3\|f'\|_\infty \tag{3.48}$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$p(x,t)=\begin{cases} t-a, & t\in[a,x] \\ t-b, & t\in(x,b] \end{cases}$$

ile tanımlanan $p(x,t)\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alalım. Bu takdirde

$$(b-a)F(x)+E(X)-b=\int_a^b p(x,t)dF(t)=\int_a^b p(x,t)f(t)dt \tag{3.49}$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda $g(t)=p(x,t)$ için (3.42) pre-Chebychev eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t).f(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\right| \tag{3.50}$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{3}}(b-a)\,\|f'\|_\infty\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (p(x,t))^2dt-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^x (p(x,t)dt\right)^2\right]^{1/2}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt = x-\frac{a+b}{2}$$

$$D := \frac{1}{b-a}\int_a^b (p(x,t))^2dt-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\right)^2=\frac{(b-x)^3-(x-a)^3}{3(b-a)}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

yazılabilir. Buradan (3.50) kullanılarak (3.48) elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3.3.5 (3.48) eşitsizliğinde özel olarak $x=a$ veya $x=b$ seçilirse bu takdirde

$$\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right| \le \frac{1}{12}(b-a)^3\|f'\|_\infty$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.3.6 (3.48) eşitsizliğinde özel olarak $x=\frac{a+b}{2}$ seçilirse bu takdirde

$$\left|E(X)+(b-a)P\left(X\le\frac{a+b}{2}\right)-b\right| \le \frac{1}{12}(b-a)^3\|f'\|_\infty \tag{3.51}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.9 $X,\ f,\ F,\ E(X)$ yukarıda verildiği gibi olsun. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|E(X) + \frac{(b-a)}{2}F(x) - \frac{b+x}{2}\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)\|f'\|_\infty \left[\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

$$\leq \frac{1}{12}(b-a)^3\|f'\|_\infty \qquad (3.52)$$

eşitsizliği sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t).(t-a)dt - \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\,.\frac{1}{x-a}\int_a^x (t-a)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-a)\|f'\|_\infty \left[\frac{1}{x-a}\int_a^x (t-a)^2 dt - \left(\frac{1}{x-a}\int_a^x (t-a)dt\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{12}(x-a)^2\|f'\|_\infty \qquad (3.53)$$

ve benzer şekilde

$$\left|\frac{1}{b-x}\int_x^b f(t).(t-b)dt - \frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)dt\,.\frac{1}{b-x}\int_x^b (t-b)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{12}(b-x)^2\|f'\|_\infty \qquad (3.54)$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.53) ve (3.54) den sırasıyla her $x \in [a,b]$ için

$$\left|\int_a^x f(t).(t-a)dt - \frac{x-a}{2}F(x)\right| \leq \frac{1}{12}(x-a)^3\|f'\|_\infty$$

ve

$$\left|\int_x^b f(t).(t-b)dt - \frac{b-x}{2}[1-F(x)]\right| \leq \frac{1}{12}(b-x)^2\|f'\|_\infty$$

elde edilir. Son iki eşitsizlik taraf tarafa toplanıp üçgen eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\int_a^x f(t).(t-a)dt + \int_x^b f(t).(t-b)dt - \frac{b-a}{2}F(x) + \frac{b-x}{2}\right|$$

$$\leq \frac{1}{12}\|f'\|_\infty[(x-a)^3 + (b-x)^3]$$

$$\leq \frac{1}{12}(b-a)\|f'\|_\infty \left[\frac{1}{4}(b-a)^2 + 3\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}(b-a)\|f'\|_\infty \left[\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

olduğu görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 3.3.7 (3.52) eşitsizliğinde özel olarak özel olarak $x = a$ veya $x = b$ seçilirse bu takdirde (3.43) eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.3.7 (3.52) eşitsizliğinde özel olarak $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse bu takdirde

$$\left|E(X) + (b-a)P\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - b\right| \leq \frac{1}{48}(b-a)^3 \|f'\|_\infty$$

eşitsizliği elde edilir.

X bir $[a,b], a < b$, aralığı üzerinde değerler alan sürekli bir rasgele değişken olmak üzere $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ bu rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun. X in beklenen değerini ve varyansını sırasıyla aşağıdaki gibi gösterelim.

$$E(X) = \int_a^b t.f(t)dt\ ,$$

$$\sigma^2(X) = \int_a^b (t - E(X))^2 f(t)dt = \int_a^b t^2 f(t)dt - E(X)^2$$

Teorem 3.3.10 X rasgele değişkeni $[a,b], a < b$, aralığı üzerinde tanımlı sürekli rasgele değişken ve f X in olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun. Bu takdirde $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$ ve $f \in L_p[a,b]$ olmak üzere

$$0 \leq \sigma(X) \leq [b - E(X)]^{\frac{1}{2}}[E(X) - a]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}(b-a) \tag{3.55}$$

ve

$$0 \leq [b - E(X)][E(X) - a] - \sigma^2(X)$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{6}(b-a)^3 \|f\|_\infty\ , \\ [B(q+1, q+1)]^{1/q}(b-a)^{2+1/q}\|f\|_p\ , \end{cases} \tag{3.56}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $[a,b]$ de $m \leq f \leq M$ ise bu takdirde

$$\frac{1}{6}m.(b-a)^3 \leq [b - E(X)][E(X) - a] - \sigma^2(X) \leq \frac{1}{6}M.(b-a)^3 \tag{3.57}$$

ve

$$\left|b - [b - E(X)][E(X) - a] - \sigma^2(X) - \frac{(b-a)^2}{6}\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{60}(M-m)(b-a)^3 \tag{3.58}$$

eşitlikleri sağlanır (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: Öncelikle

$$\int_a^b f(t)dt = 1 \text{ ve } \int_a^b (t - E(X))f(t)dt = 0$$

olduğundan

$$\int_a^b (b-t)(t-a).f(t)dt$$

$$= \int_a^b \left[\left(b-E(X)\right)+\left(E(X)-t\right)\right]\left[\left(E(X)-a\right)+\left(t-E(X)\right)\right]f(t)dt$$

$$= \left(b-E(X)\right)\left(E(X)-a\right)\int_a^b f(t)dt - \left(E(X)-a\right)\int_a^b \left(E(X)-t\right)f(t)dt$$

$$+\left(b-E(X)\right)\int_a^b \left(t-E(X)\right)f(t)dt - \int_a^b \left(t-E(X)\right)^2 f(t)dt$$

$$= [b-E(X)][E(X)-a]-\sigma^2(X) \tag{3.59}$$

olduğunu belirtelim. Öte yandan

$$\int_a^b (t-a)(b-t)f(t)dt = 0$$

olduğundan

$$\sigma^2(X) \leq [b-E(X)][E(X)-a]$$

olacaktır ve böylece (3.55) deki birinci eşitsizlik sağlanmış olur. (3.55) deki ikinci eşitsizlik $\alpha = b-E(X)$ ve $\beta = E(X)-a$ olmak üzere $\alpha\beta \leq \frac{\alpha+\beta}{4}$ eşitsizliğinden görülür. Öte yandan

$$\int_a^b (b-t)(t-a).f(t)dt \leq \|f\|_\infty \int_a^b (b-t)(t-a)dt = \frac{1}{6}(b-a)^3\|f\|_\infty$$

olduğundan (3.56) daki birinci eşitsizlik sağlanır. İkincisi ise Hölder eşitsizliğinden

$$\int_a^b (b-t)(t-a).f(t)dt \leq \left(\int_a^b (f(t))^p dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b (b-t)^q(t-a)^q dt\right)^{1/q}$$

$$= [B(q+1,q+1)]^{1/q}(b-a)^{2+1/q}\|f\|_p$$

olarak bulunur. Ayrıca $[a,b]$ de $m \leq f \leq M$ ise

$$m(b-t)(t-a) \leq (b-t)(t-a)f(t) \leq M(b-t)(t-a)$$

olacağından eşitsizliğin her bir tarafının $[a,b]$ de integrali alınırsa (3.57) eşitsizliği elde edilir. (3.58) eşitsizliğini ispatlamak için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b h(t).g(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)dt.\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}(\varphi-\gamma)\,\|f'\|_\infty\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (g(t))^2dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^x (g(t)dt\right)^2\right]^{1/2}$$

pre-Grüss integral eşitsizliği kullanabiliriz. $h(t) = f(t)$ ve $g(t) = (b-t)(t-a)$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b (b-t)(t-a).f(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b (b-t)(t-a)dt\,.\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \tag{3.60}$$

$$\leq \frac{1}{2}(\mathrm{M}-\mathrm{m})\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b ((b-t)(t-a))^2 dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^x (b-t)(t-a)dt\right)^2\right]^{1/2}$$

elde edilir. Bununla beraber

$$\int_a^b (b-t)(t-a)dt = \frac{1}{6}(b-a)^3 \ , \ \int_a^b f(t)dt = 1,$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b ((b-t)(t-a))^2 dt = (b-a)^5\int_0^1 (t(1-t))^2 dt = \frac{1}{30}(b-a)^5\ ,$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b ((b-t)(t-a))^2 dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^x (b-t)(t-a)dt\right)^2 = \frac{(b-a)^4}{180}$$

olduğundan (3.60) eşitsizliğinden

$$\left|\int_a^b (b-t)(t-a).f(t)dt - \frac{1}{6}(b-a)^2\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}(\mathrm{b}-\mathrm{a})(\mathrm{M}-\mathrm{m})\left[\frac{(b-a)^4}{180}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{(b-a)^3(\mathrm{M}-\mathrm{m})}{12\sqrt{5}}$$

bulunur. (3.59) kullanılarak (3.58) elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.12 X $[a,b], a<b$, aralığı üzerinde tanımlı sürekli rasgele değişken ve X in olasılık yoğunluk fonksiyonu, f, $[a,b]$ de mutlak sürekli olsun.

i) $f' \in L_\infty[a,b]$ ise bu takdirde

$$\left|[b-E(X)][E(X)-a] - \sigma^2(X) - \frac{(b-a)^2}{6}\right| \leq \frac{\sqrt{30}}{120}\|f'\|_\infty (b-a)^3, \tag{3.61}$$

ii) $f' \in L_2[a,b]$ ise bu takdirde

$$\left|[b-E(X)][E(X)-a] - \sigma^2(X) - \frac{(b-a)^2}{6}\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{60\pi}\|f'\|_2 (b-a)^3 \tag{3.62}$$

dir. (Barnett ve Ark. 2002).

İspat: i) (3.42) de verilen pre-Chebychev eşitsizliğini hatırlayalım.

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b h(t).g(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)dt\,.\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right| \tag{3.63}$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(b-a)\ \|h'\|_\infty \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (g(t))^2 dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^x g(t)dt\right)^2\right]^{1/2}$$

idi. Burada $h, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde ölçülebilir, içerikteki tüm integraller mevcut ve sonlu olmak üzere h mutlak sürekli ve $h' \in L_\infty[a,b]$ dir. Bu durumda eğer $h(t) = fg(t)$ ve $g(t) = (t-a)(b-t)$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-a)(b-t).f(t)dt - \frac{(b-a)^2}{6}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(b-a)\ \|f'\|_\infty \frac{1}{12\sqrt{5}}(b-a)^2 = \frac{1}{24\sqrt{30}}(b-a)^3\|f'\|_\infty$$

olduğu görülür. (3.59) eşitsizliği kullanılarak (3.61) eşitsizliğine ulaşılır.

ii) Teoremin ikinci kısmını ispatlamak için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b h(t).g(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)dt.\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right| \tag{3.64}$$

$$\leq \frac{1}{\pi}(b-a)\ \|h'\|_2 \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (g(t))^2 dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^x g(t)dt\right)^2\right]^{1/2}$$

ile verilen pre-Lupaş eşitsizliğini dikkate alalım. Bu eşitsizlikte eğer $h(t) = fg(t)$ ve $g(t) = (t-a)(b-t)$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b (t-a)(b-t).f(t)dt - \frac{(b-a)^2}{6}\right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi}(b-a)\ \|f'\|_2 \frac{1}{12\sqrt{5}}(b-a)^2 = \frac{\sqrt{5}}{60\pi}(b-a)^3\|f'\|_2$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

3.4 Yüksek Mertebeden Momentler için Eşitsizlikler

Bu kısımda reel sayıların bir alt aralığı üzerinde diferansiyellenebilir konveks, ağırlıklı konveks ve Quasi-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleriyle ilgili bazı ifadeler verilerek sürekli rasgele değişkenlerin yüksek mertebeden momentleriyle ilgili bazı eşitsizlikler türetilecektir. Bilindiği üzere $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $a, b \in I^0$, $a < b$ ve $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde konveks olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Bu eşitsizlikle ilgili olarak

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \quad \text{ve} \quad \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

ifadeleri için bir üst sınırın belirlenmesi oldukça önemlidir. Bu durumda aşağıdaki Lemma ile işe başlayabiliriz.

Lemma 3.4.1 $a, b \in I^0$, $a < b$ olmak üzere $f: I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L_1[a,b]$ ise bu takdirde

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2}) = (b-a)\left[\int_0^{1/2} t f'(ta+(1-t)b))dt + \int_{1/2}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b))dt\right] \tag{3.65}$$

eşitliği gerçeklenir (Kirmaci, 2004).

İspat: Kısmi integrasyon uygulanarak

$$\int_0^{1/2} t f'(ta+(1-t)b))dt + \int_{1/2}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b))dt$$
$$= \frac{f(ta+(1-t)b))}{a-b}t\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2}\frac{f(ta+(1-t)b))}{a-b}dt$$
$$+\frac{f(ta+(1-t)b))}{a-b}(t-1)\Big|_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1\frac{f(ta+(1-t)b))}{a-b}dt$$
$$= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{b-a}f(\frac{a+b}{2})$$

olduğu görülür. Buradan $x = ta+(1-t)b$ değişken değişimi yapılarak (3.65) eşitliği sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.1 $f: I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I^0$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2})\right| \le \frac{b-a}{8}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right] \tag{3.66}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Kirmaci, 2004).

İspat: Lemma 3.4.1 ve $|f'|$ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2})\right|$$
$$= \left|(b-a)\left[\int_0^{1/2} t f'(ta+(1-t)b))dt + \int_{1/2}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b))dt\right]\right|$$
$$\le (b-a)\left[\int_0^{1/2} |t||f'(ta+(1-t)b))|dt + \int_{1/2}^1 |t-1||f'(ta+(1-t)b))|dt\right]$$

$$\le (b-a)\left[\int_0^{1/2}\left(t^2\left|f'(a)\right|+(1-t)^2\left|f'(b)\right|\right)dt+\int_{1/2}^{1}(1-t)t\left|f'(a)+(1-t)^2\left|f'(b)\right|\right|dt\right]$$

$$\le \frac{(b-a)}{8}\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)$$

elde edilir, burada

$$\int_0^{1/2} t^2 dt=\frac{1}{24},\quad \int_0^{1/2}(1-t)tdt=\int_{1/2}^{1}(1-t)tdt=\frac{1}{12}\ \text{ ve }\ \int_{1/2}^{1}(1-t)^2 dt=\frac{1}{24}$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.4.2 $f:I^0\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a,b\in I^0$, $a<b$ olsun. Eğer $\left|f'\right|^{p/(p-1)}$ fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise bu takdirde

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\&\le\frac{b-a}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{1/p}\left[\left(\left|f'(a)\right|^{p/(p-1)}+3\left|f'(b)\right|^{p/(p-1)}\right)^{p/(p-1)}\right.\\&\left.+\left(3\left|f'(a)\right|^{p/(p-1)}+3\left|f'(b)\right|^{p/(p-1)}\right)^{p/(p-1)}\right]\end{aligned}\tag{3.67}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Kirmaci, 2004).

İspat: Lemma 3.4.1 ve Hölder integral eşitsizliğinden $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\&\le(b-a)\left[\int_0^{1/2}t\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt+\int_{1/2}^{1}\left|t-1\right|\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt\right]\\&\le(b-a)\left[\begin{array}{l}\left(\int_0^{1/2}t^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{1/2}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}\\+\left(\int_{1/2}^{1}\left|1-t\right|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{1/2}^{1}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}\end{array}\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\left|f'\right|^q$, $q>1$, fonksiyonunun $[a,b]$ ağalığında konveks olduğu dikkate alınırsa

$$\int_0^{1/2}\left|f'(ta+(1-t)b))\right|^q dt \le \int_0^{1/2}\left[t\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left|f'(b))\right|^q\right]dt=\frac{\left|f'(a)\right|^q+3\left|f'(b))\right|^q}{8} \quad (3.68)$$

ve

$$\int_{1/2}^{1}\left|f'(ta+(1-t)b))\right|^q dt \le \int_{1/2}^{1}\left[t\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left|f'(b))\right|^q\right]dt=\frac{3\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b))\right|^q}{8} \quad (3.69)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\int_0^{1/2} t^p dt=\int_{1/2}^{1}\left|t-1\right|^p dt=\int_{1/2}^{1}\left(1-t\right)^p dt=\frac{1}{(p+1)2^{p+1}} \quad (3.70)$$

olduğu kolayca görülür. (3.68)-(3.70) ifadeleri birleştirilerek istenilen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.4.1 $f: I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I^0$, $a < b$ olsun. Eğer $\left|f'\right|^{p/(p-1)}$ fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2})\right| \le \frac{b-a}{4}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{1/p}\left[\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)\right. \quad (3.71)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Kirmaci, 2004).

Sonuç 3.4.2 $f: I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I^0$, $a < b$ olsun. Eğer $\left|f'\right|^q, q \ge 1$ fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise bu takdirde

$$\left|f(\frac{a+b}{2})-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{4}\left(\frac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{2}\right)^{1/q} \quad (3.72)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Pearce ve Ark. 2000).

Lemma 3.4.2 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L_1[a,b]$ ise bu takdirde

$$f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du = (b-a)\int_0^1 p(t)f'(ta+(1-t)b)dt \quad (3.73)$$

dir, burada her $x \in [a,b]$ için

$$p(t)=\begin{cases} t, & t\in\left[0,\dfrac{b-x}{b-a}\right] \\ t-1, & t\in\left(\dfrac{b-x}{b-a},1\right] \end{cases}$$

dir (Alomari ve Ark. 2010).

Teorem 3.4.3 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right| \\ &\quad\le\frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\left(\max\left\{|f'(x)|,|f'(b)|\right\}\right)+\frac{(x-a)^2}{2(b-a)}\left(\max\left\{|f'(x)|,|f'(b)|\right\}\right)\end{aligned}\tag{3.74}$$

eşitsizliği igerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

İspat: Lemma 3.4.2 ye göre $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ de Quasi-konveks olduğundan

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right| \\ &\quad\le(b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\max\left\{|f'(x)|,|f'(b)|\right\}dt+(b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)\max\left\{|f'(x)|,|f'(a)|\right\}dt \\ &\quad\le(b-a)\max\left\{|f'(x)|,|f'(b)|\right\}\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} tdt+(b-a)\max\left\{|f'(x)|,|f'(a)|\right\}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)dt \\ &\quad\le\frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\left(\max\left\{|f'(x)|,|f'(b)|\right\}\right)+\frac{(x-a)^2}{2(b-a)}\left(\max\left\{|f'(x)|,|f'(a)|\right\}\right)\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.4.3 Teorem 3.3.2 in şartları altında $x=(a+b)/2$ alınırsa bu durumda

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \\ &\quad\le\frac{(b-a)}{8}\left(\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(b)|\right\}+\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(a)|\right\}\right)\end{aligned}\tag{3.75}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

Teorem 3.4.4 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere eğer $|f'|^q$, $q>1$, fonksiyonu $[a,b]$ ağalığında Quasi-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{8}\left[\left(\max\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q,|f'(b)|^q\right\}\right)^{1/q}+\left(\max\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q,|f'(a)|^q\right\}\right)^{1/q}\right] \quad (3.76)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

Diğer taraftan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili olarak aşağıdaki ifadeleri verebiliriz:

Lemma 3.4.3 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f'\in L_1[a,b]$ ise bu takdirde

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1(1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt \quad (3.77)$$

dir (Dragomir ve Ark. 2000).

Teorem 3.4.4 $f:I^0\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a,b\in I^0$, $a<b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{8}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right] \quad (3.78)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Dragomir ve Ark. 2000).

Teorem 3.4.5 $f:I^0\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a,b\in I^0$, $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^{p/(p-1)}$, $p>1$, fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{p/(p-1)}\left[\frac{|f'(a)|^{p/(p-1)}+|f'(b)|^{p/(p-1)}}{2}\right]^{p/(p-1)} \quad (3.79)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Dragomir ve Ark. 2000).

Teorem 3.4.6 $f: I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I^0$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q, q \geq 1,$ fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right]^{1/q} \tag{3.79}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Pearce ve Ark. 2000).

İspat: Lemma 3.4.3 ten

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt \tag{3.80}$$

ve power-mean eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt \leq \left(\int_0^1 |1-2t|dt\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{1/q}$$

yazılabilir. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ de konveks olduğundan

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q dt &\leq \int_0^1 |1-2t|\left[t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q\right]dt \\ &= \frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4}\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\int_0^1 |1-2t|dt = 1/2$ olacağından (3.80) eşitsizliğinden

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1/q}\left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4}\right]^{1/q}$$

olup istenen sonuç elde edilmiş olur.

Uyarı 3.4.1 Eğer Teorem 3.4.6 da $q=1$ alınırsa Teorem 3.4.4 ve $q = p/(p-1)$ alınırsa Teorem 3.4.5 in elde edildiği kolaylıkla görülür.

Bu kısımda amacımız ağırlıklı Midpoint formülü ve trapezoidal formülü kulanılarak hata teriminin bazı tahminleri verilecek ve daha sonra da sürekli rasgele değişkenlerin yüksek mertebeden momentleriyle ilgili uygulamalar ortaya konulacaktır. İlk olarak ağırlıklı Midpoint formülünü kullanarak tahminlerde bulunulacaktır. Bununla ilgili olarak öncelikle aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.4.4 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $h:[a,b] \to [0,\infty)$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $f' \in L(a,b)$ ise bu takdirde aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}h(a)-h(b)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{4}\int_0^1\left[f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+f\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]$$
$$\times\left[h'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+h'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]dt$$
$$=\frac{b-a}{4}\int_0^1\left[h\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)-h\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)+h(b)\right]$$
$$\times\left[-f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]dt$$

İspat: Kısmi integrasyonla

$$A=-\int_0^1\left[h\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)-h\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)+h(b)\right]\times f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt$$
$$=\frac{2}{b-a}\left\{\left[h\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)-h\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)+h(b)\right]\times f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\Bigg|_0^1\right.$$
$$\left.-\frac{(a-b)}{2}\left\{\int_0^1 f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\times\left[h'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+h'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]dt\right\}\right.$$
$$=\frac{2}{b-a}\left\{\left[h(a)f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)h(b)\right]\right.$$
$$\left.+\int_0^1 f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\times\left[h'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+h'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]dt\right\}$$

ve

$$B=\int_0^1\left[h\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)-h\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)+h(b)\right]\times f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)dt$$
$$=\frac{2}{b-a}\left\{\left[h\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)-h\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)+h(b)\right]\times f\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\Bigg|_0^1\right.$$
$$\left.-\frac{(a-b)}{2}\left\{\int_0^1 f\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\times\left[h'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+h'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]dt\right\}\right.$$

$$=\frac{2}{b-a}\left\{\left[h(a)f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)h(b)\right]\right.$$

$$\left.+\int_0^1 f\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\times\left[h'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+h'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]dt\right\}$$

olduğu görülür. Bu nedenle

$$\frac{b-a}{4}(A+B)=\frac{f(a)+f(b)}{2}h(a)-h(b)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+\frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1\left[f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+f\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]\right.$$

$$\left.\times\left[h'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+h'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]dt\right\}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.7 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $g:[a,b]\to[0,\infty)$ sürekli, pozitif ve $(a+b)/2$ ye göre simetrik bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx\right|\le\frac{b-a}{2}\big[|f'(a)|+|f'(b)|\big]\int_0^1 M(g;a,b,t)dt \qquad (3.81)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2014). Burada

$$M(g;a,b,t)=\int_0^{L(a,b,t)} g(x)dx\ ,$$

$$L(a,b,t)=\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\ ,$$

$$U(a,b,t)=\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\ .$$

İspat: Lemma 3.4.4 te $\forall t\in[a,b]$ için $h(t)=\int_0^t g(x)dx$ alınırsa bu takdirde

$$\frac{b-a}{4}\int_0^1\left[f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+f\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]$$

$$\times\left[g\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+g\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]dt$$

$$=\frac{b-a}{4}\int_0^1\left[\int_a^{L(a,b,t)} g(x)dx+\int_{U(a,b,t)}^{b} g(x)dx\right]$$
$$\times\left[-f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]dt \tag{3.82}$$

yazılabilir. $g:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu $(a+b)/2$ ye göre simetrik bir fonksiyon olduğundan

$$\frac{b-a}{4}\int_0^1\left[f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+f\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]$$
$$\times\left[g\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+g\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right]dt$$
$$=\frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)g\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt$$
$$+\frac{b-a}{2}f\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)g\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)dt \tag{3.83}$$
$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)g(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

ve her $\forall t\in[0,1]$ için $\int_a^{L(a,b,t)} g(x)dx=\int_{U(a,b,t)}^{b} g(x)dx$ yazılabilir. (3.82) ve (3.83) ten

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx\right|\le\frac{b-a}{2}\left\{\int_0^1 M(g;a,b,t)\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 M(g;a,b,t)\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|dt\right\} \tag{3.84}$$

yazılabilir. $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan

$$\int_0^1 M(g;a,b,t)\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt+\int_0^1 M(g;a,b,t)\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|dt$$
$$\le\int_0^1 M(g;a,b,t)\left(\frac{1+t}{2}|f'(a)|+\frac{1-t}{2}|f'(b)|+\frac{1-t}{2}|f'(a)|+\frac{1+t}{2}|f'(b)|\right)dt \tag{3.85}$$
$$=\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\int_0^1 M(g;a,b,t)dt$$

yazılabilir. (3.84) ve (3.85) ifadeleri birleştirilerek (3.81) eşitsizliği elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 3.4.2 Teorem 3.4.7 de özel olarak $g(x)=1$ alınırsa (3.81) eşitsizliğinin (3.66) eşitsizliğine dönüştüğü kolaylıkla görülür.

Teorem 3.4.8 Teorem 3.4.7 nin koşulları sağlansın. Eğer $|f'|^q, q\geq 1$, fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{2}\left[|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right]^{1/q}\int_0^1 M(g;a,b,t)dt$$

(3.86)

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2014).

İspat: (3.84) eşitsizliğini sürdürerek ve Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{2}\left\{\int_0^1\left(M(g;a,b,t)dt\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 M(g;a,b,t)\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}\right.$$
$$\left.+\int_0^1\left(M(g;a,b,t)dt\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 M(g;a,b,t)\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}\right\}$$
$$\leq\frac{b-a}{2}\left\{\int_0^1\left(M(g;a,b,t)dt\right)^{1-1/q}\left\{\left(\int_0^1 M(g;a,b,t)\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\int_0^1 M(g;a,b,t)\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}\right\}\right. \quad (3.87)$$

olduğu görülür. Power-Mean eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left(\int_0^1 M(g;a,b,t)\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}+\left(\int_0^1 M(g;a,b,t)\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}$$
$$\leq 2^{1-1/q}\left(\int_0^1 M(g;a,b,t)\left[\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q\right]dt\right)^{1/q}$$

eşitsizliği yazılabilir. $|f'|^q, q \geq 1$, fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q$$
$$\leq \frac{1+t}{2}|f'(a)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(b)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(a)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(b)|^q$$
$$=|f'(a)|^q+|f'(b)|^q$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 3.4.3 Teorem 3.4.8 de özel olarak $g(x)=1$ alınırsa (3.81) eşitsizliğinin (3.72) eşitsizliğine dönüştüğü kolaylıkla görülür.

Teorem 3.4.9 Teorem 3.4.7 nin koşulları sağlansın. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Wright-konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\int_0^1 M(g;a,b,t)dt \tag{3.88}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2014).

İspat: Teorem 3.4.7 nin ispatındaki (3.84) eşitsizliğini dikkate alalım. Bu durumda $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Wright-konveks olduğundan

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 M(g;a,b,t)\left[\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|+\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|\right]dt$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\int_0^1 M(g;a,b,t)dt$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.10 Teorem 3.4.7 nin koşulları sağlansın. Eğer $|f'|^q, q \geq 1$, fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Wright-konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx\right| \leq (b-a)\left[\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right]^{1/q}\int_0^1 M(g;a,b,t)dt$$

(3.89) eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2014).

İspat: Teorem 3.4.7 nin ispatındaki (3.87) eşitsizliğini dikkate alalım. Bu durumda $|f'|^q, q \geq 1,$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Wright-konveks olduğundan

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q \leq \left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.11 Teorem 3.4.7 nin koşulları sağlansın. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - f(\frac{a+b}{2})\int_a^b g(x)dx\right| \\ &\leq \frac{b-a}{2}\left[\max\left\{|f'(a)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}+\max\left\{|f'(b)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}\right]\int_0^1 M(g;a,b,t)dt \end{aligned} \tag{3.90}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2014).

İspat: Teorem 3.4.7 nin ispatındaki (3.84) eşitsizliğini dikkate alalım. Bu durumda $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Quasi-konveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right| \leq \max\left\{|f'(a)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}$$

ve

$$\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right| \leq \max\left\{|f'(b)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 3.4.4 Eğer Teorem 3.4.11 de $|f'|$ fonksiyonu azalmayan ise bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - f(\frac{a+b}{2})\int_a^b g(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left\{|f'(b)|+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}\int_0^1 M(g;a,b,t)dt$$

eşitsizliği ve $|f'|$ fonksiyonu artmayan ise bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - f(\frac{a+b}{2})\int_a^b g(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left\{|f'(a)|+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}\int_0^1 M(g;a,b,t)dt$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Sonuç 3.4.4 Teorem 3.4.7 nin koşulları sağlansın. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|\int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2})\right| \le \frac{b-a}{4}\left[\max\left\{|f'(a)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\} + \max\left\{|f'(b)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}\right]$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2014).

Uyarı 3.4.5 Eğer Sonuç 3.4.4 de $|f'|$ fonksiyonu azalmayan ise bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2})\right| \le \frac{b-a}{4}\left\{|f'(b)| + \left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}$$

eşitsizliği ve $|f'|$ fonksiyonu artmayan ise bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2})\right| \le \frac{b-a}{2}\left\{|f'(a)| + \left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Teorem 3.4.12 Teorem 3.4.7 nin koşulları sağlansın. Eğer $|f'|^q, q \ge 1,$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - f(\frac{a+b}{2})\int_a^b g(x)dx\right| \le \frac{b-a}{2}$$

$$\left[\left(\max\left\{|f'(a)|^q,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q\right\}\right)^{1/q} + \left(\max\left\{|f'(b)|^q,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q\right\}\right)^{1/q}\right]\int_0^1 M(g;a,b,t)dt$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2014).

İspat: Teorem 3.4.10 daki eşitsizliği dikkate alalım. $|f'|^q, q \ge 1,$ fonksiyonu üzerinde Quasi - konveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\right|^q \le \max\left\{|f'(a)|^q,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q\right\}$$

ve

$$\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right)\right|^q \le \max\left\{|f'(b)|^q,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q\right\}$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi $0 < a < b,$ $r \in \mathbb{R}$ ve X rasgele değişkeni $g:[a,b] \to [0,\infty)$ sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişken olsun. $g:[a,b] \to [0,\infty)$ fonksiyonu $(a+b)/2$ ye göre simetrik ve X rasgele değişkeninin r −yinci momenti

$$E_r(X) = \int_a^b t^r g(t)dt$$

ile gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.13 $0 < a < b,$ $r \geq 2$ olmak üzere

$$\left| E_r(X) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^r \right| \leq \frac{r(b-a)}{4}\left[a^{r-1} + b^{r-1}\right]$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2014).

İspat: $[a,b]$ de $f(t)=t^r, r\geq 2,$ alalım. Bu takdirde $|f'(t)| = rt^{r-1}$ konveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = E_r(X) \text{ ve } \int_a^{(a+b)/2} M(g;a,b,t)dx \leq \int_a^{(a+b)/2} g(x)dx = 1/2$$

olduğundan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^r \text{ ve } |f'(a)| + |f'(b)| = r\left[a^{r-1} + b^{r-1}\right]$$

yazılabilir. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.14 $0 < a < b,$ $r \geq 1$ için

$$\left| E_r(X) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^r \right| \leq \frac{r(b-a)}{4}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^{r-1} + b^{r-1}\right]$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2014).

İspat: $[a,b]$ üzerinde $f(t)=t^r, r\geq 1,$ alalım. Bu takdirde $|f'(t)| = rt^{r-1}$ fonksiyonu azalmayan ve Quasi-konvekstir. Uyarı 3.4.4 deki eşitsizlik dikkate alınırsa Teorem 3.4.13 ten istenilen sonuç elde edilir.

Uyarı 3.4.6 Teorem 3.4.14 te eğer $r=1$ alınırsa bu takdirde

$$\left| E(X) - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{(b-a)}{2}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2014).

Şimdi de ağırlıklı trapezoidal formülü kullanarak bazı tahminler elde edilecektir. Bunula ilgili olarak bu kısımda önemli bir rol oynayacak aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.4.5 $I\subseteq \mathbb{R}$ bir aralık $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $h:[a,b]\to[0,\infty)$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $f'\in L(a,b)$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır (Hwang, 2011):

$$\frac{1}{2}\left[\left(h(b)-2h(a)\right)f(a)+h(b)f\left(b\right)\right]-\int_a^b f\left(x\right)h'\left(x\right)dx$$

$$=\frac{b-a}{4}\int_0^1\left[2h\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)-h(b)\right]\times f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt$$
$$+\int_0^1\left[2h\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)-h(b)\right]\times f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)dt$$

İspat: Kısmi integrasyonla

$$C=\int_0^1\left[2h\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)-h(b)\right]\times f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt$$

$$=\frac{2}{b-a}\left\{\left[2h\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)-h(b)\right]\times f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\Bigg|_0^1\right.$$
$$\left.-(a-b)\int_0^1 f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\times h'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt\right\}$$

$$=\frac{2\left[h(b)-2h(a)\right]}{b-a}f(a)$$

$$+\frac{2}{b-a}\left\{\left[2h\left(\frac{a+b}{2}\right)-h(b)\right]f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{4}{b-a}\int_0^{\frac{a+b}{2}} f\left(x\right)h'\left(x\right)dx\right.$$

ve

$$D=\int_0^1\left[2h\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)-h(b)\right]\times f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)dt$$

$$=\frac{2}{b-a}\left\{\left[2h\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)-h(b)\right]\times f\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\Bigg|_0^1\right.$$
$$\left.-(b-a)\int_0^1 f\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\times h'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)dt\right\}$$

$$=\frac{2h(b)}{b-a}f(b)-\frac{2}{b-a}\left\{\left[2h\left(\frac{a+b}{2}\right)-h(b)\right]f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right. -\frac{4}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f(x)h'(x)\,dx$$

olduğu görülür. Bu nedenle

$$\frac{b-a}{4}(C+D)=\frac{b-a}{4}\left[\frac{2\left[h(b)-2h(a)\right]}{b-a}f(a)+\frac{2h(b)}{b-a}f(b)-\frac{4}{b-a}\int_a^b f(x)h'(x)\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left[h(b)-2h(a)\right]f(a)+h(b)f(b)-\int_a^b f(x)h'(x)\,dx\right]$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.15 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $g:[a,b]\to[0,\infty)$ sürekli, pozitif ve $(a+b)/2$ ye göre simetrik bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\left[f(a)+f(b)\right]}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\\&\qquad\le\frac{b-a}{4}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dxdt\end{aligned}\tag{3.91}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2011).

İspat: Lemma 3.4.5 te $\forall t\in[a,b]$ için $h(t)=\int_0^t g(x)dx$ alınırsa bu takdirde

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\left[f(a)+f(b)\right]}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\\&\qquad\le\frac{b-a}{4}\int_0^1\left|2h\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)-h(b)\right|\times\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt\\&\qquad+\int_0^1\left|2h\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)-h(b)\right|\times\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|dt\end{aligned}\tag{3.92}$$

yazılabilir. $g:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu $(a+b)/2$ ye göre simetrik bir fonksiyon olduğundan her $t\in[0,1]$ için

$$\left|2h\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)-h(b)\right|=\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx$$

ve

$$\left|2h\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)-h(b)\right|=\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx \tag{3.93}$$

yazılabilir. (3.92) ve (3.93) ifadelerinden

$$\begin{aligned}&\left|\frac{[f(a)+f(b)]}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\\&\le\frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\times\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt\right.\\&\left.+\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\times\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|dt\right\}\end{aligned} \tag{3.94}$$

yazılabilir. $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\times\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt+\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\times\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|dt\\&\le\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\times\left[\frac{1+t}{2}|f'(a)|+\frac{1-t}{2}|f'(b)|+\frac{1-t}{2}|f'(a)|+\frac{1+t}{2}|f'(b)|\right]dt\\&=\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dxdt\end{aligned} \tag{3.95}$$

yazılabilir. (3.94) ve (3.95) ifadeleri birleştirilerek (3.91) eşitsizliği elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 3.4.7 Teorem 3.4.15 te özel olarak $g(x)=1$ alınırsa (3.91) eşitsizliğinin (3.78) eşitsizliğine dönüştüğü kolaylıkla görülür.

Teorem 3.4.16 Teorem 3.4.15 in koşulları sağlansın. Eğer $|f'|^q, q\ge1$, fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\left|\frac{[f(a)+f(b)]}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\\&\le\frac{b-a}{2}\left[|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right]^{1/q}\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dxdt\end{aligned} \tag{3.96}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2011).

İspat: Teorem 3.4.15 in ispatındaki (3.94) eşitsizliğini sürdürerek ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\frac{[f(a)+f(b)]}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left\{\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)dt\right]^{1-1/q}\times\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)dt\right]^{1-1/q}\times\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)dt\right]^{1-1/q}\left\{\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right\} \tag{3.97}$$

olduğu görülür. Power-Mean eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{1/q}$$
$$+\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{1/q} \tag{3.98}$$

$$\leq 2^{1-1/q}\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\left[\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q\right]dt\right]^{1/q}$$

eşitsizliği yazılabilir. $|f'|^q, q\geq 1$, fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q$$

$$\leq\frac{1+t}{2}|f'(a)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(b)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(a)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(b)|^q$$

$$=|f'(a)|^q+|f'(b)|^q \tag{3.99}$$

olduğu görülür. Böylece (3.97)-(3.99) nin birleşimiyle teoremin ispatı tamamlanır.

Uyarı 3.4.8 Teorem 3.4.16 da özel olarak $g(x)=1$ alınırsa (3.96) eşitsizliğinin (3.79) eşitsizliğine dönüştüğü kolaylıkla görülür.

Teorem 3.4.17 Teorem 3.4.15 in koşulları sağlansın. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Wright-konveks ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\left|\frac{[f(a)+f(b)]}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\\&\qquad\le\frac{b-a}{4}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dxdt\end{aligned}\tag{3.100}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2011).

İspat: Teorem 3.4.15 nin ispatındaki (3.94) eşitsizliğini dikkate alalım. Bu durumda $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Wright-konveks olduğundan

$$\begin{aligned}&\left|\frac{[f(a)+f(b)]}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\\&\le\frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dx\right)\times\left[\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|+\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|\right]dt\right\}\\&\le\frac{b-a}{4}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dxdt\end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.18 Teorem 3.4.15 in koşulları sağlansın. Eğer $|f'|^q, q\ge1,$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Wright-konveks ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\left|\frac{[f(a)+f(b)]}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\\&\qquad\le\frac{b-a}{2}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{1/q}\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dxdt\end{aligned}\tag{3.101}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2011).

İspat: Teorem 3.4.16 nın ispatındaki (3.97) eşitsizliğini dikkate alalım. Bu durumda $|f'|^q, q\ge1,$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Wright-konveks olduğundan

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^{q}+\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^{q}\leq\left|f'(a)\right|^{q}+\left|f'(b)\right|^{q} \tag{3.102}$$

olduğu görülür. (3.97), (3.98) ve (3.102) ifadeleri birleştirilirse istenen eşitsizlik sağlanır ve teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.19 Teorem 3.4.15 in koşulları sağlansın. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|\frac{[f(a)+f(b)]}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \tag{3.103}$$

$$\leq\frac{b-a}{2}\left[\max\left\{|f'(a)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}+\max\left\{|f'(b)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}\right]\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dxdt$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2011).

İspat: Teorem 3.4.15 in ispatındaki (3.94) eşitsizliğini dikkate alalım. Bu durumda $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks olduğundan her $t\in[0,1]$ için

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|\leq\max\left\{|f'(a)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}$$

ve

$$\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|\leq\max\left\{|f'(b)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 3.4.9 Eğer Teorem 3.4.19 da $|f'|$ fonksiyonu azalmayan ise bu takdirde

$$\left|\frac{[f(a)+f(b)]}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\left\{|f'(b)|+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dxdt$$

eşitsizliği ve $|f'|$ fonksiyonu artmayan ise bu takdirde

$$\left|\frac{[f(a)+f(b)]}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\left\{|f'(a)|+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)}g(x)dxdt$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2011).

Teorem 3.4.20 Teorem 3.4.15 in koşulları sağlansın. Eğer $|f'|^q, q \geq 1,$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left| \frac{[f(a)+f(b)]}{2} \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)}{4} \times \tag{3.104}$$

$$\left[\left(\max\left\{ |f'(a)|^q, \left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q \right\} \right)^{1/q} + \left(\max\left\{ |f'(b)|^q, \left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q \right\} \right)^{1/q} \right] \int_0^1 \int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)dxdt$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2011).

İspat: Teorem 3.4.16 daki (3.97) eşitsizliği dikkate alalım. Bu durumda $|f'|^q, q \geq 1,$ fonksiyonu Quasi-konveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$\left| f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) \right|^q \leq \max\left\{ |f'(a)|^q, \left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q \right\} \tag{3.105}$$

ve

$$\left| f'\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b \right) \right|^q \leq \max\left\{ |f'(b)|^q, \left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q \right\} \tag{3.106}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.97), (3.98), (3.105) ve (3.106 ifadeleri birleştirilirse (3.104) eşitsizliğinin sağlandığı görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Daha önce verildiği gibi $0 < a < b,$ $r \in \mathbb{R}$ ve X rasgele değişkeni $g:[a,b] \to [0,\infty)$ sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişken olsun. $g:[a,b] \to [0,\infty)$ fonksiyonu $(a+b)/2$ ye göre simetrik ve X rasgele değişkeninin r −yinci momenti

$$E_r(X) = \int_a^b t^r g(t)dt$$

ile gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.21 $0 < a < b,$ $r \geq 2$ olmak üzere

$$\left| E_r(X) - \frac{a^r + b^r}{2} \right| \leq \frac{r(b-a)}{4} \left[a^{r-1} + b^{r-1} \right]$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2011).

İspat: $[a,b]$ de $f(t)=t^r, r\geq 2,$ alalım. Bu takdirde $|f'(t)|=rt^{r-1}$ konveks olduğundan her $t\in[0,1]$ için

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = E_r(X) \quad \text{ve} \quad \int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx = 1$$

olduğundan

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}=\frac{a^r+b^r}{2} \quad \text{ve} \quad |f'(a)|+|f'(b)|=r\left[a^{r-1}+b^{r-1}\right]$$

yazılabilir. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.22 $0<a<b,\ \ r\geq 1$ için

$$\left|E_r(X)-\frac{a^r+b^r}{2}\right|\leq\frac{r(b-a)}{4}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^{r-1}+b^{r-1}\right]$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2014).

İspat: $[a,b]$ üzerinde $f(t)=t^r, r\geq 1,$ alalım. Bu takdirde $|f'(t)|=rt^{r-1}$ fonksiyonu azalmayan ve Quasi-konvekstir. (3.105) eşitsizliği dikkate alınırsa Teorem 3.4.21 den istenilen sonuç elde edilir.

Uyarı 3.4.10 Teorem 3.4.22 de özel olarak eğer $r=1$ alınırsa bu takdirde

$$\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right|\leq\frac{(b-a)}{2}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Hwang, 2011).

Şimdi Quasi-konveks fonksiyonlar için Alomari, M.,ve Ark. (2010) tarafından verilen aşağıdaki eşitsizliğin ağırlık fonksiyonunun $(a+b)/2$ ye göre simetrik olması gerekmeyen durumlar için bazı genelleştirmeleri verilecektir.

Teorem 3.4.23 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L(a,b)$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|\frac{[f(a)+f(b)]}{2}-\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{8}\left[\sup\left\{|f'(a)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}+\sup\left\{|f'(b)|,\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right\}\right] \qquad (3.107)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari, ve Ark. 2010) .

$w:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonunun sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayalım ve bunun birinci mertebeden momentini de a_1 ile gösterelim, yani

$$\int_a^b w(x)dx = 1 \text{ ve } a_1 = \int_a^b x.w(x)dx \tag{3.108}$$

olsun.

Lemma 3.4.6 Eğer $w:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu $(a+b)/2$ ye göre simetrik ise bu takdirde $a_1=(a+b)/2$ dir.

İspat: İddianın doğruluğu

$$\int_a^b x.w(x)dx = \int_a^b (b+a-x).w(b+a-x)dx = \int_a^b (b+a-x).w(x)dx$$

eşitliğinden kolayca görülür (Gavrea, 2015).

Lemma 3.4.7 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L(a,b)$ olsun. Bu takdirde

$$H(w,\alpha,\beta,y) = \int_a^{(1-y)\alpha+\beta y} (x-a)w(x)dx - \int_{(1-y)\alpha+\beta y}^b (b-x)w(x)f(x)dx \,,\ \alpha,\beta\in[a,b]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}&\left[f(a)\int_a^b (b-x)w(x)dx + f(b)\int_a^b (x-a)w(x)dx\right] - \int_a^b w(x)f(x)dx \\ &= \frac{a_1-a}{b-a}\int_0^1 H(w,a,a_1,y)\times f'((1-y)a+a_1y)\,dy \\ &+ \frac{b-a_1}{b-a}\int_0^1 H(w,a_1,b,y)\times f'((1-y)a_1+by)\,dy\end{aligned} \tag{3.109}$$

eşitliği gerçeklenir (Gavrea, 2015).

İspat: $\sigma(u)=\begin{cases}0, & u<0\\ 1, & u\ge 0\end{cases}$ Heavyside fonksiyonu olmak üzere

$$f(x)-f(a) = \int_a^b \sigma(x-t)f'(t)dt \tag{3.110}$$

$$f(x)-f(b)=-\int_a^b \sigma(t-x)f'(t)dt \tag{3.111}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda

$$\int_a^b (b-x)f(x)w(x)dx - f(a)\int_a^b (b-x)w(x)dx = \int_a^b \left(\int_a^b (b-x)w(x)dx \right) f'(t)dt \tag{3.112}$$

$$\int_a^b (x-a)f(x)w(x)dx - f(b)\int_a^b (x-a)w(x)dx = -\int_a^b \left(\int_a^b (x-a)w(x)dx \right) f'(t)dt \tag{3.113}$$

eşitlikleri ve buradan da

$$\frac{1}{b-a}\left[f(a)\int_a^b (b-x)w(x)dx + f(b)\int_a^b (x-a)w(x)dx \right] - \int_a^b w(x)f(x)dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b \left[\int_a^t (x-a)w(x)dx - \int_t^b (b-x)w(x)dx + \right] f'(t)dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^{a_1} \left[\int_a^t (x-a)w(x)dx - \int_t^b (b-x)w(x)dx + \right] f'(t)dt$$

$$+\frac{1}{b-a}\int_{a_1}^{b} \left[\int_a^t (x-a)w(x)dx - \int_t^b (b-x)w(x)dx + \right] f'(t)dt$$

elde edilir. Son eşitlikte birinci integral için $t:=(1-y)a+a_1y$ ve ikinci integral için ise $t:=(1-y)a_1+by$ alınırsa istenilen (3.109) eşitliği sağlanmış olur.

Uyarı 3.4.11 Eğer $w(x)=\dfrac{1}{b-a}$ alınırsa (3.109) eşitliği

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$=\frac{b-a}{4}\left[-\int_0^1 t.f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b \right)dt + \int_0^1 t.f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a \right)dt \right] \tag{3.114}$$

elde edilir (Gavrea, 2015).

Sonuç 3.4.5 Eğer $w(x)$ fonksiyonu $\dfrac{a+b}{2}$ orta noktasına göre simetrik ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx = \int_0^1 H(w,a,b,t)\times f'(at+(1-t)b)\,dt \tag{3.115}$$

eşitliği sağlanır (Gavrea, 2015).

İspat: $\int_a^b w(x)dx = 1$ ve $\int_a^b x.w(x)dx = \frac{a+b}{2}$ olduğundan istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.24 $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere f fonksiyonu $[a, b]$ de türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L(a,b)$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left|\int_a^b w(x)f(x)dx - f(a_1)\right| \le \frac{|f'(a)|A(a,b) + |f'(b)|B(a,b)}{b-a} \tag{3.116}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$A(a,b) = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a_1)^2 w(x)dx - \int_a^{a_1} (x-a_1)^2 w(x)dx + 2(b-a_1)\int_{a_1}^b (x-a_1)w(x)dx$$

$$B(a,b) = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a_1)^2 w(x)dx - \int_a^{a_1} (x-a_1)^2 w(x)dx + 2(a_1-a)\int_{a_1}^b (x-a_1)w(x)dx$$

dir(Gavrea, 2015).

İspat:

$$f(x) - f(a_1) = \int_a^b \sigma(x-t) - \sigma(a_1-t) f'(t)dt \tag{3.117}$$

eşitliğinden

$$\int_a^b f(x)w(x)dx - f(a_1) = \int_a^b \left(\int_t^b w(x)dx - \sigma(a_1-t) \right) f'(t)dt \tag{3.118}$$

eşitliği ve buradan da

$$\int_a^b f(x)w(x)dx - f(a_1) \le \frac{1}{b-a}\left\{ f'(a)\int_a^b \left(\int_t^b w(x)dx - \sigma(a_1-t) \right)(b-t)dt \right.$$

$$\left. + f'(b)\int_a^b \left(\int_t^b w(x)dx - \sigma(a_1-t) \right)(t-a)dt \right\} \tag{3.119}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$\int_a^b \left| \int_t^b w(x)dx - \sigma(a_1-t) \right| (b-t)dt = \int_a^{a_1} \left(\int_a^t w(x)dx \right)(b-t)dt + \int_{a_1}^b \left(\int_t^b w(x)dx \right)(b-t)dt$$

$$= -\frac{(b-a_1)^2}{2}\int_a^{a_1} w(x)dx + \int_a^{a_1} \frac{(b-x)^2}{2} w(x)dx + \frac{(b-a_1)^2}{2}\int_{a_1}^b w(x)dx - \int_{a_1}^b \frac{(b-x)^2}{2} w(x)dx$$

$$=\frac{(b-a_1)^2}{2}\left[\int_{a_1}^{b} w(x)dx+\int_{a}^{a_1} w(x)dx\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int_{a}^{a_1}(b-a_1+a_1-x)^2 w(x)dx-\int_{a_1}^{b}(b-a_1+a_1-x)^2 w(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{a}^{a_1}(x-a_1)^2 w(x)dx-\int_{a_1}^{b}(x-a_1)^2 w(x)dx\right.$$

$$\left.-2(b-a_1)\int_{a}^{a_1}(x-a_1)w(x)dx+2(b-a_1)\int_{a_1}^{b}(x-a_1)w(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}(x-a_1)^2 w(x)dx$$

$$\left.-2(b-a_1)\int_{a}^{a_1}(x-a_1)^2 w(x)dx+2(b-a_1)\int_{a_1}^{b}(x-a_1)w(x)dx\right]=A(a,b)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\int_{a}^{b}\left|\int_{t}^{b} w(x)dx-\sigma(a_1-t)\right|(t-a)dt=B(a,b)$$

olduğu gösterilebilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.4.6 Teorem 3.4.24 ün varsayımları altında **e**ğer $w(x)$ fonksiyonu $(a+b)/2$ orta noktasına göre simetrik ise

$$\left|\int_{a}^{b} w(x)f(x)dx-f(\frac{a+b}{2})\right|\leq\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)w(x)dx$$

eşitsizliği gerçeklenir. , burada

$$A(a,b)=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}(x-a_1)^2 w(x)dx-\int_{a}^{a_1}(x-a_1)^2 w(x)dx+2(b-a_1)\int_{a_1}^{b}(x-a_1)w(x)dx$$

$$B(a,b)=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}(x-a_1)^2 w(x)dx-\int_{a}^{a_1}(x-a_1)^2 w(x)dx+2(a_1-a)\int_{a_1}^{b}(x-a_1)w(x)dx$$

dir (Gavrea, 2015).

İspat: $w(x)$ fonksiyonu $(a+b)/2$ orta noktasına göre simetrik ise $a_1=\frac{a+b}{2}$ olup $(x-a_1)^2 w(x)$ fonksiyonu da $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik olacaktır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2}\int_{a}^{b}(x-a_1)^2 w(x)dx=\int_{a}^{a_1}(x-a_1)^2 w(x)dx=\int_{a_1}^{b}(x-a_1)^2 w(x)dx$$

eşitliği ve dolayısıyla da

$$A(a,b)=A(b,a)=(b-a)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)w(x)dx$$

olduğu gösterilebilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.25 $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere f fonksiyonu $[a,b]$ de türevlenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L(a,b)$ olsun. Eğer $|f'|^q, q\geq 1,$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|\int_a^b w(x)f(x)dx-f(a_1)\right|\leq 2^{\frac{q-1}{q}} \times\left(\int_{a_1}^{b}(x-a_1)w(x)dx\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\frac{|f'(a)|^q A(a,b)+|f'(b)|^q B(a,b)}{b-a}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.120}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Gavrea, 2015).

İspat: (3.118) ifadesinde hölder eşitsizliği uygulanırsa $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\left|\int_a^b f(x)w(x)dx-f(a_1)\right|\leq\left(\int_a^b\left|\int_t^b w(x)dx-\sigma(a_1-t)\right|dt\right)^{1/p} \times\left(\int_a^b\left|\int_t^b w(x)dx-\sigma(a_1-t)\right||f'(t)|^q\,dt\right)^{1/q}$$

yazılabilir. Buradan

$$\int_a^b\left|\int_t^b w(x)dx-\sigma(a_1-t)\right||f'(t)|^q\,dt=\frac{|f'(a)|^q A(a,b)+|f'(b)|^q B(a,b)}{b-a} \tag{3.121}$$

olduğu gösterilebilir. Öte yandan

$$\begin{aligned}\int_a^b\left|\int_t^b w(x)dx-\sigma(a_1-t)\right|dt&=\int_a^{a_1}\left(\int_a^t w(x)dx\right)dt+\int_{a_1}^b\left(\int_t^b w(x)dx\right)dt\\&=2\int_{a_1}^b(x-a_1)w(x)dx\end{aligned} \tag{3.122}$$

olduğu gösterilebilir. (3.121) ve (3.122) den (3.120) eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.4.12 Eğer $w(x)=\dfrac{1}{b-a}$ alınırsa (3.120) eşitlisizliğinden

$$\left|\int_a^b w(x)f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le 2\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)w(x)dx\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

olduğu görülür.

$$E(w,f) := \frac{1}{b-a}\left[f(a)\int_a^b (b-x)w(x)dx + f(b)\int_a^b (x-a)w(x)dx\right] - \int_a^b w(x)f(x)dx$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda

$$E\left(\frac{1}{b-a}, f\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_a^b f(x)dx$$

olduğu aşikardır.

Teorem 3.4.26 $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere f fonksiyonu $[a, b]$ de türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L(a,b)$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} |E(w,f)| \le & \frac{a_1-a}{b-a}\sup\{|f'(a)|, f'(a_1)\}\int_0^1 H(w,a,a_1,y)dy \\ & + \frac{b-a_1}{b-a}\sup\{|f'(b)|, f'(a_1)\}\int_0^1 H(w,a_1,b,y)dy \end{aligned} \tag{3.123}$$

dir(Gavrea, 2015).

İspat: $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Quasi-konveks olduğundan $y \in [0,1]$ için

$$|f'((1-y)a + a_1 y)| \le \sup\{|f'(a)|, |f'(a_1)|\}$$

ve

$$|f'((1-y)a_1 + by)| \le \sup\{|f'(b)|, |f'(a_1)|\}$$

olup buradan istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.27 $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere f fonksiyonu $[a, b]$ de türevlenebilir bir fonksiyon ve w fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left|\int_a^b w(x)f(x)dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\leq\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)w(x)dx$$
$$\times\left[\sup\left\{|f'(a)|,f'(\frac{a+b}{2})\right\}+\sup\left\{|f'(b)|,f'(\frac{a+b}{2})\right\}\right] \tag{3.124}$$

dir(Gavrea, 2015).

İspat: w fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik

$$E(w,f)=\frac{f(a)+f(b)}{2}-\int_a^b f(x)w(x)dx$$

yazılabilir. Öte yandan

$$\frac{a_1-a}{b-a}\int_0^1|H(w,a,a_1,y)|dy=\frac{1}{b-a}\int_a^{a_1}\left|\int_a^t(x-a)w(x)dx-\int_t^b(b-x)w(x)dx\right|dx$$

ve

$$\frac{b-a_1}{b-a}\int_0^1|H(w,a_1,b,y)|dy=\frac{1}{b-a}\int_{a_1}^{b}\left|\int_a^t(x-a)w(x)dx-\int_t^b(b-x)w(x)dx\right|dx$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{a_1-a}{b-a}\int_0^1 H(w,a,a_1,y)dy=\int_a^{a_1}(t-a)w(t)dt$$

ve

$$\frac{b-a_1}{b-a}\int_0^1 H(w,a_1,b,y)dy=\int_a^{a_1}(t-a)w(t)dt$$

olduğu görülür. Teorem 3.4.26 dan (3.124) eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Daha önce verildiği gibi $0<a<b$, $r\in\mathbb{R}$ ve X rasgele değişkeni $g:[a,b]\to[0,\infty)$ sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişken olsun. $g:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu $(a+b)/2$ ye göre simetrik ve X rasgele değişkeninin r −yinci momenti

$$E_r(X)=\int_a^b t^r g(t)dt$$

ile gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.28 $0 < a < b$, $r \geq 2$ olmak üzere

$$\left|E_r(X) - \left(E(X)\right)^r\right| \leq \frac{r}{b-a}\left[|a|^{r-1} A(a,b) + |b|^{r-1} B(a,b)\right]$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada

$$A(a,b) = \frac{1}{2}\int_a^b (x - E(X))^2 w(x)dx - \int_a^{E(X)} (x - E(X))^2 w(x)dx$$
$$+ 2(b - E(X)) \int_{E(X)}^{b} (x - E(X))w(x)dx$$

$$B(a,b) = \frac{1}{2}\int_a^b (x - E(X))^2 w(x)dx - \int_{E(X)}^{b} (x - E(X))^2 w(x)dx$$
$$+ 2(E(X) - a) \int_{E(X)}^{b} (x - E(X))w(x)dx$$

dir(Gavrea, 2015).

İspat: $[a,b]$ de $f(t) = t^r, r \geq 2,$ alalım. Bu takdirde $|f'(t)| = rt^{r-1}$ bir konveks fonksiyondur. Bu durumda $E_r(X) = \int_a^b t^r w(t)dt$ ve $E(X) = \int_a^b tw(t)dt = a_1$ olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada Hermite-Hadamard eşitsizliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak olasılık yoğunluk fonksiyonu reel sayıların bir kapalı aralığında tanımlı olan sürekli rasgele değişkenlerin momentleri için bazı eşitsizlikler verilmiştir. Bununla ilgili olarak öncelikle böyle bir rasgele değişkenin yüksek mertebeden momentleri için bazı tahminler ve eşitsizlikler ispatlanmıştır. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli olması ve n-yinci mertebeden türevlenebilir olması durumları için beklenen değer, varyans, standart sapma ve kümülatif dağılım fonksiyonu ile ilgili bazı üst sınır değerler belirlenmiştir. Ayrıca N. S. Barnett ve S. S. Dragomir tarafından verilen bazı eşitsizlikler olasılık yoğunluk fonksiyonu sınırlı olan rasgele değişkenler için uyarlanmıştır.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlara ilaveten aşağıdaki çalışmalarda yapılabilir.

1. Literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik kullanılarak sonlu bir aralıkta tanımlı bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerin beklenen değer, varyans veya daha yüksek mertebeden momentleri için benzer eşitsizlikler belirlenebilir.

2. Olasılık yoğunluk fonksiyonu sonlu bir aralıkta tanımlı sürekli rasgele değişkenlerin kümülatif dağılım fonksiyonları için Ostrowski tipi eşitsizlikler verilebilir.

3. Pre-Grüss tipi eşitsizlikler kullanılarak olasılık yoğunluk fonksiyonları sınırlı olan rasgele değişkenlerin beklenen değer, varyans ve daha yüksek mertebeden momentleri için eşitsizlikler verilebilir.

4. Olasılık yoğunluk fonksiyonları $L_p\left[a,b\right]$ veya $L_\infty\left[a,b\right]$ sınıfından olan rasgele değişkenlerin kümülatif dağılım fonksiyonları, beklenen değer, varyans ve daha yüksek mertebeden momentleri için Ostrowski tipi eşitsizlikler türetilebilir.

5. Olasılık yoğunluk fonksiyonları bir $\left[a,b\right]$ aralığında sınırlı olan sürekli rasgele değişkenlerin kümülatif dağılım fonksiyonları ve momentleri için Hermite-Hadarmard tipi eşitsizlikler verilebilir.

5. KAYNAKLAR

Alomari, M., Darus, M. and Dragomir, S.S. 2010. New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute value are Quasi-convex, Tamking Journal on Math. 41(4):353-359

Azpeitia, A.G. 1994. Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28: 7-12.

Bagdasar, O. 2006. Inequalities and Applications, Bachelor's Degree Thesis, Babeş Bolyai University, Cluj Napoca.

Bai, R.F., Qi, F. and Xi, B.Y. 2013. Hermite-Hadamard type inequalities for the m- and (α,m)-Logaritmically convex fonctions, Filomat 27(1), 1-7.

Barnett, N.S., Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P. 2002. Some inequalities for probability, expectation and variance of random variables defined over a finite interval, PERGAMON Computers and Mathematics with Appl. 43, 1319-1357.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN: 975-442-035-1.

Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.

Beckenbach, E.F. and Bellman, R. 1961. Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Dragomir, S.S. 1994. Some remarks on Hadamard's inequalities for convex functions, Extracta Math. 9 (2): 88–94.

Dragomir, S.S. 2000. Refinements of the Hermite–Hadamard integral inequality for log convex functions, RGMIA Res. Rep. Collect, 3 (4): 527–533.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57 (1998), 377-385.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, Victoria University.

Dragomir, S.S., Pecaric, J.E. and Sandor, J. 1990. A note on the Jensen–Hadamard inequality, Anal. Num. Theor. Approx., 19: 29–34.

Dragomir, S. S., Pecaric, J. and Persson, L. E. 1995. Some inequalities of Hadamard type, Soochow Journal of Mathematics, 21: 335-341.

Ekinci, A. 2014. Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar İçin Integral Eşitsizlikler, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Gavrea, B., 2015. A Hermite–Hadamard type inequality with applications to the estimation of moments of continuous random variables, Applied Mathematics and Computation, 254, 92-98.

Greenberg, H. J., Pierskalla, W. P., 1970. A review of quasi convex functions, Reprinted from Operations Research, 19, 7.

Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G. 1952. Inequalities, 2nd Ed., Cambridge University Press.

He, C.Y., Wang, Y., Xi, B.Y. and Qi, F. 2017. Hermite-Hadamard type inequalities for (α,m)-HA and strongly (α,m)-convex fonctions, J. of Nonlinear Sci. Appl, 10: 205-2014.

Hwang, D.Y. 2011. Some inequalities for differentiable convex mapping with application to weighted trapezoidal formula and higher moments of random variables, Applied Mathematics and Computation, 217, 9598-9605.

Hwang, D.Y. 2014. Some inequalities for differentiable convex mapping with application to weighted midpoint formula and higher moments of random variables, Applied Mathematics and Computation, 232, 68-75.

Hwang, D.Y. and Dragomir, S.S. 2014. Comparing two integral means for absolutely continuous functions whose absolute value of the derivative are convex and applications, Applied Mathematics and Computation, 230, 259-266.

Ion, D. A. 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of University of CraiovaMath. Comp. Sci. Ser., vol. 34, 82-87.

İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard type inequaities for harmonically convex functions Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic 43, 6, 935-942.

İşcan, İ., 2015. Hermite-Hadamard-Fej´er Type Inequalities for convex Functions via Fractional Integrals, Stud. Univ. Babe¸s-Bolyai Math., 60, No. 3, 355-366.

İşcan, İ. and Wu, S. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals, Applied Mathematics and Computation, 238: 237-244.

Jeffrey, A. and Dai, H.H. 2008. Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK.

Kadıoğlu, E. ve Kamali, M. 2013. Genel Matematik, ISBN: 978-975-8151-57-8.

Kırmacı, U.S. and Özdemir, M.E. 2004. Some inequalities for mappings whose derivatives are bounded and applications to specials means of real numbers, Applied Math. Letters, 17: 641–645.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam.

Kuczma, M. 1985. An Introduction to the Theory of Funtional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality, PWN-Uniwersytet Slaski, Warszawa-Krakow-Katowice.

Kurşun, B.N. 2016. Sonlu Bir Aralıkta Tanımlı Sürekli Rasgele Değişkenin Momentleri İçin Eşitsizlikler, Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Ordu.

Latif, M.A., Alomari, W. and Hussain, S. 2012. On ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are m- and (α,m)-convex fonctions with applications, Tamking journal of Mathematics 43(4), 521-532.

Liu, Z., 2015. On some inequalities for expectation and variance, Konuralp Journal of Mathematics, 3(2), 54-61.

Merentes, N. and Nikodem, K. 2010. Remarks on strongly convex functions, Aequat. Math., 80: 193-199.

Mitrinoviç, D.S. 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Mitrinoviç, D.S., Pecaric, J.E. and Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Niculescu, C. P. 2003. Convexity according to means, Math. Inequal. Appl. 6 (4), 571–579.

Niculescu, C.P. and Persson, L.E. 2005. Convex Functions and Their Applications, Springer, Berlin.

Niculescu, C.P. and Persson, L.E. 2006. Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, Springer Science Business Media Inc.

Noor, M. A., Noor, K. I., Iftikhar, S. 2016. Hermite-Hadamard inequalities for strongly harmonic convex functions. *Jour. of Inequalities and Special Functions*, *7* (3), 99-113.

Özdemir, M.E. 2000. A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and means, Appl. Math. Lett., 13: 19–25.

Özdemir, M. E., Yıldız, C. 2013. The Hadamard's inequality for quasiconvex functions via fractional integrals, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series Volume 40(2): 167-173.

Pachpatte B.G., 2005. Mathematical inequalities, North-Holland Mathematical Library, 67.

Pales, Zs. 2000. Nonconvex functions and separation by power means, Math. Inequel. Appl., 3: 169-176.

Pearce, C.E.M. and Pecaric, J. 2000. Inequalities for differentiable mappings w,th application to special means and quardrature formulae, Applied Mat. Letters, 13, 51-55.

Pecaric, L., Proschan, F. and Tong, Y.L. 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.

Roberts, A.W. and Varberg, D.E. 1973. Convex Functions, Academic Press, New York.

Sobczyk, K. 1991. Stochastic differential equations with applications to physics and engineering, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Shuang, Y. and Qi, F. 2017. Integral inequalities of the Hermite-Hadamard type for (α,m)-GA- convex fonctions, J. of Nonlinear Sci. Appl, 10(4): 1854-1860.

Tunç, M. 2011. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadaamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Tunç, M. 2013. Some integral inequalities for logarithmically convex functions, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22: 177-181.

Wright, E. M. 1954. An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly 61: 620-622.

Young, W. H. 1912. On Classes of Summable Functions and Their Fourier Series, Proc. Roy. Soc. London A 87, 225-229.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Mehmet GÖKPINAR
Doğum Yeri	**:**	Ordu
Doğum Tarihi	**:**	01.05.1990
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	mehmet6522187@gmail.com
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2015
Y. Lisans			

İş Deneyimi:

Görev	**Görev Yeri**	**Yıl**

Yayınlar :

1.

2.