T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYLARINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN SÜREKLİ FONKSİYONLARI İÇİN OPERATÖR (α,m)-PREİNVEKS FONKSİYONLAR

Hümeyra KARBUZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYLARINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN SÜREKLİ FONKSİYONLARI İÇİN OPERATÖR (α,m)-PREİNVEKS FONKSİYONLAR

Hümeyra KARBUZ

Bu tez,

Matematik Anabilim Dalı' nda

Yüksek Lisans

derecesi için hazırlanmıştır

ORDU 2019

TEZ ONAY

Hümeyra KARBUZ tarafından hazırlanan "**HİLBERT UZAYLARINDA ÖZ EŞLENİK OPERATÖRLERİN SÜREKLİ FONKSİYONLARI İÇİN OPERATÖR (*a,m*)-PREİNVEKS FONKSİYONLAR**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 12.06.2019 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi	....

18./06./2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 21/06/2019 tarih ve 2019./271 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Hümeyra KARBUZ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HİLBERT UZAYLARINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN SÜREKLİ FONKSİYONLARI İÇİN OPERATÖR (α,m)-PREİNVEKS FONKSİYONLAR

Hümeyra KARBUZ

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2019
Yüksek Lisans Tezi, 45 s.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL

Bu tez çalışmasında, Hilbert uzaylarında sınırlı özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için operatör (α,m)-preinveks fonksiyonlar sınıfının tanımı verildi. Daha sonra Hermite-Hadamard eşitsizliği yardımıyla yeni lemma, teoremler ifade ve ispat edildi. Son olarak ise, türevlerinin mutlak değerlerinin bazı kuvvetlerinin operatör (α,m)-preinveks olması durumunda yeni eşitsizlikler elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Hilbert Uzayı, Sınırlı Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonu, Operatör (α,m)-Preinveks Fonksiyonlar, Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği.

ABSTRACT

OPERATOR (α,m)-PREINVEX FUNCTIONS FOR CONTINUOUS FUNCTIONS OF SELF ADJOINT OPERATORS IN HILBERT SPACES

Hümeyra KARBUZ

University of Ordu
Institute of Science
Department of Mathematics, 2019
MSc. Thesis, 45 p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

In this thesis, it is defined operator (α,m)-preinvex functions for continuous function of bounded self adjoint operator in Hilbert spaces. Then it is proved some new lemma, theorems in terms of Hermite-Hadamard Inequality. Finally, it is obtained some new inequalities for functions whose derivatives are operator (α,m)-preinvex.

Key Words: Hilbert Space, Continuous Function of Bounded, Self adjoint Operators, Operator (α,m)-Preinvex Function, Hermite-Hadamard Integral Inequality.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan, engin bilgisinden yararlandığım çok değerli Yüksek lisans Danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL’ a en samimi duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen ve her zaman yakın ilgilerini gördüğüm Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına teşekkürü bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca, benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve bugünlere gelmemde çok büyük emekleri olan anne-babama teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi, yani $(-\infty, +\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}_0$	:	$[0, +\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}^m$	:	m-boyutlu Reel sayılar kümesi, $m \in \mathbb{N}$
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$U_{\epsilon(a)}$	:	a noktasının ϵ komşuluğu
$(\cdot,\cdot), < \cdot,\cdot >$	:	İç-çarpım fonksiyonu
H	:	Hilbert uzayı
$Sp(A), \sigma(A)$	:	A operatörünün spekturumu
$\nabla f(.)$	:	f fonksiyonunun diverjansı
$L[a, b]$	:	$[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı
$H - H$	:	Hermite-Hadamard
$B(H)$	:	H'dan H'ya sınırlı operatörlerin kümesi
$B(H)^+$	:	H'dan H'ya pozitif sınırlı operatörlerin kümesi
$B(H)^+_{sa}$	:	H'dan H'ya sınırlı, özeşlenik, pozitif operatörlerin kümesi

1. GİRİŞ

Elster ve Nehse [1] konveksel fonksiyonlar sınıfını incelemişlerdir, yani $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{1.0.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $z \in S$ noktalarını içeren fonksiyonlara konveksel denir. Eğer S bir konveks küme ve f de konveks bir fonksiyon ise, bu durumda f'nin konveksel olduğu açıktır. Aslında Elster ve Nehse konveksel matematiksel programlama için optimal şart altında bir eyer(büküm) noktası elde etmişlerdir.
Hayaski ve Komiya [2] hem konveksel fonksiyonları hem de konveksel fonksiyonlar için bir Gordan tipi teorem geliştirmişler.
Hanson [3], her $x, y \in S \subseteq \mathbb{R}$ için

$$f(x) - f(u) \geq [\eta(x, u)]^T \nabla f(u) \tag{1.0.2}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n-boyutlu $\eta(x, u)$ vektör fonksiyona sahip $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlarını göz önüne almıştır. Burada "∇" sembolü diverjansı göstermektedir. Bu tarz fonksiyonlar Craven [4] tarafından inveks olarak isimlendirilmiştir. Bu terim ise '**in**variant con**vex**' ifadesinden kısaltılmıştır.
Craven ve Glover [5], Ben-Israel ve Mond [6], ayrıca Martin [7] invex fonksiyonlar sınıfıyla ilgili çalışmaları mevcuttur. Ben-Israel ve Mond [6], Hanson ve Mond [8] daha genel olan yani, S üzerinde diferensiyellenebilen fonksiyonların, her $x, u \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(u + \lambda\eta(x, u)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(u) \tag{1.0.3}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n-boyutlu $\eta(x, u)$ vektör fonksiyonunun varlığını ispat etmişler ve diferensiyellenebilen fonksiyonların hem (1.0.2) yi hem de (1.0.3)'ü sağladığını göstermişlerdir. Bu koşullar altında (1.0.3) eşitsizliğini sağlayan bu fonksiyonlara V. Jeyakumar tarafından 'preinvex' ismi verilmiştir. Ayrıca, $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ m-boyutlu vektör değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer f'nin bileşenlerinin her biri, η-ya göre S üzerinde preinveks ise, bu f'ye η'ya göre S üzeinde preinvekstir denir. Her $x, u \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$u + \lambda\eta(x, u) \in S$$

olup, buradan preinvex fonksiyonlar konvekseldir.

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı üzere, inveksl ik ve preinveksliğin nasıl ortaya çıktığının özetini verdik. Şimdi bu fonksiyon sınıfının "neden" ortaya çıktığını kısaca belirtelim. Konveksliğin bu yeni genelleştirmesi, optimizasyon poblemleri, statik ve dinamik problemleri, Pareto veya çoklu-amaç programlama problemleri vb. konularının daha iyi anlaşılması ve çözülmesi için matematikçiler tarafından elde edilmiştir.

Bu yüksek lisans tez çalışması klasik preinveks fonksiyonlar teorisi ile herhangi bir Hilbert Uzayı' nda sınırlı, özeşlenik operatörler teorisinin bir araya gelmesiyle oluşmuştur. Bu alanda Barani ve ark. [9], Ghazanfari ve ark. [10], Wang ve ark. [11]-[12], ayrıca daha bir çok bilim insanı çalışmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel bilgiler verilmiştir.

Tanım 2.0.1 L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $. : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$dir.
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ omak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta.x)$ dir.
L5. $1.x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır). $F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.0.2 $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. Eğer, $a \in E$ ve $U_{\epsilon(a)} \subset E$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı varsa a ya E'nin bir iç noktası denir.E nin tüm iç noktalarının kümesine E nin içi denir ve E^0 ile gösterilir. Eğer, $E^0 = E$ ise E ye $\mathbb{R}$ de bir açık küme denir.

Tanım 2.0.3 f, A kümesinden B kümesine bir bağıntı olsun. Eğer f bağıntısı A kümesinin her elemanını B kümesinin yalnız bir elemanına eşliyorsa f bağıntısına A dan B ye bir fonksiyon denir ve

$$f : A \to B$$

ile gösterilir. A kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi B kümesine ise değer kümesi denir.Bu tanıma göre f bağıntısının A dan B ye bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

i) $\forall x \in A$ için $\exists y \in B$ öyle ki; $(x, y) \in f$ dir.

ii) $\forall x \in A$,$\forall y, z \in B$ için $[(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f] \Rightarrow y = z$ olmasıdır.

Tanım 2.0.4 $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.Eğer
$\mid x - x_0 \mid < \delta$ olan her $x \in S$ için $\mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.0.5 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki noktalar, aynı kümede kalıyorsa C ye konveks küme ya da afin denir. Yani, $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in C$ için

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$$

ise $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi konveks bir kümedir.

Tanım 2.0.6 I,$\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.0.7 $F \subseteq \mathbb{R}^n, f : F \to \mathbb{R}$ ve $\eta(\cdot, \cdot) : F \times F \to \mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in F$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$y + t\eta(x, y) \in F$$

ise F ye $\eta(\cdot, \cdot)$ ya göre inveks bir küme denir.

Not 2.0.1 Her konveks kümenin $\eta(y, x) = y-x$ fonksiyonuna göre inveks olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir, yani konveks olmayan inveks kümeler mevcuttur [13].

Örnek 2.0.1 ([13] Örnek 4) $S \subset \mathbb{R}^2$ bir küme ve $\eta(\cdot, \cdot) : S \times S \to \mathbb{R}^2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} S &:= \Big(\big[-9, -2\big] \cup \big[1, 8\big]\Big) \times \Big(\big[-9, -2\big] \cup \big[1, 8\big]\Big) \\ \eta(x, u) &:= \Big\{\eta_1(x, u), \eta_2(x, u)\Big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$\eta_1(x, u) = \begin{cases} x_1 - u_1, & x_1 \geq 0, \quad u_1 \geq 0, \\ -9 - u_1, & x_1 \geq 0, \quad u_1 \leq 0, \\ 1 - u_1, & x_1 \leq 0, \quad u_1 \geq 0, \\ x_1 - u_1, & x_1 \leq 0, \quad u_1 \leq 0, \end{cases} \quad \eta_2(x, u) = \begin{cases} x_2 - u_2, & x_2 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \\ -9 - u_2, & x_2 \geq 0, \quad u_2 \leq 0, \\ 1 - u_2, & x_2 \leq 0, \quad u_2 \geq 0, \\ x_2 - u_2, & x_2 \leq 0, \quad u_2 \leq 0, \end{cases}$$

olarak seçilirse $S \subset \mathbb{R}^2$ konveks bir küme olmayıp, yukarıdaki şekilde seçilen $\eta(x, u)$-ya göre inveks bir kümedir.

Tanım 2.0.8 $F \subseteq \mathbb{R}^n, \eta$-ya göre boştan farklı bir inveks küme, x ve u ise S-nin keyfi iki elemanı olsun. Bu durumda

$$P_{uv} := \Big\{ y = u + t\eta(x,u) : t \in [0,1] \Big\}$$

şeklinde tanımlanan P_{uv} kümesine, S-de bulunan u ve $v = u+\eta(x,u)$ noktalarını birleştiren kapalı bir η-yolu denir. Benzer şekilde,

$$P^o_{uv} := \Big\{ y = u + t\eta(x,u) : t \in (0,1) \Big\}$$

açık bir η-yolu da tanımlanır.

Tanım 2.0.9 $F \subseteq \mathbb{R}^n, \eta$-ya göre boştan farklı bir inveks küme olsun. Bu durumda her $x, y \in F$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} (C) \ \ \eta(y, y + t\eta(x,y)) &= -t\eta(x,y) \\ \eta(x, y + t\eta(x,y)) &= (1-t)\eta(x,y) \end{aligned}$$

ise η dönüşümü (C) koşulunu sağlar denir.

Not 2.0.2 Eğer η dönüşümü (C) koşulunu sağlarsa, her $x, y \in F$ ve her $t_1, t_2 \in [0,1]$ için

$$\eta\Big(y + t_2\eta(x,y), y + t_1\eta(x,y)\Big) = (t_2 - t_1)\eta(x,y) \tag{2.0.1}$$

eşitliği sağlanır. Bunun ispatı için [14] ve [15]'ye bakılabilir.

Tanım 2.0.10 Eğer

$$lim_{x \to a} f(x) = 0$$

ise f ye $x \in X, x \to a$ iken sonsuz küçük bir fonksiyon denir ve $x \in X, x \to a$ iken

$$f(x) = o(1)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.0.11 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x \in [a,b]$ noktası verilmiş olsun. Eğer $x + h \in [a,b]$ için $B(x)$ reel bir sayı olmak üzere

$$f(x+h) - f(x) = B(x).h + \varphi(x;h)$$

olacak şekilde $h \to B(x)h$ fonksiyonu ve $h \to 0$ ($x = a$ için $h \to 0^+$ ve $x = b$ için $h \to 0^-$) iken $\varphi(x;h) = o(h)$ olacak şekilde bir $\varphi(x;h)$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu x noktasında diferensiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.0.12 $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sınırlı olan f fonksiyonu için, $[a,b]$ aralığının P parçalanması, ξ-ye bağımlı olarak,

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=k-1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

sonlu limiti varsa bu limite "f-nin $[a,b]$ aralığı üzerinde Riemann veya Belirli integrali" denir ve

$$\int_a^b f(x)dx$$

sembolü ile gösterilir. Bu durumda "$f, [a,b]$ aralığı üzerinde (Riemann anlamında) integrallenebilirdir" denir. Burada a-ya integralin alt sınırı, b-ye ise üst sınırı denir.

Tanım 2.0.13 $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $| f |^p$ ve $| g |^q$ $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon ise

$$\int_a^b \left|f(x)g(x)\right|dx \leq \left(\int_a^b \left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \left|g(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliğe Hölder Eşitsizliği denir.

Tanım 2.0.14 $q \geq 1$ olmak üzere $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen reel değerli iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Power-Mean Eşitsizliği denir.

Tanım 2.0.15 $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $a < b, a, b \in I$ olsun. Bu durumda herhangi bir konveks $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.0.2}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard Eşitsizliği denir. Hermite-Hadamard eşitsizliği $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyonun ortalama değerini verir.

Tanım 2.0.16 $f : [0, b^*] \to \mathbb{R}$, $b^* > 0$ olmak üzere $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ ve her $x, y \in [0, b^*], t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1-t^\alpha)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna (α, m)-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.0.17 $S \subseteq [0, b^*], b^* > 0, \eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks bir küme olsun. Bu durumda $f : S \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ ve her $x, y \in S, t \in [0,1]$ için

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq (1 - t^{\alpha})f(x) + mt^{\alpha}f(\frac{y}{m})$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna, η dönüşümüne göre (α, m)-preinveks fonksiyon denir.

Tanım 2.0.18 Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.0.19 F bir cisim, V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
a $T(u + v) = T(u) + T(v)$
b $T(cu) = cT(u)$
şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir .

Tanım 2.0.20 F ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun. $(\cdot, \cdot) : X \times X \to F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise "$(\cdot, \cdot)$" dönüşümüne X kümesi üzerinde bir iç-çarpım, $(X, (\cdot, \cdot))$ ikilisine de bir iç-çarpım uzayı denir:

1. $\forall x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$;
2. $\forall x, y \in X$ için $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
3. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4. $\forall x, y, z \in X$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Not 2.0.3 $F = \mathbb{R}$ olması halinde 2. özellik $(x, y) = (y, x)$ olur.

Not 2.0.4 İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz.

1. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,
2. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \in F$ için $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$;
3. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$.

Tanım 2.0.21 X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyondur. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için

a. $\|x\| > 0$,

b. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_x$

c. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

üzerinde bir $\|\cdot\|$ normu tanımlanmış olan bir X vektör uzayına "normlu vektör uzay" denir.

Tanım 2.0.22 $(X, (\cdot, \cdot))$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç-çarpım uzayı tam ise, yani $(X, (\cdot, \cdot))$ iç-çarpım uzayı içindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu iç çarpım uzayına bir "Hilbert Uzayı" denir.

Tanım 2.0.23 $A : X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. $I, E, I_X, 1_X$ veya $\mathbf{1}_X$ sembollerinden biriyle gösterilir.

Tanım 2.0.24 X ve Y iki normlu uzay olsun. A ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$ 'nın X' de sınırlı her kümesi $R(A)$'nın Y de sınırlı bir kümesine karşılık getiriyorsa A' ya "sınırlı bir operatör" denir. Başka bir deyişle her $x \in D(A)$ için

$$\| Ax \|_Y \leq c \| x \|_X$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa, A'ya "sınırlı bir operatör"denir.

Tanım 2.0.25 X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A), X$' in bir alt uzayı, her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in F$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A'ya "lineer operatör"denir.

Tanım 2.0.26 A, H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için

$$(Af, g) = (f, A^* g)$$

sağlanıyorsa A^* a A'nın "eşlenik operatörü"denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A = A^*$ ise bu A' ya özeşlenik operatör denir.

Tanım 2.0.27 H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \quad \text{lineer operatördür}\}$$

kümesine A operatörünün "regüler değerler kümesi" veya "rezolvent kümesi" denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatorüne A operatorünün "rezolventası" veya "çözücü operatörü" adı verilir.

Tanım 2.0.28 H bir Hilbert uzayı olsun.

$$Sp(A) = \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine A operatörünün "spektrumu " denir. A operatörünün spektrum kümesi "$\sigma(A)$" veya "$Sp(A)$" ile gösterilir.

Tanım 2.0.29 $A, (H, (\cdot, \cdot))$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C(Sp(A))$, A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini göstersin. Gelfand dönüşümü yardımıyla aşağıdaki özellikleri yazılan Φ ile $C(Sp(A))$ kümesi arasında bir $*$-izometrik izomorfizm vardır. Ayrıca H üzerinde 1_H birim operatörü ve A operatörü tarafından üretilen bir $C^*(A)$ cebiri vardır. Keyfi $f, g \in C(Sp(A))$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için,

1. $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$,
2. $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ve $\Phi(f^*) = \Phi(f)^*$,
3. $|\Phi(f)\| = \|f\| := \sup_{t \in Sp(A)} |f(t)|$,
4. $\Phi(f_0) = 1_H$ ve $\Phi(f_1) = A$,

burada $t \in Sp(A)$ için $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$ dir. Şimdi bir operatörün, bir fonksiyon altındaki görüntüsünün ne anlama geldiğini ifade edelim. A, $(H, (\cdot, \cdot))$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C(Sp(A))$, A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini ve Φ de tanımdaki fonksiyon olsun. Bu durumda $f \in C(Sp(A))$ için

$$f(A) := \Phi(f) \tag{2.0.3}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye keyfi bir A özeşlenik operatörünün sürekli fonksiyonel hesabı denir.

Tanım 2.0.30 A ve B, H Hilbert uzayı üzerinde iki özeşlenik operatör olsun. Bu durumda her $x \in H$ için operatörlerde sıralama aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$A \leq B \qquad ise \qquad (Ax, x) \leq (Bx, x).$$

Tanım 2.0.31 Eğer A özeşlenik bir operatör ve f de $Sp(A)$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda her $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \geq 0$$

dır. Buradan

$$f(A) \geq 0$$

olup, $f(A)$'ya H Hilbert uzayı üzerinde pozitif bir operatör denir. Ayrıca eğer f ve g, $Sp(A)$ üzerinde iki fonksiyon ise bu durumda her $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \geq g(t) \qquad ise \qquad f(A) \geq g(A)$$

elde edilir.

Tanım 2.0.32 [17] A ve B, spektrumları $I \subseteq \mathbb{R}$ de olan keyfi özeşlenik operatörler ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$$

eşitsizliğini sağlayan, $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna operatör konveks fonksiyon denir. Buradaki eşitsizlik yön değiştirirse o zaman bu $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna operatör konkav fonksiyon denir.

Not 2.0.5 Operatör konveks (operatör konkav) ve operatör monoton fonksiyonlar üzerinde bazı temel sonuçlar [16] ve [17] de verilmiştir.

Dragomir [17] operatör konveks fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği ispatlamıştır.

Teorem 2.0.1 [17] $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığı üzerinde operatör konveks olsun. O halde spekturumları I'da olan her özeşlenik A ve B operatörleri için

$$\begin{aligned} &\left(\left(f(\frac{A+B}{2})\right) \leq \right)\frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{3A+B}{4}\Big) + f\Big(\frac{A+3B}{4}\Big)\Big] \qquad (2.0.4)\\ \leq\ & \int_0^1 f((1-t)A + tB)dt \\ \leq\ & \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{A+B}{2}\Big) + \frac{f(A)+f(B)}{2}\Big]\Big(\leq \frac{f(A)+f(B)}{2}\Big) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.0.33 [10] $F \subseteq B(H)_{sa}$ kümesi $\eta : F \times F \to B(H)_{sa}$ ya göre inveks bir küme olsun. Eğer her $A, B \in F$ ve $t \in [0,1]$ için sürekli olan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(A + t\eta(B, A)) \leq (1-t)f(A) + tf(B) \tag{2.0.5}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona F üzerinde η ya göre operatör preinvekstir denir.

Teorem 2.0.2 [10] $S \subseteq B(H)_{sa}$, $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ dönüşümüne göre inveks bir küme ve η, (C) koşulunu sağlasın. Eğer her $A, B \in S$ ve $V = A + \eta(B, A)$ için $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu A ve V operatörleriyle P_{AV} η yolu üzerinde η ye göre preinveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} f(\frac{A+V}{2}) &\leq \frac{1}{2}\Big[f(\frac{3A+V}{4}) + f(\frac{A+3V}{4})\Big] \\ &\leq \int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt \\ &\leq \frac{1}{2}\Big[f(\frac{A+V}{2}) + \frac{f(A)+f(V)}{2}\Big] \\ &\leq \frac{f(A)+f(B)}{2} \end{aligned} \tag{2.0.6}$$

İspat. : $\langle Ax, x\rangle \in Sp(A)$, $\langle Vx, x\rangle \in Sp(V)$ olmak üzere $x \in H$, $\| x \| = 1$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\langle (A + t\eta(B, A))x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + t\langle \eta(B, A)x, x\rangle \in I \tag{2.0.7}$$

yazabiliriz. f fonksiyonunun sürekliliğinden ve (2.0.7) eşitliğinden

$$\int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt$$

operatör değerli integrali vardır. η, (C) koşulunu sağladığından her $t \in [0,1]$ için

$$A + \frac{1}{2}\eta(B, A) = A + t\eta(B, A) + \frac{1}{2}\eta(A + (1-t)\eta(B, A), A + t\eta(B, A)). \tag{2.0.8}$$

eşitliği doğrudur. f fonksiyonu η'ye göre preinveks olduğundan

$$\begin{aligned} f(A + \frac{1}{2}\eta(B, A)) &\leq \frac{1}{2}f(A + t\eta(B, A)) + \frac{1}{2}f(A + (1-t)\eta(B, A)) \\ &\leq \frac{1}{2}[(1-t)f(A) + tf(B)] + \frac{1}{2}[tf(A) + (1-t)f(B)] \\ &\leq \frac{f(A)+f(B)}{2} \end{aligned} \tag{2.0.9}$$

yazılabilir. Buradan (2.0.9)'nin her iki tarafını $[0,1]$ üzerinde t'ye göre integrali alınır ve doğru olan

$$\int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt = \int_0^1 f(A+(1-t)\eta(B,A))dt \tag{2.0.10}$$

integral eşitliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{A+(A+\eta(B,A))}{2}\Big) &\leq \int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt \\ &\leq \frac{f(A)+f(B)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece her $A, B \subseteq I$ özeşlenik operatörler ve preinveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiş olur.
Reel değerli $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\varphi_{x,A,B}(t) = \langle f(A+t\eta(B,A))x, x\rangle$$

şeklinde tanımlansın. Bir önceki teoremden ve f operatör preinveks olduğundan $\varphi_{x,A,B}$, [0,1] üzerinde konveks fonksiyondur. Reel değerli konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini kullanırsak

$$\varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(s)ds \leq \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$$

Burada $a=0$, $b=\frac{1}{2}$ alırsak

$$\Big\langle f\Big(\frac{3A+V}{4}\Big)x, x\Big\rangle \leq 2\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{x,A,B}(t)dt \leq \Big\langle \frac{f(A)+f(\frac{A+V}{2})}{2}x, x\Big\rangle \tag{2.0.11}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer $a=\frac{1}{2}$, $b=1$ olarak seçersek

$$\Big\langle f\Big(\frac{A+3V}{4}\Big)x, x\Big\rangle \leq 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_{x,A,B}(t)dt \leq \langle \frac{f(V)+f(\frac{A+V}{2})}{2}x, x\rangle \tag{2.0.12}$$

ve yukarıdaki (2.0.11) ve (2.0.12) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned} \Big\langle \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{3A+V}{4}\Big)+f\Big(\frac{A+3V}{4}\Big)\Big]x, x\Big\rangle &\leq \int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x, x\rangle dt \\ &\leq \Big\langle \frac{1}{2}\Big[f(\frac{A+V}{2})+\frac{f(A)+f(V)}{2}\Big]x, x\Big\rangle \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Son olarak f fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x, x\rangle dt = \Big\langle \int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dtx, x\Big\rangle$$

ve (2.0.8) eşitliğinden

$$f\Big(\frac{A+V}{2}\Big) \;\leq\; \frac{1}{2}\Big[f(\frac{3A+V}{4})+f(\frac{A+3V}{4})\Big] \leq \frac{f(A)+f(B)}{2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.0.1 Teorem 2.0.2'in varsayımları altında,

$$0 \;\leq\; \int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt - f\Big(\frac{A+V}{2}\Big) \leq \frac{f(A)+f(V)}{2} - \int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi η dönüşümüne göre (C) koşulunu sağlayan bazı operatör preinveks fonksiyon ve inveks küme örnekleri verelim.

Örnek 2.0.2 ([10], Örnek 1-a) Varsayalım ki 1_H H Hilbert uzayı üzerinde bir birim operatörü,

$$\begin{aligned} T := (-3\times 1_H, -1\times 1_H) &= \{A\in B(H)_{sa} : -3\times 1_H < A < -1\times 1_H\} \\ U := (1_H, 4\times 1_H) &= \{A\in B(H)_{sa} : 1_H < A < 4\times 1_H\} \\ S := T\cup U &\subseteq B(H)_{sa} \end{aligned}$$

ve $\eta_1 : S\times S \to B(H)_{sa}$ fonksiyonu

$$\eta_1(A,B) = \begin{cases} A-B & A,B\in U \\ A-B, & A,B\in T \\ 1_H - B, & A,B\in T \\ -1_H - B, & A\in U, B\in T \end{cases}$$

olsun. η_1'in (C) koşulunu sağladığı ve S kümesinin η_1 fonksiyonuna göre inveks olduğu açıktır. $f(t)=t^2$ reel fonksiyonu S kümesi üzrinde η_1 e göre preinvekstir. Fakat $a,b\in\mathbb{R}$ için $g(t)=a+bt$ fonksiyonu S kümesi üzerinde η_1 e göre preinveks değildir.

Örnek 2.0.3 ([10], Örnek 2) Örnek (2.0.2) deki şartlar altında Her $A,B\in S$ ve $V = A+\eta_1(B,A)$ için

$$\begin{aligned} \Big(\frac{A+V}{2}\Big)^2 &\leq \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{3A+V}{4}\Big)^2 + \Big(\frac{A+3V}{4}\Big)^2\Big] \\ &\leq \int_0^1 (A+t\eta_1(B,A))^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{A+V}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{A^2+V^2}{2}\Big)\Big] \\ &\leq \frac{A^2+B^2}{2} \end{aligned}$$

sağlanır.

Örnek 2.0.4 ([10], Örnek 1-b) $V := (-2\times 1_H, 0)$, $W := (0, 2\times 1_H)$, $S := V \cup W \subseteq B(H)_{sa}$ ve $\eta_2 : S \times S \to B(H)_{sa}$ fonksiyonu

$$\eta_2(A,B) \begin{cases} A - B, & A, B \in V \text{ veya } A, B \in W \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. η_2, (C) koşulunu sağlar ve S kümesi η_2 ye göre invekstir. $a \in \mathbb{R}$ için $f(t) = a$ sabit fonksiyonu S üzerinde η_2 ye göre sadece preinveks fonksiyondur.

Not 2.0.6 Her operatör konveks fonksiyon, $\eta(A,B) = A - B$ dönüşümüne göre operatör preinveks bir fonksiyondur, fakat tersi genelde doğru değildir [10].

Örnek 2.0.5 ([10] Örnek 1-c) $f(t) = -|t|$ konveks bir fonksiyon değildir, fakat

$$\eta_3(A,B) = \begin{cases} A - B, & A, B \geq 0 \text{ veya } A, B \leq 0, \\ B - A, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

η_3 fonksiyonuna göre konveks olmayan fakat preinveks olan bir fonksiyondur.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1 Operatör (α, m)-Preinveks Fonksiyonlar

Biz bu kısımda literatürde olmayan ve ilk defa burada tanımlayacağımız "Operatör (α, m)-Preinveks Fonksiyonlar" sınıfını tanımlayıp inceleyeceğiz.

Tanım 3.1.1 $S \subseteq [0, b^*], b^* > 0, \eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks bir küme olsun. Bu durumda $f : S \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ ve her $A, B \in S, t \in [0,1]$ için

$$f(A + t\eta(B, A)) \leq (1 - t^\alpha)f(A) + mt^\alpha f(\frac{B}{m})$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna, spektrumları S' de olan sınırlı, özeşlenik A ve B operatörler için η dönüşümüne göre operatör (α, m)-preinveks fonksiyon denir.

Lemma 3.1.1 $S \subseteq [0, b^*], b^* > 0, \eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks bir küme, $f : S \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve η dönüşümünün S üzerinde (C) şartını sağladığını kabul edelim. Bu durumda spektrumları S' de her $A, B \in B(H)_{sa}$, $V = A + \eta(B, A)$ ve $t \in [0,1]$ için f fonksiyonunun P_{AV}, η-yolu üzerinde η' ya göre her $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ için operatör (α, m)-preinveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\varphi_{x,A,B}(t) :=< f(A + t\eta(B, A))x, x > \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun her $x \in H$, $\| x \| = 1$ için $[0,1]$ aralığı üzerinde konveks olmasıdır.

İspat.

" $\Rightarrow$ " Kabul edilim ki f fonksiyonu P_{AV}, η-yolu üzerinde η' ya göre her $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ için operatör (α, m)-preinveks olsun. Bu durumda

$$\varphi_{x,A,B}(t) :=< f(A + t\eta(B, A))x, x > \tag{3.1.2}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun her $x \in H, \| x \| = 1$ ve $t \in [0,1]$ için konveks olduğunu gösterelim.

İddiaya göre, spektrumları S' de olan her sınırlı, özeşlenik $A, B \in S$ operatörleri ve $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1], f$ fonksiyonu P_{AV}, η yolu üzerinde η ya göre operatör (α, m)

preinveks olduğundan, her $t_1, t_2 \in [0,1], \lambda \in [0,1]$ ve $x \in H, \|x\| = 1$ için

$$\begin{aligned}
\varphi((1-\lambda^\alpha)t_1 + \lambda^\alpha t_2) &= < f(A + (1-\lambda^\alpha)t_1 + \lambda^\alpha t_2 \eta(B,A))x, x > \\
&= < f(A + t_1\eta(B,A) \\
&\quad +\lambda^\alpha \eta(A + t_2(B,A), A + t_1\eta(B,A))x, x > \\
&\leq (1-\lambda^\alpha) < f(A + t_1\eta(B,A)) > \\
&\quad +m\lambda^\alpha < f(\frac{A + t_2\eta(B,A)}{m}) > \\
&= (1-\lambda^\alpha)\varphi(t_1) + m\lambda^\alpha \varphi(\frac{t_2}{m})
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ise bize $\varphi_{x,A,B}$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerinde konveks olduğunu gösterir. Böylece ispatın birinci kısmı tamamlanmış olur.
" $\Leftarrow$ " Tersine olarak,

$$\varphi_{x,A,B}(t) := < f(A + t\eta(B,A))x, x > \tag{3.1.3}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in H, \| x \| = 1, \varphi_{x,A,B}, [0,1]$ üzerinde konveks olsun. Bu durumda f fonksiyonunun P_{AV}, η-yolu üzerinde η' ya göre her $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ için operatör (α, m)-preinveks olduğunu gösterelim.

Gerçekten teoremin iddiasına göre her $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve spektrumları S' de olan her sınırlı, özeşlenik $A, B \in S$ operatörleri için

$$\begin{aligned}
C_1 &:= A + t_1\eta(B,A) \in P_{AV} \subseteq S \\
C_2 &:= A + t_2\eta(B,A) \in P_{AV} \subseteq S
\end{aligned}$$

eşitliklerini tanımlayalım. Bu durumda $\lambda \in [0,1], (\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ için (3.1.1) den dolayı

$$\begin{aligned}
< f(C_1 + \lambda\eta(C_2, C_1))x, x > &= < f(A + t_1\eta(B,A) \\
&\quad +\lambda\eta(A + t_2\eta(B,A), A + t_1\eta(B,A)))x, x > \\
&= < f(A + t_1\eta(B,A) + \lambda(t_2 - t_1)\eta(B,A))x, x > \\
&= < f(A + t_1\eta(B,A) \\
&\quad +\lambda t_2\eta(B,A) - \lambda t_1\eta(B,A))x, x > \\
&= < f(A + t_1(1-\lambda)\eta(B,A) + \lambda t_2\eta(B,A))x, x > \\
&= \varphi_{x,A,B}((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \\
&\leq (1-\lambda)\varphi(t_1) + \lambda\varphi(\frac{t_2.m}{m}) \\
&\leq (1-\lambda^\alpha)\varphi(t_1) + m\lambda^\alpha\varphi(\frac{t_2}{m}) \\
&= (1-\lambda^\alpha)f(C_1) + m\lambda^\alpha f(\frac{C_2}{m})
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu P_{AV} η yolu üzerinde η ya göre operatör (α, m)-preinvekstir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.1 $S \subseteq [0, b^*], b^* > 0$ kümesi, $\eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks bir küme, $f : S \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve η dönüşümünün S üzerinde (C) şartını sağladığını kabul edelim. Bu durumda spektrumları S de olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ operatörleri ve $V = A + \eta(B, A)$ için f fonksiyonu P_{AV}, η-yolu üzerinde η ya göre her $(\alpha, m) \in (0, 1] \times (0, 1]$ için operatör (α, m)-preinveks ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{A+V}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{3A+V}{4}\Big) + f\Big(\frac{A+3V}{4}\Big)\Big] &\leq \int_0^1 < f\Big(A + t\eta(B, A)\Big)x, x > dt \\ &\leq \frac{1}{2}\Big[\big(1 - \frac{1}{2^\alpha}\big)f(A) + f\big(\frac{A+V}{2}\big) + \\ &\quad \frac{m}{2^\alpha} f\big((1 - \frac{1}{2m})A + \frac{V}{2m}\big) \\ &\quad + f\big((1 - \frac{1}{m})A + \frac{V}{m}\big)\Big] \\ &\leq f(A) + \frac{m}{2^\alpha} f(\frac{B}{m}) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

İspat. $x \in [0, b^*]$, $\|x\| = 1$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$< (A + t\eta(B, A))x, x >=< Ax, x > +t < \eta(B, A)x, x > \tag{3.1.5}$$

yazabiliriz. Spektrumları S de olan her sınırlı, özeşlenik A, B operatörleri için

$$< Ax, x >\in Sp(A) \subseteq [0, b^*],$$

$$< Vx, x >\in Sp(V) \subseteq [0, b^*]$$

olup,

$$< (A + t\eta(B, A))x, x >=< Ax, x > +t < \eta(B, A)x, x >\in S$$

elde edilir. f sürekli bir fonksiyon ve (3.1.5) deki operatörün $[0, 1]$ aralığında t ye göre

$$\int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt$$

integral değeri mevcuttur. İddiaya göre η dönüşümü S üzerinde (C) şartını sağladığından her $t \in [0, 1]$ ve her $(\alpha, m) \in (0, 1] \times (0, 1]$ için

$$A + \frac{1}{2}\eta(B, A) = A + t\eta(B, A) + \frac{1}{2}\eta\big(A + (1 - t)\eta(B, A), A + t\eta(B, A)\big) \tag{3.1.6}$$

yazabiliriz. f fonksiyonu η ya göre operatör (α, m) preinveks olduğundan

$$\begin{aligned}
f\big(A+\frac{1}{2}\eta(B,A)\big) &\leq (1-\frac{1}{2^\alpha})f\big(A+t\eta(B,A)\big) \\
&\quad +m\frac{1}{2^\alpha}f\big(\frac{A+(1-t)\eta(B,A)}{m}\big) \\
&\leq (1-\frac{1}{2^\alpha})\Big[(1-t^\alpha)f(A)+mt^\alpha f(\frac{B}{m})\Big] \\
&\quad +\frac{m}{2^\alpha}\Big[t^\alpha f(\frac{A}{m})+m(1-t^\alpha)f(\frac{B}{m^2})\Big] \\
&\leq (1-\frac{1}{2^\alpha})\Big[(1-t^\alpha)f(A)+mt^\alpha f(\frac{B}{m})\Big] \\
&\quad +\frac{m}{2^\alpha}\Big[t^\alpha f(\frac{A}{m})+(1-t^\alpha)f(\frac{B}{m})\Big] \\
&\leq \Big[(1-t^\alpha)f(A)+mt^\alpha f(\frac{B}{m})\Big] \\
&\quad +\frac{1}{2^\alpha}\Big[t^\alpha f(A)+m(1-t^\alpha)f(\frac{B}{m}) \\
&\quad -(1-t^\alpha)f(A)-mt^\alpha f(\frac{B}{m})\Big] \\
&\leq \Big[(1-t^\alpha)f(A)+mt^\alpha f(\frac{B}{m})\Big] \\
&\quad +\frac{1}{2^\alpha}\Big[(2t^\alpha-1)f(A)-m(2t^\alpha-1)f(\frac{B}{m})\Big] \\
&\leq \Big[(1-t^\alpha)f(A)+mt^\alpha f(\frac{B}{m})\Big]+\frac{1}{2^\alpha}(2t^\alpha-1)\Big[f(A)-mf(\frac{B}{m})\Big] \\
&\leq \frac{2^\alpha}{2^\alpha}\Big[(1-t^\alpha)f(A)+mt^\alpha f(\frac{B}{m})\Big]+\frac{(2t^\alpha-1)}{2^\alpha}\Big[f(A)-mf(\frac{B}{m})\Big] \\
&\leq \frac{2^\alpha f(A)-2^\alpha t^\alpha f(A)+mt^\alpha 2^\alpha f(\frac{B}{m})}{2^\alpha} \\
&\quad +\frac{2t^\alpha f(A)-2mt^\alpha f(\frac{B}{m})-f(A)+mf(\frac{B}{m})}{2^\alpha} \\
&\leq \frac{((2^\alpha-1)+t^\alpha(2-2^\alpha))f(A)}{2^\alpha}+\frac{mt^\alpha(2^\alpha-2)+mf(\frac{B}{m})}{2^\alpha} \\
&\leq \frac{((2^\alpha-1)+t^\alpha)f(A)}{2^\alpha}+\frac{m}{2^\alpha}f(\frac{B}{m}) \\
&\leq f(A)+\frac{m}{2^\alpha}f(\frac{B}{m}) \qquad (3.1.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.7) de t ye göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integralini alırsak

$$\int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt=\int_0^1 f(A+(1-t)\eta(B,A))dt \qquad (3.1.8)$$

buluruz. Buraya operatör (α, m)-preinveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini uygularsak

$$f\Big(\frac{A+(A+\eta(B,A))}{2}\Big)\leq\int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt\leq(1-\frac{1}{2^\alpha})f(A)+\frac{m}{2^\alpha}f(\frac{B}{m})$$

yazabiliriz. Spektrumları S de olan her sınırlı, özeşlenik A ve B operatörleri için reel değerli $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlayalım.

$$\varphi_{x,A,B}(t) =< f(A + t\eta(B,A))x, x > .$$

Lemma (3.1.1) de f operatör (α, m)-preinveks fonksiyon olduğundan, $\varphi_{x,A,B}$ $[0,1]$ konveks fonksiyon olur. Hermite Hadamard eşitsizliğini reel değerli konveks fonksiyonlarda uygulayalım.

$$\varphi(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(s)ds \leq (1-\frac{1}{2^\alpha})\varphi(a) + \frac{m}{2^\alpha}\varphi(\frac{b}{m})$$

$a = 0, b = \frac{1}{2}$ için

$$\varphi(\frac{1}{4}) \leq 2\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{x,A,B}(t)dt \leq (1-\frac{1}{2^\alpha})\varphi(0) + \frac{m}{2^\alpha}\varphi(\frac{1}{2m})$$

$$\begin{aligned} < f\Big(A + \frac{\eta(B,A)}{4}\Big)x, x > &\leq 2\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{x,A,B}(t)dt \\ &\leq < (1-\frac{1}{2^\alpha})f(A) + \frac{m}{2^\alpha}f\Big(A + \frac{\eta(B,A)}{2m}\Big)x, x > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < f\Big(\frac{3A+V}{4}\Big)x, x > &\leq 2\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{x,A,B}(t)dt \\ &\leq < (1-\frac{1}{2^\alpha})f(A) \\ &+ \frac{m}{2^\alpha}f\Big((1-\frac{1}{2m})A + \frac{V}{2m}\Big)x, x > \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

ve $a = \frac{1}{2}, b = 1$ için

$$\varphi(\frac{3}{4}) \leq 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_{x,A,B}(t)dt \leq (1-\frac{1}{2^\alpha})\varphi(\frac{1}{2}) + \frac{m}{2^\alpha}\varphi(\frac{1}{m})$$

$$\begin{aligned} < f\Big(A + \frac{3\eta(B,A)}{4}\Big)x, x > &\leq 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_{x,A,B}(t)dt \\ &\leq < (1-\frac{1}{2^\alpha})f\Big(A + \frac{\eta(B,A)}{2}\Big) + \frac{m}{2^\alpha}f\Big(A + \frac{\eta(B,A)}{m}\Big)x, x > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < f\Big(\frac{A+3V}{4}\Big)x, x > &\leq 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_{x,A,B}(t)dt \\ &\leq < (1-\frac{1}{2^\alpha})f\Big(\frac{A+V}{2}\Big) \\ &+ \frac{m}{2^\alpha}f\Big((1-\frac{1}{m})A + \frac{V}{m}\Big)x, x > \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

bulunur. (3.1.9) ve (3.1.10) u taraf tarafa toplarsak

$$
\begin{aligned}
< \frac{1}{2}\Big[f(\frac{3A+V}{4})+f(\frac{A+3V}{4})\Big]x,x> &\leq \int_0^1 < f(A+t\eta(B,A))x,x> dt \\
&\leq < \frac{1}{2}\Big[(1-\frac{1}{2\alpha})(f(A)+f(\frac{A+V}{2})) \\
&\quad +\frac{m}{2^\alpha}(f((1-\frac{1}{2m})A+\frac{V}{2m}) \\
&\quad +f((1-\frac{1}{m})A+\frac{V}{m}))\Big]x,x>
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Sonuç olarak f sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$
\int_0^1 < f\big(A+t\eta(B,A)\big)x,x> dt =< \int_0^1 f\big(A+t\eta(B,A)\big)dtx,x>
$$

ve (3.1.6) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
f\Big(\frac{A+V}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{3A+V}{4}\Big)+f\Big(\frac{A+3V}{4}\Big)\Big] &\leq \int_0^1 < f\big(A+t\eta(B,A)\big)x,x> dt \\
&\leq \frac{1}{2}\Big[\Big((1-\frac{1}{2^\alpha})f(A)+f(\frac{A+V}{2})\Big) \\
&\quad +\frac{m}{2^\alpha}\Big(f\big((1-\frac{1}{2m})A+\frac{V}{2m}) \\
&\quad +f\big((1-\frac{1}{m})A+\frac{V}{m})\Big)\Big] \\
&\leq f(A)+\frac{m}{2^\alpha}f(\frac{B}{m})
\end{aligned}
$$

olup istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Lemma 3.1.2 $S \subseteq [0,b^*]$, $b^*>0$ kümesi $\eta: S\times S\to\mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks açık bir küme ve $f: S\to\mathbb{R}$ fonksiyonu S üzerinde diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda spektrumları S de olan her $A,B\in B(H)_{sa}$ operatörleri, $V=A+\eta(B,A), A<V$ için $(\alpha,m)\in(0,1]\times(0,1]$ ve $f'\in L([A,A+\eta(B,A)])$ olup aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$
\begin{aligned}
-\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} &+ \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx \\
&= \frac{\eta(B,A)}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(A+t\eta(B,A))dt. \quad (3.1.11)
\end{aligned}
$$

İspat. Lemmanın iddiasına göre gerekli değişken değiştirme ve integral alma işlemlerini uygularsak

$$\begin{aligned}
\frac{\eta(B,A)}{2}\int_0^1(1 &- 2t)f'(A+t\eta(B,A))dt \\
&= \frac{\eta(B,A)}{2}\int_A^{A+\eta(B,A)}\frac{1}{\eta(B,A)}\left(1-\frac{2(x-A)}{\eta(B,A)}\right)f'(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_A^{A+\eta(B,A)}f'(x)dx-\frac{1}{2}\int_A^{A+\eta(B,A)}\frac{2xf'(x)}{\eta(B,A)}dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_A^{A+\eta(B,A)}\frac{2Af'(x)}{\eta(B,A)}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(A+\eta(B,A))-f(A)}{2}-\frac{1}{\eta(B,A)}\Big[xf(x)\Big]_A^{A+\eta(B,A)} \\
&\quad +\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)}f(x)dx+\frac{A(f(A+\eta(B,A))-f(A))}{\eta(B,A)} \\
&= \frac{f(A+\eta(B,A))-f(A)}{2}-\frac{(A+\eta(B,A))f(A+\eta(B,A))-Af(A)}{\eta(B,A)} \\
&\quad +\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)}f(x)dx+\frac{A(f(A+\eta(B,A))-f(A))}{\eta(B,A)} \\
&= \frac{f(A+\eta(B,A))-f(A)}{2} \\
&\quad +\frac{f(A+\eta(B,A))(A-(A+\eta(B,A)))+f(A)(-A+A)}{\eta(B,A)} \\
&\quad +\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)}f(x)dx \\
&= -\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2}+\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)}f(x)dx
\end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.2 $S\subseteq[0,b^*], b^*>0$ kümesi $\eta: S\times S\to\mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks açık bir küme, $f: S\to\mathbb{R}$ fonksiyonu S üzerinde diferensiyellenebilir ve $f'\in L([A,A+\eta(B,A)])$ olsun. Bu durumda spektrumları S de olan her $A,B\in B(H)_{sa}$ operatörleri ve $V = A+\eta(B,A)$ $A<V$ için $|f'|$ P_{AV} η yolu üzerinde η ya göre operatör $(\alpha,m),(\alpha,m)\in(0,1]\times(0,1]$ preinveks ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} &- \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{(A+\eta(B,A)}f(x)dx\Big| \\
&\leq \frac{\eta(B,A)}{2}\Big[v_2|f'(A)|+mv_1|f'(\frac{B}{m})|\Big] \qquad (3.1.12)
\end{aligned}$$

burada $v_1=\frac{1+\alpha.2^{\alpha}}{2^{\alpha}(1+\alpha)(2+\alpha)}$ ve $v_2=\frac{1}{2}-v_1$ dir.

İspat. Lemma (3.1.2) e göre

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} &- \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{(A+\eta(B,A))} f(x)dx\Big| \\ &\leq \frac{\eta(B,A)}{2}\int_0^1 |(1-2t)| \\ &\quad |f'(A+t\eta(B,A))|dt. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

yazabiliriz. $|f'|$ P_{AV} η yolu üzerinde η ya göre operatör $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ preinveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t||f'(A+t\eta(B,A))|dt &\leq |f'(A)|\int_0^1 |1-2t|(1-t^\alpha)dt \\ &+ m|f'(\frac{B}{m})|\int_0^1 t^\alpha|1-2t|dt \\ &= (\frac{1}{2}-v_1)|f'(A)| \\ &+ mv_1|f'(\frac{B}{m})| \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

yazabiliriz. Burada

$$\int_0^1 |1-2t|t^\alpha dt = \frac{1+\alpha.2^\alpha}{2^\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)} = v_1$$

ve

$$\int_0^1 |1-2t|(1-t^\alpha)dt = \frac{1}{2} - \frac{1+\alpha.2^\alpha}{2^\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)} = \frac{1}{2} - v_1$$

dir. (3.1.12) de (3.1.13) yi kullanırsak gerekli eşitsizliği elde ederiz ve böylece teorem ispatı tamamlanır.

3.2 Hilbert Uzayında Operatör (α, m)-Preinveks Fonksiyonlar İçin Yeni Eşitsizlikler

Şimdi türevinin mutlak değerinin bazı kuvvetlerinin operatör (α, m) preinveks olan fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edeceğiz.

Teorem 3.2.1 $S \subseteq [0, b^*]$, $b^* > 0$ kümesi $\eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks açık bir küme, $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu S üzerinde diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda spektrumları S de olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ operatörleri ve $V = A + \eta(B, A), A < V$ için $f' \in L([A, A+\eta(B,A)]), q > 1$ olup $|f'|^q$ fonksiyonu P_{AV} η yolu üzerinde η ya göre her $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ için operatör (α, m) preinveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} &- \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big| \\ &\leq \frac{\eta(B,A)}{2.(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{\alpha|f'(\alpha)|^q+m|f'(\frac{B}{m})|^q}{1+\alpha}\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (3.2.1)\end{aligned}$$

İspat. Lemma (3.1.2) i ve Hölder integral eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} - \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big| \\ &\leq \frac{\eta(B,A)}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(A+t\eta(B,A))|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.2.2)\end{aligned}$$

elde ederiz. $|f'|^q$ operatör (α, m)-preinveks fonksiyon olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$\Big|f'(A+t\eta(B,A))\Big|^q \leq (1-t^\alpha)\Big|f'(A)\Big|^q + mt^\alpha\Big|f'(\frac{B}{m})\Big|^q$$

yazabiliriz. Her $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big|f'(A+t\eta(B,A))\Big|^q dt &\leq |f'(A)|^q\int_0^1(1-t^\alpha)dt + m|f'(\frac{B}{m})|^q\int_0^1 t^\alpha dt \\ &= \frac{\alpha}{1+\alpha}|f'(A)|^q + \frac{m}{1+\alpha}|f'(\frac{B}{m})|^q\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki ifade (3.2.2) numaralı eşitsizlikte yerine konulursa ispat tamamlanır. İşlemi hesaplarken doğru olan aşağıdaki eşitliği kullandık,

$$\int_0^1 |1-2t|^p dt = \frac{1}{p+1}$$

Sonuç 3.2.1 Teorem 3.2.1 de özel olarak $\eta(B,A) = B - A$ alınırsa aşağıdaki eşitsizliği elde edilir :

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(A)+f(B)}{2} &- \frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx\Big| \\ &\leq \frac{B-A}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{\alpha|f'(A)|^q+m|f'(\frac{B}{m})|^q}{1+\alpha}\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (3.2.3)\end{aligned}$$

burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir.

Teorem 3.2.2 $S \subseteq [0, b^*]$, $b^* > 0$ kümesi $\eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks açık bir küme, $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu S üzerinde diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda spektrumları S de olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ operatörleri ve $V = A + \eta(B,A), A < V$ için $f' \in L([A, A+\eta(B,A)]), q \geq 1$ olup $|f'|^q$ fonksiyonu P_{AV} η yolu üzerinde η ya göre her $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ için operatör (α, m) preinveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} - \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big| \\ &\leq \frac{\eta(B,A)}{2}(\frac{1}{2})^{1-\frac{1}{q}}\left[v_2|f'(A)|^q + mv_1|f'(\frac{B}{m})|^q\right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

burada $v_1 = \frac{1+\alpha.2^\alpha}{2^\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)}$ ve $v_2 = \frac{1}{2} - v_1$ dir.

İspat. Lemma 3.1.2 ve Power-Mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} &- \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big| \\ &\leq \frac{\eta(B,A)}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\left(\int_0^1 |1-2t||f'(A+t\eta(B,A))|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

eşitsizlik elde edilir, $|f'|^q$ fonksiyonu S de operatör (α, m)-preinveks olduğundan her $t \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için

$$\begin{aligned} \int_0^1 |1-2t||f'(A+t\eta(B,A))|^q dt &\leq \int_0^1 |1-2t|\Big[(1-t^\alpha)|f'(A)|^q \\ &\quad +mt^\alpha|f'(B)|^q\Big]dt \\ &= |f'(A)|^q \int_0^1 |1-2t|(1-t)^\alpha dt \\ &\quad +m|f'(B)|^q \int_0^1 |1-2t|t^\alpha dt \\ &= v_2|f'(A)|^q + mv_1|f'(B)|^q \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

olup (3.2.5) te (3.2.6) yerine yazılırsa, (3.2.4) numaralı eşitsizlik elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.2 : Teorem 3.2.2 de özel olarak $\eta(B,A) = B - A$ seçersek aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz :

$$\begin{aligned} \Big|\frac{f(A)+f(B)}{2} &- \frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx\Big| \\ &\leq \frac{B-A}{2}(\frac{1}{2})^{1-\frac{1}{q}}\left[v_2|f'(A)|^q + mv_1|f'(B)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

burada $v_1 = \frac{1+\alpha.2^\alpha}{2^\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)}$ ve $v_2 = \frac{1}{2} - v_1$ dir.

Lemma 3.2.1 $S \subseteq [0, b^*]$, $b^* > 0$ kümesi $\eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks açık bir küme ve $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu S üzerinde diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda spektrumları S de olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ operatörleri, $V = A + \eta(B, A), A < V$ için $(\alpha, m) \in (0, 1] \times (0, 1]$ ve $f' \in L([A, A + \eta(B, A)])$ olup aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta(B,A)} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx \quad &- \quad f\left(\frac{2A + \eta(B,A)}{2}\right) \\ &= \quad \eta(B,A)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(A + t\eta(B,A))dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(A + t\eta(B,A))dt\right]\end{aligned}$$

İspat. $A, A + \eta(B, A) \in S$ olsun. Her $t \in [0, 1]$ için S, η ya göre inveks bir küme olduğundan $A + \eta(B, A) \in S$ dır. Şimdi

$$\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(A + t\eta(B,A))dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(A + t\eta(B,A))dt$$

integralini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(A + t\eta(B,A))dt \quad &+ \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(A + t\eta(B,A))dt \\ &= \quad \left[\frac{tf(A + t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(t-1)f(A + t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &\quad -\frac{1}{\eta(B,A)} \int_0^1 f(A + t\eta(B,A))dt \\ &= \quad \frac{1}{\eta(B,A)} f(\frac{2A + \eta(B,A)}{2}) \\ &\quad -\frac{1}{[\eta(B,A)]^2} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx. \qquad (3.2.8)\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3 $S \subseteq [0, b^*]$,$b^* > 0$, $\eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks açık bir küme, $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda spektrumları S de olan her $A, B \in B(H)_{sa}, V = A + \eta(B, A)$ $A < V$ için $|f'|$ fonksiyonu P_{AV}, η yolu üzerinde η ya göre her $(\alpha, m) \in (0, 1] \times (0, 1]$ için operatör (α, m) preinveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\eta(B,A)} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx - f\left(\frac{2A + \eta(B,A)}{2}\right)\right| \\ &\leq \eta(B,A)\left[\frac{f'(A)}{4} + \frac{\left((\frac{1}{2})^{\alpha+1} - 1\right)\left(f'(A) - mf'(\frac{B}{m})\right)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right] \qquad (3.2.9)\end{aligned}$$

İspat. (3.2.8) ve $|f'|$ fonksiyonu operatör (α, m) preinveks olduğundan:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\eta(A,B)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx \right. &- \left. f\Big(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}\Big)\right| \\
&\leq \eta(B,A)\Big[\int_0^{\frac{1}{2}} t|f'(A+t\eta(B,A))|dt \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)|f'(A+t\eta(B,A))|dt\Big] \\
&\leq \eta(B,A)\Big[\int_0^{\frac{1}{2}} t[(1-t^\alpha)|f'(A)| + mt^\alpha|f'(\frac{B}{m})|]dt \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)[(1-t^\alpha)|f'(A)| + mt^\alpha|f'(\frac{B}{m})|]dt\Big] \\
&= \eta(B,A)\Big[\int_0^{\frac{1}{2}} t|f'(A)| - t^{\alpha+1}|f'(A)| + mt^{\alpha+1}|f'(\frac{B}{m})|dt \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 f'(A) - t^\alpha|f'(A)| + mt^\alpha|f'(\frac{B}{m})| \\
&\quad -tf'(A) + t^{\alpha+1}|f'(A)| - mt^{\alpha+1}|f'(\frac{B}{m})|dt\Big] \\
&= \eta(B,A)\Big[\frac{|f'(A)|t^2}{2} - \frac{t^{\alpha+2}|f'(A)|}{\alpha+2} + \frac{mt^{\alpha+2}|f'(\frac{B}{m})|}{\alpha+2}\Big]_0^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \Big[t|f'(A)| - \frac{t^{\alpha+1}|f'(A)|}{\alpha+1} + \frac{mt^{\alpha+1}|f'(\frac{B}{m})|}{\alpha+1} \\
&\quad - \frac{t^2|f'(A)|}{2} + \frac{t^{\alpha+2}|f'(A)|}{\alpha+2} - \frac{mt^{\alpha+2}|f'(\frac{B}{m})|}{\alpha+2}\Big]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \eta(B,A)\Big[\frac{f'(A)}{8} - \frac{(\frac{1}{2})^{\alpha+2}|f'(A)|}{\alpha+2} + \frac{m(\frac{1}{2})^{\alpha+2}|f'(\frac{B}{m})|}{\alpha+2} \\
&\quad + |f'(A)| - \frac{|f'(A)|}{\alpha+1} + \frac{m|f'(\frac{B}{m})|}{\alpha+1} - \frac{|f'(A)|}{2} \\
&\quad + \frac{|f'(A)|}{\alpha+2} - \frac{m|f'(\frac{B}{m})|}{\alpha+2} - \frac{|f'(A)|}{2} \\
&\quad + \frac{(\frac{1}{2})^{\alpha+1}|f'(A)|}{\alpha+1} - \frac{m(\frac{1}{2})^{\alpha+1}|f'(\frac{B}{m})|}{\alpha+1} \\
&\quad + \frac{|f'(A)|}{8} - \frac{(\frac{1}{2})^{\alpha+2}|f'(A)|}{\alpha+2} + \frac{m(\frac{1}{2})^{\alpha+2}|f'(\frac{B}{m})|}{\alpha+2} \\
&= \eta(B,A)\Big[\frac{|f'(A)|}{4} + \frac{\big((\frac{1}{2})^{\alpha+1}-1\big)|f'(A)|}{\alpha+1} \\
&\quad + \frac{(1-(\frac{1}{2})^{\alpha+1})m|f'(\frac{B}{m})|}{\alpha+1} \\
&\quad + \frac{\big(1-2(\frac{1}{2})^{\alpha+2}\big)|f'(A)|}{\alpha+2} + \frac{\big(-1+2(\frac{1}{2})^{\alpha+2}\big)m|f'(\frac{B}{m})|}{\alpha+2}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \eta(B,A)\Big[\frac{f'(A)}{4} + \frac{(1-(\frac{1}{2})^{\alpha+1})(mf'(\frac{B}{m}) - f'(A))}{\alpha+1} \\
&\quad + \frac{(1-2(\frac{1}{2})^{\alpha+2})(f'(A) - mf'(\frac{B}{m}))}{\alpha+2}\Big] \\
&= \eta(B,A)\Big[\frac{f'(A)}{4} + \frac{((\frac{1}{2})^{\alpha+1}-1)(f'(A) - mf'(\frac{B}{m}))}{\alpha+1} \\
&\quad + \frac{(1-(\frac{1}{2})^{\alpha+1})(f'(A) - mf'(\frac{B}{m}))}{\alpha+2}\Big] \\
&= \eta(B,A)\Big[\frac{|f'(A)|}{4} + \frac{((\frac{1}{2})^{\alpha+1}-1)(\alpha f'(A) - \alpha mf'(\frac{B}{m}) + 2f'(A))}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \\
&\quad - \frac{2mf'(\frac{B}{m}) - \alpha f'(A) + \alpha mf'(\frac{B}{m}) - f'(A) + mf'(\frac{B}{m})}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\Big] \\
&= \eta(B,A)\Big[\frac{f'(A)}{4} + \frac{((\frac{1}{2})^{\alpha+1}-1)(f'(A) - mf'(\frac{B}{m}))}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\Big]
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.3 Teorem 3.2.4 te özel olarak $\alpha = 1$ alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
\eta(B,A)\Big[\frac{f'(A)}{4} + \frac{-f'(A) + mf'(\frac{B}{m})}{8}\Big] &= \eta(B,A)\Big[\frac{2f'(A) - f'(A) + mf'(\frac{B}{m})}{8}\Big] \\
&\leq \eta(B,A)\Big[\frac{f'(A) + f'(B)}{8}\Big].
\end{aligned}
$$

3.3 Türevinin Mutlak Değerinin Belirli Kuvvetleri Operatör (α, m)-Preinveks Olan Fonksiyonlar İçin Bazı Yeni Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Lemma 3.3.1 $S \subseteq [0, b^*]$, $b^* > 0$ kümesi $\eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks açık bir küme ve $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu S üzerinde diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda spektrumları S de olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ operatörleri ve $V = A + \eta(B,A), A < V$ için $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1], f' \in L([A, A + \eta(B,A)])$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{\eta(A,B)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx &- f\Big(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}\Big)\Big| \\
&= \eta(B,A)\Big[\int_0^{\frac{1}{2}} t|f'(A+t\eta(B,A))|dt \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)|f'(A+t\eta(B,A))|dt\Big] \qquad (3.3.1)
\end{aligned}
$$

İspat. $A, A+\eta(B,A) \in S$ olsun. Her $t \in [0,1]$ için S, η ya göre inveks açık bir küme olduğundan $A+\eta(B,A) \in S$ dir. Şimdi

$$\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(A+t\eta(B,A))dt \quad + \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(A+t\eta(B,A))dt$$

integralini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(A+t\eta(B,A))dt \quad + & \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(A+t\eta(B,A))dt \\
= & \quad \left[\frac{tf(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(t-1)f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
& -\frac{1}{\eta(B,A)}\int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt \\
= & \quad \frac{1}{\eta(B,A)}f(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}) \\
& -\frac{1}{[\eta(B,A)]^2}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx
\end{aligned}$$

bulunur. Burada her iki tarafı $\eta(B,A)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
& \eta(B,A)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t|f'(A+t\eta(B,A))|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)|f'(A+t\eta(B,A))|dt\right] \\
= & \quad f\left(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}\right) - \frac{1}{\eta(A,B)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx
\end{aligned}$$

elde ediliriz ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.1 $S \subseteq [0,b^*]$, $b^* > 0$ kümesi $\eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks açık bir küme, $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu S üzerinde diferensiyellenebilir olsun. Ayrıca $A, B \in B(H)_{sa}, Sp(A), Sp(B) \in S$ ve $V = A+\eta(B,A), A < V$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f'|^q \in L([A, A+\eta(B,A)])\,, q > 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu P_{AV} η yolu üzerinde η ya göre her $(\alpha,m) \in (0,1] \times (0,1]$ için operatör (α,m) preinveks fonksiyon ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{\eta(A,B)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx - f\left(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}\right)\right| \\
\leq & \quad \eta(B,A)\left(\frac{1}{2^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(A)|^q(v_1-1)}{2v_1} + \frac{m|f'(\frac{B}{m})|^q}{2v_1}\right]^{\frac{1}{q}} \\
& +\left[\frac{|f'(A)|^q(v_1-v_2)}{2v_1} + \frac{mv_2|f'(\frac{B}{m})|^q}{2v_1}\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (3.3.2)
\end{aligned}$$

burada $v_1 = 2^\alpha(1+\alpha)$ ve $v_2 = 2^{\alpha+1}-1$ dir.

İspat. Teoremin iddiası, (3.3.1) ve Hölder integral eşitsizliğini kullanırsak

$$\Big|\frac{1}{\eta(A,B)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx - f\Big(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}\Big)\Big|$$

$$\leq \eta(B,A)\Big[\int_0^{\frac{1}{2}} t|f'(A+t\eta(B,A))|dt \tag{3.3.3}$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)|f'(A+t\eta(B,A))|dt\Big]$$

$$\leq \eta(B,A)\Big[\Big(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(A+t\eta(B,A))|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}} dt \tag{3.3.4}$$

$$+\Big(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(A+t\eta(B,A))|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}} dt\Big]. \tag{3.3.5}$$

yazılabilir. Şimdi (3.3.4) ve (3.3.5) eşitsizliğindeki integralleri hesaplamaya çalışalım. $|f'|^q, q>1$ fonksiyonu S de operatör (α,m)-preinveks olduğundan her $t\in[0,1]$ için,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(A+t\eta(B,A))|^q dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t^\alpha)|f'(A)|^q + mt^\alpha|f'(\frac{B}{m})|^q dt \tag{3.3.6}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(A+t\eta(B,A))|^q dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t^\alpha)|f'(A)|^q + mt^\alpha|f'(\frac{B}{m})|^q dt \tag{3.3.7}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^p dt = \frac{1}{2^{p+1}(p+1)} \tag{3.3.8}$$

buluruz. (3.3.6), (3.3.7) ve (3.3.8) ifadeleri (3.3.3) te yerine yazılırsa

$$\leq \eta(B,A)\Big(\frac{1}{2^{p+1}(p+1)}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t^\alpha)|f'(A)|^q + mt^\alpha|f'(\frac{B}{m})|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Big(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t^\alpha)|f'(A)|^q + mt^\alpha|f'(\frac{B}{m})|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}\Big]$$

$$\leq \eta(B,A)\Big(\frac{1}{2^{p+1}(p+1)}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big[\frac{|f'(A)|^q(v_1-1)}{2v_1} + \frac{m|f'(\frac{B}{m})|^q}{2v_1}\Big]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Big[\frac{|f'(A)|^q(v_1-v_2)}{2v_1} + \frac{mv_2|f'(\frac{B}{m})|^q}{2v_1}\Big]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.3.1 (3.3.2) de özel olarak $\alpha=1$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} - \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big|$$

$$\leq \eta(B,A)\Big(\frac{1}{2^{p+1}(p+1)}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big[\frac{3|f'(A)|^q}{8} + \frac{m|f'(\frac{B}{m})|^q}{8}\Big]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Big[\frac{|f'(A)|^q}{8} + \frac{3m|f'(\frac{B}{m})|^q}{8}\Big]^{\frac{1}{q}}.$$

Lemma 3.3.2 $S \subseteq [0, b^*]$, $b^* > 0$ kümesi $\eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks açık bir küme ve $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu S üzerinde diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda spektrumları S de olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ operatörleri, $V = A + \eta(B, A), A < V$ için $(\alpha, m) \in (0, 1] \times (0, 1]$ ve $f'' \in L([A, A + \eta(B, A)])$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{f(A) + f(A + \eta(B, A))}{2} + \frac{1}{\eta(B, A)} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx$$
$$= \frac{(\eta(B, A))^2}{2} \int_0^1 t(1-t) f''(A + t\eta(B, A))dt. \tag{3.3.9}$$

İspat. $A, A + \eta(B, A) \in S$ olsun. Her $t \in [0, 1]$ için S, η ya göre inveks açık bir küme olduğundan $A + \eta(B, A) \in S$ dır. Şimdi

$$\int_0^1 t(1-t) f''(A + t\eta(B, A))dt$$

integralini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\int_0^1 t(1-t) f''(A + t\eta(B, A))dt$$
$$= \left(\frac{t(1-t) f'(A + t\eta(B, A))}{\eta(B, A)}\right)_0^1 - \frac{1}{(\eta(B, A))} \int_0^1 (1 - 2t) f'(A + t\eta(B, A))dt$$
$$= \frac{f(A) + f(A + \eta(B, A))}{(\eta(B, A))^2} + \frac{2}{(\eta(B, A))^3} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx \tag{3.3.10}$$

bulunur. Şimdi (3.3.10) integralini düzenleyelim. Yani,

$$\int_0^1 t(1-t) f''(A + t\eta(B, A))dt$$
$$= \frac{2}{(\eta(B, A))^2} \left(\frac{f(A) + f(A + \eta(B, A))}{2} + \frac{1}{\eta(B, A)} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\right)$$

olup, (3.3.10) deki eşitliğin her iki tarafını $\frac{(\eta(B,A))^2}{2}$ ile çarparsak (3.3.9) elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.2 $S \subseteq [0, b^*]$, $b^* > 0$ kümesi $\eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks açık bir küme, $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu S üzerinde diferensiyellenebilir olsun. Ayrıca $A, B \in B(H)_{sa}, Sp(A), Sp(B) \in S$ ve $V = A + \eta(B, A), A < V$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f''| \in L([A, A+\eta(B, A)])$ için $|f''|$ fonksiyonu P_{AV} η yolu üzerinde η ya göre her $(\alpha, m) \in (0, 1] \times (0, 1]$ için operatör (α, m) preinveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\Big|\frac{f(A) + f(A + \eta(B, A))}{2} - \frac{1}{\eta(B, A)} \int_A^{(A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big|$$
$$\leq \frac{(\eta(B, A))^2}{2}\Big[\frac{|f''(A)|}{6} + \frac{m|f''(\frac{B}{m})| - |f''(A)|}{\alpha + 2}$$
$$+\frac{|f''(A)| - m|f''(\frac{B}{m})|}{\alpha + 3}\Big]. \tag{3.3.11}$$

İspat. $A, A+\eta(B,A) \in S$ olsun. Her $t \in [0,1]$ için S, η ya göre inveks açık bir küme olduğundan $A+\eta(B,A) \in S$ dır. $|f''|$ operator (α,m)-preinveks olduğundan ve (3.3.9) dan

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} &+ \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx \\
&= \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\int_0^1 t(1-t)f''(A+t\eta(B,A))dt\Big| \\
&\leq \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\Big[\int_0^1 t(1-t)\Big((1-t^\alpha)|f''(A)| \\
&\qquad +mt^\alpha|f''(\frac{B}{m})|\Big)dt\Big] \\
&\leq \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\Big[|f''(A)|\Big(\frac{t^2}{2}-\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^{\alpha+3}}{\alpha+3}\Big)_0^1 \\
&\qquad +|f''(\frac{B}{m})|\Big(\frac{mt^{\alpha+2}}{\alpha+2}-\frac{mt^{\alpha+3}}{\alpha+3}\Big)_0^1\Big] \\
&\leq \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\Big[\frac{|f''(A)|}{6}+\frac{m|f''(\frac{B}{m})|-|f''(A)|}{\alpha+2} \\
&\qquad +\frac{|f''(A)|-m|f''(\frac{B}{m})|}{\alpha+3}\Big]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.2 (3.3.11) de özel olarak $\alpha = 1$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} - \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big| \\
\leq\ & \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\Big[\frac{|f''(A)|}{6}+\frac{m|f''(\frac{B}{m})|-|f''(A)|}{3} \\
&+\frac{|f''(A)|-m|f''(\frac{B}{m})|}{4}\Big] \\
=\ & \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\Big[\frac{|f''(A)|+m|f''(\frac{B}{m})|}{12}\Big] = \frac{(\eta(B,A))^2}{24}\Big[|f''(A)|+m|f''(\frac{B}{m})|\Big].
\end{aligned}$$

Teorem 3.3.3 $S \subseteq [0,b^*]$, $b^* > 0$ kümesi $\eta : S \times S \to \mathbb{R}$ dönüşümüne göre inveks açık bir küme, $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu S üzerinde diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda spektrumları S de olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ operatörleri ve $V = A+\eta(B,A), A < V$ için $|f''|^q \in L([A, A+\eta(B,A)])\,, q > 1$ olup $|f''|^q$ fonksiyonu P_{AV} η yolu üzerinde η ya göre her $(\alpha,m) \in (0,1] \times (0,1]$ için operatör (α,m) preinveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} - \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{(A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big|$$
$$\leq \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Big[\frac{|f''(A)|^q}{6}+\frac{m|f''(\frac{B}{m})|^q-|f''(A)|^q}{\alpha+2}$$
$$+\frac{|f''(A)|^q-m|f''(\frac{B}{m})|^q}{\alpha+3}\Big] \tag{3.3.12}$$

İspat. $A, A+\eta(B,A)\in S$ olsun. Her $t\in[0,1]$ için S, η ya göre inveks açık bir küme olduğundan $A+\eta(B,A)\in S$ dır. $|f''|^q$ operator (α,m)-preinveks , (3.3.9) ve Power-Mean Eşitsizliğinden

$$\Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} + \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx$$
$$\leq \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\int_0^1 t(1-t)f''(A+t\eta(B,A))dt\Big|$$
$$\leq \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\Bigg[\left(\int_0^1(t-t^2)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\left(\int_0^1(t-t^2)|f''(A+t\eta(B,A))|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$$\leq \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\Big[\left(\frac{1}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\int_0^1(t-t^2)\Big((1-t^\alpha)|f''(A)|^q$$
$$+mt^\alpha|f''(\frac{B}{m})|^q\Big)dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Big]$$
$$\leq \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg[|f''(A)|^q\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right)_0^1$$
$$+|f''(\frac{B}{m})|^q\left(\frac{mt^{\alpha+2}}{\alpha+2}-\frac{mt^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right)_0^1\Bigg]$$
$$\leq \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Big[\frac{|f''(A)|^q}{6}+\frac{m|f''(\frac{B}{m})|^q-|f''(A)|^q}{\alpha+2}$$
$$+\frac{|f''(A)|^q-m|f''(\frac{B}{m})|^q}{\alpha+3}\Big]$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.3 (3.3.12) de özel olarak $\alpha = 1$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \Big|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2} - \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big| \\
\leq \; & \frac{(\eta(B,A))^2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Big[\frac{|f''(A)|^q}{6} + \frac{m|f''(\frac{B}{m})|^q - |f''(A)|^q}{3} \\
& + \frac{|f''(A)|^q - m|f''(\frac{B}{m})|^q}{4}\Big] \\
= \; & \frac{(\eta(B,A))^2}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^q\Big[|f''(A)|^q + m|f''(\frac{B}{m})|^q\Big].
\end{aligned}$$

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak, bu yüksek lisans tez çalışmasında;

1. Bir Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için operatör (α, m) preinveks kavramı verildi.
2. Bu yeni tanım yardımıyla yeni eşitsizlikler ifade ve ispat edildi.
3. Elde edilen bu sonuçlar uluslararası sempozyumlarda sözlü olarak sunuldu [19], [20].
4. Sunulan bildirilerden bir tanesi uluslararası hakemli bir dergide basıldı [21], diğeri ise hakem sürecindedir.

Bu tezden elde edilen sonuçlar doğrultusundaki,

1. Sınırlı operatörler teorisi ile eşitsizlikler teorisi alanında çalışmak isteyen bilim insanlarına preinveksliğin diğer çeşitlerini bir Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonlarına taşıyabilmesi için yol ve yöntem göstereceğini,
2. Bu yüksek lisans tez çalışmasında elde edilen sonuçların daha da genelleştirilebileceğini,
3. Böylece yapılacak olan bu çalışmalar ile bu alandaki boşlukların doldurulabileceğini

düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Elster K. H., Nehse R., 1980 *Optimality conditions fo some non-convex problems*, Springer-Verlog, New York,

[2] Hayaski M., Komiya H., 1980 *Perfect duality for convexlike programs*, J. Optim. Theory Appl. 38: 179-189.

[3] Hanson M. A., 1981 *On sufficency of the Kuhn-Tucker conditions*, J. Math. Anal. Appl., 80: 545-550.

[4] Craven B. D., 1981 *Invex functions and constrained local minima*, Bull. Austral. Math. Soc. 24: 357-366.

[5] Craven B. D., Glover B. M., 1985 *Invex functions and duality*, J. Austral Math. Soc. Ser. A. 39: 1-20.

[6] Ben-Israel A., Mond B., 1986 *What is invexity?*, J. Austral Math. Soc. Ser. B. 28: 1-29.

[7] Martin D. H., 1985 *The essence of invexity*, J.Optim. Theory Appl. 47: 65- 76.

[8] Hanson M. A., Mond B., 1987 *Convex Transformable Probamming Problems and Invexity*, J. Inf. Opt. Sci. 8: 201- 207.

[9] Barani A., Ghazanfari A.G., Dragomir S.S., 2012 *Hermite-Hadamard inequality for functions whose derivatives absolute values are preinvex*, J. Inequal. Appl. Vol: Article ID 247.

[10] Ghazanfari A. G., Shakoori M., Barani A.,Dragomir S. S., *Hermite-Hadamard type inequality for operator preinvex functions*, math. FA, 4(2013); Available online at http://arXiv:1306.0730vl.

[11] Wang S. H., Liu X. M., 2015 *Hermite-Hadamard type inequalities for operator s-preinvex functions*, J. Nonlinear Sci. Appl., 8, 1070-1081.

[12] Wang S. H., Liu X. M., 2017 *Hermite-Hadamard type inequalities for operator α-preinvex functions*, J. Ana. Num. Theor. 5, No. 1, 13-17

[13] Antczak T., 2005 *Mean value in invexity analysis*, Nonlinear Anal., 60: 1473-1484.

[14] Mohan S. R., Neogy S. K., 1995 On invex sets and preinvex function, J. Math. Anal. Appl., 189: 901-908; Available online at http://dx.doi.org/10.1006/jmaa. 1995-1057.

[15] Yang X. M., Li D., 2001 *On properties of preinvex functions*, J. Math. Anal. Appl., 256: 229-241

[16] Furuta T., Mićić Hot J., Pečarić J., Seo Y., Mond-Pečarić, 2015 *Method in Operator Inequalities*, Monograhs in Inequalities, Element, Zagreb.

[17] Dragomir S. S., 2011 *Hermite Hadamard type inequalities for operator convex functions*, Appl. Math. Comput. 218(3): 766-772.

[18] Sarikaya M., Bozkurt H., Alp N., *On Hermite-Hadamard Type Integral Inequalities for preinvex and log-preinvex functions*, ¡arXiv:1203.4759v1¿

[19] Unluyol E., Karbuz H., *Operator (α, m)-preinvex functions*, 3rd International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES 2018), 04-06 May 2018, Girne, Cyprus, p. 194.

[20] Unluyol E., Karbuz H., *New Inequalities for Operator (α, m)-preinvex Functions in Hilbert Spaces*, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018), Ordu University, Ordu, 27-29 June 2018, p. 167-168.

[21] Unluyol E., Karbuz H., *Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities for Functions whose Derivatives are Operator (α, m)-Preinvex*, Trans. J. Math. and Mec. (TJMM), 2018, 10(2) 131-139.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Hümeyra KARBUZ
Doğum Yeri	:	Düzköy, Trabzon
Doğum Tarihi	:	11.03.1994
Medeni Hali	:	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Akyazı Mah.Huzur cad. No:32 D:4 Merkez Ordu humeyrakarbuz15@hotmail.com
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2016
Çalıştığı Yer	:	Gölçayır Ortaokulu, 2016 − 2017, Açı Eğitim Fabrikası, 2017 − 2019,