T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEOMETRİK – ARİTMETİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE ORTALAMALARA UYGULAMALARI

MAHMUTCAN CARLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Mahmutcan CARLI tarafından hazırlanan ve Prof. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "Geometrik – Aritmetik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Bazı İntegral Eşitsizlikleri ve Ortalamalara Uygulamaları" adlı bu tez, jürimiz tarafından 04 / 07 / 2019 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Selahattin MADEN

Başkan : Prof. Dr. Selahattin MADEN
Matematik, Ordu Üniversitesi — İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN
Matematik, Giresun Üniversitesi — İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ
Matematik, Ordu Üniversitesi — İmza :

ONAY:

16./07/2019.. tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 16/07/2019. tarih ve 2019./381. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Enstitü Müdürü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

MAHMUTCAN CARLI

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

GEOMETRİK – ARİTMETİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE ORTALAMALARA UYGULAMALARI

MAHMUTCAN CARLI

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2019
Yüksek Lisans Tezi, 90s.

Danışman: Prof. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde eşitsizlikler teorisinin tarihsel gelişimini veren bir giriş yapılmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde geometrik-Aritmetik konveks fonksiyonlar ve bu fonksiyonlarla ilgili Hermite - Hadamard tipli bazı integral eşitsizlikleri ve bu eşitsizliklerin ortalamalara uygulamaları ele alınmıştır. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Konveks küme, Konveks fonksiyon, Geometrik-Aritmetik konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard eşitsizliği, İntegral ortalamaları.

ABSTRACT

SOME HERMITE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALIIES AND APPLICATIONS TO MEANS FOR GEOMETRIC-ARITMETICALLY CONVEX FUNCTIONS

MAHMUTCAN CARLI

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2019
MSc. Thesis, 90p.

Supervisor: Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis consists of four chapters. In the first chapter it is given an introduction historical development on inequalities theory. We given some definitions and theorems which are used in this thesis in the second chapter. In the third chapter, it is given some Hermite - Hadamard type integral inequalities and applications to means for geomeric-aritmetically convex functions. It is given results and propositions in the fourth chapter.

Key Words: Convex set, Convex function, geometric-aritmetically convex functıons, Integral means, Hermite - Hadamard inequalitiy.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Prof. Dr. Selahattin MADEN’ e içten teşekkürlerimi sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$L(I)$	: Log Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	: Godunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(I)$	: Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$P(I)$	: P- Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathbb{R}^+$	: $(0,\infty)$ Aralığı
$\mathbb{R}_0^+$	: $[0,\infty)$ Aralığı

${}_{R}D^{\alpha}_{a+}$	: α −Mertebeden Riemann Liouville Kesirli Türev
${}_{H}D^{\alpha}_{a+}$	: α −Mertebeden Hadamard Kesirli Türev
f'	: f Fonksiyonun Birinci Mertebeden Türevi
f''	: f Fonksiyonun İkinci Mertebeden Türevi
f'''	: f Fonksiyonun Üçüncü Mertebeden Türevi
Γ	: Gamma Fonksiyonu
I	: $\mathbb{R}$'de herhangi bir aralık
I^0	: I'nın içi
$J(I)$	: Jensen-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$JQC(I)$	: Jensen-Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
${}_{R}J^{\alpha}$	: α −Mertebeden Riemann Liouville Kesirli İntegral
${}_{H}J^{\alpha}$	: α −Mertebeden Hadamard Kesirli İntegral
$K_m(b)$	: m −Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	: (α, m) − Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	: İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$L[a, b]$	: $[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilir Fonksiyonlar Kümesi
$\beta(x, y)$	: x, y Pozitif Reel Sayılarının Beta Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Matematiksel bir kavram olan konveksliğin günümüzde oldukça yaygın kullanıldığı alanlar vardır. Ne anlama geldiğini bilsin veya bilmesin, nasıl bir şekil veya cisim olduğunu görsün veya görmesin, insanlar hayatları boyunca konveks (dışbükey) ve konkav (içbükey) şekillerle veya cisimlerle her zaman karşılaşmışlardır ve bunları yaşamları boyunca günlük işlerinde, teknolojide, sanatta, tıpta, müzikte, fizikte, optimizasyonda, matematiksel programlamada, denge probleminde, mühendislikte ve diğer bilimsel alanlarda bir şekilde mutlaka kullanmışlardır. Yani konvekslik bir şekilde hayatımızda yer almıştır ve almaya da devam edecektir.

Konveks ve konkav kavramları günlük hayatımızda matematik dışında başka nerelerde ya da hangi bilim dallarında karşımıza çıkar? Bu soruya cevap vererek aynı zamanda konveksliğin diğer bilim dallarında ne kadar önemli bir yere sahip olduğunu ve insanlığa ne kadar yararlı olduğunu da ortaya koymuş olacağız.

1. Güzel Sanatlarda konvekslik kavramı: Güzel Sanatlar ile uğraşan öğrenciler veya sanatkârlar konvekslik ve konkavlık ile Öğrenme Kontrolü ve İncelik hakkında çalışmalar yapmaktadırlar. Bu çalışmalarda, öğrencilere, konveks veya konkav formdaki baskın, alt hâkim ve alt elementler arasındaki ince ilişkileri incelemeye yoğunlaşmaları istenir. Dikkatlice eksenel, düzlemsel ve yapılandırma eğrilerini oluşturarak, yüzey gerilimi, hacimsel hareket ve hiyerarşik ilişkilerle uygulama yapmaya başlarlar.

2. Finans matematiğinde konvekslik kavramı: Fiyat esnekliğinin rakamsal ölçütü olarak kullanılmak üzere modifiye durasyon (düzeltilmiş süre) kavramı geliştirilmiştir. Modifiye durasyon, pozisyonların faiz oranındaki değişim karşısında aldığı yeni değerin bulunması amacıyla kullanılmaktadır. Durasyon bir zaman ölçütü iken, modifiye durasyon bir faiz hassasiyet ölçütü olarak ortaya çıkmaktadır. Modifiye durasyon oldukça yararlı bir risk ölçütü olmasına ve faiz oranlarında meydana gelen küçük değişikler sonucu pozisyon değer değişimlerinde oldukça hassas sonuçlar vermesine karşın, özellikle faiz oranlarında meydana gelen büyük değişikliklerde hata payı yüksektir. Fiyat getiri arasındaki konveks yapıdan kaynaklanan modifiye durasyonun var olan hata payı, faiz şoku miktarı büyüdükçe daha da artmaktadır. Bu olgunun sebebi durasyonun, vadenin konveks bir fonksiyonu olmasından kaynaklanmaktadır. Diğer bir anlatımla, durasyon vade ile birlikte artmakta ancak artış değerleri aynı olmamaktadır.

Faiz hassasiyetinin ölçümünde modifiye durasyonun hata payının azaltılması amacıyla konveksite yaklaşımı kullanılmaktadır. Konveksite, durasyonun değişim oranını gösteren bir ölçüttür. Diğer bir ifadeyle, durasyon, fiyatın faiz oranına göre birinci türevi iken, konveksite ise ikinci türevdir. Konveksite değeri artı, eksi veya sıfır olabilmektedir.

3. Sağlık alanında konvekslik kavramı: Şüphesiz günümüzde en önemli yatırımlardan birisi de sağlığa yapılan yatırımdır ve tüm dünyada insan sağlığını daha mükemmel noktalara ulaştırmak için bilim adamları sürekli çalışmalar yapmaktadır ve yapmaya da devam edeceklerdir. Yapılan bu önemli çalışmalardan birisi de gözlerinden rahatsız olan insanların daha iyi görebilmelerini sağlamak için kullanılan lenslerdir.

Bir lens, ışığı kırmak için kullanılan şeffaf kavisli bir cihazdır ve genellikle camdan yapılır. Lensler için iki farklı şekil vardır. Bunlara konveks ve konkav denir. Bu lensler sayesinde insanların daha iyi görmeleri ve yaşam standartlarını yükseltmeleri sağlanır. Göz doktorları uzağı göremeyen miyop hastalarına daha düşük konkav numaralı camlı okuma gözlüğü, yakını göremeyen hipermetrop hastalarına ise daha güçlü konveks camlı okuma gözlükleri vermektedirler.

4. Fizikte konvekslik kavramı: Yansıtıcı yüzeyi çukur olan aynalara çukur ayna (konkav ayna = içbükey ayna) denir. Çukur ayna, cisimlerin görüntülerini büyütebilme ve gelen paralel ışınları bir noktada toplayabilme özelliğine sahiptir. Diş hekimleri tarafından kullanılır, Güneş ışınlarının odaklanması (bir noktada toplanması) sağlanır. Bu sayede çok yüksek sıcaklıklar elde edilir. Teleskop yapımında kullanılır. Mikroskopta incelenecek cismin üzerine ışık düşürmek için kullanılır.

Yansıtıcı yüzeyi tümsek olan aynalara tümsek ayna (konveks ayna = dış bükey ayna) denir. Tümsek ayna, cisimlerin görüntülerini küçültebilme ve gelen paralel ışınları dağıtma özelliğine sahiptir. Arabaların yan aynalarında, büyüteçlerde kullanılır.

5. Endüstride konvekslik kavramı: Ambalajlar ve kaplamalar çeşitli alanlarda ve çeşitli kombinasyonlu yapılarda düşünülmüştür ve sabit eğrilik alanlarındaki, yani

Öklid, küresel ve hiperbolik uzayda dışbükey gövdelerden oluşan paketlemeler ve kaplamalar ile ilgili problemlerle daima ilgilenilmiştir. Küre biçimindeki topların ambalajlanması, çoklu paketleme ve kaplama, uçaklarda dairesel paketleme ve dairesel kaplama vs. gibi konular bunlara örnek gösterilebilir

6. Biyolojide konvekslik kavramı: Biyologlar çokgenlerin konvekslik ölçümünü kullanarak yaprak sınıflandırması yapmaktadırlar

7. Günlük hayatta konvekslik kavramı: Günümüzde evlerimizde, iş yerlerimizde ve konser salonlarında daha iyi ses iletimi için akustik tasarımlar uygulanmakta ve bu tasarımlarda sesi en aza indirmek ya da yükseltmek için konvekslikten yararlanılarak tasarımlar yapılmaktadır.

8. İnsan anatomisinde konvekslik kavramı: Bir kişinin yüzü kim olduğunun bir parçasıdır. İnsanlar birbirlerinin şeklini yüz şekliyle tanırlar. Bunun için insan yüzleri konvekslik ve konkavlık kavramlarından yararlanarak beş temel gruba ayrılmıştır. Bunlar konveks, konkav, düzlem, konveks-konkav ve konkav-konvekstir.

Yukarıda değişik bilim dallarından vermiş olduğumuz konvekslik ve konkavlık örnekleri veya uygulamaları çoğaltılabilir. Konvekslik ile ilgili değişik uygulamalara, astronomide, mühendislikte, endüstride, sağlıkta, müzikte termodinamikte, coğrafyada ve optimizasyon teorisinde vs. sıklıkla rastlanmaktadır.

Konvekslik, M. Ö. 250 yılında Archimedes' in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Archimedes bir konveks şeklin çevre uzunluğunun onu çevreleyen diğer bir şeklin çevre uzunluğundan daha küçük olduğunu önemle ifade etmiştir.

Gerçekte her zaman ve birçok yolla konvekslik kavramıyla karşılaşıyoruz ve deneyimliyoruz. Çok basit bir örnek olarak dik pozisyonda durduğumuzda ağırlık merkezimizin dik izdüşümü ayağımızın kapladığı konveks alanın içinde kalır. Böylece dengemizi sağlayabilmekteyiz. Bununla beraber günlük hayatımızda konveksiliğin büyük etkileri vardır, örneğin endüstri, iş, sağlık ve sanat alanlarında birçok uygulaması vardır. İşbirliğinin olmadığı oyunların parasal kaynakları ve adaleti en uygun şekilde paylaşımını yapma problemidir.

Konveks fonksiyon teorisi konveksliğin genel konularının bir parçasıdır, çünkü konveks bir fonksiyonun görüntü kümesi konveks bir kümedir. Konveks fonksiyonlar teorisi matematiğin tüm alanlarına dokunan önemli bir teoridir. Konvekslik konusunu gerektiren matematiğin ilk konularından birisi çizgisel analizdir. İkinci türev testi konveksliğin bulunmasında bize sonucu veren güçlü bir araçtır. Optimizasyon ve kontrol teorisinde bazı karışık problemlerden hareketle konveks fonksiyon teorisi, sonsuz boyutlu Banach uzaylarının çalışma alanlarına genişletilmektedir.

Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm alanlarında önemli bir rol oynar. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequelities" adlı kitaptır (1952). Bu salt eşitsizlikler konusunu ele alan ve birçok yeni eşitsizlikler ve uygulamaları içeren ilk kaynak kitaptır. E.F. Beckenbach ve R. Bellman (1961) tarafından 1934-1960 döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren "Inequalities" adlı ikinci kitap yazılmıştır. Mitrinoviç' in 1970' te yayınlanan "Analytic Inequalities" adlı kitabı yukarıda bahsedilen iki kitapta da yer almayan yeni konular içerir. Son yıllarda da S. S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893' te Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen' in bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Beckenbach ve Bellman (1961) ve Mitrinoviç (1970) gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak Pecaric (1987) tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts ve Varberg (1973), Niculescu ve Persson (2005, 2006) gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgi çok sayıda çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve matematiğin diğer çeşitli alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların birçok uygulaması vardır. Bununla birlikte konveks fonksiyonlar, eşitsizlikler teorisiyle yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamalarının sonucudur. Örneğin; Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri gibi genel eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin sonucudur. Bu bağlamda, konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin özel bir yere sahip olduğu ifade edilebilir. Aslında konveks fonksiyonun kendi tanımı da bir eşitsizliktir. Benzer şekilde, konveks fonksiyonlar da eşitsizlikler teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında pek çok eşitsizlik bulunmuştur. Bu eşitsizliklerin bazıları konveks fonksiyonlar sınıfı için yazılan temel eşitsizlikler haline gelmiştir. 1881 yılında Hermite tarafından ifade edilen ve bugün birçok kaynakta Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılan eşitsizlik bunlardan bir tanesidir. Bu eşitsizlik üzerine günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük bir bölümü S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı kaynakta toplanmıştır.

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar matematiğin tüm alanlarında önemli bir rol oynaması ve aktif bir araştırma alanı olmasından dolayı, özellikle son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiş ve bu konuda yapılan çalışmaların sayısında bir hayli artış gözlenmiştir.

1. GENEL BİLGİLER

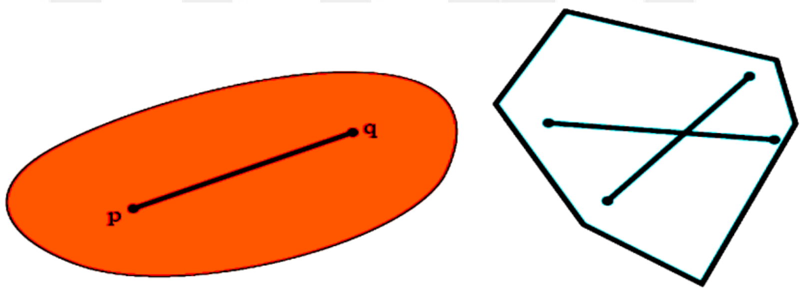
2.1. Konveks Fonksiyonlara Ait Temel Kavramlar

Bu bölümde bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanım ve teorem verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve A ⊆ L olmak üzere $\forall x, y \in A$ için

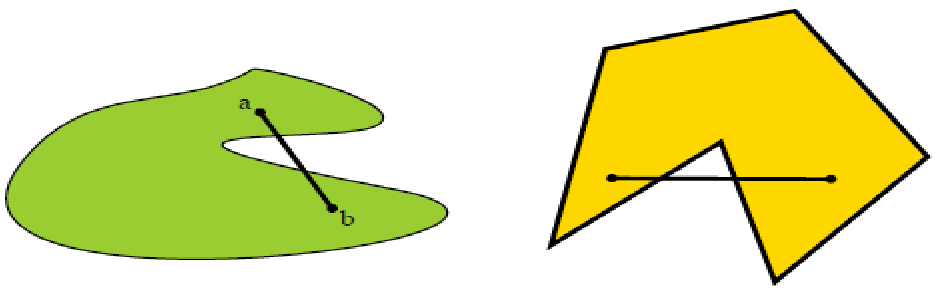
$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir(bkz. Şekil 2.1). Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir(Bayraktar, 2000).



Şekil 2.1. Konveks Kümeler

Konveks olmayan kümelere ise konkav küme adı verilir(bkz. Şekil 2.1).

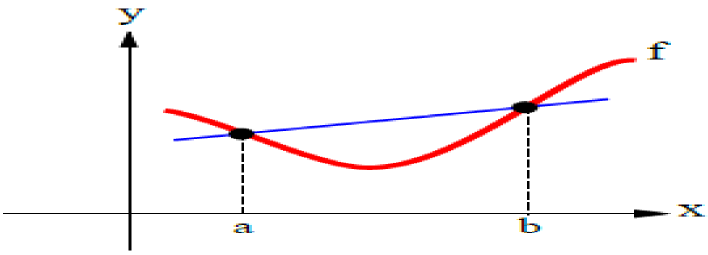


Şekil 2.2. Konkav Kümeler

Tanım 2.1.2 (Konveks Fonksiyon): I, ℝ' de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

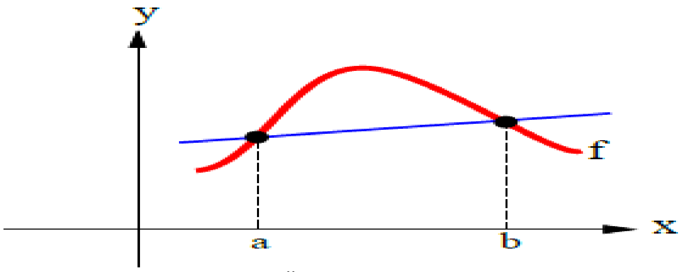
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Bakınız Şekil 2.3).

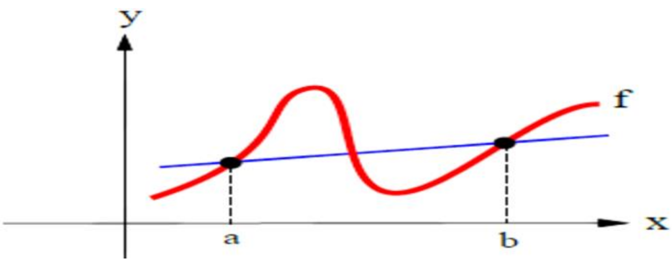


Şekil 2.3. Aralık Üzerinde Konveks Fonksiyon

Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde bir konveks fonksiyondur. Eğer $-f$ fonksiyonu konveks ise f ye konkavdır denir (Bakınız Şekil 2.4).



Şekil 2.4. Aralık Üzerinde Konkav Fonksiyon



Şekil 2.5. Aralık Üzerinde Konveks ve Konkav Olmayan Fonksiyon

Tanım 2.1.3 (J-Konveks Fonksiyon): I, ℝ' de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan bir f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J-konveks fonksiyon denir (Mitrinovic, 1970).

Sonuç 2.1.1: Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir J-konveks fonksiyondur (Mitrinovic, 1970).

Sonuç 2.1.2: $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I' da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ için $p + q > 0$ olan $\forall p, q \geq 0$ için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

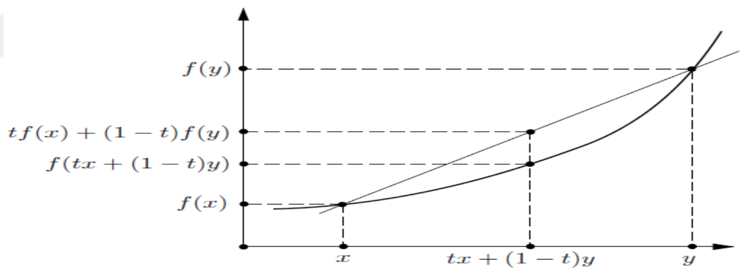
olmasıdır (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f' nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bunu Şekil 2.6 de görmekteyiz.

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için,

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0)$$

eşitsizliği yazılır (Roberts ve Varberg, 1973).



Şekil 2.6. Konveks Fonksiyonun İncelenmesi

Tanım 2.1.4: (Eşlenik Konveks Fonksiyonlar): $g: [0, \infty) \to [0, \infty)$fonksiyonu artan ve sürekli bir fonksiyon olsun ayrıca $g(0) = 0$ ve $x \to \infty$ iken $g \to \infty$ şartlarını sağlasın. Bu durumda g^{-1} vardır ve g ile aynı şartları sağlar. Eğer f ve f^* fonksiyonları

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt \quad \text{ve} \quad f^*(y) = \int_0^y g^{-1}(s)ds$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki fonksiyon da konveks olup f ve f^* fonksiyonlarına birbirinin konveks eşleniği denir (Roberts ve Varberg, 1973).

Aşağıdaki teorem konveks eşlenik çiftlerle ilgili önemli bir sonuçtur.

Teorem 2.1.1 (Young Eşitsizliği): $f, [0, c], (c > 0)$, aralığı üzerinde reel değerli, artan ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(0) = 0, a \in [0, c]$ ve $b \in [0, f(c)]$ ise,

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab$$

eşitsizliği sağlanır (Young, 1912).

Tanım 2.1.5 (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$|x - x_0| < \delta \quad olan \quad \forall x \in S \quad için \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.6 (Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar, 2010).

Sonuç 2.1.3 Eğer bir f fonksiyonu S kümesi üzerinde Lipschitz şartını sağlıyorsa, bu takdirde f fonksiyonu S üzerinde düzgün süreklidir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.7 (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \ ve \ |x_1 - x_2| < \delta \ şartını \ sağlayan \ \forall x_1, x_2 \in S \ için \ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S' de düzgün süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.8 (Mutlak Süreklilik): I, $\mathbb{R}$'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Eğer $\forall \epsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.1.2: L lineer uzay, $U \in L$ bir açık küme ve $f: U \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

a. f, U açık kümesinde konveks olsun. Eğer f, U' da bir noktanın komşuluğunda üstten sınırlı bir fonksiyon ise f, U' da yerel Lipschitz' dir ve bu nedenle U'nun kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir.

b. f, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde konveks ise f, U' nun her kompakt altkümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.3: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde

a. f, (a, b) aralığında süreklidir,

b. f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia, 1994).

Tanım 2.1.9 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $x_1 < x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in I$ için

i. $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

ii. $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

iii. $f(x_2) \geq f(x_1)$ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

iv. $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır,

denir (Adams ve Essex, 2010).

Teorem 2.1.4: I, $\mathbb{R}$' de bir aralık, f, I üzerinde sürekli ve I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

ii. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

iii. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

iv. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır (Azpeitia, 1994).

Sonuç 2.1.4: f ve g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu da konvekstir (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.5: Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I^0' de artandır (kesin artandır) (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.6: f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart f'' nin artan (kesin artan) olmasıdır (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.7: f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi mevcutsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in I$ için,

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinovic, Pecaric ve Fink, 1991).

Tanım 2.1.10 (p Normu): X, $\mathbb{R}^n$' de bir küme, μ, X' in alt kümelerinin σ-cebiri üzerinde bir ölçü ve f, X üzerinde tanımlanmış ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\|f\|_p = \begin{cases} \{|f|^p d\mu\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ sup|f| \quad , & p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye p-normu denir.

Tanım 2.1.11 (Gamma Fonksiyonu): $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanan fonksiyon gamma fonksiyonu olarak tanımlanır (Jeffrey ve Dai, 2008). Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)},\ 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(\mathrm{n})\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2\mathrm{n})$.

Tanım 2.1.12 (Beta Fonksiyonu): $Re(x), Re(y) > 0$ için

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır (Dragomir ve Pearce, 2000). Beta fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülebilir (Jeffrey ve Dai, 2008).

i. $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y),\ x,y \in (0,\infty)$

ii. $\beta(1,y) = \frac{1}{y}$

iii. $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt,\ x,y > 0$

iv. $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \;\; x,y > 0$

v. $\beta(x,y) = \beta(y,x).$

Tanım 2.1.13 (Hipergeometrik Fonksiyon): $c > b > 0$, $|z| < 1$ için,

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{\beta(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt $$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Hipergeometrik fonksiyon denir (Kilbas, Srivastava ve Trujillo, 2006).

2.2. Konveks Fonksiyonların Sınıflandırılması

Tanım 2.2.1 (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye quasi-konveks fonksiyon denir [12]. Eğer,

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında, eğer

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye quasi-konkav fonksiyon ve eğer

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) > max\{f(x), f(y)\} $$

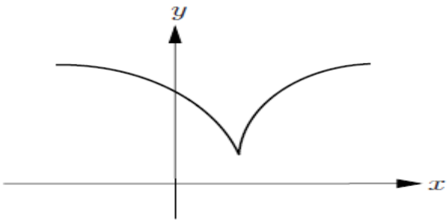
ise f' ye kesin quasi-konkav fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.2: f hem quasi-konveks hem de quasi-konkav ise f' ye quasi-monotonik fonksiyon denir (Greenberg ve Pierskalla, 1970).

Sonuç 2.2.1: Herhangi bir konveks fonksiyon aynı zamanda bir quasi-konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar da vardır. Örneğin,

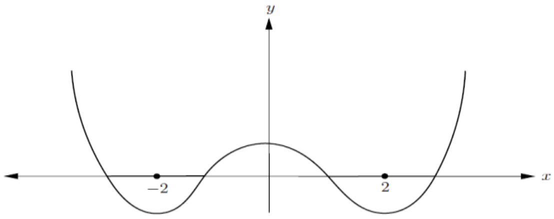
$$ g(t) = \begin{cases} t & , \quad t \in [-2,-1] \\ t^2 & , \quad t \in [-1,2] \end{cases} $$

ile tanımlanan $g: [-2,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında quasi-konveks fonksiyondur (Ion, 2007).



Şekil 2.7 Quasi Konveks Olup Konveks Olmayan Fonksiyon

Aşağıdaki grafikte, kalın çizgi ile gösterilen aralıklarda fonksiyon quasi-konvekstir. Ama eğrinin tamamı düşünülürse bu fonksiyon quasi-konveks değildir (Ekinci, 2014).



Şekil 2.8: Aralıkta Quasi Konveks Fonksiyon $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

Tanım 2.2.3 (Wright-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta, x \in I$ için

$$f(x+\delta) - f(x) \leq f(y+\delta) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye $I \subseteq \mathbb{R}$ de Wright-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.4 (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x, \delta > 0$ şartları altında $\forall x, y, y+\delta \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[f(tx + (1-t)y) + f\big((1-t)x + ty\big)\right] \leq max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x+\delta)] \leq max\{f(x), f(y+\delta)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f ye $I \subseteq \mathbb{R}$ de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.5 (J-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna J-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 2.2.6 (P- fonksiyonu): $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere eğer ∀x, $\forall x, y \in I, \lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

ise f fonksiyonuna bir P-fonksiyonu denir (Dragomir, Pecaric ve Persson, 1995).

Tanım 2.2.7 (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Özdemir ve Yıldız, 2013).

Tanım 2.2.8 (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Hwang, 2011).

Tanım 2.2.9 (*h*-Konveks Fonksiyon): $h \not\equiv 0$ ve $h: J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir h-konveks fonksiyon denir. Burada I ve J, $\mathbb{R}$ de iki aralık, $(0,1) \subseteq J$ dir (Wright, 1954). Eğer

i. $h(\alpha) = \alpha$ ise h-konveks fonksiyonu negatif olmayan konveks fonksiyona dönüşür.
ii. $s \in (0,1)$ için $h(\alpha) = \alpha^s$ seçilirse h-konvekslik s-konveksliğe a dönüşür.

Tanım 2.2.10 (m-Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $m, t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir m-konveks fonksiyon denir. $f(0) \leq 0$ şartını sağlayan $[0, b]$ aralığında tanımlı olan bütün m-konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir (Tunç, 2011).

Eğer $m = 1$ seçilirse $[0, b]$ aralığında m-konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.11 ($(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m})$-Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $t \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ için

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq t^{\alpha} f(x) + m(1 - t^{\alpha}) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f-fonksiyonuna (α, m)-konveks fonksiyon denir (Mitrinovic, 1970). Burada α ve m' den en az biri sıfırdan farklı olmalıdır.

$(\alpha, m) \in \{(0,0), (1, m), (1,1)\}$ için sırasıyla artan, m-konveks ve konveks fonksiyon sınıflarının elde edildiği kolayca görülebilir.

Tanım 2.2.12 ($(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{m})$-Konveks Fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [0, b], m \in [0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan f fonksiyonu

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq h(\alpha) f(x) + m h(1 - \alpha) f(y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (h, m)-konveks fonksiyon denir (Pecaric, Proschan, ve Tong, 1992).

Tanım 2.2.13 (Geometrik Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Hwang, ve Dragomir, 2014).

Tanım 2.2.14 ($\boldsymbol{s}$-Geometrik Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^{t^s} [f(y)]^{(1-t)^s}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna s-geometrik konveks fonksiyon denir (Hwang, ve Dragomir, 2014).

$s = 1$ için, s-geometrik konveks fonksiyon tanımı geometrik konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

Tanım 2.2.15 (Quasi Geometrik Konveks Fonksiyonu): $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq sup\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna quasi geometrik konveks fonksiyon denir (İşcan, 2015).

Tanım 2.2.16 (Bazı Özel Ortalamalar): Bu başlık altında a, b gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir (Bullen, Mitrinovic ve Vasis, 1988).

1. Aritmetik ortalama: $A = A(a,b) := \frac{a+b}{2}$
2. Geometrik ortalama: $G = G(a,b) := \sqrt{ab}$
3. Harmonik ortalama: $H = H(a,b) := \frac{2ab}{a+b}$
4. Logaritmik ortalama:

$$L = L(a,b) := \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \frac{b-a}{lnb - lna} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

5. Identrik ortalama:

$$I = I(a,b) := \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

6. p-yinci mertebeden genelleştirilmiş logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) := \begin{cases} \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , p \neq -1, 0 \\ L(a,b) & , p = -1 \\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , p = 0 \end{cases}$$

ortalamaları vardır. Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I, L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki $H \leq G \leq L \leq I \leq A$ şeklinde bir ilişki yer almaktadır:

Tanım 2.2.17 (r-Ortalama): x, y pozitif sayılarının r-inci kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x,y;\lambda) = \begin{cases} x^{\lambda} y^{1-\lambda} & , r = 0 \\ (\lambda x^r + (1-\lambda) y^r)^{\frac{1}{r}} & , r \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Dragomir ve Pearce, 2000).

3. GEOMETRİK - ARİTMETİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

3.1. Türevi Mutlak Değerce GA-Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler

Tanım 3.1.1 Eğer her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna I üzerinde geometrik - aritmetik-konvekstir (GA-konvekstir) denir, burada $x^t y^{1-t}$ ve $tf(x) + (1-t)f(y)$ ifadeleri sırasıyla x ve y pozitif tamsayılarının ağırlıklı geometrik ortalamasını ve $f(x)$ ve $f(y)$ nin ağırlıklı aritmetik ortalamasını göstermektedir (Niculescu, 2003).

Tanım 3.1.2 $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ GA-konveks fonksiyon ve $a, b \in I,\ a < b$ olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\sqrt{ab}\right) \leq \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b f(x) \frac{1}{x} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Bu eşitsizlik literatürde GA-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Niculescu, 2003).

Bu kısımda Hwang ve Dragomir (2014) tarafından s-konveks fonksiyonlar için verilen eşitsizlikler GA-konveks fonksiyonlara uyarlanacaktır. Bunun için aşağıdaki ilave gösterimleri verelim:

$$A = \frac{(lny - lnx)(lnb - lna - lny + lnx)}{lnb - lna},$$

$$B = \frac{(lnx - lna)(lny - lnx)}{lnb - lna}$$

$$I(a,b,x,y) = x\frac{ln\left(\frac{x}{a}\right) - 2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right) ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y(A-B) - x(A+B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$-2A\frac{(x+y)}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)} + 2x\frac{(A-B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} + \frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}},$$

$$J(a,b,x,y) = \frac{Ay - Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{Bx + By - 2Ay}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)} + 2A\frac{x+y}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{2Bx}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}$$

$$-\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-y\frac{ln\left(\frac{b}{y}\right)+2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(b-y)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)},$$

olsun, buarada $a \leq x < y \leq b$ dir. Ayrıca $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon ve $a \leq x < y \leq b,\ a,b \in \mathbb{R}^+$ olsun. $K_{x,y}:[a,b] \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ çekirdeğini

$$K_{x,y}(s)=\begin{cases}\dfrac{lna-lns}{lnb-lna} & ,\quad s\in[a,x],\\ \dfrac{lns-lnx}{lnb-lna}+\dfrac{lna-lns}{lnb-lna} & ,\quad s\in(x,y),\\ \dfrac{lnb-lns}{lnb-lna} & ,\quad s\in[y,b].\end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.1.1 $f:[a,b] \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon ve $a \leq x < y \leq b$, $a,b \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du$$
$$=-\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\int_0^1 tf'(a^{1-t}x^t)a^{1-t}x^tdt$$
$$+\int_0^1\left(\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right)f'(x^{1-t}y^t)x^{1-t}y^tdt$$
$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1(1-t)f(y^{1-t}b^t)y^{1-t}b^tdt \tag{3.1}$$

eşitliği gerçeklenir (Maden ve Ark., 2017).

İspat: $f:[a,b] \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon, $K_{x,y}:[a,b] \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ çekirdek fonksiyonu, $a \leq x < y \leq b$ ve $a,b \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du=\int_a^b K_{x,y}(s)f'(s)ds \tag{3.2}$$

eşitliğini yazabiliriz. Dolayısıyla

$$I_1=\int_0^1 tf'(a^{1-t}x^t)a^{1-t}x^tdt=\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\int_0^1 td\left(f(a^{1-t}x^t)\right)$$
$$=\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left[f(x)-\int_0^1 f(a^{1-t}x^t)dt\right],$$

$$= \frac{1}{lnx-lna}\left[f(x) - \int_a^x f(u)\frac{du}{u}\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{lnx-lna}f(x) - \frac{1}{(lnx-lna)^2}\int_a^x \frac{f(u)}{u}du, \tag{3.3}$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t - \frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right) f'(x^{1-t}y^t)x^{1-t}y^t dt$$

$$= \frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\int_0^1 \left(\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t - \frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right) d\big(f(x^{1-t}y^t)\big)$$

$$= \frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left[\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t - \frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right] f(x^{1-t}y^t)\Big|_0^1$$

$$-\int_0^1 f(x^{1-t}y^t)\left(\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}\right)dt$$

$$= \frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left[\frac{(lny-lnx)(lnb-lny)}{lnb-lna}f(y) + \frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}f(x)\right.$$

$$\left.-\int_0^1 f(x^{1-t}y^t)\left(\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}\right)dt\right]$$

$$= \frac{1}{lny-lnx}\left[\frac{(lny-lnx)(lnb-lny)}{lnb-lna}f(y) + \frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}f(x)\right.$$

$$\left.-\int_x^y f(u)\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}\frac{du}{u}\frac{1}{lny-lnx}\right]$$

$$= \frac{lnb-lny}{lnb-lna}f(y) + \frac{lnx-lna}{lnb-lna}f(x) - \frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{(lny-lnx)^2(lnb-lna)}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du$$

$$= \frac{lnb-lny}{lnb-lna}f(y) + \frac{lnx-lna}{lnb-lna}f(x) - \frac{(lnb-lna)-(lny-lnx)}{(lny-lnx)(lnb-lna)}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du$$

$$= \frac{lnb-lny}{lnb-lna}f(y) + \frac{lnx-lna}{lnb-lna}f(x) - \frac{1}{lny-lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du + \frac{1}{lnb-lna}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du \tag{2.4}$$

ve

$$I_3 = \int_0^1 (1-t)f(y^{1-t}b^t)y^{1-t}b^t dt = \frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\int_0^1 (1-t)d\big(f(y^{1-t}b^t)\big)$$

$$= \frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left[(1-t)f(y^{1-t}b^t)|_0^1 + \int_0^1 f(y^{1-t}b^t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left[-f(y) + \int_0^1 f(y^{1-t}b^t)dt\right]$$

$$= -\frac{1}{lnb-lny}f(y) + \frac{1}{(lnb-lny)^2}\int_y^b \frac{f(u)}{u}du. \tag{3.5}$$

olduğu görülür. Eğer (3.3) ve (3.5) sırasıyla $-\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}$ ve $\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}$ ile çarpılıp (3.4) eşitliği ile toplanırsa

$$-\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}I_1+I_2+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}I_3=-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du+\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du.$$

elde edilir ve böylece Lemma 3.1.1 ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.1 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon olmak üzere $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA – konveks olsun. Bu takdirde $a\le x<y\le b$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\le\left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(a)|+I(a,b,x,y)|f'(x)|+J(a,b,x,y)|f'(y)|$$

$$+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)| \tag{3.6}$$

$$\le\|f'\|_\infty\left\{\left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]+I(a,b,x,y)+J(a,b,x,y)+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Maden ve Ark., 2017).

İspat: Lemma 3.1.1 den

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\le\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\int_0^1t|f'(a^{1-t}x^t)|\,a^{1-t}x^tdt+$$

$$+\int_0^1\left|\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right||f'(x^{1-t}y^t)|\,x^{1-t}y^tdt$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1(1-t)|f'(y^{1-t}b^t)|y^{1-t}b^tdt$$

eşitsizliği yazılabilir. $|f'|$ fonksiyonunun GA-konveliği kullanılırsa,

$$\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\int_0^1t|f'(a^{1-t}x^t)|\,a^{1-t}x^tdt$$

$$\le\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\int_0^1t[(1-t)|f'(a)|+t|f'(x)|]\,a^{1-t}x^tdt$$

$$=\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left[|f'(a)|\int_0^1t(1-t)a^{1-t}x^tdt+|f'(x)|\int_0^1t^2a^{1-t}x^tdt\right]$$

$$= \frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left[|f'(a)|\underbrace{\int_0^1 ta^{1-t}x^t dt}_{I} + \{|f'(x)|-|f'(a)|\}\underbrace{\int_0^1 t^2a^{1-t}x^t dt}_{II}\right] \quad (3.7)$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi bu eşitsizlikteki I ve II integrallerini kısmi integrasyon uygulayarak hesaplayalım. Bu durumda $u = t \Rightarrow du = dt;\ dv = \left(\frac{x}{a}\right)^t dt \Rightarrow v = \frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t$ alınarak

$$I = \int_0^1 ta^{1-t}x^t dt = a\left\{\frac{t}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t dt\right\}$$

$$= a\left\{\frac{t}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Big|_0^1 - \frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\int_0^1\left(\frac{x}{a}\right)^t dt\right\} = a\left\{\frac{t}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t - \frac{1}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\right\}\Big|_0^1$$

$$= a\left[\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\right] = \frac{a}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left[\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)} + \frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\right]$$

$$= \frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)} - \frac{x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)} + \frac{a}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)} \quad (3.8)$$

ve benzer şekilde $u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt,\ dv = \left(\frac{x}{a}\right)^t dt \Rightarrow v = \frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t$ alınarak

$$II = \int_0^1 t^2a^{1-t}x^t dt = a\int_0^1 t^2\left(\frac{x}{a}\right)^t dt$$

$$= a\left\{\frac{t^2}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Big|_0^1 - \frac{2}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\int_0^1 t\left(\frac{x}{a}\right)^t dt\right\}$$

$$= a\left\{\frac{t^2}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Big|_0^1 - \frac{2}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left[\frac{t}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Big|_0^1 - \frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\int_0^1\left(\frac{x}{a}\right)^t dt\right]\right\}$$

$$= a\left\{\frac{t^2}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Big|_0^1 - \frac{2t}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Big|_0^1 + \frac{2}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\int_0^1\left(\frac{x}{a}\right)^t dt\right\}$$

$$= a\left[\frac{t^2}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t - \frac{2t}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t + \frac{2}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\right]\Big|_0^1$$

$$= a\left[\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\frac{x}{a} - \frac{2}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\frac{x}{a} + \frac{2}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\frac{x}{a} - \frac{2}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\right]$$

$$= \frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)} - \frac{2x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)} + \frac{2x}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)} - \frac{2a}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)} \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.8) ve (3.9) ifadeleri (3.7) de yerlerine yazılırsa,

$$\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left\{|f'(a)|\left[\frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{a}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\right]+\{|f'(x)|-|f'(a)|\}\times\right.$$

$$\left.\times\quad\left[\frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{2x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{2x}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{2a}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\right]\right\}$$

$$=\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left\{|f'(a)|\left[\frac{a}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{2x}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{2a}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\right]+|f'(x)|\left[\frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{2x}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{2a}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\right]\right\}$$

$$=\left[\frac{a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{x}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2a}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(a)|$$

$$+\left[\frac{xln\left(\frac{x}{a}\right)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2x}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2a}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(x)|$$

$$=\left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(a)|+\left[x\frac{ln\left(\frac{x}{a}\right)-2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(x)|$$

olduğu görülür. Şimdi de

$$\int_0^1\left|\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right||f'(x^{1-t}y^t)|x^{1-t}y^t dt \qquad (3.10)$$

integralini hesaplayalım. Bunun için

$$A=\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}\quad \text{ve}\quad B=\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}$$

alalım. $|f'|$ fonksiyonunun GA-konveksliğinden, (3.10) ifadesi

$$\int_0^1\left|\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right||f'(x^{1-t}y^t)|x^{1-t}y^t dt$$

$$\leq \int_0^1|At-B|[(1-t)|f'(x)|+t|f'(y)|]x^{1-t}y^t dt \qquad (3.11)$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu durumda (3.11) deki son integralde

$$|At-B|=\begin{cases}At-B, & t\geq\frac{B}{A}\\ B-At, & t<\frac{B}{A}\end{cases}$$

mutlak değer özelliği dikkate alınırsa

$$\int_0^1|At-B|[(1-t)|f'(x)|+t|f'(y)|]x^{1-t}y^t dt$$

$$=\int_0^{\frac{B}{A}}(B-At)[(1-t)|f'(x)|+t|f'(y)|]x^{1-t}y^t dt$$

$$+\int_{\frac{B}{A}}^1(At-B)[(1-t)|f'(x)|+t|f'(y)|]x^{1-t}y^t dt$$

$$=\int_0^{\frac{B}{A}}(B-At)(1-t)|f'(x)|x^{1-t}y^t dt+\int_0^{\frac{B}{A}}(B-At)t|f'(y)|x^{1-t}y^t dt+$$

$$+\int_{\frac{B}{A}}^{1}(At-B)(1-t)|f'(x)|x^{1-t}y^{t}dt+\int_{\frac{B}{A}}^{1}(At-B)t|f'(y)|x^{1-t}y^{t}dt$$

$$=Bx|f'(x)|\underbrace{\int_0^{\frac{B}{A}}(1-t)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{I}-Ax|f'(x)|\underbrace{\int_0^{\frac{B}{A}}(t-t^2)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{II}+$$

$$+Bx|f'(y)|\underbrace{\int_0^{\frac{B}{A}}t\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{III}-Ax|f'(y)|\underbrace{\int_0^{\frac{B}{A}}t^2\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{IV}$$

$$+Ax|f'(x)|\underbrace{\int_{\frac{B}{A}}^{1}(t-t^2)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{V}-Bx|f'(x)|\underbrace{\int_{\frac{B}{A}}^{1}(1-t)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{VI}+$$

$$+Ax|f'(y)|\underbrace{\int_{\frac{B}{A}}^{1}t^2\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{VII}-Bx|f'(y)|\underbrace{\int_{\frac{B}{A}}^{1}t\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{VIII} \tag{3.12}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.12) de ortaya çıkan I-VIII integralleri için

$$u=1-t \implies du=-dt,\ dv=\left(\frac{y}{x}\right)^t dt \implies v=\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t$$

alarak

$$I=\int_0^{\frac{B}{A}}(1-t)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt=(1-t)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}+\int_0^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t dt$$

$$=\left[(1-t)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right]\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}$$

$$=\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)},$$

olduğu ve önce $u=t-t^2 \Longrightarrow du=(1-2t)dt,\ \ dv=\left(\frac{y}{x}\right)^t dt \Longrightarrow v=\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t$ ve daha sonra da $u=1-2t \Longrightarrow du=-2dt,\ \ dv=\left(\frac{y}{x}\right)^t dt \Longrightarrow v=\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t$ değişken değişimleri dikkate alınırsa

$$II=\int_0^{\frac{B}{A}}(t-t^2)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt=(t-t^2)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}-\int_0^{\frac{B}{A}}(1-2t)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t dt$$

$$=(t-t^2)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\int_0^{\frac{B}{A}}(1-2t)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt$$

$$=(t-t^2)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left[(1-2t)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}+2\int_0^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t dt\right]$$

$$= (t - t^2)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}} - \left[(1-2t)\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t + 2\frac{1}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right]\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}$$

$$= \left\{(t - t^2)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t - (1-2t)\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t - 2\frac{1}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right\}\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}$$

$$= \left(\frac{B}{A} - \frac{B^2}{A^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)} - \left(1 - 2\frac{B}{A}\right)\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)} - \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)},$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $u = t \Longrightarrow du = dt,\ \ dv = \left(\frac{y}{x}\right)^t dt \Longrightarrow v = \frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t$ alınarak

$$III = \int_0^{\frac{B}{A}} t\left(\frac{y}{x}\right)^t dt = t\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}} - \int_0^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t dt$$

$$= \left[t\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t - \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right]\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}$$

$$= \frac{B}{A}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} - \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} + \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)},$$

ve önce

$$u = t^2 \Longrightarrow du = 2tdt,\quad dv = \left(\frac{y}{x}\right)^t dt \Longrightarrow v = \frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t$$

daha sonra ise

$$u = t \Longrightarrow du = dt,\ \ dv = \left(\frac{y}{x}\right)^t dt\ \ \Longrightarrow\ \ v = \frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t$$

değişken değişimleri dikkate alınarak

$$IV = \int_0^{\frac{B}{A}} t^2\left(\frac{y}{x}\right)^t dt = t^2\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}} - \int_0^{\frac{B}{A}} 2t\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t dt$$

$$= t^2\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}} - \frac{2}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\int_0^{\frac{B}{A}} t\left(\frac{y}{x}\right)^t dt$$

$$= t^2\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}} - \frac{2}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left[t\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}} - \int_0^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t dt\right]$$

$$= \left\{t^2\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t - 2t\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t + 2\frac{1}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right\}\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}$$

$$= \frac{B^2}{A^2}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} - 2\frac{B}{A}\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} + \frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} - \frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)},$$

olduğu görülür. Aynı hesaplama yöntemleriyle

$$V = \int_{\frac{B}{A}}^{1}(t - t^2)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt = \left\{\frac{(t-t^2)}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t - (1-2t)\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t - 2\frac{1}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right\}\Bigg|_{\frac{B}{A}}^{1}$$

$$= \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x} - \frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x} - \frac{\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} + \frac{\left(1-2\frac{B}{A}\right)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} + \frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}};$$

$$VI = \int_{\frac{B}{A}}^{1}(1-t)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt = \left[(1-t)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t + \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right]\Bigg|_{\frac{B}{A}}^{1}$$

$$= \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x} - \left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} - \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}};$$

$$VII = \int_{\frac{B}{A}}^{1} t^2\left(\frac{y}{x}\right)^t dt = \left\{t^2\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t - 2t\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t + 2\frac{1}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right\}\Bigg|_{\frac{B}{A}}^{1}$$

$$= \frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x} - \frac{2}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x} + \frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x} - \frac{\frac{B^2}{A^2}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} + \frac{2\frac{B}{A}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} - \frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}};$$

$$VIII = \int_{\frac{B}{A}}^{1} t\left(\frac{y}{x}\right)^t dt = \left[t\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t - \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right]\Bigg|_{\frac{B}{A}}^{1}$$

$$= \frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)} - \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x} - \frac{B}{A}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} + \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}$$

oldukları gösterilebilir. Hesaplanan bu integraller (3.12) de yerlerine yazılırsa

$$\int_0^1 |At - B|[(1-t)|f'(x)| + t|f'(y)|]x^{1-t}y^t dt$$

$$= Bx|f'(x)|\left[\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} + \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} - \frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)} - \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\right] -$$

$$-Ax|f'(x)|\left[\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)} - \left(1-2\frac{B}{A}\right)\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)} - \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$+Bx|f'(y)|\left[\frac{B}{A}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} - \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} + \frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\right] -$$

$$-Ax|f'(y)|\left[\frac{B^2}{A^2}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} - 2\frac{B}{A}\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} + \frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}} - \frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right] +$$

$$+Ax|f'(x)|\left[\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{\left(1-2\frac{B}{A}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$-Bx|f'(x)|\left[\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]$$

$$+Ax|f'(y)|\left[\frac{\frac{y}{x}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{\frac{y}{x}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2\frac{y}{x}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{\frac{B^2}{A^2}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+2\frac{\frac{B}{A}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$-Bx|f'(y)|\left[\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{B}{A}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]$$

$$=Bx|f'(x)|\left[\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]+$$

$$+Ax|f'(x)|\left[\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right.$$

$$+\left(1-2\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\left.+\left(1-2\frac{B}{A}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$+Bx|f'(y)|\left[\frac{\frac{B}{A}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{\frac{y}{x}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{\frac{B}{A}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$+Ax|f'(y)|\left[\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{B^2}{A^2}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]$$

$$+\frac{2\frac{B}{A}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{B^2}{A^2}\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2\frac{B}{A}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$=Bx|f'(x)|\left[2\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}\right]+$$

$$+Ax|f'(x)|\left[\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-2\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+2\left(1-2\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\right.$$

$$\left.\frac{4}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$+Bx|f'(y)|\left[2\frac{B}{A}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{2}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}\right]+$$

$$+Ax|f'(y)|\left[\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-2\frac{B^2}{A^2}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right.$$

$$\left.+4\frac{B}{A}\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{4}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$=\left[-\frac{Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{y(A-B)-x(A+B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2A(x+y)}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+2x\frac{(A-B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{4Ax\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]|f'(x)|$$

$$+\left[\frac{Ay-Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{Bx+By-2Ay}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+2A\frac{x+y}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2Bx}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]|f'(y)|$$

olduğu görülür. Şimdi de

$$\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1(1-t)|f'(y^{1-t}b^t)|y^{1-t}b^t dt \tag{3.13}$$

integralini hesaplayalım. Bu durumda $|f'|$ fonksiyonunun GA-konvekliğinden

$$\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1(1-t)|f'(y^{1-t}b^t)|y^{1-t}b^t dt$$

$$\leq\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1[(1-t)^2|f'(y)|+t(1-t)|f'(b)|]y^{1-t}b^t dt$$

$$=\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left[y|f'(y)|\int_0^1(1-t)^2\left(\frac{b}{y}\right)^t dt+y|f'(b)|\int_0^1 t(1-t)\left(\frac{b}{y}\right)^t dt\right]$$

$$=\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left\{\begin{array}{c} y|f'(y)|\left[\underbrace{\int_0^1\left(\frac{b}{y}\right)^t dt}_{I}-2\underbrace{\int_0^1 t\left(\frac{b}{y}\right)^t dt}_{II}+\underbrace{\int_0^1 t^2\left(\frac{b}{y}\right)^t dt}_{III}\right] \\ +y|f'(b)|\left[\underbrace{\int_0^1 t\left(\frac{b}{y}\right)^t dt}_{IV}-\underbrace{\int_0^1 t^2\left(\frac{b}{y}\right)^t dt}_{V}\right]\end{array}\right\} \tag{3.14}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu nedenle (3.14) de ortaya çıkan I-V integralleri için kısmi integrasyon metodu uygulanarak sırasıyla

$$I=\int_0^1\left(\frac{b}{y}\right)^t dt=\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t\Bigg|_0^1=\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)},$$

$$II=IV=\int_0^1 t\left(\frac{b}{y}\right)^t dt=t\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t dt$$

$$=\left[t\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t-\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)};$$

ve

$$III=V=\int_0^1 t^2\left(\frac{b}{y}\right)^t dt=t^2\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t\Bigg|_0^1-\int_0^1 2t\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t dt$$

$$=\left[t^2\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t-2t\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t+\frac{1}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}$$

elde edilir. Bu şekilde hesaplanan I-V integralleri (3.14) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1(1-t)|f'(y^{1-t}b^t)|y^{1-t}b^t dt\ \leq\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\Bigg\{y|f'(y)|\Bigg[\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-$$

$$-2\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2\frac{b}{y}}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-2\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}\Bigg]+$$

$$+y|f'(b)|\Bigg[\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}+2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}\Bigg]\Bigg\}$$

$$=\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\Bigg\{y|f'(y)|\Bigg[-\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-2\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}\Bigg]+y|f'(b)|\Bigg[\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-$$

$$2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\Bigg]\Bigg\}$$

$$=\frac{lnb-lny}{lnb-lna}\Bigg\{y|f'(y)|\Bigg[-1-2\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}+2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\Bigg]+y|f'(b)|\Bigg[\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-$$

$$-2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\quad\frac{2}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\Bigg]\Bigg\}$$

$$= \frac{lnb-lny}{lnb-lna}\left\{|f'(y)|\left[-y-\frac{2y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\right]+|f'(b)|\left[\frac{b}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right\}$$

$$= \frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}\left\{\left[-y-\frac{2y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(y)|+\left[\frac{b}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)|\right\}$$

$$= \left[-y\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}-\frac{2y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}+\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}-\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}\right]|f'(y)|$$

$$+\left[\frac{b}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}-\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}+\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}+\frac{y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}\right]|f'(b)|$$

$$= \left[\frac{2(b-y)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}-y\frac{ln\left(\frac{b}{y}\right)+2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(y)|+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)|$$

olduğu gösterilmiş olur. Böylece

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(a)|+\left[x\frac{ln\left(\frac{x}{a}\right)-2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(x)|$$

$$+\left[-\frac{Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{y(A-B)-x(A+B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-2A\frac{(x+y)}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+2x\frac{(A-B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]|f'(x)|$$

$$+\left[\frac{Ay-Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{Bx+By-2Ay}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+2A\frac{x+y}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2Bx}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]|f'(y)|$$

$$+\left[-y\frac{ln\left(\frac{b}{y}\right)+2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(b-y)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(y)|+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)|$$

$$= \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(a)|+$$

$$+\left[x\frac{ln\left(\frac{x}{a}\right)-2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{y(A-B)-x(A+B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-2A\frac{(x+y)}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+2x\frac{(A-B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\right.$$

$$\left.\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]|f'(x)|$$

$$+\left[\frac{Ay-Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{Bx+By-2Ay}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+2A\frac{x+y}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2Bx}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-y\frac{ln\left(\frac{b}{y}\right)+2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\right.$$

$$\left.\frac{2(b-y)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(y)|+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)|$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Sonuç olarak

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq\left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(a)|+I(a,b,x,y)|f'(x)|+J(a,b,x,y)|f'(y)|$$

$$+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)|$$

$$\leq\|f'\|_\infty\left\{\left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]+I(a,b,x,y)+J(a,b,x,y)+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right\}$$

olduğu gösterilmiş olur ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi de GA-konveks fonksiyonlar için bazı yeni Hermite-Hadamard tipi integral eşitsizlikleri verilecektir. Bununla ilgili olarak öncelikle aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.1.2 $f: I\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I^o, a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise bu takdirde

$$bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx=(lnb-lna)\int_0^1 b^{2t}a^{2(1-t)}f'(b^ta^{1-t})dt \qquad (3.15)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Kısmi integrason ve belirli integralde değişken değişimi uygulanarak

$$\int_0^1 b^{2t}a^{2(1-t)}f'(b^ta^{1-t})dt=\frac{1}{(lnb-lna)}\int_0^1 b^ta^{(1-t)}f'(b^ta^{1-t})d(b^ta^{1-t})$$

$$=\frac{1}{(lnb-lna)}\int_0^1 xf'(x)dx$$

$$=\frac{bf(b)-af(a)}{(lnb-lna)}-\frac{1}{(lnb-lna)}\int_0^1 f(x)dx$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.2 $f: I\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I^o, a<b$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q, q\geq 1,$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde GA-konveks ise bu takdirde

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{[(b-a)A(a,b)]^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times\{[L(a^2,b^2)-a^2]|f'(a)|^q+[b^2-L(a^2,b^2)]|f'(b)|^q\}^{1/q} \qquad (3.16)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $|f'(x)|^q, q \geq 1,$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde GA-konveks olduğundan Lemma 3.1.2 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq a^2(lnb-lna)\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{2t}|f'(b^ta^{1-t})|dt$$

$$\leq a^2(lnb-lna)\left[\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{2t}dt\right]^{1-1/q}\left\{\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{2t}[(1-t)|f'(a)|^q+t|f'(b)|^q]dt\right\}^{1/q}$$

$$=(lnb-lna)\left[\frac{b^2-a^2}{2(lnb-lna)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{1}{2(lnb-lna)}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\frac{b^2-2a^2(lnb-lna)-a^2}{2(lnb-lna)}|f'(a)|^q+\frac{a^2-2b^2(lnb-lna)-b^2}{2(lnb-lna)}|f'(ab)|^q\right]^{1/q}$$

$$=\frac{[(b-a)A(a,b)]^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}}}\times\{[L(a^2,b^2)-a^2]|f'(a)|^q+[b^2-L(a^2,b^2)]|f'(b)|^q\}^{1/q}$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.1.1 Teorem 3.1.2 nin varsayımları altında eğer $q=1$ ise bu takdirde

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}\{[L(a^2,b^2)-a^2]|f'(a)|+[b^2-L(a^2,b^2)]|f'(b)|\}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Teorem 3.1.3 $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^o, a<b$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q, q>1,$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde GA-konveks ise bu takdirde

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right| \leq (lnb-lna)$$

$$\times\left[L\left(a^{2q/(q-1)},b^{2q/(q-1)}\right)\right]^{1-1/q}[A(|f'(a)|^q,|f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}} \qquad (3.17)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $|f'(x)|^q, q \geq 1,$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde GA-konveks olduğundan Lemma 3.1.2 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq a^2(lnb - lna) \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{2t} |f'(b^t a^{1-t})| dt$$

$$\leq a^2(lnb - lna) \left[\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{2q/(q-1)t} dt\right]^{1-1/q} \left[\int_0^1 |f'(b^t a^{1-t})|^q \, dt\right]^{1/q}$$

$$\leq (lnb - lna) \left[\frac{b^{2q/(q-1)} - a^{2q/(q-1)}}{2q(lnb - lna)}\right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{1}{2(lnb - lna)}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left[\int_0^1 (1-t)|f'(a)|^q + t|f'(b)|^q \, dt\right]^{1/q}$$

$$= (lnb - lna)\left[L\left(a^{2q/(q-1)}, b^{2q/(q-1)}\right)\right]^{1-1/q} [A(|f'(b)|^q, |f'(b)|^q)]^{1/q}$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.4 $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^o, a < b$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q, q \geq 1,$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde GA-konveks ise bu takdirde

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(lnb - lna)^{1-1/q}}{(2q)^{1/q}}$$

$$\times \{[L(a^{2q}, b^{2q}) - a^{2q}]|f'(a)|^q + [b^{2q} - L(a^{2q}, b^{2q})]|f'(b)|^q\}^{1/q} \qquad (3.18)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $|f'(x)|^q, q \geq 1,$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde GA-konveks olduğundan Lemma 3.1.2 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq a^2(lnb - lna) \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{2t} |f'(b^t a^{1-t})| dt$$

$$\leq a^2(lnb - lna) \left[\int_0^1 1dt\right]^{1-1/q} \left[\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{2qt} |f'(b^t a^{1-t})|^q \, dt\right]^{1/q}$$

$$\le a^2(lnb-lna)\left[\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{2qt}[(1-t)|f'(a)|^q+t|f'(b)|^q]dt\right]^{1/q}$$

$$\le (lnb-lna)$$

$$\times\left[\frac{b^{2q}-a^{2q}(lnb^{2q}-lna^{2q})-a^{2q}}{(lnb^{2q}-lna^{2q})^2}|f'(a)|^q+\frac{a^{2q}+b^{2q}(lnb^{2q}-lna^{2q})-b^{2q}}{(lnb^{2q}-lna^{2q})^2}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le\frac{(lnb-lna)^{1-\frac{1}{q}}}{(2q)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times\{[L(a^{2q},b^{2q})-a^{2q}]|f'(a)|^q+[b^{2q}-L(a^{2q},b^{2q})]|f'(b)|^q\}^{1/q}$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.5 $f: I\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I^o, a<b$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q, q>1$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde GA-konveks ve $2q>p>0$ ise bu takdirde

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le\frac{(lnb-lna)^{1-1/q}}{p^{1/q}}\times\left[L\left(a^{\frac{2q-p}{q-1}},b^{\frac{2q-p}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\{[L(a^p,b^p)-a^p]|f'(a)|^q+[b^p-L(a^p,b^p)]|f'(b)|^q\}^{1/q} \quad (3.19)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $|f'(x)|^q, q\ge 1,$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde GA-konveks olduğundan Lemma 3.1.2 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le a^2(lnb-lna)\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{2t}|f'(b^ta^{1-t})|dt$$

$$\le a^2(lnb-lna)\left[\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{(2q-p)/(q-1)t}dt\right]^{1-1/q}\left[\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{pt}|f'(b^ta^{1-t})|^q dt\right]^{1/q}$$

$$\le a^2(lnb-lna)\left[\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2q-p}{q-1}}-1}{\frac{(2q-p)(lnb-lna)}{q-1}}\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{pt}[(1-t)|f'(a)|^q+t|f'(b)|^q]dt\right]^{1/q}$$

$$\leq \frac{(lnb-lna)^{1-\frac{1}{q}}}{p^{\frac{1}{q}}}\left[L\left(a^{(2q-p)/(q-1)}, b^{(2q-p)/(q-1)}\right)\right]^{1-1/q}$$

$$\times \{[L(a^p, b^p) - a^p]|f'(a)|^q + [b^p - L(a^p, b^p)]|f'(b)|^q\}^{1/q}$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.1.2 Teorem 3.1.5 in varsayımları altında eğer $q = p$ ise bu takdirde

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(lnb-lna)^{1-\frac{1}{q}}}{p^{\frac{1}{q}}}\left[L\left(a^{q/(q-1)}, b^{q/(q-1)}\right)\right]^{1-1/q}$$

$$\times \{[L(a^q, b^q) - a^q]|f'(a)|^q + [b^q - L(a^q, b^q)]|f'(b)|^q\}^{1/q}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Teorem 3.1.6 $0 < a < b, s > 0,\quad q \geq 1$ ve $sq \neq 1$ için

$$2[L_{s+1}(a,b)]^{s+1} \leq (a+b)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{(sq+2)\left[L_{sq+1}(a,b)\right]^{sq+1} - sqL(a^2,b^2)\quad \left[L_{sq-1}(a,b)\right]^{sq-1}\right\}^{1/q} \quad (3.20)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $x \in \mathbb{R}^+$ ve $s > 0$ olmak üzere $f(x) = \frac{x^{s+1}}{s+1}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $|f'(x)|^q = x^{sq}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde GA-konveks olduğundan (3.16) eşitsizliğinden

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right| = \frac{b^{s+2}-a^{s+2}}{s+2} = (b-a)[L_{s+1}(a,b)]^{s+1} \quad (3.21)$$

ve

$$\frac{[(b-a)A(a,b)]^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}}} \times \{[L(a^2,b^2) - a^2]|f'(a)|^q + [b^2 - L(a^2,b^2)]|f'(b)|^q\}^{1/q}$$

$$= \frac{[(b-a)(a+b)]^{1-\frac{1}{q}}}{2} \times \left\{\frac{(sq+2)(b^{sq+2} - a^{sq+2})}{(sq+2)(b-a)} - L(a^2,b^2)\frac{sq(b^{sq} - a^{sq})}{sq(b-a)}\right\}^{1/q}$$

$$= \frac{[(b-a)(a+b)]^{1-\frac{1}{q}}}{2}\left\{(sq+2)\left[L_{sq+1}(a,b)\right]^{sq+1} - sqL(a^2,b^2)\left[L_{sq-1}(a,b)\right]^{sq-1}\right\}^{1/q}$$

olduğu görülür. Bu iki eşitlik birleştirilirse (3.20) deki ifade elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.1.3 Teorem 3.1.6 nın şartları altında $q = 1$ ve $s \neq 1$ alınırsa

$$L(a,b)[L_{s-1}(a,b)]^{s-1} \leq [L_{s+1}(a,b)]^{s+1} \tag{3.22}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Teorem 3.1.7 $0 < a < b, \; s > 0, \; q > 1$ için

$$L(a,b)[L_{s+1}(a,b)]^{s+1} \leq \left[L\left(a^{2q/(q-1)}, b^{2q/(q-1)}\right)\right]^{1-1/q} \{A(a^{sq}, b^{sq}) \;\}^{1/q} \tag{3.23}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $x \in \mathbb{R}^+$ ve $s > 0$ olmak üzere $f(x) = \frac{x^{s+1}}{s+1}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $|f'(x)|^q = x^{sq}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde GA-konveks olduğundan (3.17) eşitsizliğindeki üst sınır için bu fonksiyon uygulanırsa

$$(lnb - lna)\left[L\left(a^{2q/(q-1)}, b^{2q/(q-1)}\right)\right]^{1-1/q}[A(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}}$$

$$= (lnb - lna)\left[L\left(a^{2q/(q-1)}, b^{2q/(q-1)}\right)\right]^{1-1/q}[A(a^{sq}, b^{sq})]^{\frac{1}{q}}$$

olduğu görülür. Bu ifade (3.21) ile birleştirilirse (3.23) ifadesi elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.8 $0 < a < b, \; s > 0, \; q \geq 1$ ve $sq \neq 1$ için

$$[L_{s+1}(a,b)]^{s+1}[L(a,b)]^{1-1/q} \leq \frac{1}{(2q)^{1/q}} \tag{3.24}$$

$$\times \left\{(s+2)q\left[L_{(s+2)q-1}(a,b)\right]^{(s+2)q-1} - sqL(a^{2q}, b^{2q}) \quad \left[L_{sq-1}(a,b)\right]^{sq-1}\right\}^{1/q}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $x \in \mathbb{R}^+$ ve $s > 0$ olmak üzere $f(x) = \frac{x^{s+1}}{s+1}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $|f'(x)|^q = x^{sq}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde GA-konveks olduğundan (3.18) eşitsizliğindeki üst sınır için bu fonksiyon uygulanırsa

$$\frac{(lnb - lna)^{1-\frac{1}{q}}}{(2q)^{\frac{1}{q}}}\{[L(a^{2q}, b^{2q}) - a^{2q}]|f'(a)|^q + [b^{2q} - L(a^{2q}, b^{2q})]|f'(b)|^q\}^{1/q}$$

$$= \frac{(lnb - lna)^{1-\frac{1}{q}}}{(2q)^{\frac{1}{q}}}(b-a)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{(s+2)q\left[L_{(s+2)q-1}(a,b)\right]^{(s+2)q-1} - sqL(a^{2q}, b^{2q}) \quad \left[L_{sq-1}(a,b)\right]^{sq-1}\right\}^{1/q}$$

olduğu görülür. Bu ifade (3.21) ile birleştirilirse (3.24) ifadesi elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.9 $0 < a < b,\ s > 0,\quad q > 1, 2q > p > 0$ ve $sq \neq 1$ için

$$[L_{s+1}(a,b)]^{s+1}[L(a,b)]^{1-1/q} \leq \frac{1}{p^{1/q}}\left[L\left(a^{2q/(q-1)}, b^{2q/(q-1)}\right)\right]^{1-1/q} \tag{3.25}$$

$$\times\left\{(p+sq)\left[L_{p+sq-1}(a,b)\right]^{p+sq-1} - sqL(a^p,b^p)\quad \left[L_{sq-1}(a,b)\right]^{sq-1}\right\}^{1/q}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $x \in \mathbb{R}^+$ ve $s > 0$ olmak üzere $f(x) = \frac{x^{s+1}}{s+1}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $|f'(x)|^q = x^{sq}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde GA-konveks olduğundan (3.19) eşitsizliğindeki üst sınır için bu fonksiyon uygulanırsa

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(lnb-lna)^{1-\frac{1}{q}}}{p^{\frac{1}{q}}}\left[L\left(a^{(2q-p)/(q-1)}, b^{(2q-p)/(q-1)}\right)\right]^{1-1/q}$$

$$\times\{[L(a^p,b^p) - a^p]|f'(a)|^q + [b^p - L(a^q,b^q)]|f'(b)|^q\}^{1/q}$$

$$= \frac{(lnb-lna)^{1-\frac{1}{q}}}{p^{\frac{1}{q}}}(b-a)^{1/q}\left[L\left(a^{(2q-p)/(q-1)}, b^{(2q-p)/(q-1)}\right)\right]^{1-1/q}$$

$$\times\left\{(p+sq)\left[L_{p+sq-1}(a,b)\right]^{p+sq-1} - sqL(a^p,b^p)\quad \left[L_{sq-1}(a,b)\right]^{sq-1}\right\}^{1/q}$$

olduğu görülür. Bu ifade (3.21) ile birleştirilirse (3.25) ifadesi elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

3.2. (α, m)-GA Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda (α, m)-GA konveks fonksiyon kavramı tanımlanıp bu tipten fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri verilecektir.

Tanım 3.2.1 $f: [0,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $b > 0$ ve $m \in (0,1]$ olmak üzere eğer her $x, y \in [0,b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

ise bu fonksiyona $[0,b]$ üzerinde m −konvekstir denir (Shuang ve Ark. 2017).

Tanım 3.2.2 $f: [0,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $b > 0$ ve $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ olmak üzere eğer her $x, y \in [0,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + m(1-\lambda)y) \leq \lambda^{\alpha} f(x) + m(1-\lambda^{\alpha}) f(y) \tag{3.26}$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa $f(x)$ fonksiyonuna $[0,b]$ aralığı üzerinde $(\alpha,m)-$ konveks fonksiyon denir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.2.1 $f\colon \mathrm{I}^{\circ} \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b \in \mathrm{I}^{\circ}$, $a<b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)}{8}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right) \tag{3.27}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.2.2: $\mathrm{I}^{\circ} \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b \in \mathrm{I}^{\circ}$, $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q} \tag{3.28}$$

ve

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.2.3 $f\colon \mathbb{R}_0 = [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $m-$konveks ve $m \in (0,1]$ olsun. Eğer $a,b \in \mathbb{R}_0$ ve $a<b$ için $f \in L_1([a,b])$ ise bu takdirde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \min\left\{\frac{f(a)+mf(b/m)}{2}, \frac{mf(a/m)+f(b)}{2}\right\} \tag{3.29}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.2.4 $f\colon \mathbb{R}_0 = [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $m-$konveks ve $m \in (0,1]$ olsun. Eğer $a,b \in \mathbb{R}_0$ ve $a<b$ için $f \in L_1([a,b])$ ise bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)+mf(x/m)}{2}dx \leq \frac{m+1}{4}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + m\frac{f(a/m)+f(b/m)}{2}\right] \tag{3.30}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.2.5 $\mathrm{I} \supseteq \mathbb{R}_0$ bir reel açık aralık $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir olmak üzere $f' \in L([a,b])$, $0 \leq a < b < \infty$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $m,\alpha \in (0,1]$ ve $q \geq 1$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında $(\alpha,m)-$konveks ise bu takdirde

$v_1 = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(\alpha + \frac{1}{2^\alpha}\right)$ ve $v_2 = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(\frac{\alpha^2+\alpha+2}{2} - \frac{1}{2^\alpha}\right)$

olmak üzere

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1/q} \tag{3.31}$$
$$\times \min\left\{\left[v_1|f'(a)|^q + v_2 m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{1/q}, \left[v_2 m\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q + v_1|f'(b)|^q\right]^{1/q}\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Tanım 3.2.4 $f: (0, b^*] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ olmak üzere eğer her $x, y \in (0, b^*]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(x^t y^{m(1-t)}\right) \leq t^\alpha f(x) + m(1 - t^\alpha)f(y) \tag{3.32}$$

eşitsizliği gerçeklenirse. bu fonksiyona $I = (0, b^*]$ üzerinde (α, m) −GA konvekstir denir(Shuang ve Ark. 2017).

Lemma 3.2.1 f: I ⊆ $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in$ I°, $0 < a < b$ olsun. Eğer $f' \in L_1([a, b])$ ise bu takdirde

$$\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6} - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \tag{3.33}$$
$$= \frac{\ln b - \ln a}{4}\int_0^1 \left(t - \frac{1}{3}\right)\left[a^{1-t/2}b^{t/2}f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right) - a^{t/2}b^{1-t/2}f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right]dt$$

eşitliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.2.5 $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde diferansiyellenebilir, $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$ ve $f' \in L_1([a, b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ ve $q \geq 1$ olmak üzere $\left(0, \max\{b, b^{1/m}\}\right]$ üzerinde (α, m) −GA-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a) + 4f(\sqrt{ab}) + f(b)}{6} - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right|$$
$$\leq \frac{\ln b - \ln a}{4}\left[\frac{1}{2^{\alpha+2}3^{\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right]^{1/q}$$
$$\times\left\{M^{(q-1)/q}(a,b)\left[N_1(a,b)|f'(b)|^q + mN_2(a,b)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right.$$
$$\left. + M^{(q-1)/q}(b,a)\left[N_1(b,a)|f'(a)|^q + mN_2(b,a)\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$M(u,v)=\frac{2\left[u^{5/6}L\left(u^{1/6},v^{1/6}\right)+u^{1/2}\left(2v^{1/2}-u^{1/2}\right)-2u^{1/2}v^{1/6}L\left(u^{1/3},v^{1/3}\right)\right]}{3(\ln v-\ln u)}$$

$$N_1(u,v)=12(5u+v)\alpha+12(17u+v)+6 \times 3^{\alpha+2}[(u+v)(2\alpha^2+3)+(9u+5v)\alpha]$$

$$N_2(u,v)=6^{\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(61u+29v)-6(10u+2v)\alpha -12(17u+v)-6\times 3^{\alpha+2}[(u+v)(2\alpha^2+3)+(9u+5v)\alpha]$$

$$L(u,v)=\frac{u-v}{\ln u-\ln v}$$

dir (Shuang ve Ark. 2017).

İspat: Lemma 3.2.1 ve Hölder integral eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx\right|\le\frac{\ln b-\ln a}{4}\\
&\quad\times\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|\left[a^{1-t/2}b^{t/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right|+a^{t/2}b^{1-t/2}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|\right]dt\\
&\le\frac{\ln b-\ln a}{4} \qquad (3.34)\\
&\quad\times\left\{\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{1-t/2}b^{t/2}dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{1-t/2}b^{t/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right.\\
&\quad\left.+\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{t/2}b^{1-t/2}dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{t/2}b^{1-t/2}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right\}
\end{aligned}$$

olduğu görülür, burada

$$\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{1-t/2}b^{t/2}dt=M(a,b)\ \text{ ve }\ \int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{t/2}b^{1-t/2}dt=M(b,a) \qquad (3.35)$$

dir. $|f'|^q$ fonksiyonu $\left(0,\max\left\{b,b^{1/m}\right\}\right]$ üzerinde (α,m) −GA-konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{1-t/2}b^{t/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right|^q dt\\
&\quad\le\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{1-t/2}b^{t/2}\left[\frac{t^\alpha}{2^\alpha}|f'(b)|^q+m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right]dt\\
&\quad\le\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|\left[\left(1-\frac{t}{2}\right)a+\frac{t}{2}b\right]\left[\frac{t^\alpha}{2^\alpha}|f'(b)|^q+m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right]dt\\
&\quad=\frac{N_1(a,b)\left|f'(b)\right|^q+mN_2(a,b)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q}{2^{\alpha+2}\times3^{\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}
\end{aligned}$$

ve

$$\int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right| a^{t/2}b^{1-t/2}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|^q dt$$

$$=\frac{N_1(b,a)\left|f'(a)\right|^q+mN_2(b,a)\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q}{2^{\alpha+2}\times 3^{\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \tag{3.36}$$

olduğu görülür. (3.35) ve (3.36) ifadeleri (3.34) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa iddia sağlanır ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1 Teorem 3.2.5 in koşulları altında eğer $q=1$ alınırsa bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+4f\left(\sqrt{ab}\right)+f(b)}{6}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq \frac{\ln b-\ln a}{6^{4+\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\times\{N_1(b,a)|f'(a)|+N_1(a,b)|f'(b)|$$

$$+m\left[N_2(a,b)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|+N_2(b,a)\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|\right]\}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Sonuç 3.2.2 Teorem 3.2.5 in koşulları altında eğer $\alpha=m=1$ alınırsa bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+4f\left(\sqrt{ab}\right)+f(b)}{6}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right|\leq \frac{\ln b-\ln a}{4}\left(\frac{1}{3\times 6^4}\right)^{1/q}\times \tag{3.37}$$

$$\times\left\{M^{(q-1)/q}(a,b)[(211a+137b)|f'(b)|^q+(521a+211b)|f'(a)|^q]^{1/q}\right.$$

$$\left.+M^{(q-1)/q}(b,a)[(137a+211b)|f'(a)|^q+(211a+521b)|f'(b)|^q]^{1/q}\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Shuang ve Ark. 2017).

Sonuç 3.2.3 Teorem 3.2.5 in koşulları altında eğer $\alpha=m=q=1$ alınırsa bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+4f\left(\sqrt{ab}\right)+f(b)}{6}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq\frac{(\ln b-\ln a)\left[(329a+211b)|f'(a)|+(211a+329b)|f'(b)|\right]}{6^5} \tag{3.38}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.2.6 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde diferansiyellenebilir, $a,b\in\mathbb{R}_+$, $a<b$ ve $f'\in L_1([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $(\alpha,m)\in(0,1]^2$ ve $q>1$ olmak üzere $\left(0,\max\{b,b^{1/m}\}\right]$ üzerinde (α,m) −GA-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+4f\left(\sqrt{ab}\right)+f(b)}{6}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq \frac{\ln b-\ln a}{4}\left(\frac{(q-1)\left[2^{(2q-1)/(q-1)}+1\right]}{(2q-1)3^{(2q-1)/(q-1)}}\right)^{1-1/q}\left[\frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]^{1/q} \tag{3.39}$$

$$\times\left\{\left[2[(\alpha+3)a^q+(\alpha+1)b^q]|f'(b)|^q+m\{[3\times 2^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)-2(\alpha+\right.\right.$$

$$3)]a^q+(\alpha+1)[2^\alpha(\alpha+2)-2]b^q\}\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\Big]^{1/q}+\Big[2[(\alpha+1)a^q+(\alpha+$$

$$3)b^q]|f'(a)|^q+m\{(\alpha+1)[2^\alpha(\alpha+2)-2]a^q+[3\times 2^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)-2(\alpha+$$

$$\left.3)]b^q\}\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\Big]^{1/q}\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Shuang ve Ark. 2017).

İspat: $|f'|^q$ fonksiyonu $\left(0,\max\{b,b^{1/m}\}\right]$ aralığı üzerinde (α,m) $-$GA-konveks olduğundan Lemma 3.2.1 ve Hölder integral eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq\frac{\ln b-\ln a}{4}\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|\left[a^{1-t/2}b^{t/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right|+a^{t/2}b^{1-t/2}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|\right]dt$$

$$\leq\frac{\ln b-\ln a}{4}\left\{\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|^{q/(q-1)}dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1 a^{q(1-t/2)}b^{qt/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|^{q/(q-1)}dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1 a^{qt/2}b^{q(1-t/2)}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$\leq\frac{\ln b-\ln a}{4}\left(\frac{(q-1)\left[2^{(2q-1)/(q-1)}+1\right]}{(2q-1)3^{(2q-1)/(q-1)}}\right)^{1-1/q}$$

$$\times\left\{\left[\int_0^1\left[\left(1-\frac{t}{2}\right)a^q+\frac{t}{2}b^q\right]\left(\frac{t^\alpha}{2^\alpha}|f'(b)|^q+m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{1/q}+\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^1\left[\frac{t}{2}a^q+\left(1-\frac{t}{2}\right)b^q\right]\left(\frac{t^\alpha}{2^\alpha}|f'(a)|^q+m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right)\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$=\frac{\ln b-\ln a}{4}\left(\frac{(q-1)\left[2^{(2q-1)/(q-1)}+1\right]}{(2q-1)3^{(2q-1)/(q-1)}}\right)^{1-1/q}\left(\frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{1/q}$$

$$\times\left\{\left[2[(\alpha+3)a^q+(\alpha+1)b^q]|f'(b)|^q+m\{[3\times 2^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)-2(\alpha+\right.\right.$$

$$3)]a^q+(\alpha+1)[2^\alpha(\alpha+2)-2]b^q\}\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\Big]^{1/q}+\Big[2[(\alpha+1)a^q+(\alpha+$$

$$3)b^q]|f'(a)|^q+m\{(\alpha+1)[2^\alpha(\alpha+2)-2]a^q+[3\times 2^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)-2(\alpha+$$

$$\left.3)]b^q\}\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\Big]^{1/q}\right\}$$

olduğu görülür ve böylece Teorem 3.2.6 ispatlanmış olur.

Sonuç 3.2.4 Teorem 3.2.6 nın koşulları altında eğer $\alpha = m = 1$ alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6} - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq \frac{\ln b - \ln a}{4}\left(\frac{1}{48}\right)^{1/q}\left(\frac{(q-1)[2^{(2q-1)/(q-1)}+1]}{(2q-1)3^{(2q-1)/(q-1)}}\right)^{1-1/q}$$

$$\times\left\{[(8a^q + 4b^q)|f'(b)|^q + (28a^q + 8b^q)|f'(a)|^q]^{1/q}\right.$$

$$\left.+[(4a^q + 48)|f'(a)|^q + (8a^q + 28b^q)|f'(b)|^q]^{1/q}\right\}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2.7 $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde diferansiyellenebilir, $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$ ve $f' \in L_1([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ ve $q > 1$ olmak üzere $\left(0, \max\{b, b^{1/m}\}\right]$ üzerinde (α, m) −GA-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6} - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq \frac{\ln b - \ln a}{4}\left(\frac{5}{18}\right)^{1-1/q}\left(\frac{1}{2^{\alpha+2}\times 3^{\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)^{1/q} \tag{3.40}$$

$$\times\left\{\left[\{[12(5\alpha+17) + 2\times 3^{\alpha+3}(2\alpha^2+9\alpha+3)]a^q + 6\times[2(\alpha+1) + 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+5\alpha+3)]b^q\}|f'(b)|^q + m\{[61\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) - 12(5\alpha+17) - 6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+3)]a^q + [29\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) - 12(\alpha+1) - 6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+5\alpha+3)]b^q\}\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q} + \right.$$

$$\left.\left[\{[12(5\alpha+17) + 6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+3)]b^q + 6\times[2(\alpha+1) + (2\alpha^2+5\alpha+3)3^{\alpha+2}]a^q\}|f'(a)|^q + m\{[61\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) - 12(5\alpha+17) - 6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+3)]b^q + [29\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) - 12(\alpha+1) - 6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+5\alpha+3)]a^q\}\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

İspat: $|f'|^q$ fonksiyonu $\left(0, \max\{b, b^{1/m}\}\right]$ aralığı üzerinde (α, m) −GA-konveks olduğundan Lemma 3.2.1 ve Hölder integral eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6} - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq \frac{\ln b - \ln a}{4}\int_0^1\left|t - \frac{1}{3}\right|\left[a^{1-t/2}b^{t/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right| + a^{t/2}b^{1-t/2}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|\right]dt$$

$$\leq \frac{\ln b-\ln a}{4}\left\{\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{q(1-t/2)}b^{qt/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{qt/2}b^{q(1-t/2)}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$\leq \frac{\ln b-\ln a}{4}\left(\frac{5}{18}\right)^{1-1/q}\left\{\left[\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|\left[\left(1-\frac{t}{2}\right)a^q+\frac{t}{2}b^q\right]\left(\frac{t^\alpha}{2^\alpha}|f'(b)|^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{1/q}$$

$$+\left[\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|\left[\frac{t}{2}a^q+\left(1-\frac{t}{2}\right)b^q\right]\left(\frac{t^\alpha}{2^\alpha}|f'(a)|^q\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right)\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$+\left[\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|\left[\frac{t}{2}a^q+\left(1-\frac{t}{2}\right)b^q\right]\left(\frac{t^\alpha}{2^\alpha}|f'(a)|^q+m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right)\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{1/q}$$

$$=\frac{\ln b-\ln a}{4}\left(\frac{5}{18}\right)^{1-1/q}\left(\frac{1}{2^{\alpha+2}\times 3^{\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)^{1/q}$$

$$\left\{\left[\{[12(5\alpha+17)+2\times 3^{\alpha+3}(2\alpha^2+9\alpha+3)]a^q+6\times[2(\alpha+1)+3^{\alpha+2}(2\alpha^2+\right.\right.$$
$$5\alpha+3)]b^q\}|f'(b)|^q+m\{[61\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)-12(5\alpha+17)-$$
$$6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+3)]a^q+[29\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)-12(\alpha+1)-$$
$$\left.6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+5\alpha+3)]b^q\}\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}+\left[\{[12(5\alpha+17)+6\times\right.$$
$$3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+3)]b^q+6\times[2(\alpha+1)+(2\alpha^2+5\alpha+3)3^{\alpha+2}]a^q\}|f'(a)|^q+$$
$$m\{[61\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)-12(5\alpha+17)-6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+$$
$$3)]b^q+[29\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)-12(\alpha+1)-6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+5\alpha+$$
$$\left.\left.3)]a^q\}\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right\}$$

olduğu görülür ve böylece Teorem 3.2.7 ispatlanmış olur.

3.3. Güçlü GA-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda güçlü GA-konvex fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili bazı yeni teoremler ve sonuçlar verilecektir. Bunun için önce bazı tanımları verebiliriz.

Tanım 3.3.1 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık ve c pozitif bir tamsayı ve $f\colon I=[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - ct(1-t)\|y-x\|^2$$

eşitsizliği sağıanıyorsa f fonksiyonuna $c > 0$ modülüne göre konvekstir denir (Noor ve Ark. 2016).

Tanım 3.3.2. I bir aralık, $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^{1-t}y^t) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - ct(1-t)\|\ln y - \ln x\|^2$$

ise f fonksiyonuna I üzerinde $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konvekstir denir.

Lemma 3.3.1. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun I üzerinde $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks olması için gerek ve yeter koşul $g(x) = f(x) - c\|\ln x\|^2$ fonksiyonunun I üzerinde GA-konveks olmasıdır(Noor ve Ark. 2016).

İspat: Farz edelim ki f fonksiyonu I üzerinde $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks olsun. Bu durumda iççarpım özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
g(x^t y^{1-t}) &= f(x^t y^{1-t}) - c\|\ln x^t y^{1-t}\|^2 \\
&\leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)\|\ln y - \ln x\|^2 - c\|\ln x^t + \ln y^{1-t}\|^2 \\
&\leq tf(x) + (1-t)f(y) - c(t(1-t)\|\ln y\|^2 - 2t(1-t)\ln y \ln x + \\
&\quad +t(1-t)\|\ln x\|^2 + \|\ln x^t\|^2 + 2\ln x^t \ln y^{1-t} + \|\ln y^{1-t}\|^2) \\
&\leq tf(x) + (1-t)f(y) - c(t\|\ln x\|^2 + (1-t)\|\ln y\|^2) \\
&\leq tf(x) - ct\|\ln x\|^2 + (1-t)f(y) - c(1-t)\|\ln y\|^2 \\
&= tg(x) + (1-t)g(y)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da g fonksiyonunun GA-konveks fonksiyon olduğunu gösterir. Tersine olarak, eğer g fonksiyonu GA-konveks fonksiyon ise, bu takdirde

$$\begin{aligned}
f(x^t y^{1-t}) &= g(x^t y^{1-t}) + c\|\ln x^t y^{1-t}\|^2 \\
&\leq tg(x) + (1-t)g(y) + c\|\ln x^t + \ln y^{1-t}\|^2 \\
&\leq tg(x) + (1-t)g(y) + c(1-t)\|\ln y\|^2 - ct(1-t)\|\ln y\|^2 \\
&\quad +2ct(1-t)\ln x \ln y + ct\|\ln x\|^2 - ct(1-t)\|\ln x\|^2 \\
&= tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)\|\ln y - \ln x\|^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir ki bu f fonksiyonunun $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks bir fonksiyon olduğunu verir.

Teorem 3.3.2. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise bu takdirde

$$f(\sqrt{ab}) + \frac{c}{12}\|\ln b - \ln a\|^2 \leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f(x)\frac{1}{x}dx$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}\|\ln b - \ln a\|^2 \quad (3.41)$$

eşitsizliği gerçeklenir(Noor ve Ark. 2016).

İspat: $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks olduğundan, $t = \frac{1}{2}$ alındığında (3.41) eşitsizliğinden her $x, y \in I$ için

$$f(\sqrt{xy}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|\ln y - \ln x\|^2$$

olduğu görülür. Buradan $x = a^{1-t}b^t$, $y = a^t b^{1-t}$ seçilirse

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{f(a^{1-t}b^t) + f(a^t b^{1-t})}{2} - \frac{c}{4}\|\ln a^t b^{1-t} - \ln a^{1-t}b^t\|^2$$

olur. $t \in [0,1]$ üzerinden integral alınırsa

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(a^{1-t}b^t)dt + \int_0^1 f(a^t b^{1-t})dt\right] - \frac{c}{4}\|\ln b - \ln a\|^2 \int_0^1 (1-2t)^2 dt$$

ve dolayısıyla

$$f(\sqrt{ab}) + \frac{c}{12}\|\ln b - \ln a\|^2 \leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f(x)\frac{1}{x}dx$$

olur ve böylece (3.41) in sol tarafı sağlanr. Öte yandan her $t \in [0,1]$ için

$$f(a^{1-t}b^t) \leq (1-t)f(a) + tf(b) - ct(1-t)\|\ln b - \ln a\|^2$$

olup, buradan da t ye göre $[0,1]$ de integral alınırsa (3.31) in sağ tarafı sağlanır. Yani

$$\leq \int_0^1 \big((1-t)f(a) + tf(b)\big)dt - c\|\ln b - \ln a\|^2 \int_0^1 t(1-t)dt$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}\|\ln b - \ln a\|^2$$

olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 3.3.3. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks olsun. Bu takdirde her $x, y \in I,\ t \in [0,1]$ için

$$f(\sqrt{ab}) + \frac{c}{12}\|\ln b - \ln a\|^2 \leq \phi(\mathrm{x}) \leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f(x)\frac{1}{x}dx$$

$$\leq \psi(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}\|\ln b - \ln a\|^2 \tag{3.42}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$\phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\left[f\left(a^{3/4}b^{1/4}\right) + f\left(a^{1/4}b^{3/4}\right)\right] + \frac{c}{48}\|\ln b - \ln a\|^2 \ ,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left[f(\sqrt{ab}) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right] - \frac{c}{24}\|\ln b - \ln a\|^2$$

dir(Noor ve Ark. 2016).

İspat: $[a, \sqrt{ab}]$ ve $[\sqrt{ab}, b]$ aralıklarının her biri üzerinde (3.41) uygulanırsa

$$f\left(\sqrt{a\sqrt{ab}}\right) + \frac{c}{12}\left\|\ln\sqrt{ab} - \ln a\right\|^2$$

$$\leq \frac{1}{\ln\sqrt{ab} - \ln a}\int_a^{\sqrt{ab}} f(x)\frac{1}{x}dx \leq \frac{f(a)+f(\sqrt{ab})}{2} - \frac{c}{6}\left\|\ln\sqrt{ab} - \ln a\right\|^2 \ ,$$

$$f\left(a^{3/4}b^{1/4}\right) + \frac{c}{48}\|\ln b - \ln a\|^2$$

$$\leq \frac{2}{\ln b - \ln a}\int_a^{\sqrt{ab}} f(x)\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{2}\left[f(a) + f(\sqrt{ab})\right] - \frac{c}{24}\|\ln b - \ln a\|^2 \ , \tag{3.43}$$

$$f\left(a^{1/4}b^{3/4}\right) + \frac{c}{48}\|\ln b - \ln a\|^2$$

$$\leq \frac{2}{\ln b - \ln a}\int_{\sqrt{ab}}^b f(x)\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{2}\left[f(\sqrt{ab}) + f(b)\right] - \frac{c}{24}\|\ln b - \ln a\|^2 \tag{3.44}$$

olduğu gösterilebilir. Buradan taraf tarafa toplama yapılırsa

$$\phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\left[f\left(a^{3/4}b^{1/4}\right) + f\left(a^{1/4}b^{3/4}\right)\right] + \frac{c}{48}\|\ln b - \ln a\|^2$$

$$\leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f(x)\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{2}\left[f(\sqrt{ab}) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right] - \frac{c}{24}\|\ln b - \ln a\|^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{4}\|\ln b - \ln a\|^2\right] - \frac{c}{24}\|\ln b - \ln a\|^2$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}\|\ln b - \ln a\|^2 \tag{3.45}$$

olur. Benzer şekilde $\psi(x)$ için de istenen eşitsizliğin sağlandığı gösterilebilir.

Teorem 3.3.4. $f, g: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonları I üzerinde $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks olsun. Eğer $f, g \in L[a, b]$ ise, bu takdirde

$$M(a, b) = f(a)g(a) + f(b)g(b),$$

$N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a),$

$S(a,b) = f(a) + f(b) + g(a) + g(b)$

olmak üzere

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f(x)g\left(\frac{ab}{x}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$\leq \frac{1}{6}M(a,b) + \frac{1}{3}N(a,b) - \frac{c}{12}\|\ln b - \ln a\|^2 S(a,b) - \frac{c^2}{30}\|\ln b - \ln a\|^4 ,$$

eşitsizliği gerçeklenir(Noor ve Ark. 2016).

İspat: f, g fonksiyonları I üzerinde $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f(x)g\left(\frac{ab}{x}\right)\frac{1}{x}dx = \int_0^1 f(a^{1-t}b^t)g(a^t b^{1-t})dt$$

$$\leq \int_0^1 [(1-t)f(a) + tf(b) - ct(1-t)\|\ln b - \ln a\|^2]$$

$$.\,[tg(a) + (1-t)g(b) - ct(1-t)\|\ln b - \ln a\|^2]dt$$

$$= f(a)g(b)\int_0^1 (1-t)^2 dt + f(b)g(a)\int_0^1 t^2 dt$$

$$+[f(a)g(a) + f(b)g(b)]\int_0^1 t(1-t)dt$$

$$-c\|\ln b - \ln a\|^2 [f(a) + g(b)]\int_0^1 t(1-t)^2 dt$$

$$-c\|\ln b - \ln a\|^2 [f(b) + g(a)]\int_0^1 t^2(1-t)dt$$

$$-c^2\|\ln b - \ln a\|^4 \int_0^1 t^2(1-t)^2 dt$$

$$= \frac{f(a)g(b) + f(b)g(a)}{3} + \frac{f(a)g(a) + f(b)g(b)}{6}$$

$$-\frac{c}{12}\|\ln b - \ln a\|^2 [f(a) + f(b) + g(a) + g(b)] - \frac{c^2}{30}\|\ln b - \ln a\|^4$$

$$= \frac{1}{6}M(a,b) + \frac{1}{3}N(a,b) - \frac{c}{12}\|\ln b - \ln a\|^2 S(a,b) - \frac{c^2}{30}\|\ln b - \ln a\|^4$$

olduğu görülür.

Teorem 3.3.4 de özel olarak, $f = g$ alınırsa bu durumda aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.3.1. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise bu takdirde

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f(x) f\left(\frac{ab}{x}\right)\frac{1}{x}dx \leq \frac{2[f(a)f(b)]}{3} + \frac{f^2(a)+f^2(b)}{6}$$

$$-\frac{c}{6}\|\ln b - \ln a\|^2[f(a)+f(b)] - \frac{c^2}{30}\|\ln b - \ln a\|^4$$

eşitsizliği gerçeklenir(Noor ve Ark. 2016).

Teorem 3.3.5. $f, g\colon I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonları I üzerinde $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks olsun. Eğer $fg \in L[a,b]$ ise bu takdirde $M(a,b)$, $N(a,b)$ ve $S(a,b)$ Teorem 3.3.4 de verildikleri gibi olmak üzere

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f(x)g(x)\frac{1}{x}dx$$

$$\leq \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b) - \frac{c}{12}\|\ln b - \ln a\|^2 S(a,b) - \frac{c^2}{30}\|\ln b - \ln a\|^4$$

eşitsizliği gerçeklenir(Noor ve Ark. 2016).

İspat: f ve g fonksiyonları I da $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks olduğundan

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f(x)g(x)\frac{1}{x}dx = \int_0^1 f(a^{1-t}b^t)g(a^{1-t}b^t)dt$$

$$\leq \int_0^1 [(1-t)f(a) + tf(b) - ct(1-t)\|\ln b - \ln a\|^2]$$

$$[(1-t)g(a) + tg(b) - ct(1-t)\|\ln b - \ln a\|^2]dt$$

$$= f(a)g(a)\int_0^1 (1-t)^2 dt + f(b)g(b)\int_0^1 t^2 dt$$

$$+[f(a)g(b) + f(b)g(a)]\int_0^1 t(1-t)dt$$

$$-c\|\ln b - \ln a\|^2[f(a) + g(a)]\int_0^1 t(1-t)^2 dt$$

$$-c\|\ln b - \ln a\|^2[f(b) + g(b)]\int_0^1 t^2(1-t)dt$$

$$-c^2\|\ln b - \ln a\|^4\int_0^1 t^2(1-t)^2 dt$$

$$= \frac{f(a)g(a)+f(b)g(b)}{3} + \frac{f(a)g(b)+f(b)g(a)}{6}$$

$$-\frac{c}{12}\|\ln b - \ln a\|^2[f(a)+f(b)+g(a)+g(b)] - \frac{c^2}{30}\|\ln b - \ln a\|^4$$

$$= \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b) - \frac{c}{12}\|\ln b - \ln a\|^2 S(a,b) - \frac{c^2}{30}\|\ln b - \ln a\|^4$$

olduğu görülür.

Eğer Teorem 3.3.5 te özel olarak $f = g$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.2. $f: I \subset \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise bu takdirde

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f^2(x)\frac{1}{x}dx \leq \frac{[f(a)f(b)]}{3} + \frac{f^2(a)+f^2(b)}{3}$$

$$-\frac{c}{6}\|\ln b - \ln a\|^2[f(a)+f(b)] - \frac{c^2}{30}\|\ln b - \ln a\|^4$$

eşitsizliği gerçeklenir(Noor ve Ark. 2016).

3.4. GA$-h-$ Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Tanım 3.4.1 I ve J $\mathbb{R}$'de birer aralık, $(0,1) \subseteq J$ ve $h: J \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $h \not\equiv 0$ olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y) \tag{3.46}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa negatif olmayan $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h-konveks denir. Eğer eşitsizlik tersine çevrilirse bu durumda f fonksiyonuna h-konkavdır denir(Bombardelli and Varosanec, 2009).

Teorem 3.4.1 (Hermite-Hadamard-Fejér Eşitsizlikleri): $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks ve $w: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $w \geq 0$, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$'ye göre simetrik ise bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer f konkav ise eşitsizlikler yön değiştirmelidir. $w \equiv 1$ olması özel durumunda bilinen Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.4.2 $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu h-konveks ve $w: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $w \geq 0$, $\frac{a+b}{2}$'ye göre simetrik ise bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)w(t)dt \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 h(t)w(ta+(1-t)b)dt \tag{3.47}$$

eşitsizliği sağlanır Eğer f h-konkav ise eşitsizlik yön değiştirmelidir(Bombardelli and Varosanec, 2009).

İspat: Her $x \in (a,b)$ ve $\alpha \in (0,1)$ için bu durumda $x = \alpha a + \bar{\alpha}b, \bar{\alpha} = 1-\alpha$ h-konveks fonksiyon tanımından

$$f(\alpha a + \bar{\alpha}b)w(\alpha a + \bar{\alpha}b) \leq \big(h(\alpha)f(a) + h(\bar{\alpha})f(b)\big)w(\alpha a + \bar{\alpha}b)$$

$$f(\bar{\alpha}a+\alpha b)w(\bar{\alpha}a+\alpha b)\leq \big(h(\bar{\alpha})f(a)+h(\alpha)f(b)\big)w(\bar{\alpha}a+\alpha b)$$

Yukarıdaki iki eşitsizlik taraf tarafa toplanıp integrali alınırsa

$$\int_0^1 f(\alpha a+\bar{\alpha}b)w(\alpha a+\bar{\alpha}b)d\alpha+\int_0^1 f(\bar{\alpha}a+\alpha b)w(\bar{\alpha}a+\alpha b)\,d\alpha$$

$$\leq \int_0^1 [h(\alpha)f(a)\,w(\alpha a+\bar{\alpha}b)+h(\bar{\alpha})f(b)w(\alpha a+\bar{\alpha}b)+h(\bar{\alpha})f(a)w(\bar{\alpha}a+\alpha b)$$

$$+\,h(\alpha)f(b)w(\bar{\alpha}a+\alpha b)]d\alpha$$

$$=\int_0^1 \{f(a)[h(\alpha)w(\alpha a+\bar{\alpha}b)+h(\bar{\alpha})w(\bar{\alpha}a+\alpha b)]+f(b)[h(\bar{\alpha})w(\alpha a+\bar{\alpha}b)$$

$$+h(\alpha)w(\bar{\alpha}a+\alpha b)]\}d\alpha$$

$$=2f(a)\int_0^1 h(t)w(ta+(1-t)b)dt+2f(b)\int_0^1 h(t)w\big((1-t)a+tb\big)dt$$

$$=2[f(a)+f(b)]\int_0^1 h(t)w(ta+(1-t)b)dt$$

olduğu görülür, burada w ağırlığının simetrikliği kullanılmıştır. Bu durumda gerekli düzenlemeler yapıldığında birinci satırdaki iki integralin $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)w(t)dt$ ifadesine eşit olduğu görülür ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.4.1 (a) Teorem 3.4.2'de $h(t)=t$ alındığında, eğer f fonksiyonu konveks ise Teorem 3.4.1'deki klasik eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir.

(b) $h(t)=t^s$ ve $s\in(0,1)$ için f ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon ise bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{3.48}$$

olduğu görülür(Bombardelli and Varosanec, 2009).

Teorem 3.4.3 $h\colon J\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h\not\equiv 0$, $(0,1)\subset J$ aralığında tanımlı integrallenebilen, negatif olmayan bir fonksiyon ve $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan ve $h-$konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\frac{2f(a)}{b-a}\int_a^b h(\tfrac{x-a}{b-a})f(x)dx+\frac{2f(b)}{b-a}\int_a^b h(\tfrac{b-x}{b-a})f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx+(f^2(a)+f^2(b))\int_0^1 h^2(t)dt \tag{3.49}$$

$$+2f(a)f(b)\int_0^1 h(t)h(1-t)$$

eşitsizliği sağlanır(Bombardelli and Varosanec, 2009).

İspat: f, [a,b] aralığında $h-$konveks fonksiyon olduğundan her $t\in[0,1]$ için

$$f(ta+(1-t)b)\leq h(t)f(a)+h(1-t)f(b)$$

yazabiliriz. Geometrik ve Aritmetik ortalamalara karşılık gelen $G(x,y)\leq A(x,y)$ klasik eşitsizliği kullanarak

$$\sqrt{f(ta+(1-t)b)\big(h(t)f(a)+h(1-t)f(b)\big)} \leq \frac{f(ta+(1-t)b)+(h(t)f(a)+h(1-t)f(b))}{2}$$

yazılabilir. Buradan

$$4f(ta+(1-t)b)(h(t)f(a)+h(1-t)f(b))$$
$$\leq (f(ta+(1-t)b)+(h(t)f(a)+h(1-t)f(b)))^2$$

ifadesi düzenlenirse,

$$2f(ta+(1-t)b)\big(h(t)f(a)+h(1-t)f(b)\big)$$
$$\leq f^2(ta+(1-t)b)+h^2(t)f^2(a)+h^2(1-t)f^2(b)$$
$$+f(a)f(b)h(t)h(1-t)$$

elde edilir. f ve h integrallenebilir olduğundan $t \in [0,1]$ aralığında integre edilirse

$$2f(a)\int_0^1 h(t)f(ta+(1-t)b)dt + 2f(b)\int_0^1 h(1-t)f(ta+(1-t)b)dt$$
$$\leq \int_0^1 f^2(ta+(1-t)b)dt + (f^2(a)+f^2(b))\int_0^1 h^2(t)dt$$
$$+f(a)f(b)\int_0^1 h(t)h(1-t)dt \tag{3.50}$$

olduğu görülür. Çünkü

$$\int_0^1 h^2(t)dt = \int_0^1 h^2(1-t)dt$$

yazılabilir. $x = ta+(1-t)b$ değişikliği yapılırsa

$$\int_0^1 h(t)f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b h\left(\frac{x-a}{b-a}\right)f(x)dx \tag{3.51}$$

ve benzer şekilde

$$\int_0^1 h(1-t)f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b h\left(\frac{b-x}{b-a}\right)f(x)dx \tag{3.52}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (3.50) eşitsizliği

$$\frac{2f(a)}{b-a}\int_a^b h(\frac{x-a}{b-a})f(x)dx + \frac{2f(b)}{b-a}\int_a^b h(\frac{b-x}{b-a})f(x)dx$$
$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx + (f^2(a)+f^2(b))\int_0^1 h^2(t)dt$$
$$+f(a)f(b)\int_0^1 h(t)h(1-t)dt$$

şeklinde yazılmış olur.

Tanım 3.4.2 $I \subset \mathbb{R}^+$ birer aralık, ve $h: (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $h \not\equiv 0$ olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \tag{3.53}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa negatif olmayan $f: I \subset \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonuna geometrik-aritmetik (GA) h-konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizlik tersine çevrilirse bu durumda f fonksiyonu GA- h-konkavdır denir(Noor ve Ark., 2014).

Özel olarak $t = 1/2$ alınırsa bu durumda Jensen tipi GA-h-konveks fonksiyon adı verilir, yani her $x, y \in I$ için

$$f(\sqrt{xy}) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(x) + f(y)] \tag{3.54}$$

elde edilir.

Lemma 3.4.1 Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}$ mevvcut ve $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir ise bu takdirde

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)$$
$$= \frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)f^{(n)}(ta + (1-t)b)dt$$

eşitliği sağlanır(Noor ve Ark., 2014).

Lemma 3.4.2 Eğer $a, b \in I \subset \mathbb{R}$, $a < b$ $t \in [0,1]$ ise bu takdirde

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b$$

eşitsizliği sağlanır(Noor ve Ark., 2014).

Teorem 3.4.4 $I \subset \mathbb{R}^{+}$ birer aralık, ve $h: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $h(1/2) \neq 0$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu geometrik-aritmetik (GA) h-konveks fonksiyon oldun. Bu takdirde

$$\frac{1}{2h(1/2)} f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{lnb - lna}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \leq [f(a) + f(b)]\int_0^1 h(t)dt \tag{3.55}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Noor ve Ark., 2014).

İspat: $f: I \subset \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu GA- h-konveks fonksiyon olduğundan

$$f(\sqrt{xy}) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(x) + f(y)]$$

elde edilir. Eğer $x = a^t b^{1-t}$ ve $y = a^{1-t} b^t$ alınırsa bu takdirde eşitsizlik

$$f(\sqrt{ab}) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(a^t b^{1-t}) + f(a^{1-t} b^t)]$$

şeklini alır. Bu son eşitsizlikten $[0,1]$ üzerinde t ye göre integral alınırsa

$$\frac{1}{h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\sqrt{ab}\right) \leq \frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \tag{3.56}$$

elde edilir. Ayrıca her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$$

olup bu eşitsizlikten $[0,1]$ üzerinde t ye göre integral alınırsa

$$\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 h(t)dt \tag{3.57}$$

olduğu görülür. (3.56) ve (3.57) birleştirildiğinde istenen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.4.2 Teorem 3.4.4 de $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(t) = t^s$ ve $h(t) = 1$ alınırsa bu durumda sırasıyla

$$2^{s-1} f\left(\sqrt{ab}\right) \leq \frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \leq \frac{[f(a)+f(b)]}{s+1}$$

ve

$$\frac{1}{2} f\left(\sqrt{ab}\right) \leq \frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \leq [f(a)+f(b)]$$

eşitsizlikleri sağlanır(Noor ve Ark., 2014).

Teorem 3.4.5 $f: I \subset \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu n-kez türevlenebilir, integrallenebilir ve azalan bir fonksiyon oldun. Eğer $\left|f^{(n)}\right|$ fonksiyonu geometrik-aritmetik (GA) h-konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$M_1 = \int_0^1 t^{n-1}(n-2t)h(t)dt \text{ ve } M_2 = \int_0^1 t^{n-1}(n-2t)h(1-t)dt$$

olmak üzere

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left[M_1\left|f^{(n)}(a)\right| + M_2\left|f^{(n)}(b)\right|\right] \tag{3.58}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Noor ve Ark., 2014).

İspat: Lemma 3.4.1 ve $\left|f^{(n)}\right|$ fonksiyonunun geometrik-aritmetik (GA) h-konveksliği dikkate alınarak

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$

$$=\left|\frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)f^{(n)}(ta+(1-t)b)dt\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)f^{(n)}(ta+(1-t)b)dt$$

$$\leq\frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)f^{(n)}(a^t b^{1-t})dt$$

$$\leq\frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left[h(t)\left|f^{(n)}(a)\right|+h(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|\right]dt$$

$$\leq\frac{(b-a)^n}{2n!}\left[M_1\left|f^{(n)}(a)\right|+M_2\left|f^{(n)}(b)\right|\right]$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.4.3 Teorem 3.4.5 de $s\in(0,1)$ olmak üzere $h(t)=t^s$ ve $h(t)=1$ alınırsa bu durumda sırasıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^n}{2n!}\left[\frac{n(n-1)+s(n-2)}{(n+s)(n+s+1)}\left|f^{(n)}(a)\right|+\{n\beta(n,s+1)-2\beta(n+1,s+1)\}\left|f^{(n)}(b)\right|\right]$$

ve

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left[\left|f^{(n)}(a)\right|+\left|f^{(n)}(b)\right|\right]$$

eşitsizlikleri sağlanır(Noor ve Ark., 2014).

Teorem 3.4.6 $f: I\subset\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ fonksiyonu n-kez türevlenebilir, integrallenebilir ve azalan bir fonksiyon oldun. Eğer $\left|f^{(n)}\right|$ fonksiyonu geometrik-aritmetik (GA) h-konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$M_1=\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)h(t)dt \quad \text{ve} \quad M_2=\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)h(1-t)dt$$

olmak üzere

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-1/q}\left[M_1\left|f^{(n)}(a)\right|^q+M_2\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{1/q} \tag{3.59}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Noor ve Ark., 2014).

İspat: Lemma 3.4.1 kullanılarak Power-Mean integral eşitsizliği ve $\left|f^{(n)}\right|^q$ fonksiyonunun azalan ve geometrik-aritmetik (GA) h-konveksliği dikkate alınarak

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$

$$=\left|\frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)f^{(n)}(ta+(1-t)b)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)dt\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left[h(t)\left|f^{(n)}(a)\right|^q+h(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-1/q}\left[M_1\left|f^{(n)}(a)\right|^q+M_2\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{1/q}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.4.4 Teorem 3.4.6 da $s\in(0,1)$ olmak üzere $h(t)=t^s$ ve $h(t)=1$ alınırsa bu durumda sırasıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\frac{n(n-1)+s(n-2)}{(n+s)(n+s+1)}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\{n\beta(n,s+1)-2\beta(n+1,s+1)\}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{1/q}$$

ve

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left[\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{1/q}$$

eşitsizlikleri sağlanır(Noor ve Ark., 2014).

Teorem 3.4.7 Teorem 3.4.6 varsayımları altında eğer $\left|f^{(n)}\right|\leq M$ ve h fonksiyonu süper toplamsal ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)Mh^{\frac{1}{q}}(1) \tag{3.60}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Noor ve Ark., 2014).

İspat: Lemma 3.4.1 kullanılarak Power-Mean integral eşitsizliği ve $\left|f^{(n)}\right|^q$ fonksiyonunun azalan ve geometrik-aritmetik (GA) h-konveksliği dikkate alınarak

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$

$$=\left|\frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)f^{(n)}(ta+(1-t)b)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)dt\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left[h(t)\left|f^{(n)}(a)\right|^q+h(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-1/q}Mh^{\frac{1}{q}}(1)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.4.3 $I\subset\mathbb{R}^+$ birer aralık, ve $h:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^+$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $h\not\equiv 0$ olmak üzere her $x,y\in I$ ve $t\in(0,1)$ için

$$f(x^t y^{1-t})\leq[f(x)]^{h(t)}[f(y)]^{h(1-t)} \tag{3.61}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa negatif olmayan $f:I\subset\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ fonksiyonuna geometrik olarak (GG) h-konveks fonksiyon denir. (Noor ve Ark., 2014).

Özel olarak $t=1/2$ alınırsa bu durumda Jensen tipi GG-h-konveks fonksiyon adı verilir, yani her $x,y\in I$ için

$$f\left(\sqrt{xy}\right)\leq[f(x)+f(y)]^{h\left(\frac{1}{2}\right)} \tag{3.62}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.8 $f: I \subset \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu n-kez türevlenebilir, integrallenebilir ve azalan bir fonksiyon oldun. Eğer $\left|f^{(n)}\right|$ fonksiyonu geometrik olarak (GG) h-konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)Mh^{\frac{1}{q}}(1) \tag{3.63}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Noor ve Ark., 2014).

İspat: Lemma 3.4.1 kullanılarak Power-Mean integral eşitsizliği ve $\left|f^{(n)}\right|^q$ fonksiyonunun azalan ve geometrik olarak (GG) h-konveksliği dikkate alınarak

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$

$$= \left|\frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)f^{(n)}(ta+(1-t)b)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)dt\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left[h(t)\left|f^{(n)}(a)\right|^q + h(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-1/q}Mh^{\frac{1}{q}}(1)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

3.5. GA$-s-$ Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda geometrik-aritmetik s-konveks fonksiyon kavramı verilerek, sadece konveks fonksiyonlar için verilen Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ile ilgili sonuçları yeniden elde eden değil, aynı zamanda özel durumlar olarak bazı yeni sonuçlar da veren geometrik-aritmetik s-convex fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler verilmiştir.

m-konvekslik kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 3.5.1 $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $m\in(0,1]$ olmak üzere eğer $\forall x,y\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$mf(tx+m(1-t)y)\le tf(x)+m(1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna $m-$konvekstir denir (Toader, 1984).

Teorem 3.5.1 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $m\in(0,1]$ olmak üzere $m-$konveks olsun. Eğer $0\le a<b<\infty$ ve $f\in L_1[a,b]$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le min\left\{\frac{f(a)+mf\left(\frac{b}{m}\right)}{2},\frac{f(b)+mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2}\right\} \quad (3.64)$$

eşitsizliği sağlanır(Dragomir, and Toader, 1993).

Teorem 3.5.2 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $m\in(0,1]$ olmak üzere $m-$konveks olsun. Eğer $0\le a<b<\infty$ için $f\in L_1[am,b]$ ise

$$\frac{1}{m+1}\left[\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)dx+\frac{1}{b-ma}\int_{ma}^{b}f(x)dx\right]\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir, 2002).

Tanım 3.5.2 $f:[0,b]\to\mathbb{R}$, $b>0$, bir fonksiyon ve $(\alpha,m)\in[0,1]^2$ olsun. Eğer her $x,y\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(tx+m(1-t)y)\le t^{\alpha}f(x)+m(1-t^{\alpha})f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna $(\alpha,m)-$konveks fonksiyon adı verilir(Qu, ve Ark., 2014).

Tanım 3.5.3 $f:[0,b]\to\mathbb{R}$, $b>0$, bir fonksiyon ve $(\alpha,m)\in[0,1]^2$ olsun. Eğer her $x,y\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(x^t y^{m(1-t)}\right)\le t^{\alpha}f(x)+m(1-t^{\alpha})f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna $(\alpha,m)-$geometrik-aritmetik konveks fonksiyon veya kısaca $(\alpha,m)-$GA-konveks fonksiyon adı verilir(Qu ve Ark., 2014).

Teorem 3.5.3 $f:\mathbb{R}_0=[0,\infty)\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $0<a<b<\infty$ için $f'\in L^1([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q\ge1$ fonksiyonu $(\alpha,m)\in[0,1]^2$ olmak üzere $\left[0,max\{a^{1/m},b\}\right)$ aralığı üzerinde $(\alpha,m)-$geometrik-aritmetik konveks bir fonksiyon ise bu takdirde

$$\left|\frac{b^2f(b)-a^2f(a)}{2}-\int_a^b xf(x)dx\right| \le \frac{lnb-lna}{2} \tag{3.65}$$

$$\times [L(a^3,b^3)]^{1-\frac{1}{q}} \times \left\{[mL(a^3,b^3)-G(\alpha,3)]\left|f'(a^{1/m})\right|^q + G(\alpha,3)|f'(a)|^q\right\}^{\frac{1}{q}},$$

eşitsizliği sağlanır, burada her $x,y>0, l\ge 0, x\ne y$ için

$$G(\alpha,l)=\int_0^1 t^\alpha a^{l(1-t)}b^{lt}dt \tag{3.66}$$

ve

$$L(x,y)=\frac{y-x}{lny-lnx} \tag{3.67}$$

dir(Qu ve Ark., 2014).

Tanım 3.5.4 (Birinci anlamda Geometrik-Aritmetik-s Konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x,y \in I$, $s\in(0,1]$ ve $\lambda\in[0,1]$ için,

$$f\left(x^\lambda y^{1-\lambda}\right) \le (\ge) \lambda^s f(x) + (1-\lambda^s)f(y) \tag{3.68}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda GA-s-konveks (konkav) fonksiyon denir(Qu ve Ark., 2014).

Tanım 3.5.5 (İkinci anlamda Geometrik-Aritmetik-s Konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer, $\forall x,y \in I$, $s\in(0,1]$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$f\left(x^\lambda y^{1-\lambda}\right) \le (\ge) \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y) \tag{3.69}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda GA-s-konveks (konkav) fonksiyon denir(Qu ve Ark., 2014).

Özel olarak Tanım 3.5.4 ve Tanım 3.5.5' te $s=1$ alındığında Tanım 3.1.1'de verilen GA- konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Geometrik-aritmetik s-convex fonksiyonlarla ilgili bazı yeni Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri ifade etmek için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.5.1 $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b\in I, a<b$ olsun. Eğer $f'\in L^1([a,b])$ ise bu takdirde

$$\frac{b^nf(b)-a^nf(a)}{n}-\int_a^b x^{n-1}f(x)dx$$

$$=\frac{lnb-lna}{n}\int_0^1 a^{(n+1)(1-t)}\, b^{(n+1)t}f'(a^{1-t}b^t)dt \tag{3.70}$$

eşitliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

İspat: t ∈ [0,1] için $x = a^{1-t}b^t$ olsun. Bu takdirde

$$(lnb - lna)\int_0^1 a^{(n+1)(1-t)}b^{(n+1)t}f'(a^{1-t}b^t)dt$$

$$= \int_a^b x^n f'(x)dx$$

$$= b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx.$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Hatırlatma 3.5.1 (3.70) eşitliği $n = 1$ olduğunda

$$bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx = (lnb - lna)\int_0^1 a^{2(1-t)}b^{2t}f'(a^{1-t}b^t)dt$$

ve $n = 2$ olduğunda ise

$$\frac{b^2 f(b) - a^2 f(a)}{2} - \int_a^b f(x)dx = \frac{lnb - lna}{2}\int_0^1 a^{3(1-t)}b^{3t}f'(a^{1-t}b^t)dt$$

şekline indirgenir.

Teorem 3.5.4 $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b$ olmak üzere $f' \in L^1([a, b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \geq 1$ fonksiyonu $s \in [0,1]$ olmak üzere $[0, b]$ aralığı üzerinde s −GA- konveks bir fonksiyon ise bu takdirde

$$\left|\frac{b^n f(b) - a^n f(a)}{n} - \int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right| \leq \frac{lnb - lna}{n} \tag{3.71}$$

$$\times [L(a^{n+1}, b^{n+1})]^{1-\frac{1}{q}}[G(s, n+1)|f'(b)|^q + H(s, n+1)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada $G(s, l)$ ve $L(x, y)$ sırasıyla (3.66) ve (3.67) de verildiği gibi ve her $x, y > 0, l \geq 0, x \neq y$ için

$$H(s, l) = \int_0^1 (1-t)^\alpha a^{l(1-t)}b^{lt}dt \tag{3.72}$$

dir(Qu ve Ark., 2014).

İspat: $|f'|^q$, $q \geq 1$ fonksiyonu $s \in [0,1]$ olmak üzere $[0, b]$ aralığı üzerinde s −GA-konveks bir fonksiyon olduğundan $[0, b]$ aralığında Lemma 3.5.1 ve Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{n}-\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{n}\int_0^1 a^{(n+1)(1-t)}b^{(n+1)t}|f'(a^{1-t}b^t)|dt$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{n}\left[\int_0^1 a^{(n+1)(1-t)}b^{(n+1)t}dt\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\int_0^1 a^{(n+1)(1-t)}b^{(n+1)t}|f'(a^{1-t}b^t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{n}[L(a^{n+1},b^{n+1})]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\int_0^1 a^{(n+1)(1-t)}\times b^{(n+1)t}(t^s|f'(b)|^q+(1-t)^s|f'(a)|^q)dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{lnb-lna}{n}[L(a^{n+1},b^{n+1})]^{1-\frac{1}{q}}\times[G(s,n+1)|f'(b)|^q+H(s,n+1)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

olduğu görülür ve böylece istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 3.5.1 Teorem 3.5.4 ün koşulları altında, eğer $q=1$ ise

$$\left|\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{n}-\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{n}[G(s,n+1)|f'(b)|+H(s,n+1)|f'(a)|] \tag{3.73}$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.2 Teorem 3.5.4 ün koşulları altında, eğer $q=1, n=1$ ise

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (lnb-lna)[G(s,2)|f'(b)|+H(s,2)|f'(a)|] \tag{3.74}$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.3 Teorem 3.5.4 ün koşulları altında, eğer $q=1, n=2$ ise

$$\left|\frac{b^2 f(b)-a^2 f(a)}{2}-\int_a^b xf(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{2}[G(s,3)|f'(b)|+H(s,3)|f'(a)|] \tag{3.75}$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.4 Teorem 3.5.4 ün koşulları altında, eğer $s=1$ ise

$$\left|\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{n}-\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right| \tag{3.76}$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{n}[L(a^{n+1},b^{n+1})]^{1-\frac{1}{q}}[G(1,n+1)|f'(b)|^q+H(1,n+1)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.5 Teorem 3.5.4 ün koşulları altında, eğer $s=1, n=1$ ise

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right| \tag{3.77}$$

$$\leq (lnb-lna)[L(a^2,b^2)]^{1-\frac{1}{q}}[G(1,2)|f'(b)+H(1,2)|f'(a)|^q|^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.6 Teorem 3.5.4 ün koşulları altında, eğer $s=1, n=2$ ise

$$\left|\frac{b^2 f(b)-a^2 f(a)}{2}-\int_a^b xf(x)dx\right| \tag{3.78}$$

$$\leq \frac{(b^3-a^3)^{1-\frac{1}{q}}}{6}\{[b^3-L(a^3,b^3)]|f'(b)|^q+[L(a^3,b^3)-a^3]|f'(a)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

İspat: Bu durumda

$$G(1,3)=\int_0^1 ta^{3(1-t)}b^{3t}dt=\frac{b^3-L(a^3,b^3)}{lnb^3-lna^3}$$

ve

$$H(1,3)=L(a^3,b^3)-G(1,3)=\frac{L(a^3,b^3)-a^3}{lnb^3-lna^3}.$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece iddia ispatlanmış olur.

Teorem 3.5.5 $f: I\subseteq \mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a,b\in I, a<b$ olmak üzere $f'\in L^1([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q\geq 1$ fonksiyonu $s\in[0,1]$ olmak üzere $[0,b]$ aralığı üzerinde $s-$GA- konveks bir fonksiyon ise bu takdirde

$$\left|\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{n}-\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{n}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[L(a^{\frac{(n+1)q}{q-1}},b^{\frac{(n+1)q}{q-1}})\right]^{1-\frac{1}{q}}\times[|f'(b)|^q+|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}, \tag{3.79}$$

eşitsizliği sağlanır, burada her $x, y > 0, l \geq 0, x \neq y$ için

$$L(x, y) = \frac{y-x}{lny-lnx}$$

dir(Qu ve Ark., 2014).

İspat: $|f'|^q,\ q \geq 1$ fonksiyonu $s \in [0,1]$ olmak üzere $[0, b]$ aralığı üzerinde s −GA-konveks bir fonksiyon olduğundan $[0, b]$ aralığında Lemma 3.5.1 ve Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{n} - \int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{n}\int_0^1 a^{(n+1)(1-t)} b^{(n+1)t} |f'(a^{1-t}b^t| dt$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{n}\left[\int_0^1 a^{\frac{(n+1)q(1-t)}{q-1}} b^{\frac{(n+1)qt}{q-1}} dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \times \left[\int_0^1 (t^s|f'(b)|^q + (1-t)^s|f'(a)|^q)dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{lnb-lna}{n}\left[L\left(a^{\frac{(n+1)q}{q-1}}, b^{\frac{(n+1)q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}} \times \left[\frac{|f'(b)|^q}{s+1} + \frac{|f'(a)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{lnb-lna}{n}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[L\left(a^{\frac{(n+1)q}{q-1}}, b^{\frac{(n+1)q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}} \times [|f'(b)|^q + |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.5.7 Teorem 3.5.5 in koşulları altında, eğer $s = 1$ ise

$$\left|\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{n} - \int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[L\left(a^{\frac{(n+1)q}{q-1}}, b^{\frac{(n+1)q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}} \times [|f'(b)|^q, |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \tag{3.80}$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.8 Teorem 3.5.5 in koşulları altında, eğer $n = 1$ ise

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \times \left[L\left(a^{\frac{2q}{q-1}}, b^{\frac{2q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}} [|f'(b)|^q + |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \tag{3.81}$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.9 Teorem 3.5.5 in koşulları altında, eğer $s = 1, n = 1$ ise

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \times \left[L\left(a^{\frac{2q}{q-1}}, b^{\frac{2q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}} [|f'(b)|^q + |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \qquad (3.82)$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.10 Teorem 3.5.5 in koşulları altında, eğer $n = 2$ ise

$$\left|\frac{b^2 f(b) - a^2 f(a)}{2} - \int_a^b x f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left[L\left(a^{\frac{3q}{q-1}}, b^{\frac{3q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}} \times [|f'(b)|^q + |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \qquad (3.83)$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.11 Teorem 3.5.5 in koşulları altında, eğer $s = 1,\ n = 2$ ise

$$\left|\frac{b^2 f(b) - a^2 f(a)}{2} - \int_a^b x f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \left[L\left(a^{\frac{3q}{q-1}}, b^{\frac{3q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}} \times [|f'(b)|^q + |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \qquad (3.84)$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Teorem 3.5.6 $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b$ olmak üzere $f' \in L^1([a, b])$ olsun. Eğer $|f'|^q,\ q \geq 1$ fonksiyonu $s \in [0,1]$ olmak üzere $[0, b]$ aralığı üzerinde $s-$GA- konveks bir fonksiyon ise bu takdirde

$$\left|\frac{b^n f(b) - a^n f(a)}{n} - \int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{n}[G(s, (n+1)q|f'(b)|^q + H(s, (n+1)q|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}, \qquad (3.85)$$

eşitsizliği sağlanır, burada *G* ve *H* daha önce verildikleri gibi tanımlıdır (Qu ve Ark., 2014).

İspat: $|f'|^q,\ q \geq 1$ fonksiyonu $s \in [0,1]$ olmak üzere $[0, b]$ aralığı üzerinde $s-$GA-konveks bir fonksiyon olduğundan $[0, b]$ aralığında Lemma 3.5.1 ve Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{n}-\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{n}\int_0^1 a^{(n+1)(1-t)}b^{(n+1)t}|f'(a^{1-t}b^t)|dt$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{n}\left(\int_0^1 1^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\int_0^1 \left[a^{(n+1)(1-t)}b^{(n+1)t}|f'(a^{1-t}b^t|\right]^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{lnb-lna}{n}[G(s,(n+1)q|f'(b)|^q + H(s,(n+1)q|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}.$$

elde edilir ve böylece Teorem 3.5.6 nın ispatı kanıtlanır.

Sonuç 3.5.12 Teorem 3.5.6 nın koşulları altında, eğer $s = 1$ ise

$$\left|\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{n}-\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(lnb-lna)^{1-\frac{1}{q}}}{n}\left[\frac{1}{(n+1)q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\left[b^{(n+1)q}-L\left(a^{(n+1)q},b^{(n+1)q}\right)\right]|f'(b)|^q+[L\left(a^{(n+1)q},b^{(n+1)q}\right)- a^{(n+1)q}]|f'(a)|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{3.86}$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

İspat: Bu durumda

$$\mathrm{G}(1,(\mathrm{n}+1)\mathrm{q}) = \frac{b^{(n+1)q}-L(a^{(n+1)q},b^{(n+1)q})}{lnb^{(n+1)q}-lna^{(n+1)q}}$$

ve

$$H(1,(n+1)q) = L\left(a^{(n+1)q},b^{(n+1)q}\right)-G(1,(n+1)q)$$

olup sonuç kolayca ispatlanır.

Sonuç 3.5.12 Teorem 3.5.6 nın koşulları altında, eğer $s = 1, n = 1$ ise

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (lnb-lna)[G(1,2q)|f'(b)|^q + H(1,2q)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}, \tag{3.87}$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.13 Teorem 3.5.6 nın koşulları altında, eğer $s = 1, n = 1$ ise

$$\left|\frac{b^2 f(b)-a^2 f(a)}{2} - \int_a^b x f(x)dx\right| \le \frac{(lnb-lna)^{1-\frac{1}{q}}}{2}\left(\frac{1}{3q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \{[b^{3q} - L(a^{3q}, b^{3q})]|f'(b)|^q + [L(a^{3q}, b^{3q}) - a^{3q}]|f'(a)|^q\}^{\frac{1}{q}} \quad (3.88)$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

İspat: Bu durumda

$$G(1,3q) = \frac{b^{3q}-L(a^{3q},b^{3q})}{lnb^{3q}-lna^{3q}}$$

ve

$$H(1,3q) = \frac{L(a^{3q},b^{3q})-a^{3q}}{lnb^{3q}-lna^{3q}}.$$

olup sonuç kolayca ispat edilebilir.

Sonuç 3.5.14 Teorem 3.5.6 nın koşulları altında, eğer $n = 1$ ise

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le (lnb - lna)[G(s,2q)|f'(b)|^q + H(s,2q)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \quad (3.89)$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.14 Teorem 3.5.6 nın koşulları altında, eğer $n = 2$ ise

$$\left|\frac{b^2 f(b)-a^2 f(a)}{2} - \int_a^b x f(x)dx\right|$$

$$\le \frac{lnb-lna}{2}[G(s,3q)|f'(b)|^q + H(s,3q)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \quad (3.90)$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

Teorem 3.5.7 $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b$ olmak üzere $f' \in L^1([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q > 1$, $q > p > 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ fonksiyonu $s \in [0,1]$ olmak üzere $[0,b]$ aralığı üzerinde s −GA-konveks bir fonksiyon ise bu takdirde

$$\left|\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{n} - \int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right| \le \frac{lnb-lna}{n}\left[L\left(a^{\frac{(n+1)(q-p)}{q-1}}, b^{\frac{(n+1)(q-p)}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[G(s,(n+1)p)|f'(b)|^q + H(s,(n+1)p)|f'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{3.91}$$

eşitsizliği sağlanır, burada G ve H daha önce verildikleri gibi tanımlıdır (Qu ve Ark., 2014).

İspat: $|f'|^q,\ q \geq 1$ fonksiyonu $s \in [0,1]$ olmak üzere $[0,b]$ aralığı üzerinde s −GA-konveks bir fonksiyon olduğundan $[0,b]$ aralığında Lemma 3.5.1 ve Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\frac{b^n f(b) - a^n f(a)}{n} - \int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{n} \times \int_0^1 a^{(n+1)(1-t)} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^{1-t} b^t| dt$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{n}\left[\int_0^1 a^{\frac{(n+1)(q-p)(1-t)}{q-1}} b^{\frac{(n+1)(q-p)t}{q-1}} dt\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\int_0^1 a^{(n+1)p(1-t)} b^{(n+1)pt} |f'(a^{1-t} b^t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{lnb - lna}{n}\left[L\left(a^{\frac{(n+1)(q-p)}{q-1}}, b^{\frac{(n+1)(q-p)}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[G(s,(n+1)p)|f'(b)|^q + H(s,(n+1)p)|f'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

olup Teorem 3.5.7 ispatlanmış olur.

Sonuç 3.5.15 Teorem 3.5.7 nin koşulları altında, eğer $s = 1$ ise

$$\left|\frac{b^n f(b) - a^n f(a)}{n} - \int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(lnb - lna)}{n}\left[\frac{1}{(n+1)p}\right]^{\frac{1}{q}} L\left(a^{\frac{(n+1)(q-p)}{q-1}}, b^{\frac{(n+1)(q-p)}{q-1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\left[b^{(n+1)p} - L\left(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)\right]|f'(b)|^q + \left[L(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) -\right.\right.$$

$$\left.\left. a^{(n+1)p}\right]|f'(a)|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{3.92}$$

eşitsizliği sağlanır (Qu ve Ark., 2014).

İspat: Bu durumda

$$G(1,(n+1)p) = \int_0^1 t a^{(n+1)p(1-t)} b^{(n+1)pt} dt = \frac{b^{(n+1)p} - L(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p})}{lnb^{(n+1)p} - lna^{(n+1)p}}$$

ve

$$H(1,(n+1)p) = \mathrm{L}\left(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right) - G(1,(n+1)p).$$

olup sonuç kolaylıkla ispatlanabilir.

Sonuç 3.5.16 Teorem 3.5.7 nin koşulları altında, eğer $n = 1$ ise

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \tag{3.93}$$

$$\leq (lnb - lna)\left[L(a^{\frac{2(q-p)}{q-1}}, b^{\frac{2(q-p)}{q-1}}\right]^{1-\frac{1}{q}} \times [G(s,2p)|f'(b)|^q + H(s,2p)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır (Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.17 Teorem 3.5.7 nin koşulları altında, eğer $s = 1, n = 1$ ise

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \tag{3.94}$$

$$\leq (lnb - lna)\left[L(a^{\frac{2(q-p)}{q-1}}, b^{\frac{2(q-p)}{q-1}}\right]^{1-\frac{1}{q}} \times [G(1,2p)|f'(b)|^q + H(1,2p)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır (Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.18 Teorem 3.5.7 nin koşulları altında, eğer $n = 2$ ise

$$\left|\frac{b^2f(b)-a^2f(a)}{2} - \int_a^b xf(x)dx\right| \leq \frac{(lnb-lna)}{2}\left[L\left(a^{\frac{(n+1)(q-p)}{q-1}}, b^{\frac{(n+1)(q-p)}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times [G(s,(n+1)p)|f'(b)|^q + H(s,(n+1)p)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \tag{3.95}$$

eşitsizliği sağlanır (Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.19 Teorem 3.5.7 nin koşulları altında, eğer $s = 1, n = 2$ ise

$$\left|\frac{b^2f(b)-a^2f(a)}{2} - \int_a^b xf(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(lnb-lna)}{2}\left[\frac{1}{3p}\right]^{\frac{1}{q}} \times L\left(a^{\frac{3(q-p)}{q-1}}, b^{\frac{3(q-p)}{q-1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \{[(b^{3p} - L(a^{3p}, b^{3p})]|f'(b)|^q + [L(a^{3p}, b^{3p}) - a^{3p}]|f'(a)|^q\}^{\frac{1}{q}} \tag{3.96}$$

eşitsizliği sağlanır (Qu ve Ark., 2014).

Teorem 3.5.8 $f,g: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $a,b \in I, a < b$ olmak üzere $fg \in L^1([a,b])$ olsun. Eğer f^q ve g^q, $q \geq 1$, fonksiyonları $s_1, s_2 \in [0,1]$ olmak üzere $[0,b]$ aralığı üzerinde sırasıyla s_1 −GA- konveks ve s_2 −GA- konveks fonksiyonlar ise bu takdirde

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (lnb - lna)[L(a,b)]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times [G(s_1+s_2,1)f^q(b)g^q(b) + H(s_1+s_2,1)f^q(a)g^q(a) +$$

$$+ M(s_1,s_2,1)f^q(b)g^q(a) + M(s_2,s_1,1)f^q(a)g^q(b)]^{\frac{1}{q}}, \quad (3.97)$$

eşitizliği sağlanır, burada *G*, *L* ve *H* fonksiyonları daha önce verildikleri gibi olup

$$M(m,n,l) = \int_0^1 t^m (1-t)^n a^{l(1-t)} b^{lt} dt \quad (3.98)$$

dir(Qu ve Ark., 2014).

İspat: f^q ve g^q, $q \geq 1$, fonksiyonları $s_1, s_2 \in [0,1]$ olmak üzere $[0,b]$ aralığı üzerinde sırasıyla s_1 −GA- konveks ve s_2 −GA- konveks fonksiyonlar olduğundan fer $t \in [0,1]$ için

$$f^q(a^{1-t}b^t) \leq t^{s_1} f^q(b) + (1-t)^{s_1} f^q(a)$$

ve

$$g^q(a^{1-t}b^t) \leq t^{s_2} g^q(b) + (1-t)^{s_2} g^q(a)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu durumda $t \in [0,1]$ olmak üzere $x = a^{1-t}b^t$ alarak Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_0^1 (lnb - lna) a^{1-t}b^t f(a^{1-t}b^t) g(a^{1-t}b^t) dt$$

$$\leq (lnb - lna)\left(\int_0^1 a^{1-t}b^t dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{\int_0^1 a^{1-t}b^t [t^{s_1} f^q(b) + (1-t)^{s_1} f^q(a)][t^{s_2} g^q(b) + (1-t)^{s_2} g^q(a) dt]\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= (lnb - lna)[L(a,b)]^{1-\frac{1}{q}}[G(s_1+s_2,1)f^q(b)g^q(b) + H(s_1+s_2,1)f^q(a)g^q(a)$$

$$+ M(s_1,s_2,1)f^q(b)g^q(a) + M(s_2,s_1,1)f^q(a)g^q(b)]^{\frac{1}{q}}$$

olup Teorem 3.5.8 kanıtlanmış olur.

Sonuç 3.5.20 Teorem 3.5.8 in koşulları altında, eğer $q = 1$ ise

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (lnb - lna)$$
$$\times [G(s_1 + s_2, 1)f(a)g(a) + H(s_1 + s_2, 1)f(a)g(a) +$$
$$+M(s_1, s_2, 1)f(b)g(a) + M(s_2, s_1, 1)f(a)g(a)] \quad (3.99)$$

eşitsizliği saplanır(Qu ve Ark., 2014).

Sonuç 3.5.21 Teorem 3.5.8 in koşulları altında, eğer $q = 1$ ve $s_1 = s_2 = 1$ ise;

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (lnb - lna) \quad (3.100)$$
$$\times \{G(2,1)[f(b)g(b) + f(a)g(a) - f(b)g(a) -$$
$$f(a)g(b)]G(1,1)[f(b)g(a) + f(a)g(b) - 2f(a)g(a)] + L(a,b)f(a)g(a)\}$$

eşitsizliği saplanır(Qu ve Ark., 2014).

İspat: Bu durumda

$$M(1,1,1) = G(1,1) - G(2,1)$$

ve

$$H(2,1) = L(a,b) - 2G(1,1) + G(2,1).$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.5.9 $f, g: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $a, b \in I, a < b$ olmak üzere $fg \in L^1([a, b])$ olsun. Eğer f^q ve g^q, $q \geq 1$, fonksiyonları $s_1, s_2 \in [0,1]$ olmak üzere $[0, b]$ aralığı üzerinde sırasıyla s_1 −GA- konveks ve s_2 −GA- konveks fonksiyonlar ise bu takdirde

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (lnb - lna)[G(s_2, 1)g^q(b) + H(s_1, 1)f^q(a)]^{1/q}$$
$$\times \left[G(s_2, 1)g^{\frac{q}{q-1}}(b) + H(s_2, 1)g^{\frac{q}{q-1}}(a)\right]^{1/q} \quad (3.101)$$

eşitsizliği saplanır(Qu ve Ark., 2014).

İspat: f^q ve $g^{\frac{q}{q-1}}$, $q \geq 1$, fonksiyonları $s_1, s_2 \in [0,1]$ olmak üzere $[0, b]$ aralığı üzerinde sırasıyla s_1 −GA- konveks ve s_2 −GA- konveks fonksiyonlar olduğundan fer $t \in [0,1]$ için

$$f^q(a^{1-t}b^t) \leq t^{s_1} f^q(b) + (1-t)^{s_1} f^q(a)$$

ve

$$g^{\frac{q}{q-1}}(a^{1-t}b^t) \leq t^{s_2} g^{\frac{q}{q-1}}(b) + (1-t)^{s_2} g^{\frac{q}{q-1}}(a)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu durumda $t \in [0,1]$ olmak üzere $x = a^{1-t}b^t$ alarak Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^q(x)dx\right)^{1/q} \left(\int_a^b g^{\frac{q}{q-1}}(x)dx\right)^{1-1/q}$$

$$\leq (lnb - lna) \int_0^1 a^{1-t}b^t [t^{s_1} f^q(b) + (1-t)^{s_1} f^q(a)]dt]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left[\int_0^1 a^{1-t}b^t [t^{s_2} g^{\frac{q}{q-1}}(b) + (1-t)^{s_2} g^{\frac{q}{q-1}}(a)dt\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$= (lnb - lna)[G(s_1, 1)f^q(b) + H(s_1, 1)f^q(a)]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left[G(s_2, 1)g^{\frac{q}{q-1}}(b) + H(s_2, 1)g^{\frac{q}{q-1}}(a)\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

olup Teorem 3.5.9 kanıtlanmış olur.

Sonuç 3.5.22 Teorem 3.5.9 un koşulları altında, eğer $s_1 = s_2 = 1$ ise;

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \{[b - L(a,b)]f^q(b) + [L(a,b) - a]f^q(a)\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{[b - L(a,b)]g^{\frac{q}{q-1}}(b) + [L(a,b) - a]g^{\frac{q}{q-1}}(a)\right\}^{1-\frac{1}{q}} \tag{3.102}$$

eşitsizliği sağlanır(Qu ve Ark., 2014).

İspat: Eğer, $s_1 = s_2 = 1$ ise;

$$G(1,1) = \frac{b-L(a,b)}{lnb-lna} \quad \text{ve} \quad H(1,1) = \frac{L(a,b)-a}{lnb-lna}$$

olup sonuç ispatlanmış olur.

3.6. (h_1, h_2) ve $(h_1, h_2, m) - GA$ Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler

Bu kısımda (h_1, h_2)-GA-konveks ve (h_1, h_2, m)-GA-konveks fonksiyonların tanımlarını vererek, bu fonksiyonlar için bazı integral eşitsizlikleri elde edilecektir.

Tanım 3.6.1 $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq t f(x) + (1-t) f(y) \tag{3.103}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir GA-konveks fonksiyon adı verilir (Xi ve Ark, 2016).

Tanım 3.6.2 $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ $b$ir fonksiyon olsun. $b > 0$ ve $m \in (0,1]$ için,

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t f(x) + m(1-t) f(y) \tag{3.104}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna [0,b] üzerinde bir m-konveks fonksiyon denir(Xi ve Ark, 2016).

Tanım 3.6.3 $f: \mathbb{R}_0 = [0, \infty) \to \mathbb{R}_0$ bir fonksiyon olsun. $s \in (0,1]$, $\forall x, y \in I$, ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y) \tag{3.105}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonunun ikinci anlamda s-konveks fonksiyon olduğu söylenir(Xi ve Ark, 2016).

Tanım 3.6.4 $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ bir fonksiyon olsun. $s \in (0,1]$ ve $\forall x, y \in I, \lambda \in [0,1]$ için,

$$f\left(x^\lambda y^{1-\lambda}\right) \leq \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y) \tag{3.106}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonunun bir GA-s-konveks fonksiyon olduğu söylenir(Xi ve Ark, 2016).

Tanım 3.6.5 $f: I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $s \in [-1,1]$ ve $\forall x, y \in I$, $\lambda \in (0,1)$

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y) \tag{3.107}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonunun bir genişletilmiş s-konveks fonksiyon olduğu söylenebilir(Xi ve Ark, 2016).

Tanım 3.6.6 $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $(s,m)\in(0,1]^2, b>0$ ve $\forall x,y\in I$, $\lambda\in(0,1)$ için,

$$f(\lambda x+m(1-\lambda)y)\le\lambda^s f(x)+m(1-\lambda)^s f(y) \tag{3.108}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonunun bir (s,m)-konveks fonksiyon olduğu söylenebilir(Xi ve Ark, 2016).

Tanım3.6.7 $h_i:[0,1]\to\mathbb{R}_0$, $h_i\neq 0$, $i=1,2$, ve $f:I\subseteq\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_0$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $x,y\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(x^t y^{(1-t)}\right)\le h_1(t)f(x)+h_2(1-t)f(y) \tag{3.109}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna $(h_1,h_2)-GA$ −konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizlik ters yönde sağlanıyorsa, bu durumda f fonksiyonuna $(h_1,h_2)-GA$ −konkav fonksiyon denir. Buna göre

(1) Eğer $h_1(t)=h_2(t)=h(t)$ ise f fonksiyonu bir $h-GA$ −konveks fonksiyondur;

(2) $h(t)=t^s$, $t\in(0,1)$ ve $s\in[-1,1]$ alınırsa bir $h-GA$ −konveks fonksiyon genişletilmiş $s-GA$ −konveks fonksiyon olarak adlandırılır.

(3) $h(t)=t$, $t\in[0,1]$ alınırsa bir $h-GA$ −konveks fonksiyon bir GA −konveks fonksiyon olur(Xi ve Ark, 2016).

Tanım 3.6.8 $h_i:[0,1]\to\mathbb{R}_0$, $h_i\neq 0$, $i=1,2$, $m:[0,1]\to(0,1]$ ve $f:(0,b]\to\mathbb{R}_0$ fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer her $x,y\in(0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(x^t y^{(1-t)m(t)}\right)\le h_1(t)f(x)+m(t)h_2(1-t)f(y) \tag{3.110}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f:(0,b]\to\mathbb{R}_0$ fonksiyonuna $(h_1,h_2,m)-GA$ −konvekstir denir. Şayet eşitsizlik ters yönde sağlanıyorsa, f fonksiyonuna $(h_1,h_2,m)-GA$ −konkav fonksiyon denir. Bu durumda

(1) Eğer her $t\in[0,1]$ için $h_1(t)=h_2(t)=h(t)$ ise bu takdirde $f:(0,b]\to\mathbb{R}_0$ fonksiyonuna $(h,m)-GA$ −konveks fonksiyon adı verilir.
(2) $f:(0,b]\to\mathbb{R}_0$ fonksiyonu bir $(h,m)-GA-$ konveks fonksiyon ve $m\in(0,1]$ olsun. Her $t\in[0,1]$ için $h(t)=t$ ise f fonksiyonu $m-GA$ −konvekstir denir.

(3) $f:(0,b]\to\mathbb{R}_0$ fonksiyonu bir $(h,m)-GA-$ konveks fonksiyon ve $m\in(0,1]$ olsun. Her $t\in[0,1]$ ve $s\in[-1,1]$ için $h(t)=t^s$ ise f fonksiyonu genişletilmiş $(s,m)-GA-$ konvekstir denir.

(4) $f:(0,b]\to\mathbb{R}_0$ fonksiyonu bir $(h,1)-GA-$ konveks fonksiyon ve $m\in(0,1]$ ise f fonksiyonu $(0,b]$ de $h-GA-$ konveks olur(Xi ve Ark, 2016).

Örnek 3.6.1 $f(x)=|lnx|$, $x\in(0,1]$, $m(t)=c(1-t)^{\ell_0}$, $t\in(0,1)$, $0<c\leq 1$ ve $\ell_0\in\mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde $h_1(t)=t^{\ell_1}$ ve $h_2(t)=t^{\ell_2}$, $t\in(0,1)$ $\ell_1,\ell_2\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer $\ell_1,\ell_2\leq 1$ ise f $(0,1]$ de azalan ve $(h_1,h_2,m)-GA-$konveks, $\ell_1,\ell_2\geq 1$ ise $(0,1]$ de azalan ve $(h_1,h_2,m)-GA-$ konvekstir.

Şimdi $(h_1,h_2,m)-GA-$konveks fonksiyonların bazı özelliklerini görelim.

Teorem 3.6.1 $h_i:[0,1]\to\mathbb{R}_0$, $h_i\neq 0$, $i=1,2$ ve $f:I\subseteq\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda

(1) Eğer $f:I\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu $(h_1,h_2)-GA-$konveks ise bu takdirde $t\in[0,1]$ için $h_1(t)+h_2(1-t)\geq 1$ dir.

(2) Eğer $f:I\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu $(h_1,h_2)-GA-$konkav ise bu takdirde $t\in[0,1]$ için $h_1(t)+h_2(1-t)\leq 1$ dir(Xi ve Ark, 2016).

İspat: Eğer $f:I\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu $(h_1,h_2)-GA-$konveks ise bu durumda her $x\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(x)=f(x^t x^{1-t})\leq h_1(t)f(x)+h_2(1-t)f(x)=[h_1(t)+h_2(1-t)]f(x)$$

eşitsizliği yazılabilir. İspatın geri kalanı benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 3.6.2 $h_i:[0,1]\to\mathbb{R}_0$, $i=1,2,3,4$, $f:(0,b]\to\mathbb{R}_+$ ve $m:[0,1]\to(0,1]$ fonksiyonları verilmiş olsun.

(1) Eğer $f:(0,b]\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu $(h_1,h_2,m)-GA$ konveks ve $t\in[0,1]$ için $h_1(t)\leq h_3(t)$, $h_2(t)\leq h_4(t)$ ise f fonksiyonu $(h_3,h_4,m)-GA-$ konvekstir.

(2) Eğer $f:(0,b]\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu $(h_1,h_2,m)-GA$ konkav ve $t\in[0,1]$ için $h_1(t)\leq h_3(t)$, $h_2(t)\leq h_4(t)$ ise f fonksiyonu $(h_3,h_4,m)-GA-$konkavdır (Xi ve Ark, 2016).

İspat: $Sf:(0,b]\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu $(h_1,h_2,m)-GA$ konveks ve $t\in[0,1]$ için $h_1(t)\leq h_3(t)$, $h_2(t)\leq h_4(t)$ olduğundan her $x\in(0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(x^t y^{(1-t)m(t)}\right) \leq h_1(t)f(x) + m(t)h_2(1-t)f(x)$$
$$\leq h_3(t)f(x) + m(t)h_4(1-t)f(x)$$

eşitsizliği yazılabilir. Öte yandan $f(x)$ fonksiyonu $(0,b]$ de $(h_1,m)-GA$ −konvaks ve $h_1(t) \geq h_2(t)$, $t \in [0,1]$ olduğundan her $x \in (0,b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(x^t y^{(1-t)m(t)}\right) \geq h_1(t)f(x) + m(t)h_2(1-t)f(x)$$
$$\geq h_3(t)f(x) + m(t)h_4(1-t)f(x)$$

yazılabilir. Böylece Teorem 3.6.2' nin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.6.1 $h_i: [0,1] \to \mathbb{R}_0$ ve $f_i: (0,b] \to \mathbb{R}_0$, $1 \leq i \leq n$ ve $m: [0,1] \to (0,1]$ olsun. Bu takdirde

(1) Eğer $h(t) = max_{1 \leq i \leq n}\{h_i(t)\}$, $t \in [0,1]$ ve f_i fonksiyonları $(h_i,m)-GA-$ onveks ise $\prod_{i=1}^{n} f_i \, de$ $(h,m)-GA-$ konvekstir.

(2) Eğer $h(t) = min_{1 \leq i \leq n}\{h_i(t)\}$, $t \in [0,1]$ ve f_i fonksiyonları $(h_i,m)-GA-$ konkav ise $\prod_{i=1}^{n} f_i \, de$ $(h,m)-GA-$ konkavdır(Xi ve Ark, 2016).

İspat: Teorem 3.6.2 ve n üzerinden tümevarımla ispat yapılabilir.

Teorem 3.6.3 $h_i: [0,1] \to \mathbb{R}_0$, $h_i \neq 0$, $i = 1,2$, $f: (0,b] \to \mathbb{R}_0$ olmak üzere $g: (0,d] \to g\left((0,d]\right) \subseteq (0,b]$ ve $m \in (0,1]$ olsun.

(1) Eğer f $(0,b]$ üzerinde artan (veya azalan) ve $(h_1,h_2m)-GA-k$onveks ve $u = g(x)$ fonksiyonu $(0,d]$ de $m-$ geometrik konveks (veya konkav) ise, bu takdirde fog fonksiyonu $[0,d]$ de $(h_1,h_2,m)-GA-$ konvekstir.

(2) Eğer f $(0,b]$ üzerinde artan (veya azalan) ve $(h_1,h_2m)-GA-k$onkav ve $u = g(x)$ fonksiyonu $(0,d]$ de $m-$ geometrik konveks (veya konkav) ise, bu takdirde fog fonksiyonu $[0,d]$ de $(h_1,h_2,m)-GA-$ konkavdır. (Xi ve Ark, 2016).

İspat: f $(0,b]$ üzerinde azalan ve $(h_1,h_2,m)-GA-$ konveks olduğunda

(1) Eğer $u = g(x)$ fonksiyonu $(0,d]$ de bir $m-$ geometrically konkav ise bu takdirde her $x,y \in (0,d]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$g(x^t y^{m(1-t)}) \geq [g(x)]^t [g(y)]^{m(1-t)}$$

yazılabilir.

(2) Eğer $y = f(u)$ fonksiyonu $(0, b]$ de azalan ve $(h_1, h_2, m) - GA$ −konveks ise takdirde her $x, y \in (0, d]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(g\left(x^t y^{m(1-t)}\right)\right) \le f\left([g(x)]^t [g(y)]^{m(1-t)}\right)$$
$$\le h_1(t) f\big(g(x)\big) + m h_2(1-t) f\big(g(y)\big)$$

yazılabilir. Dolayısıyla yukarıda belirtilen her durumda fog bileşke fonksiyonu $(0, d]$ üzerinde bir $(h_1, h_2, m) - GA$ −konveks fonksiyon olacaktır. Geri kalan kısım benzer şekilde gösterilebilir ve böylece de Teorem 3.6.3 ispatlanmış olur.

Şimdi $(h_1, h_2, m) - GA$ −konveks fonksiyonları için Hermite - Hadamard tipli bazı yeni eşitsizlikleri verebiliriz.

Teorem 3.6.4 $h_i: [0,1\} \to \mathbb{R}_0$, $h_i \neq 0$, $i = 1,2$, $m: [0,1] \to (0,1]$ ve $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonu $\left(0, \frac{b}{m(1/2)}\right]$ aralığında $(h_1, h_2, m) - GA -$ konveks ve $0 < a < b$ için $f \in L_1\left(\left[a, \frac{b}{m(1/2)}\right]\right)$ ve $h_1, h_2 \in L_1([0,1])$ olsun. Bu takdirde

$$f(\sqrt{ab}) \le \frac{h_1(1/2)}{lnb - lna} \int_a^b f(x)dx + \frac{m(1/2)h_2(1/2)}{lnb - lna} \int_a^b f\left(\frac{x}{m(1/2)}\right) dx \qquad (3.111)$$

eşitsizliği sağlanır(Xi ve Ark, 2016).

İspat: $\sqrt{ab} = (a^t b^{1-t})^{1/2} (a^{1-t} b^t)^{1/2}$, $0 \le t \le 1$, eşitliği kullanılarak $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonunun $\left(0, \frac{b}{m(1/2)}\right]$ aralığında $(h_1, h_2, m) - GA -$ konveks olduğu dikkate alınırsa

$$f(\sqrt{ab}) \le h_1\left(\frac{1}{2}\right) f(a^t b^{1-t}) + m\left(\frac{1}{2}\right) h_2\left(\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{a^{1-t} b^t}{m(1/2)}\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu durumda $0 \le t \le 1$ olmak üzere $a^{1-t} b^t$ ve $a^t b^{1-t}$ yerine x yazılırsa sırasıyla

$$\int_0^1 f(a^{1-t} b^t) dt = \frac{1}{lnb - lna} \int_a^b f(x) dx \qquad (3.112)$$

ve

$$\int_0^1 f\left(\frac{a^{1-t} b^t}{m(1/2)}\right) dt = \frac{1}{lnb - lna} \int_a^b f\left(\frac{x}{m(1/2)}\right) dx \qquad (3.113)$$

olduğu görülür ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.6.5 $h_i: [0,1\} \to \mathbb{R}_0,\ h_i \neq 0\ ,\ i = 1,2,\ m: [0,1] \to (0,1]$ ve $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonu $\left(0, \frac{b}{m}\right]$ aralığı üzerinde $(h_1, h_2, m) - GA -$ konveks ve $0 < a < b$ için $f \in L_1\left(\left[a, \frac{b}{m}\right]\right)$ ve $h_1, h_2 \in L_1([0,1])$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b f(x)dx \leq min\left\{f(a)\int_0^1 h_1(t)dt + mf\left(\frac{b}{m}\right)\int_0^1 h_2(t)dt\ , f(b)\int_0^1 h_1(t)dt + mf\left(\frac{a}{m}\right)\int_0^1 h_2(t)dt\right\} \quad (3.114)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer özel olarak her $t \in [0,1]$ için $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$ alınırsa

$$\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b f(x)dx \leq min\left\{f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right), f(b) + mf\left(\frac{a}{m}\right)\right\}\int_0^1 h(t)dt$$

olur (Xi ve Ark, 2016).

İspat: $x = a^{1-t}b^t\ , 0 \leq t \leq 1,$ olmak üzere $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonunun $\left(0, \frac{b}{m(1/2)}\right]$ aralığında $(h_1, h_2, m) - GA -$ konveks olduğu ve (3.112) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{lnb - lna}\int_a^b f(x)dx &= \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} f(a^{1-t}b^t)dt \\ &\leq min\left\{f(a)\int_0^1 h_1(t)dt + mf\left(\frac{b}{m}\right)\int_0^1 h_2(t)dt\ , f(b)\int_0^1 h_1(t)dt \right.\\ &\left. + mf\left(\frac{a}{m}\right)\int_0^1 h_2(t)dt\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.6.2 $h_1(t) = t^{s_1}$ ve $h_2(t) = t^{s_2}\ ,\ t \in (0,1),\ s_1, s_2 \in (-1,1]$ ve $m \in (0,1]$ olmak üzere $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonu $\left(0, \frac{b}{m}\right]$ aralığı üzerinde $(h_1, h_2, m) - GA -$ konveks ve $0 < a < b$ için $f \in L_1\left(\left[a, \frac{b}{m}\right]\right)$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b f(x)dx \leq min\left\{\frac{f(a)}{s_1+1} + \frac{mf\left(\frac{b}{m}\right)}{s_2+1}, \frac{f(b)}{s_1+1} + \frac{mf\left(\frac{a}{m}\right)}{s_2+1}\right\} \quad (3.115)$$

olur (Xi ve Ark, 2016).

Teorem 3.6.6 $h_i: [0,1\} \to \mathbb{R}_0,\ h_i \neq 0\ ,\ i = 1,2,\ m: [0,1] \to (0,1]$ ve $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonu $\left(0, \frac{b}{m^2}\right]$ aralığında $(h_1, h_2, m) - GA -$ konveks ve $0 < a < b$ için $f \in L_1\left(\left[a, \frac{b}{m}\right]\right)$ ve $h_1, h_2 \in L_1([0,1])$ olsun. Bu takdirde

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{h_1(1/2)}{lnb - lna}\int_a^b f(x)dx + \frac{mh_2(1/2)}{lnb - lna}\int_a^b f\left(\frac{x}{m}\right)dx$$

$$\leq min\left\{\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{a}{m}\right)\right]\int_0^1 h_1(t)dt\right.$$

$$+ m\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{b}{m}\right) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{b}{m^2}\right)\right]\int_0^1 h_2(t)dt, \left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(b)\right.$$

$$\left. + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{b}{m}\right)\right]\int_0^1 h_1(t)dt$$

$$\left. + m\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{a}{m}\right) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{a}{m^2}\right)\right]\int_0^1 h_2(t)dt\right\}$$

eşitsizliği sağlanır (Xi ve Ark, 2016).

İspat: $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonu $\left(0, \frac{b}{m^2}\right]$ aralığında $(h_1, h_2, m) - GA -$ konveks olduğundan

$$f(\sqrt{ab}) \leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a^t b^{1-t}) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{a^{1-t}b^t}{m}\right)$$

$$\leq min\left\{h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(1-t)f(b) + mh_2(t)f\left(\frac{a}{m}\right)\right]\right.$$

$$+ mh_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(t)f\left(\frac{b}{m}\right) + mh_2(1-t)f\left(\frac{a}{m^2}\right)\right],$$

$$h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(1-t)f(b) + mh_2(t)f\left(\frac{a}{m}\right)\right]$$

$$\left. + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(t)f\left(\frac{b}{m}\right) + mh_2(1-t)f\left(\frac{a}{m^2}\right)\right]\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu durumda $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $a^{1-t}b^t$ ve $a^t b^{1-t}$ yerine x yazılır ve eşitsizliğin her iki tarafının $t \in [0,1]$ e göre integrali alınırsa

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{h_1(1/2)}{lnb - lna}\int_a^b f(x)dx + \frac{mh_2(1/2)}{lnb - lna}\int_a^b f\left(\frac{x}{m}\right)dx$$

$$\leq min\left\{\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{a}{m}\right)\right]\int_0^1 h_1(t)dt\right.$$

$$+ m\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{b}{m}\right) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{b}{m^2}\right)\right]\int_0^1 h_2(t)dt,$$

$$\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(b)+mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{b}{m}\right)\right]\int_0^1 h_1(t)dt$$

$$+m\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{a}{m}\right)+mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{a}{m^2}\right)\right]\int_0^1 h_2(t)dt\right\}$$

olduğu görülür ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.6.3 $h:[0,1\} \to \mathbb{R}_0$, $h \neq 0$, $m:[0,1] \to (0,1]$ ve $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonu $\left(0,\frac{b}{m^2}\right]$ aralığında $(h,m)-GA-$konveks ve $0<a<b$ için $f \in L_1\left(\left[a,\frac{b}{m}\right]\right)$ ve $h \in L_1([0,1])$olsun. Bu takdirde

$$\frac{f(\sqrt{ab})}{h_1(1/2)} \leq \frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \left[f(x)+mf\left(\frac{x}{m}\right)\right]dx$$

$$\leq min\left\{f(a)+mf\left(\frac{a}{m}\right)+mf\left(\frac{b}{m}\right)+m^2f\left(\frac{b}{m^2}\right),\right.$$

$$2mf\left(\frac{a}{m}\right)+f(b)+m^2f\left(\frac{b}{m^2}\right), f(a)+m^2f\left(\frac{a}{m^2}\right)+2mf\left(\frac{b}{m}\right),$$

$$\left.mf\left(\frac{a}{m}\right)+f(b)+m^2f\left(\frac{b}{m^2}\right)+mf\left(\frac{b}{m}\right)\right\}\int_0^1 h(t)dt \qquad (3.116)$$

eşitsizliği sağlanır (Xi ve Ark, 2016).

İspat: Teorem 3.6.6 da her $t \in [0,1]$ için $h_1(t)=h_2(t)=h(t)$ alınarak istenilen eşitsizliğin sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Sonuç 3.6.4 Sonuç 3.6.3 ün şartları altında eğer $t \in [0,1]$ için $h(t)=t^s$ ve $s \in (-1,1]$ alınırsa bu takdirde

$$2^s f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \left[f(x)+mf\left(\frac{x}{m}\right)\right]dx$$

$$\leq \frac{1}{s+1}min\left\{f(a)+mf\left(\frac{a}{m}\right)+mf\left(\frac{b}{m}\right)+m^2f\left(\frac{b}{m^2}\right),\right.$$

$$2mf\left(\frac{a}{m}\right)+f(b)+m^2f\left(\frac{b}{m^2}\right), f(a)+mf\left(\frac{a}{m^2}\right)+2mf\left(\frac{b}{m}\right),$$

$$\left.mf\left(\frac{a}{m}\right)+f(b)+m^2f\left(\frac{b}{m^2}\right)+mf\left(\frac{b}{m}\right)\right\} \qquad (3.117)$$

eşitsizliği sağlanır (Xi ve Ark, 2016).

Teorem 3.6.7 $h_i: [0,1\} \to \mathbb{R}_0,\ h_i \neq 0\ , i = 1,2,\ m: [0,1] \to (0,1]$ ve $f, g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonları $\left(0, \frac{b}{m(1/2)}\right]$ aralığında $(h_1, h_2, m) - GA -$ konveks ve $0 < a < b$ için $fg \in L_1\left(\left[a, \frac{b}{m(1/2)}\right]\right)$ olsun. Bu takdirde

$$f(\sqrt{ab})g(\sqrt{ab}) \leq \frac{[h_1(1/2)]^2}{lnb-lna}\int_a^b f(x)g(x)dx$$
$$+\frac{m(1/2)h_1(1/2)h_2(1/2)}{lnb-lna}\int_a^b \left[f\left(\frac{x}{m(1/2)}\right)g(x) + f(x)g\left(\frac{x}{m(1/2)}\right)\right]dx$$
$$+\frac{[m(1/2)h_2(1/2)]^2}{lnb-lna}\int_a^b f\left(\frac{x}{m(1/2)}\right)g\left(\frac{x}{m(1/2)}\right)dx \tag{3.118}$$

eşitsizliği sağlanır (Xi ve Ark, 2016).

İspat: $f, g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonlarının $\left(0, \frac{b}{m(1/2)}\right]$ aralığında $(h_1, h_2, m) - GA -$ konveksliğinden

$$f(\sqrt{ab})g(\sqrt{ab}) \leq \left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a^t b^{1-t}) + m\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{a^{1-t}b^t}{m(1/2}\right)\right]$$
$$\times\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)g(a^t b^{1-t}) + m\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{a^{1-t}b^t}{m(1/2}\right)\right]$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu durumda $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $a^{1-t}b^t$ ve $a^t b^{1-t}$ yerine x yazılır ve eşitsizliğin her iki tarafının $t \in [0,1]$ e göre integrali alınırsa istenilen sonuç elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.8 $i = 1,2,$ olmak üzere$h_i: [0,1\} \to \mathbb{R}_0,\ h_i \neq 0,\ m_1, m_2: [0,1] \to (0,1]$, $f, g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ olsun. Eğer f fonksiyonu $\left(0, \frac{b}{m_1}\right]$ aralığı üzerinde $(h_1, h_2, m_1) - GA -$ konveks ve g fonksiyonu ise $\left(0, \frac{b}{m_2}\right]$ aralığı üzerinde $(h_1, h_2, m_2) - GA -$ konveks olmak üzere $0 < a < b$ için $fg \in L_1([a, b])$ ve ${h_1}^2, {h_2}^2 \in L_1([0,1])$ ise bu takdirde

$$\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b f(x)g(x)dx$$
$$\leq f(a)g(a)\int_0^1 {h_1}^2(t)dt + m_1 m_2 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\int_0^1 {h_2}^2(t)dt$$
$$+\left[m_2 f(a)g\left(\frac{b}{m_2}\right) + m_1 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g(a)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \tag{3.119}$$

eşitsizliği sağlanır(Xi ve Ark, 2016).

İspat: $x = a^{1-t}b^{t}, 0 \leq t \leq 1,$ olmak üzere $f, g: \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonlarının $(h_1, h_2, m) - GA -$ konveksliğinden

$$\frac{1}{lnb - lna}\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} f(a^{1-t}b^{t})g(a^{1-t}b^{t})dt$$

$$\leq \int_0^1 \left[h_1(t)f(a) + m_1 h_2(1-t)f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right]\left[h_1(t)g(a) + m_2 h_2(1-t)g\left(\frac{b}{2}\right)\right]dt$$

$$= f(a)g(a)\int_0^1 {h_1}^2(t)dt + m_1 m_2 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\int_0^1 {h_2}^2(t)dt$$

$$+\left[m_2 f(a)g\left(\frac{b}{m_2}\right) + m_1 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g(a)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.6.5 Teorem 3.6.8 in şartları altında eğer her $t \in [0,1]$ için $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$ alınırsa bu takdirde

$$\frac{1}{lnb - lna}\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} f(a^{1-t}b^{t})g(a^{1-t}b^{t})dt$$

$$\leq \left[f(a)g(a) + m_1 m_2 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]\int_0^1 h^2(t)dt$$

$$+\left[m_2 f(a)g\left(\frac{b}{m_2}\right) + m_1 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g(a)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt$$

eşitsizliği sağlanır. Özellikle eğer $t \in [0,1]$ için $h(t) = t^{s}$ ve $s \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$ ve $m_1 = m_2 = m$ alınırsa bu takdirde

$$\frac{1}{lnb - lna}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2s+1}\left[f(a)g(a) + m^2 f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{b}{m}\right)\right]$$

$$+m.B(s+1, s+1)\left[f(a)g\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)g(a)\right]$$

eşitsizliği sağlanır(Xi ve Ark, 2016).

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Son yıllarda eşitsizlikler ve konvekslik üzerine çok sayıda çalışmalar yapılmaktadır. Hem eşitsizlikler hem de konvekslik sadece matematiğin değil diğer birçok bilim dalının ilgisini çeken konular olmuştur ve çekmeye de devam edecektir. Tezimizin Giriş kısmında da belirttiğimiz gibi konvekslik fizik, biyoloji, tıp, güzel sanatlar, müzik, endüstri, finans matematiği, coğrafya, mühendislik, matematiksel istatistik, oyun teorisi, termodinamik ve insan anatomisi başta olmak üzere günlük hayatımızda pek çok yerde karşımıza çıkmaktadır.

Bu çalışmada konveks fonksiyonlar için verilen eşitsizliklerden yola çıkarak, ilk olarak Geometrik-Aritmetik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli bazı integral eşitsizlikleri verilmiştir. Daha sonra bir fonksiyonun türevinin mutlak değerinin herhangi bir kuvvetinin $(\alpha, m) - GA$ konveks olan fonksiyonlar ve Güçlü GA -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli bazı integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca $GA - h -$konveks ve $GA - s -$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli bazı integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Son olarak $(h_1, h_2) - GA -$konveks ve $(h_1, h_2, m) - GA -\text{konveks}$ fonksiyonlar için bazı eşitsizlikler Hölder ve Power-Mean integral eşitsizliklerinden yararlanarak elde edilmiştir.

Bu tezde verilenlere ilaveten $m -$ ve $(\alpha, m) -\text{Logaritmik}$ konveks fonksiyonlar için benzer eşitsizlikler verilebilir. Türevinin mutlak değeri (α, m) −HA-konveks veya kuvvetli HA-konveks fonksiyonlar ve benzer şekilde türevinin mutlak değerinin herhangi bir kuvveti (α, m) −HA-konveks veya kuvvetli HA-konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler türetilebilir. Koordinatlarda konveks fonksiyonlar ve bunun gibi çeşitli sınıflar için benzer integral eşitsizlikleri Hölder ve Power-Mean integral eşitsizliklerinden yararlanarak elde edilebilir. Ayrıca bu eşitsizliklerin özel olarak stokastik süreçler için de sağlanıp sağlanmadığı araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Azpeitia, A.G. 1994. Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28: 7-12.

Bagdasar, O. 2006. Inequalities and Applications, Bachelor’s Degree Thesis, Babeş Bolyai University, Cluj Napoca.

Bai, R.F., Qi, F. and Xi, B.Y. 2013. Hermite-Hadamard type inequalities for the m- and (α,m)-Logaritmically convex fonctions, Filomat 27(1), 1-7.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN: 975-442-035-1.

Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.

Bombardelli, M. and Varosanec, S. 2009. Properties of h-convex functions related to the Hermite-Hadamard_Fejér inequalities, Computers and Mathematics with Applications 58, 1869-1877.

Dragomir, S.S. 1992. Two functions in connection to Hadamard’s inequalities, J. Math. Anal. Appl., 167: 49–56.

Dragomir, S.S. 1994. Some remarks on Hadamard’s inequalities for convex functions, Extracta Math. 9 (2): 88–94.

Dragomir, S.S. 2000. Refinements of the Hermite–Hadamard integral inequality for log convex functions, RGMIA Res. Rep. Collect, 3 (4): 527–533.

Dragomir, S.S. 2002. On some new inequalities of Hermite - Hadamard type for *m*-convex functions, *Tamkang J. Math.* 1, 55–65.

Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S. 1998. The Hadamard’s inequality for $s-$convex functions in the first sense, Demonstratio Math., 31 (3): 633-642.

Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S. 1999. The Hadamard’s inequality for s-convex functions in the second sense, Demonstratio Math., 32 (4): 687-696.

Dragomir, S.S. and Mond, B. 1998. Integral inequalities of Hadamard’s type for log-convex functions, Demonstratio Math., 31 (2): 354-364.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. 1998. Pearce, Quasi-convex functions and Hadamard’s inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57 (1998), 377-385.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, Victoria University.

Dragomir, S. S., Pecaric, J. and Persson, L. E. 1995. Some inequalities of Hadamard type, Soochow Journal of Mathematics, 21: 335-341.

Dragomir, S.S. and Toader, G.H. 1993. Some inequalities for $m-$convex functions, Studia Univ. Babes¸-Bolyai, Math., 21–28.

Ekinci, A. 2014. Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar İçin Integral Eşitsizlikler, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Greenberg, H. J., Pierskalla, W. P., 1970. A review of quasi convex functions, Reprinted from Operations Research, 19, 7.

Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G. 1952. Inequalities, 2nd Ed., Cambridge University Press.

Hudzik, H. and Maligranda, L. 1994. Some remarks on s-convex functions, Aequationes Math., 48: 100-111.

Hwang, D.Y. and Dragomir, S.S. 2014. Comparing two integral means for absolutely continuous functions whose absolute value of the derivative are convex and applications, Applied Mathematics and Computation, 230, 259-266.

Ion, D. A. 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of University of CraiovaMath. Comp. Sci. Ser., vol. 34, 82-87.

İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard type inequaities for harmonically convex functions Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic 43, 6, 935-942.

İşcan, İ., 2015. Hermite-Hadamard-Fej´er Type Inequalities for convex Functions via Fractional Integrals, Stud. Univ. Babe¸s-Bolyai Math., 60, No. 3, 355-366.

İşcan, İ. and Wu, S. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals, Applied Mathematics and Computation, 238: 237-244.

Ji, A.P., Zhang, T.Y. and Qi, F. 2013. Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for (a,m)-GA-Convex Functions, Journal of Function Spaces and Applications. 2013, Article ID 823856..

Kadıoğlu, E. ve Kamali, M. 2013. Genel Matematik, ISBN: 978-975-8151-57-8.

Kırmacı, U.S. and Özdemir, M.E. 2004. Some inequalities for mappings whose derivatives are bounded and applications to specials means of real numbers, Applied Math. Letters, 17: 641–645.

Kuczma, M. 1985. An Introduction to the Theory of Funtional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality, PWN-Uniwersytet Slaski, Warszawa-Krakow-Katowice.

Maden, S., Turhan, S., İşcan, İ., 2016. New Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for $GA-$convex functions, AIP conference proceedings 1726, 020043.1- 020043.5.

Maden, S., Turhan, S., Kadakal, H., 2017. Relationships Between Integral Averages for Absolutely Continuous Functions Whose Derivative are GA- Convex Functions, 2nd Internatinal Conference On Advances in Natural And Applied Sciences Icanas 2017, April 18-21, Antalya, Turkey.

Merentes, N. and Nikodem, K. 2010. Remarks on strongly convex functions, Aequat. Math., 80: 193-199.

Mitrinoviç, D.S. 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Mitrinoviç, D.S., Pecaric, J.E. and Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Niculescu, C. P. 2003. Convexity according to means, Math. Inequal. Appl. 6 (4), 571–579.

Niculescu, C.P. and Persson, L.E. 2005. Convex Functions and Their Applications, Springer, Berlin.

Niculescu, C.P. and Persson, L.E. 2006. Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, Springer Science Business Media Inc.

Noor, M.A., Noor, K. I., Awan, M.U. 2014. Some inequalities for geometrically-aritmetically h- convex functions. Creat. Math. Inform. 23(1) , 91-98.

Özdemir, M.E. 2000. A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and means, Appl. Math. Lett., 13: 19–25.

Özdemir, M. E., Yıldız, C. 2013. The Hadamard's inequality for quasiconvex functions via fractional integrals, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series Volume 40(2): 167-173.

Pachpatte, B.G. 2004. A note on integral inequalities involving two log-convex functions, Math. Ineq. Appl., 7 (4): 511–515.

Qu, M., Liu, W. and Park, J. 2014. Some new Hermite-Hadamard-type inequalities for geometric-arithmetically *s*-convex functions, Wseas Transaction on Mathematics, 13, 452-461.

Roberts, A.W. and Varberg, D.E. 1973. Convex Functions, Academic Press, New York.

Shuang, Y. and Qi, F. 2017. Integral inequalities of the Hermite-Hadamard type for (α,m)-GA- convex fonctions, J. of Nonlinear Sci. Appl, 10(4): 1854-1860.

Toader, G.H. 1984. Some generalisations of the convexity, Proc. Collog. Approx. Optim, 329-338.

Tunç, M. 2011. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadaamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Tunç, M. 2013. Some integral inequalities for logarithmically convex functions, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22: 177-181.

Wright, E. M. 1954. An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly 61: 620-622.

Xi, B.Y. and Qi, F. 2016. Properties and inequalities for the (h_1, h_2) ve (h_1, h_2, m)-GA -convex fonctions, Cogent Mathematics 3:1176620, 1-18.

Zhang, T.-Y., Ji, - A.-P. and Qi, F. 2013. Some inequalities of Hermite -Hadamard type for GA- convex functions with applications to means, Le Matematiche, Volume LXVIII. Fasc. I, 229-239.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Mahmutcan CARLI
Doğum Yeri	**:**	Ordu
Doğum Tarihi	**:**	12.04.1993
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	mahmutcancarli@gmail.com
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2016

İş Deneyimi:

Görev	**Görev Yeri**	**Yıl**
Matematik Öğretmeni	Öğretmen Eğitim Kurumları	2016-2018
Matematik Öğretmeni	Ordu Büyükşehir Belediyesi Mimar Sinan Bilgi Evi	2018-

Yayınlar :

1.

2.