T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(1,0), (1,1), (2,1) VE (3,0) TİPLİ BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİ ÜZERİNE

EMİNENUR KARTAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2019

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(1,0), (1,1), (2,1) VE (3,0) TİPLİ BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİ ÜZERİNE

EMİNENUR KARTAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Eminenur KARTAL tarafından hazırlanan **' (1,0), (1,1), (2,1) ve (3,0) –TİPLİ BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİ ÜZERİNE'** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 26.08.2019 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT Ordu Üniversitesi / Matematik	....
Üye Doç. Dr. Sibel PAŞALI ATMACA Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi / Matematik	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ Ordu Üniversitesi / Matematik	....

04/ 09/ 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 06 / 09 / 2019 tarih ve 2019.. / 613. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

E.Kartal

EMİNENUR KARTAL

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

(1,0), (1,1), (2,1) VE (3,0) TİPLİ BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİ ÜZERİNE
EMİNENUR KARTAL
ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 40 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT)

Bu çalışma altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı.Önceki çalışmalar bölümünde Öklid uzayında Bertrand eğri çifti ve Genelleştirilmiş Bertrand eğri çiftleriyle ilgili çalışmalara yer verildi. Materyal ve Yöntem bölümünde, 3-boyutlu Öklid uzayına ait temel kavramlar, Öklid uzayında Bertrand eğri ve Genelleştirilmiş Bertrand eğri çiftleriyle ilgili temel bilgiler ve kavramlar ifade edildi.

Bulgular bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde ilk olarak, Genelleştirilmiş Bertrand eğri çiftlerinin 3-boyutlu Öklid uzayındaki beş farklı tipleri incelendi. Daha sonra bu farklı tipteki Bertrand eğri çiftleri tanımlanıp her bir eğri çiftinin Frenet çatıları arasındaki bağıntı, aralarındaki uzaklık, Frenet vektörleri arasındaki açı ve eğrilik hesaplamaları verildi. (2,0) tipli Bertrand eğri çiftinin ise literatürde en iyi bilinen 3-boyutlu Öklid uzayındaki Bertrand eğri çiftine eşit olduğu görüldü.

Anahtar Kelimeler: Afin uzay, Öklid uzayı, Frenet çatısı, Eğrilik, Burulma, Bertrand eğri çifti, Genelleştirilmiş Bertrand eğri çifti.

ABSTRACT

ON BERTRAND CURVE PAIRS OF (1,0), (1,1), (2,1) AND (3,0) TYPES

EMİNENUR KARTAL

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 40 PAGES

(SUPERVISOR: TITLE, NAME AND SURNAME

IF THERE IS NO CO-SUPERVISOR DELETE THIS SECTION)

In this study is organized in six sections. In the introduction section, the purpose of the study and the reason for the consideration of this subject were discussed. In the Previous Studies section, studies on Bertrand curve pair and Generalized Bertrand curve pairs in Euclidean space are given. In the Materials and Methods section, the basic concepts of 3-dimensional Euclidean space, Bertrand curve pair in Euclidean space and Generalized Bertrand Curve pairs are expressed.

The findings section constitutes the original part of our study. In this section, firstly five different types of Generalized Bertrand curve pairs in the 3-dimensional Euclidean space are examined. Then, Bertrand curve pairs of these different types were defined and the correlation between the Frenet roofs of each curve pair, the distance between them, the angle between the Frenet vectors and the curvature calculations were given. (2,0) type Bertrand curve pair was found to be equal to the Bertrand curve pair in the best known 3-dimensional Euclidean space in the literature.

Keywords: Affine space, Euclidean space, Frenet frame, Curvature, Torsion, Pair of Bertrand curves, Generalized Bertrand curve pair.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman engin bigi ve deneyimleriyle yolumu açan, değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT'a en içten duygularımla teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen, Matematik Bölümü hocalarıma en samimi duygularım ile teşekkür ederim.

Son olarak yüksek lisans sürecimde ve hayatımın her anında yanımda olan maddi ve manevi desteklerini benden hiç bir zaman esirgemeyen sevgili aileme, eşime ve kızıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\langle\, , \rangle$	:	İç çarpım
$\lVert . \rVert$	:	Norm
$\boldsymbol{V_1}$	:	Teğet Vektör
$\boldsymbol{V_2}$	:	Asli Normal Vektör
$\boldsymbol{V_3}$	:	Binormal Vektör
$\boldsymbol{k_1}$	:	Eğrinin Eğriliği
$\boldsymbol{k_2}$	:	Eğrinin Burulması

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometrinin en önemli çalışmalarından birisi olan eğriler teorisinin tarihi düzlemsel eğriler üzerine yapılan çalışmalara kadar dayanmaktadır.1770' li yıllarda uzay eğrilerinin teorisi oluşmaya başlamış ve binormal vektörün tanımlanmasıyla birlikte eğrilerin sınıflandırılması problemi öne çıkmıştır. Bir eğrinin asli normal vektör alanının bir başka eğrinin asli normal vektör alanı olup olmayacağı sorusu 1850 yılında J.Bertand tarafından yayınlanan makalede cevaplandırılmıştır. Böyle bir ikinci eğrinin olması için verilen eğrinin eğrilikleri lineer olmalıdır. Literatürde bu şartı sağlayan eğriye Bertrand eğrisi, ikinci eğriye ise bu eğrinin Bertrand partner eğrisi denir.Bu eğri çiftine de Bertrand eğri çifti denir. Günümüzde Bertrand eğrileri bilgisayar destekli geometrik tasarımlarda ve bilgisayar destekli üretimlerde önemli bir yere sahiptir (O'Neill,1983). Bertrand eğrileri paralel (offset) eğrilerin özel örnekleridir. Bertrand eğrileri Öklid uzayında yoğun bir çalışma alanı teşkil etmiş ve bu eğriler farklı uzaylarda da çalışılmıştır. Öztekin ve Bektaş,(2010), Bertrand eğrilerinin Minkowski uzayında hesaplanması ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Choi ve Ark., (2012), Bertrand eğrilerinin uzay formları üzerinde çalışmışlardır. Izumiya ve Takeuchi ,(2002), çalışmalarında 3-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrilerinin küresel eğrilerden elde edilebileceğini ispatlamış ve küresel evolüt kavramını tanımlamışlardır. Küresel eğrilerin Singüler nokta teorisinin bir uygulaması olarak Bertrand eğrilerinin "generic" özellikleride incelenmiştir. Görgülü ve Özdamar ,(1985), E^n'de Genelleştirilmiş Bertrand Eğri çiftleri ve eğilim çizgilerini incelemişlerdir.

Bu tezde Genelleştirilmiş Bertrand eğri çiftinin tanımından hareketle $n = 3$ olması durumunda oluşan beş farklı tipteki (1.0), (1.1), (2.0), (2.1) ve (3.0) tipli Bertrand eğri çiftleri tanımlanıp bu eğri çiftlerinin Frenet çatıları arasındaki bağıntı, teğet vektörleri arasındaki uzaklık,Frenet vektörleri arasındaki açı ve bu eğri çiftlerinin eğrilikleri verildi. Buradan $(2, 0)$ tipli Bertrand eğri çiftinin literatürde en iyi bilinen 3-boyutlu Öklid uzayındaki Bertrand eğri çifti ile aynı olduğu görüldü.

2. GENEL BİLGİLER

Görgülü ve Özdamar , (1986), *A Generalization Of The Bertrand Curves As General Inclined Curves In* E^n adlı çalışmada Bertrand eğri çifti ve Eğilim çizgileri bir arada verilip bu eğrilerin Genelleştirilmesini incelemişlerdir.

Erdoğan, (1986), yüksek lisans tezinde n-boyutlu Öklid uzayında yüksek eğrilikli bir eğrinin asli normali ile bir diğer yüksek eğrilikli eğrinin asli normalini eğrinin karşılıklı noktalarında çakışık kabul ederek E^n'de Bertrand eğrilerini tanımlamış ve teoremleri n-boyutlu uzaya genellemiştir.

(Tanrıöver,1986), (Tanrıöver ve Sabuncuoğlu ,1989) ve (Görgülü ve Özdamar,1986) n-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrileri ile ilgili teoremleri çalışmalarında ispatlamıştır.

Ekmekçi ve İlarslan, (2001), n-boyutlu Lorentz uzayında Bertrand eğrilerinin tanımını, n-boyutlu Öklid uzayında iyi bilinen Bertrand eğri tanımıyla karşılaştırarak verilmiştir.

Balgetir ve Ark., (2004), 3-boyutlu Minkowski uzayında non-null Bertrand eğrileri ile ilgili çalışmalar yapmıştır.

İnalcık, (2010), *"5-Boyutlu Uzaylarda Bertrand Eğrileri"* isimli yüksek lisans tezinde E^5, 5-Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand eğri tanımını verip Bertrand eğri çiftleri için genel bir karakterizasyon elde etmiştir.

Güner, (2011), *"Küresel Eğriler ve Bertrand Eğrileri"* isimli yüksek lisans tezinde 3-Boyutlu Öklid Uzayında düzlemsel eğrilerden silindirik helisler ve küresel eğrilerden Bertrand eğrileri elde edilebileceğini göstermiş, bir eğrinin küresel göstergelerine karşılık gelen Bertrand eğrilerini araştırmıştır.

Çelik, (2015), *"Bertrand Eğri Çiftine Ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri"* isimli yüksek lisans tezinde Bertrand eğrisine ait partner eğrisinin Frenet vektörleri ve birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında elde edilen Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmalarını hesaplayıp bu değerleri Bertrand eğrisine bağlı olarak ifade etmiştir.

Lutfu, (2016), *"3-Boyutlu Öklid Uzayında Yönlü Bertrand Eğrisi"* isimli yüksek lisans tezinde bir uzay eğrisi boyunda birden fazla çatı tanımlanabileceğini göstermiştir. Ve Bertrand eğrilerini özel bir q-çatısı ile tanımlamış, sonuç olarak tüm eğrilerin yönlü Bertrand eğrisi tanımlanabileceğini ifade etmiştir.

Masal ve Azak, (2017), *"3-Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğriler ve Bishop Çatısı "* adlı çalışmada Bishop çatısına ait eğriliklerin geometrik anlamları ve Bertrand eğri çiftlerinin Bishop vektörleri arasındaki bağıntıları elde edip, bu Bertrand eğri çiftlerinin paralel eğri olması durumundaki bazı sonuçlara yer vermişlerdir.

Özçınar, (2017), *"Bertrand Eğrilerinin Karakteristik Özellikleri "* isimli yüksek lisans tezinde n-boyutlu E^n Öklid uzayında Bertrand eğri çifti ve karakteristik özelliklerini , E^3 Öklid uzayında Bertrand eğri çiftlerinin farklı yüzeylerle olan ilişkisini açıklamıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Öklid Uzayı

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid Uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 3.1.1 A boştan farklı bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$A_1 : \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$$

$$A_2 : \forall P \in A, \forall \alpha \in V \text{için } f(P,Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 3.1.2 A, V ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, P_2, P_3 \in A$ noktaları için $\{P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3\}$ cümlesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta 4-lüsüne bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası , $P_i, 1 \leq i \leq 3$, noktalarına da çatının birim noktaları denir. $boyV = 3$ ise A ya 3-boyutlu bir afin uzay denir.

Tanım 3.1.3

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir: $\forall\, x, y, z \in V$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için

a. Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle,$$

$$\langle x, ay + bz\rangle = a\langle x, y\rangle + b\langle x, z\rangle,$$

b. Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,$$

c. Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\langle x, x\rangle \geq 0, \qquad \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Tanım 3.1.4 $\mathbb{R}^3$ afin uzay, $\forall\ X, Y \in \mathbb{R}^3$ olsun,

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona standart iç çarpım ve ya Öklid iç çarpımı denir. Üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlı $\mathbb{R}^3$ afin uzayına Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5 $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} d \ &: \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ &(X, Y) \to d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna uzaklık fonksiyonu , $d(X, Y)$ reel sayısına da X ve Y noktaları arasındaki uzaklık denir.

Tanım 3.1.6 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ diferensiyellenebilir fonksiyona $\mathbb{R}^3$ te bir eğri denir. Burada I aralığına α eğrisinin parametre aralığı, $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir.

Tanım 3.1.7 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin teğet, aslinormal ve binormal vektörleri sırasıyla

$$V_1(s) = \alpha'(s), \quad V_2(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad V_3(s) = V_1(s) \wedge V_2(s)$$

şeklinde tanımlanır. Bu vektörlere Frenet vektörleri adı verilir. α birim hızlı eğri değil ise bu vektörler

$$V_1(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}\ , \quad V_2(s) = V_3(s) \wedge V_1(s), \quad V_3(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|} \tag{3.1.1}$$

şeklinde verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.8 Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektörleri V_1, V_2, V_3 olsun.

a. $k_1^* : I \to \mathbb{R}, \quad k_1^* : (s) = \|V_1'(s)\|$ şeklinde tanımlı fonksiyona α eğrisinin eğrilik fonksiyonu, $k_1^*(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği ,

b. $k_2^* : I \to \mathbb{R}, \quad k_2^*(s) = -\langle V_3'(s), V_2(s) \rangle$ şeklinde tanımlı fonksiyona ise α eğrisinin burulma fonksiyonu, $k_2^*(s)$ sayısına da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Teorem 3.1.1 Eğer eğri keyfi parametre ile verilmiş ise k_1^* eğriliği ve k_2^* burulması sırasıyla

$$k_1^*(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}, \quad k_2^*(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2} \tag{3.1.2}$$

şeklinde verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 3.1.2 $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet 3-ayaklısı $\{V_1, V_2, V_3\}$, eğriliği k_1^* ve burulması k_2^* olsun. Bu durumda Frenet formülleri

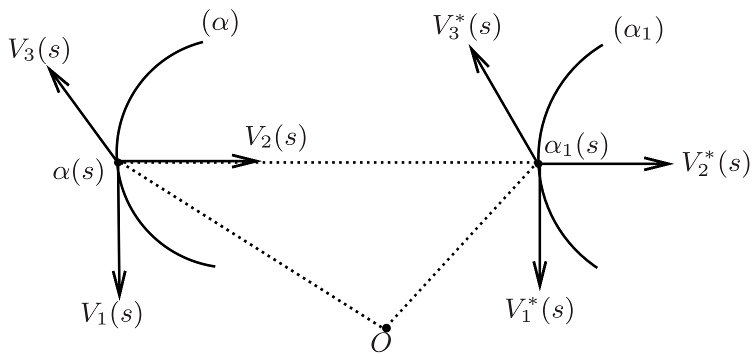
$$V_1'(s) = k_1^*(s)V_2(s) \tag{3.1.3}$$

$$V_2'(s) = -k_1^*(s)V_1(s) + (s)V_3k_1^*(s) \tag{3.1.4}$$

$$V_3'(s) = -k_2^*(s)V_2(s) \tag{3.1.5}$$

bağıntısıyla verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.9 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ ve $\alpha_1 : I \to \mathbb{E}^3$ diferensiyellenebilir iki eğri ve bu eğrilerin Frenet çatıları sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), V_3^*(s)\}$ olsun. α eğrisinin V_2 aslinormal vektörü ile α_1 eğrisinin V_2^* aslinormal vektörü lineer bağımlı ise α eğrisine Bertrand eğrisi, α_1 eğrisine α eğrisinin Bertrand partner eğrisi adı verilir ve (α, α_1) ikilisine de Bertrand eğri çifti denir (Hacısalihoğlu, 1983), (Sabuncuoğlu, 2006).



Şekil 3.1: Bertrand eğri çifti

Teorem 3.1.3 (α, α_1) Bertrand eğri çifti olsun.Bu eğrilerin teğet vektörleri arasındaki açı sabittir.

İspat. α ve α_1 eğrilerinin teğet vektörleri sırasıyla V_1 ve V_1^* olsun. $\langle V_1, V_1^* \rangle = \cos\theta$ dır. $\cos\theta$ 'nın sabit olduğunu gösterelim. $\langle V_1, V_1^* \rangle = \cos\theta$ eşitliğinde her iki tarafın türevi alındığında ,

$$\begin{aligned} \langle V_1', V_1^* \rangle + \langle V_1, (V_1^*)' \rangle &= (\cos\theta)' \\ \langle k_1 V_2, V_1^* \rangle + \langle V_1, k_1^* V_2^* \rangle &= (\cos\theta)' \\ k_1 \langle V_2, V_1^* \rangle + k_1^* \langle V_1, V_2^* \rangle &= (\cos\theta)' \end{aligned}$$

(α, α_1) Bertrand eğri çifti olduğundan $V_2^* \| V_2$ olup buradan

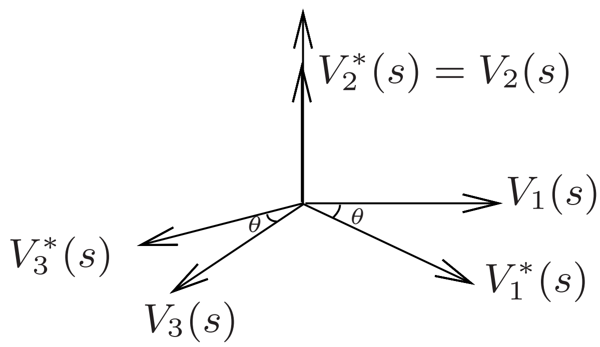
$$\begin{aligned} (\cos\theta)' &= 0 \\ \cos\theta &= sabit \end{aligned}$$

Teorem 3.1.4 (α, α_1) Bertrand eğri çiftinin teğet vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere Frenet vektörleri arasında

$$V_1^* = (\cos\theta)V_1 - (\sin\theta)V_3 \ , \quad V_2^* = V_2 \ , \quad V_3^* = (\sin\theta)V_1 + (\cos\theta)V_3 \tag{3.1.6}$$

bağıntısı vardır. Burada θ açısı sabittir (Sabuncuoğlu, 2006).

İspat. $\langle V_1^*, V_1 \rangle$ nin sabit olduğunu Teorem (3.1.3)'de göstermiştik. Bertrand eğri çifti tanımına göre $V_2^* = V_2$ olduğu açıktır. Buna göre α eğrisinin $\alpha_1(s)$ noktasındaki doğrultma düzlemi, α_1 eğrisinin $\alpha_1(s)$ noktasındaki doğrultma düzlemine paraleldir. V_3^* ve V_3 vektörleri arasındaki açı da sabit olur. Bu sabitin de θ olduğu görülebilir. V_1^*, V_1 ve V_3^*, V_3 vektör alanlarının birim uzunlukta olduğu da göz önüne alınarak (3.1.6) eşitlikleri elde edilir.



Şekil 3.2: Teğet vektörleri arasındaki açı

Teorem 3.1.5 (α, α_1) Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri k_1^* ve k_2^* ise bu eğrilikler arasında

$$\lambda k_1^* + \mu k_2^* = 1 \ , \quad \mu = \lambda \cot \theta \tag{3.1.7}$$

bağıntısı vardır (Matsuda ve Yorozu, 2003).

İspat.

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s)$$

ifadesinin s'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_1}{ds_1}.\frac{ds_1}{ds} = V_1^* \frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda k_1^*)V_1(s) + \lambda k_2^*(s)V_3$$

olur. Bu ifade sırasıyla V_1 ve V_3 ile iç çarpılırsa

$$\cos\theta \frac{ds_1}{ds} = 1 - \lambda k_1^* \ , \quad \sin\theta \frac{ds_1}{ds} = \lambda k_2^*$$

ifadeleri bulunur. Bulunan bu ifadeler taraf tarafa oranlandığında

$$\lambda k_1^* + \mu k_2^* = 1 \ , \quad \mu = \lambda \cot \theta = \text{sabit}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.6 (α, α_1) Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri k_1 ve k_2, α_1 eğrisinin eğrilikleri k_1^* ve k_2^* ile gösterilirse bu eğrilikler arasında

$$k_1^* = \frac{\lambda k_1 - \sin^2\theta}{\lambda(1 - \lambda k_1)} \ , \quad k_2^* = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2 k_1} \tag{3.1.8}$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2006).

İspat. (3.1.1) eşitliklerinin birincisine göre $V_1^* = \frac{(\alpha_1)'}{\|(\alpha_1)'\|}$ olduğundan $(\alpha_1)' = \nu_1 V_1^*$ dır. $V_1^* = (\cos\theta)V_1 - (\sin\theta)V_3$ bağıntısından yararlanarak

$$(\alpha_1)' = \nu_1(\cos\theta)V_1 - \nu_1(\sin\theta)V_3$$

bulunur.(3.1.14) eşitliğine göre $(\alpha_1)' = (1 - \lambda)V_1 + \lambda k_1 k_1 V_3$ olduğundan

$$\nu_1(s)\cos\theta = (1 - \lambda k_1(s))$$

$$\nu_1(s)\sin\theta \;=\; -\lambda k_2(s) \tag{3.1.9}$$

olur. $\alpha_1 : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f_1 ile gösterelim ve

$$(f_1)^{-1} = h_1$$

diyelim .$f_1(s) = t$ ise $h_1(t) = s$ olur.$f_1(I) = J$ olmak üzere $\alpha_1 \circ h_1 : J \to \mathbb{R}^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olur. $\alpha_1 = \alpha + \lambda V_2$ eşitliğinin her iki tarafının h_1 fonksiyonu ile bileşkesi alınarak $\alpha_1 \circ h_1 = \alpha \circ h_1 + \lambda(V_2 \circ h_1)$ ve buradan

$$\alpha \circ h_1 = \alpha_1 \circ h_1 - \lambda(V_2 \circ h_1)$$

elde edilir.$V_2^* = V_2$ olduğundan, bu eşitlik

$$\alpha \circ h_1 = \alpha_1 \circ h_1 - \lambda(V_2^* \circ h_1)$$

biçiminde yazılabilir. Demek ki $\alpha \circ h_1 : J \to \mathbb{R}^3$ eğrisi birim hızlı

$$\alpha_1 \circ h_1 : J \to \mathbb{R}^3$$

eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluşturur.$(\alpha \circ h_1) \circ (h_1)^{-1} = \alpha$ ve α birim hızlı bir eğri olduğundan $\alpha \circ h_1$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu h_1 dir.$f_1(s) = t$ olsun.

$$\begin{aligned}
(f_1)'(s) &= \|(\alpha_1)'(s)\| = \nu_1(s) \\
(h_1)'(t) &= \|(\alpha \circ h_1)'(t)\| = \nu(t) \\
(h_1)'(t) &= \frac{1}{(f_1)'(s)} = \frac{1}{\nu_1(s)}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\nu(t) = \frac{1}{\nu_1(s)}$$

olur. Başka bir anlatımla

$$\nu(t)\nu_1(s) = 1$$

dir. Şimdi $\alpha \circ h_1 : J \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin, birim hızlı $\alpha_1 \circ h_1 : J \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile Bertrand çifti oluşturduğunu göz önüne alarak (3.1.9) eşitliklerini yazalım. Bu eşitliklerde λ yerine $-\lambda$, θ yerine $-\theta$ gelecektir. Böylece

$$\begin{aligned}
\nu(t)\cos\theta &= 1 + \lambda(k_1^*)^1(t) \\
\nu(t)\sin\theta &= -\lambda(k_2^*)^1(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(k_1^*)^1(t)$ ve $(k_2^*)^1(t)$ ile $\alpha_1 \circ h_1$ birim hızlı eğrisinin eğrilik ve burulmasını gösterdik.$(k_1^*)^1(t) = k_1^*(s)$ ve $(k_2^*)^1(t) = (k_2^*)$ olduğundan

$$\nu(t)\cos\theta = 1 + \lambda k_1^*(s)$$

$$\nu(t)\sin\theta \;\; = \;\; -\lambda k_1^*(s) \qquad (3.1.10)$$

olur.(3.1.9) ve (3.1.10) eşitliklerinin birincileri taraf tarafa çarpılarak

$$\cos^2\theta \;\; = \;\; (1-\lambda k_1)(1+\lambda k_1^*) \qquad (3.1.11)$$

bulunur. (3.1.9) ve (3.1.10) eşitliklerinin ikincileri taraf tarafa çarpılarak

$$\sin^2\theta \;\; = \lambda^2 k_2 k_2^* \qquad (3.1.12)$$

bulunur. Buradan (3.1.8) eşitlikleri elde edilir (Sabuncuoğlu, 2006).

Sonuç 3.1.1 α_1 ve α eğrisiyle Bertrand çifti oluşturuyorsa k_2^* ile k_1 aynı işaretlidir (Sabuncuoğlu, 2006).

İspat. Bu önermenin doğruluğu (3.1.12) eşitliğinden görülür (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 3.1.10 Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı

$$\alpha_1 : I \to \mathbb{R}^3$$

eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için $\alpha_1(s)$ noktası ile $\alpha(s)$ noktasını birleştiren doğru $\alpha_1(s)$ eğrisinin α_1 noktasındaki birinci normalini ve α nın $\alpha(s)$ noktasındaki birinci normalini kapsıyorsa, α_1 eğrisi α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyor denir(Sabuncuoğlu, 2006).

Teorem 3.1.7 (α, α_1) Bertrand eğri çifti olsun. $\lambda(s)$ sabit bir sayı olmak üzere α_1 eğrisi

$$\alpha_1(s) \;\; = \;\; \alpha(s) + \lambda(s)V_2(s) \qquad (3.1.13)$$

bağıntısına eşittir (Sabuncuoğlu, 2006).

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. Bertrand eğri çifti tanımına göre α_1 eğrisi

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda(s)V_2(s)$$

biçiminde verilir. s parametresine göre türev alındığında

$$(\alpha_1(s))' = \alpha(s)' + \lambda(s)'V_2(s) + \lambda(s)V_2(s)' = \alpha' + \lambda(s)'V_2(s) + \lambda(s)(-k_1V_1 + k_2V_3)$$

ve buradan

$$(\alpha_1(s))' = \big(1 - \lambda(s)k_1\big)V_1 + \lambda(s)'V_2 + \lambda(s)k_2V_3$$

bulunur. $(\alpha_1)'(s)$ vektörü, $V_1^*(s)$ vektörüne paralel olduğundan

$$(\alpha_1)'(s) \perp V_2^*(s)$$

dir.$V_2^*(s)$ vektörü $V_2(s)$ vektörüne paralel olduğundan $(\alpha_1)'(s) \perp V_2(s)$ olur. Öyleyse $\langle(\alpha_1)', V_2\rangle = 0$ dır. Burada $(\alpha_1)'$ yerine yukarıda bulunan eşiti yazılarak

$$\lambda(s)^{'} = 0$$

elde edilir. Buna göre $\lambda : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sabittir. $\lambda(s) = k$ diyelim. Böylece (3.1.13) eşitliği elde edilir (Sabuncuoğlu, 2006).

Sonuç 3.1.2 α_1 eğrisi α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa

$$(\alpha_1)' = (1 - \lambda k_1)V_1 + \lambda k_2 V_3 \tag{3.1.14}$$

dır (Sabuncuoğlu, 2006).

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere α_1 eğrisi, α eğrisiyle Bertand eğri çifti oluşturuyorsa (3.1.13) eşitliğine göre

$$\alpha_1 = \alpha + \lambda V_2$$

biçimindedir. Buradan

$$(\alpha_1)' = \alpha^{'} + \lambda V_2^{'} = V_1 + \lambda(-k_1V_1 + k_2V_3) = (1 - \lambda k_1)V_1 + \lambda k_2V_3$$

elde edilir (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 3.1.11 $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisinin hız vektörü sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa α eğrisine eğilim çizgisi denir. α nın eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart eğrilikleri oranı sabittir (Hacısalihoğlu, 1993).

Tanım 3.1.12 (α, β) bir eğri çifti, öyle ki $\beta = \alpha + \lambda$ ve

$$\lambda = \sum_{i=r}^{r+m} \lambda_i V_i = \sum_{i=r}^{r+m} \lambda_i^* V_i^*, \quad m < n-1 \tag{3.1.15}$$

olmak üzere $\lambda_i, \lambda_i^* \in C^\infty(I, R)$, $r \leq i \leq n$, sırasıyla α ve β eğrilerinin Frenet vektörleridir. Bu durumda (α, β) ikilisine $(r, m)-$Bertrand eğri çifti denir . Buradan bu ifadenin açık bir şekilde yazılışı

$$\beta = \alpha + (\lambda_r V_r + \lambda_{r+1} V_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+m} V_{r+m}) \tag{3.1.16}$$

şeklinde olur. Tanımdan hareketle $n = 3$ olması durumunda beş tip Bertrand eğri çifti vardır. Bunlar genel denklemleri (3.1.16) bağıntısından elde edilen (1,0),(1,1),(2,0),(2,1) ve (3,0) tipli Bertrand eğri çiftleridir.

$r = 1, m = 0,$	alınması durumunda	(α, β)ikilisi	$(1, 0)-$	tipli Bertrand eğri çifti,
$r = 1, m = 1,$	alınması durumunda	(α, β)ikilisi	$(1, 1)-$	tipli Bertrand eğri çifti,
$r = 2, m = 0,$	alınması durumunda	(α, β)ikilisi	$(2, 0)-$	tipli Bertrand eğri çifti,
$r = 2, m = 1,$	alınması durumunda	(α, β)ikilisi	$(2, 1)-$	tipli Bertrand eğri çifti,
$r = 3, m = 0,$	alınması durumunda	(α, β)ikilisi	$(3, 0)-$	tipli Bertrand eğri çifti

olmaktadır (Görgülü ve Özdamar, 1986).

Teorem 3.1.8 (α, β), (r, m)-Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ arasındaki uzaklık sabittir (Görgülü ve Özdamar, 1986).

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölüm çalışmanın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Burada Tanım (3.1.12)'de $n = 3$ durumunda oluşan $(1,0)$,$(1,1)$,$(2,0)$,$(2,1)$ ve $(3,0)$ tipli Bertrand eğri çiftleri incelendi.$(2,0)$ tipli Bertrand eğri çiftinin literatürde bilinen Öklid uzayındaki Bertrand eğri çifti ile aynı olduğu görülmektedir. Bu çalışmada bu eğri çiftlerinin tanımları verilip bazı karakteristik özellikleri incelendi.

4.1 (1,0) Tipli Bertrand Eğri Çifti

Tanım 4.1.1 α ve β diferensiyellenebilir eğriler olsun. Eğer bu iki eğrinin teğet vektörleri paralel ise (α, β) eğri çiftine $(1,0)$ tipli Bertrand eğri çifti denir.

Teorem 4.1.1 $(1,0)$ tipli Bertrand eğri çifitinin genel denklemi

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda_1(s)V_1(s) \tag{4.1.1}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. $(1,0)$ tipli Bertrand eğri çiftinde $r = 1$ ve $m = 0$ eşitlikleri (3.1.16) denkleminde yerine yazıldığında $\beta = \alpha + \lambda_1 V_1$ olur.

$$\beta = \alpha + \lambda\,,$$

$$\lambda = \sum_{i=r}^{r+m} \lambda_i V_i \quad = \quad \sum_{i=r}^{r+m} \lambda_i^* V_i^* \tag{4.1.2}$$

eşitliğinde $r = 1$ ve $m = 0$ değerleri yerine yazıldığında,

$$\lambda = \sum_{i=1}^{1+0} \lambda_1 V_1 = \sum_{i=1}^{1+0} \lambda_1^* V_1^*$$

olur. Buradan ise $\beta = \alpha + \lambda_1 V_1$ ve $\beta = \alpha + \lambda_1^* V_1^*$ olur.

Teorem 4.1.2 (α, β),$(1,0)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun. Bu eğri çiftinin Frenet çatıları arasında

$$V_1^* = V_1, \quad V_2^* = V_2, \quad V_3^* = V_3$$

bağıntısı vardır.

İspat. (4.1.1) ifadesinin s'ye göre türevi alındığında,

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} &= \alpha^{'} + \lambda_1^{'}V_1 + \lambda_1 V_1^{'} \\
V_1^*.\frac{ds^*}{ds} &= V_1 + \lambda_1^{'}V_1 + \lambda_1(k_1V_2) \\
V_1^*.\frac{ds^*}{ds} &= (1+\lambda_1^{'})V_1 + \lambda_1 k_1 V_2
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

olur.$(1,0)$ tipli Bertrand eğri çiftinin tanımı gereğince $V_1^* \| V_1$ dir. Buradan (4.1.3) denkleminin her iki tarafı V_2 ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{ds^*}{ds}\langle V_1^*, V_2\rangle &= (1+\lambda_1^{'})\langle V_1, V_2\rangle + (\lambda_1 k_1)\langle V_2, V_2\rangle \\
0 &= \lambda_1 k_1 \\
0 &= \lambda_1, \quad k \neq 0
\end{aligned}$$

dır. Ve $Sp\{V_1\} = Sp\{V_1^*\}$ olur. (4.1.3) eşitliğinde $\lambda_1 = 0$ değeri yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
V_1^*.\frac{ds^*}{ds} &= (1+\lambda_1^{'})V_1 \\
V_1^* &= V_1
\end{aligned}$$

olur. $(\lambda = 0)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
V_1^*.\frac{ds^*}{ds} &= V_1 \Rightarrow \frac{ds^*}{ds} = 1 \\
V_1^* &= V_1
\end{aligned}$$

olur. V_1^*'ın s'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1^*}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} &= V_1^{'} = \kappa V_2 \\
(V_1^*)^{'}.\frac{ds^*}{ds} &= \kappa V_2 \\
V_2^* &= \frac{(V_1^*)^{'}}{|(V_1^*)^{'}|} = \frac{\kappa V_2.1}{\kappa} = V_2 \\
V_2^* &= V_2
\end{aligned}$$

dir. $V_3^* = V_1^* \wedge V_2^*, \quad V_3 = V_1 \wedge V_2$ teğet vektörlerin paralelliğinden, $V_3^* = V_3$ olur.
$\beta = \alpha$ ise o halde ,

$$V_1^* = V_1, \quad V_2^* = V_2, \quad V_3^* = V_3 \tag{4.1.4}$$

olur.Böylece Frenet çatıları arasındaki çatı denktir. $\lambda_1 = 0$ ve $\beta = \alpha$ olduğundan iki farklı eğri yerine tek bir eğri olduğu görülür.Dolayısıyla α ve β eğrisi aynı eğridir. Buradan da anlaşılır ki her eğri kendisi ile Bertrand eğri çifti oluşturur.

Teorem 4.1.3 (α, β), $(1, 0)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d\big(\alpha(s), \beta(s)\big) = 0$$

bağıntısına eşittir.

İspat.

$$\begin{aligned} d\big(\alpha(s), \beta(s)\big) &= \|\lambda_1(s).V_1(s)\| \\ &= |\lambda_1(s)|.\|V_1(s)\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sonuç 4.1.1 (α, β), $(1, 0)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun. Bu eğri çiftleri arasındaki uzaklık sıfırdır.

İspat. (4.1.1) denkleminde $\lambda_1 = 0$ değeri yerine yazıldığında $\beta = \alpha$ olur. Buradan da (α, β) eğri çiftinin eğilim çizgisi olduğu görülür.

Teorem 4.1.4 (α, β), $(1, 0)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun.Bu eğrilerin teğet vektörleri sırasıyla V_1 , V_1^* ve vektörler arasındaki açı θ olmak üzere θ açısı sabittir.

İspat.

$$\langle V_1^*, V_1 \rangle = \cos\theta \tag{4.1.5}$$

eşitliğinden $\cos\theta$'nın sabit olduğunu göstereceğiz. (4.1.5) ifadesinin türevi alındığında

$$\begin{aligned} (\cos\theta)' &= \langle V_1^{*\prime}, V_1 \rangle + \langle V_1^*, V_1{}' \rangle \\ &= \langle k_1^* V_2^*, V_1 \rangle + \langle V_1^*, k_1 V_2 \rangle \\ &= k_1^* \langle V_2^*, V_1 \rangle + k_1 \langle V_1^*, V_2 \rangle \\ &= k_1^* \langle V_2, V_1 \rangle + k_1 \langle V_1, V_2 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ise $(\cos\theta)' = 0$ dır.Dolayısıyla θ sabittir.

4.2 (1,1) Tipli Bertrand Eğri Çifti

Tanım 4.2.1 $\alpha, \beta \subset E^3$ eğrileri sırasıyla (I, α) , (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\forall s \in I$'ya karşılık gelen $\alpha(s) \in (\alpha)$ ve $\beta(s) \in (\beta)$ noktalarında (α) ve (β) eğrilerinin oskülatör düzlemleri paralel ise bu (α, β) eğri çiftine $(1,1)$ tipli Bertrand eğri çifti denir.

Teorem 4.2.1 $(1,1)$ tipli Bertrand eğri çifitinin genel denklemi

$$\beta = \alpha + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \tag{4.2.1}$$

bağıntısı ile verilir.

İspat. $r = 1$ ve $m = 1$ eşitlikleri (3.1.16) denkleminde yerine yazıldığında $\beta = \alpha + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$ denklemi elde edilir.

Teorem 4.2.2 (α, β), $(1,1)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun .Bu eğri çiftinin Frenet çatıları arasında

$$V_1^* = V_2, \quad V_2^* = V_1, \quad V_3^* = V_3$$

bağıntısı vardır.

İspat. (4.2.1) eşitliğinin s'ye göre türevi aldığında,

$$\frac{d\beta}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = \alpha' + \lambda_1' V_1 + \lambda_1 V_1' + \lambda_2' V_2 + \lambda_2 V_2'$$

$$\frac{d\beta}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = V_1 + \lambda_1' V_1 + \lambda_1(k_1 V_2) + \lambda_2' V_2 + \lambda_2(-k_1 V_1 + k_2 V_3)$$

$$\frac{d\beta}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda_1' - \lambda_2 k_1)V_1 + (\lambda_1 k_1 + \lambda_2')V_2 + \lambda_2 k_2 V_3$$

olur.$(1,1)$ tipli Bertrand eğri çiftinin tanımı gereğince $(V_1 \wedge V_2) \parallel V_3^*$ dır. Dolayısıyla

$$V_3^* = V_1 \wedge V_2, \quad V_3^* = V_2^* \wedge V_1^*, \quad V_3^* = V_1 \wedge V_2, \quad V_2^* = V_1, \quad V_1^* = V_2$$

olduğu görülür.

$$V_1^*.\frac{ds^*}{ds} = (1+\lambda_1' - \lambda_2 k_1)V_1 + (\lambda_1 k_1 + \lambda_2')V_2 + \lambda_2 k_2 V_3 \tag{4.2.2}$$

denkleminin her iki tarafı V_3^* ile iç çarpıldığında

$$\begin{aligned}
\frac{ds^*}{ds}\langle V_1^*, V_3^*\rangle &= (1+\lambda_1' - \lambda_2 k_1)\langle V_1, V_3^*\rangle + (\lambda_1 k_1 + \lambda_2')\langle V_2, V_3^*\rangle + \lambda_2 k_2 \langle V_3, V_3^*\rangle \\
0 &= \lambda_2 k_2 \\
0 &= \lambda_2 \Rightarrow k_2 \neq 0
\end{aligned}$$

$$\frac{ds^*}{ds}\langle V_1^*, V_1\rangle = (1+\lambda_1' - \lambda_2 k_1)\langle V_1, V_1^*\rangle + (\lambda_1 k_1 + \lambda_2')\langle V_2, V_1\rangle + \lambda_2 k_2 \langle V_3, V_1\rangle$$

$$1+\lambda_1' - \lambda_2 k_1 = 0 \tag{4.2.3}$$

$$\lambda_2 k_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

bulunur.Buradan λ_2 değeri (4.2.3) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$1+\lambda_1' = 0 \Rightarrow \lambda_1' = -1$$

eşitlikleri elde edilir. Bulunan sonuçlar (4.2.2) denkleminde yerine yazıldığında

$$V_1^*\frac{ds^*}{ds} = \lambda_1 k_1 V_2$$

.

$$\begin{aligned}
\frac{ds^*}{ds} &= \sqrt[2]{(\lambda_1 k_1)^2} \quad \Rightarrow \frac{ds^*}{ds} = \lambda_1 k_1 \\
V_1^* &= \frac{1}{\lambda_1 k_1}\lambda_1 k_1 V_2 \\
V_1^* &= V_2
\end{aligned}$$

olur. $V_3^* = V_3$ olduğunu biliyoruz, o halde $V_2^* = V_1$ dir. Dolayısıyla

$$V_1^* = V_2, \quad V_2^* = V_1, \quad V_3^* = V_3$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3 (α, β), $(1,1)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d\big(\alpha(s), \beta(s)\big) = |c - s|$$

bağıntısına eşittir.

İspat. (4.2.3) eşitliğinden $\lambda_2 = 0$ olduğunu biliyoruz. λ_2 değeri $\beta = \alpha + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$' de yerine yazıldığında $\beta = \alpha + \lambda_1 V_1$ olur.

$$\begin{aligned} d(\alpha(s), \beta(s)) &= \|\lambda_1(s) V_1(s)\| \\ &= |\lambda_1(s)|.\|V_1(s)\| \\ &= |c - s| \end{aligned}$$

olur. $\lambda_1^{'} = -1$ ise $\lambda_1 = c - s$ dir. Dolayısıyla $(1,1)$ tipli Bertrand eğri çiftleri arasındaki uzaklık sabit değildir. Ve $Sp\{V_1, V_2\} = Sp\{V_1^*, V_2^*\}$ dır. (4.2.1) denkleminde λ_2 değeri yerine yazıldığında $\beta = \alpha + \lambda_1 V_1$ olur. Bu durum ise $(1,1)$ tipli Bertrand eğri çiftinin $(1,0)$ tipli Bertrand eğri çiftine benzer olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.4 (α, β), $(1,1)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun.Bu eğrilerin teğet vektörleri sırasıyla V_1 , V_1^* ve vektörler arasıdaki açı θ olmak üzere

$$k_1^* + k_1 = (\cos\theta)^{'}$$

bağıntısı vardır.

İspat.

$$\langle V_1^*, V_1 \rangle = \cos\theta \quad \text{eşitliğinin türevi alındığında,}$$

$$\begin{aligned} \langle V_1^*, V_1 \rangle + \langle V_1^*, V_1^{'} \rangle &= (\cos\theta)^{'} \\ \langle k_1^* V_2^*, V_1 \rangle + \langle V_1^*, k_1 V_2 \rangle &= (\cos\theta)^{'} \\ k_1^* \langle V_2^*, V_1 \rangle + k_1 \langle V_1^*, V_2 \rangle &= (\cos\theta)^{'} \\ k_1^* \langle V_1, V_1 \rangle + k_1 \langle V_2, V_2 \rangle &= (\cos\theta)^{'} \\ k_1^* + k_1 &= (\cos\theta)^{'} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (1,1) tipli Bertrand eğri çiftlerinin teğet vektörleri arasındaki açı sabit değildir.

Teorem 4.2.5 (α, β), $(1, 1)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri k_1 ve k_2, β eğrisinin eğrilikleri k_1^* ve k_2^* ile gösterilsin. Bu eğrilikler arasında

$$k_1^* = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{(c-s)k_1}, \quad k_2^* = \frac{-(c-s)k_1k_2k_1^{'} + k_1^2(k_2 - (c-s)k_2^{'})}{[(c-s)^2k_1]^2(k_1^2+k_2^2)} \tag{4.2.4}$$

bağıntısı vardır .

İspat. (4.2.1) denkleminden yola çıkılarak daha önce yapılan işlemler sonucunda ,

$$V_1^* = V_2, \quad V_2^* = V_1, \quad V_3^* = V_3$$

olduğunu biliyoruz.(4.2.1) denkleminin s'ye göre türevi alındığında,

$$\frac{d\beta}{ds} = \alpha^{'} + \lambda_1^{'}V_1 + \lambda_1 V_1^{'} + \lambda_2^{'}V_2 + \lambda_2 V_2^{'}$$

$$\frac{d\beta}{ds} = V_1 + \lambda_1^{'}V_1 + \lambda_1 k_1 V_2 + \lambda_2^{'}V_2 + \lambda_2(-k_1V_1 + k_2V_3)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = (1 + \lambda_1^{'} - \lambda_2 k_1)V_1 + (\lambda_1 k_1 + \lambda_2^{'})V_2 + \lambda_2 k_2 V_3) \tag{4.2.5}$$

olur. $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1^{'} = -1$ idi . λ_2 ve $\lambda_1^{'}$ değerleri (4.2.5) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{d\beta}{ds} = \lambda_1 k_1 V_2$$

$$\lambda_1^{'} = -1 \quad \Rightarrow \lambda_1 = (c-s)$$

şeklinde bulunur.

$$\frac{d\beta}{ds} = (c-s)k_1V_2$$

$$\|\frac{d\beta}{ds}\| = (c-s)k_1$$

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{d\beta}{ds}\Big) = [(c-s)k_1]^{'}V_2 + (c-s)k_1V_2^{'}$$

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = [(c-s)k_1]^{'}V_2 + (c-s)k_1(-k_1V_1 + k_2V_3)$$

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = -(c-s)k_1^2V_1 + [(c-s)k_1]^{'}V_2 + (c-s)k_1k_2V_3$$

$$\begin{aligned} \beta^{'} &= (c-s)k_1V_2 \\ \beta^{''} &= -(c-s)k_1^2V_1 + [(c-s)k_1]^{'}V_2 + (c-s)k_1k_2V_3 \end{aligned}$$

$$(c-s)k_1 = a \quad \text{olsun.}$$

$$\begin{aligned} \beta^{'} &= aV_2 \\ \beta^{''} &= -ak_1V_1 + a^{'}V_2 + ak_2V_3 \end{aligned}$$

tür. $\beta^{'}$ ve $\beta^{''}$ değerlerinden,

$$\begin{aligned} \beta^{'} \wedge \beta^{''} &= \big(a^2k_2, 0, 0 - a^2k_1\big) \\ &= (a^2k_2, 0, a^2k_1) \\ &= \big(((c-s)k_1)^2k_2, 0, ((c-s)k_1)^2k_1\big) \\ &= ((c-s)^2k_1)^2k_2, 0, (c-s)^2k_1^3) \\ &= (c-s)^2k_1^2(k_2, 0, k_1) \\ \|\beta^{'} \wedge \beta^{''}\| &= (c-s)^2k_1^2\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ \|\beta^{'}\|^3 &= [(c-s)k_1]^3 = (c-s)^3k_1^3 \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Bulunan değerler

$$k_1^* = \frac{\|\beta^{'} \wedge \beta^{''}\|}{\|\beta^{'}\|^3}$$

eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$k_1^* = \frac{(c-s)^2 k_1^2 \sqrt{k_1^2+k_2^2}}{(c-s)^3 k_1^3}$$

$$k_1^* = \frac{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}{(c-s)k_1}$$

bağıntısına eşit olur.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\Big(\frac{d^2\beta}{ds^2}\Big) &= [-(c-s)k_1^2]^{'}V_1 - (c-s)k_1^2 V_1^{'} + [(c-s)k_1]^{''}V_2 \\
&\quad +[(c-s)k_1]^{'}V_2^{'} + [(c-s)k_1k_2]^{'}V_3 + (c-s)k_1k_2(-k_2V_2) \\
&= \Big[[(s-c)k_1^2]^{'} - [(c-s)k_1]^{'}k_1\Big]V_1 + \Big[[(c-s)k_1]^{''} - (c-s)k_1^3 \\
&\quad -(c-s)k_1k_2^2\Big]V_2 + \Big[[(c-s)k_1k_2]^{'} + [(c-s)k_1]^{'}k_2\Big]V_3 \\
a &= (c-s)k_1 \\
a^{'} &= -k_1 + k_1^{'}(c-s) \\
ak_1 &= (c-s)k_1^2 \\
(-ak_1)^{'} &= [(s-c)k_1^2]^{'} = [k_1^2 + (s-c)(k_1^2)^{'}] \\
\beta^{'''} &= [(-ak_1)^{'} - a^{'}k_1]V_1 + [a^{''} - ak_1)^2 - ak_2)^2]V_2 + [(ak_2)^{'} + a^{'}k_2]V_3
\end{aligned}$$

bulunur. $(\beta^{'}, \beta^{''} \text{ve} \beta^{'''})$nın determinantı alınırsa,

$$\begin{aligned}
\det(\beta^{'}, \beta^{''}, \beta^{'''}) &= a^2k_1[(ak_2)^{'} + a^{'}k_2] + a^2k_2[(-ak_1)^{'} - a^{'}k_1] \\
&= a^2[(ak_2)^{'}k_1 + a^{'}k_1k_2 + (-ak_1)^{'}k_2 - a^{'}k_1k_2] \\
&= a^2[(-ak_1)^{'}k_2 + (ak_2)^{'}k_1]
\end{aligned}$$

olur. Bulunan değerler

$$k_2^* = \frac{\det(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta_1 \wedge \beta_2\|^2}$$

eşitliğinde yerine yazıldığında

$$k_2^* = \frac{a^2[(-ak_1)'k_2 + (ak_2)'k_1]}{a^2(k_1^2 + k_2^2)}$$

$$k_2^* = \frac{(-ak_1)'k_2 + (ak_2)'k_1}{a^2(k_1^2 + k_2^2)}$$

bağıntısına eşit olur.

$$\begin{aligned}
(ak_2)' &= a'k_2 + ak_2' \\
&= [(c-s)k_1]'k_2 + (c-s)k_1k_2' \\
&= [-k_1 + (c-s)k_1']k_2 + (c-s)k_1k_2' \\
&= -k_1k_2 + (c-s)k_1'k_2 + (c-s)k_1k_2' \\
&= (c-s)[k_1'k_2 + k_1k_2'] - k_1k_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-ak_1)' &= (-a)'k_1 + [(-a)k_1'] \\
&= [(s-c)k_1]'k_1 + [(s-c)k_1k_1'] \\
&= [k_1 + [(s-c)k_1']k_1 + (s-c)k_1k_1' \\
&= k_1^2 + (s-c)k_1k_1' + (s-c)k_1k_1' \\
&= 2[(s-c)k_1k_1'] + k_1^2.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(-ak_1)^{'}k_2 &= \Big[2[(s-c)k_1k_1^{'}]+k_1^2\Big]k_2 \\
&= 2k_2[(s-c)k_1k_1^{'}]+2k_1^2k_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ak_2)^{'}k_1 &= \Big[(c-s)[k_1^{'}k_2+k_1k_2^{'}]-k_1k_2\Big]k_1 \\
&= (c-s)[k_1[k_1^{'}k_2+k_1k_2^{'}]-k_1^2k_2
\end{aligned}
$$

$$k_2^* = \frac{2k_2[(s-c)k_1k_1^{'}]+2k_1^2k_2+(c-s)k_1[k_1^{'}k_2+k_1k_2^{'}]-k_1^2k_2}{[(c-s)k_1]^2(k_1^2+k_2^2)}$$

$$k_2^* = \frac{-2(c-s)k_1k_2k_1^{'}+k_1^2k_2+(c-s)k_1k_2k_1^{'}+(c-s)k_1^2k_2^{'}}{(c-s)^2k_1^4+(c-s)^2k_1^2k_2^2}$$

$$k_2^* = \frac{-(c-s)k_1k_2k_1^{'}+k_1^2(k_2-(c-s)k_2^{'})}{[(c-s)^2k_1]^2(k_1^2+k_2^2)}$$

eşitliği elde edilir. Veya

$$k_2^* = \frac{(c-s)[-k_1k_2k_1^{'}-k_1^2k_2^{'}]}{(c-s)^2k_1^2(k_1^2+k_2^2)}+\frac{k_1^2k_2}{[(c-s)k_1]^2(k_1^2+k_2^2)}$$

$$k_2^* = \frac{-k_2k_1^{'}-k_1k_2^{'}}{(c-s)k_1(k_1^2+k_2^2)}+\frac{k_1^2k_2}{[(c-s)k_1]^2(k_1^2+k_2^2)}$$

$$k_2^* = \frac{-(k_1k_2)^{'}}{(c-s)k_1(k_1^2+k_2^2)}+\frac{k_1^2k_2}{[(c-s)k_1]^2(k_1^2+k_2^2)}$$

olur. Böylece (4.2.4) eşitlikleri elde edilir.

4.3 (2,0) Tipli Bertrand Eğri Çifti

Tanım 4.3.1 $(2,0)$ tipli Bertrand eğri çiftinde $r = 2$ ve $m = 0$ değerleri (3.1.16) denkleminde yerine yazıldığında $\beta = \alpha + \lambda_2 V_2$'yi elde edilir.

$$\beta = \alpha + \lambda,$$

(4.1.2) eşitliğinde $r = 2$ ve $m = 0$ alındığında

$$\lambda = \sum_{i=2}^{2+0} \lambda_2 V_2 = \sum_{i=2}^{2+0} \lambda_2^* V_2^*$$

olur. Buradan

$$\beta = \alpha + \lambda_2 V_2 \qquad ve \qquad \beta = \alpha + \lambda_2^* V_2^*$$

olur. Dolayısıyla $(2,0)$ tipli Bertrand eğri çiftinin literatürde en iyi bilinen 3- boyutlu Öklid uzayındaki Bertrand eğri çifti ile aynı olduğu görülür.

4.4 (2,1) Tipli Bertrand Eğri Çifti

Tanım 4.4.1 $\alpha, \beta \subset E^3$ eğrileri sırasıyla (I, α),(I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\forall s \in I$'ya karşılık gelen $\alpha(s) \in (\alpha)$ ve $\beta(s) \in (\beta)$ noktalarında (α) ve (β) eğrilerinin normal düzlemleri paralel ise bu (α, β) eğri çiftine $(2,1)$ tipli Bertrand eğri çifti denir.

Teorem 4.4.1 $(2,1)$ tipli Bertrand eğri çiftinin genel denklemi

$$\beta = \alpha + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 \text{ tür.} \tag{4.4.1}$$

İspat. $(2,1)$ tipli Bertrand eğri çiftinde $r = 2$ ve $m = 1$ eşitlikleri $\beta = \alpha + \lambda$'nın genel denkleminde yerine yazıldığında $\beta = \alpha + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$'ü elde edilir.

$$\beta = \alpha + \lambda,$$

(3.1.16) eşitliğinde $r = 2$ ve $m = 1$ yazıldığında,

$$\lambda = \sum_{i=2}^{2+1} \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = \sum_{i=2}^{2+1} \lambda_2^* V_2^* + \lambda_3^* V_3^*$$

olur.

$$\beta = \alpha + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 \quad \text{ve} \quad \beta = \alpha + \lambda_2^* V_2^* + \lambda_3^* V_3^*$$

elde edilir.

Teorem 4.4.2 (α, β),$(2, 1)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun .Bu eğri çiftinin Frenet çatıları arasında

$$V_1^* = V_1, \quad V_2^* = V_2, \quad V_3^* = V_3$$

bağıntısı vardır.

İspat. (4.4.1) denkleminin s' ye göre türevi alındığında;

$$\frac{d\beta}{ds^*} . \frac{ds^*}{ds} = \alpha' + \lambda_2' V_2 + \lambda_2 V_2' + \lambda_3' V_3 + \lambda_3 V_3'$$

$$\frac{d\beta}{ds^*} . \frac{ds^*}{ds} = V_1 + \lambda_2' V_2 + \lambda_2(-k_1 V_1 + k_2 V_3) + \lambda_3' V_3 + \lambda_3(-k_2 V_2)$$

$$V_1^* . \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda_2 k_1) V_1 + (\lambda_2' - \lambda_3 k_2) V_2 + (\lambda_2 k_2 + \lambda_3') V_3 \tag{4.4.2}$$

olur. Tanım (4.4.1)'den $V_1^* \| V_2 \wedge V_3$ ve $V_1^* = V_2 \wedge V_3$ idi. (4.4.2) eşitliğinde V_1^* yerine yazıldığında,

$$V_1 \wedge [(V_2 \wedge V_3) . \frac{ds^*}{ds}] = V_1 \wedge [(1 - \lambda_2 k_1) V_1 + (\lambda_2' - \lambda_3 k_2) V_2 + (\lambda_2 k_2 + \lambda_3') V_3]$$

$$V_1 \wedge (V_2 \wedge V_3) = \langle V_1, V_3 \rangle V_2 - \langle V_1, V_2 \rangle V_3$$

$$0 = (\lambda_2' - \lambda_3 k_2) V_3 - (\lambda_2 k_2 + \lambda_3' V_3) V_2$$

olur.

$$\lambda_2' - \lambda_3 k_2 = 0, \qquad \lambda_3' + \lambda_2 k_2 = 0 \qquad \text{ise,}$$

$$k_2 = \frac{\lambda_2^{'}}{\lambda_3} = -\frac{\lambda_3^{'}}{\lambda_2}$$

$$\lambda_2^{'} - \lambda_3 k_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2^{'} = \lambda_3 k_2$$

$$\lambda_2 k_2 + \lambda_3^{'} = 0 \Rightarrow \lambda_3^{'} = -\lambda_2 k_2$$

olur. (4.4.2) eşitliğinde $\lambda_2^{'}$ ve $\lambda_3^{'}$ değerleri yerine yazıldığında ,

$$\begin{aligned} V_1^*.\frac{ds^*}{ds} &= (1-\lambda_2 k_1)V_1 \\ \frac{ds^*}{ds} &= \sqrt{(1-\lambda_2 k_1)^2} \\ \frac{ds^*}{ds} &= 1-\lambda_2 k_1 \\ V_1^* &= \frac{1}{1-\lambda_2 k_1}(1-\lambda_2 k_1)V_1 \\ V_1^* &= V_1 \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} V_1^* &= V_2 \wedge V_3 \quad \text{olduğundan,} \\ V_2^* &= \frac{(V_1^*)^{'}}{\|V_1^*\|} = \frac{(V_2 \wedge V_3)^{'}}{\|V_2 \wedge V_3\|} = \frac{V_2^{'} \wedge V_3 + V_2 \wedge V_3^{'}}{\|V_2 \wedge V_3\|} \\ V_2^* &= (-k_1 V_1 + k_2 V_3) \wedge V_3 + V_2(-k_2 V_2) \\ V_2^* &= (-k_1)(V_1 \wedge V_3) + (k_2)(V_3 \wedge V_3) + (-k_2)(V_2 \wedge V_2) \end{aligned}$$

$$V_2^* = \frac{k_1 V_2}{k_1} = V_2$$

$$\begin{aligned}
V_2^* &= V_2. \\
V_3^* &= V_1^* \wedge V_2^* \\
V_3^* &= (V_2 \wedge V_3) \wedge V_2 \\
V_3^* &= \langle V_2, V_2 \rangle V_3 - \langle V_3, V_2 \rangle V_1 \\
V_3^* &= V_3
\end{aligned}$$

elde edilir. Ve buradan $Sp\{V_2, V_3\} = Sp\{V_2^*, V_3^*\}$ olduğu görülür.

Teorem 4.4.3 (α, β), $(2,1)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun. Bu eğrilerin teğet vektörleri sırasıyla V_1 , V_1^* ve vektörler arasıdaki açı θ olmak üzere aralarındaki açı sabittir .

İspat.

$$\langle V_1^*, V_1 \rangle = \cos\theta \qquad (4.4.3)$$

eşitliğinden $\cos\theta$ 'nın sabit olduğunu göstereceğiz. (4.4.3) eşitliğinin türevi alındığında

$$\begin{aligned}
\langle V_1^*, V_1 \rangle &= \cos\theta \\
\langle (V_1^*)', V_1 \rangle + \langle V_1^*, V_1' \rangle &= (\cos\theta)' \\
\langle k_1^* V_2^*, V_1 \rangle + \langle V_1^*, k_1 V_2 \rangle &= (\cos\theta)' \\
k_1^* \langle V_2^*, V_1 \rangle + k_1 \langle V_1^*, V_2 \rangle &= (\cos\theta)' \\
k_1^* \langle V_2, V_1 \rangle + k_1 \langle V_1, V_2 \rangle &= (\cos\theta)' \\
0 &= (\cos\theta)'
\end{aligned}$$

$\cos\theta$ sabit olur. O halde θ sabittir.

Teorem 4.4.4 (α, β), $(2,1)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri k_1 ve k_2, β eğrisinin eğrilikleri k_1^* ve k_2^* ile gösterilsin. Bu eğrilikler arasında

$$k_1^* = \frac{k_1}{1 - \lambda_2 k_1}, \quad k_2^* = \frac{k_2}{1 - \lambda_2 k_1} \qquad (4.4.4)$$

bağıntısı vardır .

İspat. (2,1) tipli Bertrand eğri çiftinin genel denklemi

$$\beta \ = \ \alpha + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 \quad \text{tür.} \tag{4.4.5}$$

Frenet çatıları arasındaki bağıntıdan ,

$$V_1^* = V_1 \ , \quad V_2^* = V_2 \ , \quad V_3^* = V_3 \, , \quad \text{ve}$$

$$\lambda_2^{'} = \lambda_3 k_2 \ , \quad \lambda_3^{'} = -\lambda_2 k_2 \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

(4.4.5) denkleminin s'ye göre türevi alındığında,

$$\frac{d\beta}{ds} \ = \ \alpha^{'} + \lambda_2^{'} V_2 + \lambda_2 V_2^{'} + \lambda_3 V_3^{'}$$

$$\frac{d\beta}{ds} \ = \ V_1 + \lambda_2^{'} V_2 + \lambda_2(-k_1 V_1 + k_2 V_3) + \lambda_3(-k_2 V_2)$$

$$\frac{d\beta}{ds} \ = \ (1 - \lambda_2 k_1) V_1 + (\lambda_2^{'} - \lambda_3 k_2) V_2 + (\lambda_3^{'} + \lambda_2 k_2) V_3$$

şeklinde bulunur.

$$\lambda_2^{'} = \lambda_3 k_2 \, , \quad \lambda_3^{'} = -\lambda_2 k_2$$

eşitlikleri

$$\frac{d\beta}{ds} = (1 - \lambda_2 k_1) V_1 + (\lambda_2^{'} - \lambda_3 k_2) V_2 + (\lambda_3^{'} + \lambda_2 k_2) V_3$$

denkleminde yerine yazıldığında

$$\beta^{'} \ = \ (1 - \lambda_2 k_1) V_1 + (\lambda_3 k_2 - \lambda_3 k_2) V_2 + (-\lambda_2 k_2 + \lambda_2 k_2) V_3$$

$$\beta^{'} \ = \ (1 - \lambda_2 k_1) V_1$$

olur.

$$1 - \lambda_2 k_1 = a \ \text{ olsun.}$$

$$\beta = a V_1$$

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{d\beta}{ds}\Big) = (1-\lambda_2 k_1)^{'}V_1 + (1-\lambda_2 k_1)V_1^{'}$$

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = (1-\lambda_2 k_1)^{'}V_1 + (1-\lambda_2 k_1)(k_1 V_2)$$

$$\beta^{''} = a^{'}V_1 + ak_1V_2$$

dir. Buradan

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{d^2\beta}{ds^2}\Big) = a^{''}V_1 + a^{'}V_1^{'} + (ak_1)^{'}V_2 + (ak_1)V_2^{'}$$

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{d^2\beta}{ds^2}\Big) = a^{''}V_1 + a^{'}(k_1V_2) + (ak_1)^{'}V_2 + (ak_1)(-k_1V_1 + k_2V_3)$$

$$\beta^{'''} = (a^{''} - ak_1^2)V_1 + (a^{'}k_1 + (ak_1)^{'})V_2 + (ak_1k_2)V_3$$

şeklinde bulunur. $(\beta^{'} \wedge \beta^{''})$ nın determinantı alındığında,

$$\begin{aligned}\beta^{'} \wedge \beta^{''} &= a^2k_1V_3\\ &= (1-\lambda_1k_1)^2k_1V_3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\beta^{'} \wedge \beta^{''}\| &= (1-\lambda_2k_1)^2k_1)\\ \|\beta^{'}\| &= (1-\lambda_2k_1)\end{aligned}$$

Bulunan değerler

$$k_1^* = \frac{\|\beta^{'} \wedge \beta^{''}\|}{\|\beta^{'}\|^3}$$

eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$k_1^* = \frac{(1-\lambda_2k_1)^2k_1}{(1-\lambda_2k_1)^3}$$

$$k_1^* = \frac{k_1}{1-\lambda_2k_1}$$

elde edilir. $(\beta^{'}, \beta^{''}, \beta^{'''})$ ifadesinin determinantı alındığında,

$$\det(\beta^{'}, \beta^{''}, \beta^{'''}) = a^3k_1^2k_2$$

olur. Bulunan değerler

$$k_2^* = \frac{\det(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2}$$

eşitliğinde yerine yazıldığında

$$k_2^* = \frac{a^3 k_1^2 k_2}{a^4 k_1^2}$$

$$k_2^* = \frac{k_2}{a}$$

$$k_2^* = \frac{k_2}{1 - \lambda_2 k_1}$$

olur. Böylece (4.4.4) eşitlikleri elde edilir.

4.5 (3,0) Tipli Bertrand Eğri Çifti

Tanım 4.5.1 $\alpha, \beta \subset E^3$ eğrileri sırasıyla (I, α) , (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\forall s \in I$'ya karşılık gelen $\alpha(s) \in (\alpha)$ ve $\beta(s) \in (\beta)$ noktalarında (α) ve (β) eğrilerinin rektifyen düzlemleri paralel ise bu (α, β) eğri çiftine $(3,0)$ tipli Bertrand eğri çifti denir.

Teorem 4.5.1 $(3,0)$ tipli Bertrand eğri çiftinin genel denklemi

$$\beta = \alpha + \lambda_3 V_3 \tag{4.5.1}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. $(3,0)$ tipli Bertrand eğri çiftinde $r = 3$ ve $m = 0$ eşitlikleri $\beta = \alpha + \lambda$'nın genel denkleminde yerine yazıldığında (4.5.1) ifadesi elde edilir. (4.1.2) eşitliğinde $r = 3$ ve $m = 0$ değerleri yerine yazıldığında

$$\lambda = \sum_{i=3}^{3+0} \lambda_3 V_3 = \sum_{i=3}^{3+0} \lambda_3^* V_3^*$$

dır. Buradan

$$\beta = \alpha + \lambda_3 V_3 \quad \text{ve} \quad \beta = \alpha + \lambda_3^* V_3^*$$

olur.

Teorem 4.5.2 (α,β), $(3,0)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun .Bu eğri çiftinin Frenet çatıları arasında

$$\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} & -\frac{\lambda_3 k_2}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} & 0 \\ \frac{\lambda_3 k_2}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır.

İspat.

(4.5.1) denkleminin s'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} &= \alpha\prime + \lambda_3^{'} V_3 + \lambda_3 V_3^{'} \\ \frac{d\beta}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} &= V_1 + \lambda_3^{'} V_3 + \lambda_3.(-k_2 V_2) \\ V_1^*.\frac{ds^*}{ds} &= V_1 - \lambda_3 k_2 V_2 + \lambda_3^{'} V_3 \\ \frac{ds^*}{ds}.\langle V_1^*, V_3^* \rangle &= \langle V_1, V_3^* \rangle - \lambda_3 k_2 \langle V_2, V_3^* \rangle + \lambda_3^{'} \langle V_3, V_3^* \rangle \end{aligned}$$

olur. Tanım (4.5.1) gereğince $V_3^* // V_3$ olduğundan $\lambda_3^{'} = 0$ olur. Dolayısıyla λ_3 sabittir. $\lambda_3^{'}$ değeri

$$V_1^*.\frac{ds^*}{ds} = V_1 - \lambda_3 k_2 V_2 + \lambda_3^{'} V_3$$

eşitliğinde yerine yazıldığında

$$V_1^*.\frac{ds^*}{ds} = V_1 - \lambda_3 k_2 V_2$$

olur.

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}$$

$$V_1^* = \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} V_1 - \frac{\lambda_3 k_2}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} V_2$$

dir. Tanım (4.5.1) 'den $V_3^* = V_3$ olduğunu biliyoruz.

$$V_3^* = V_2^* \wedge V_3^*, \qquad V_2^* = V_3^* \wedge V_1^*$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} \quad , \qquad b = -\frac{\lambda_3 k_2}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} \quad \text{olsun.}$$

O halde

$$V_2^* = V_3 \wedge (aV_1 + bV_2)$$

$$V_2^* = a(V_3 \wedge V_1) + b(V_3 \wedge V_2)$$

$$V_2^* = -b_1 V_1 + aV_2$$

$$V_2^* = \frac{\lambda_3 k_2}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} V_1 + \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} V_2$$

$$V_2^* = \frac{\lambda_3 k_2}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} V_1 + \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} V_2$$

olur. Buradan

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} \ ,$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda_3 k_2}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} \ ,$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\lambda_3 k_2}$$

$$\cot\theta . \lambda_3 k_2 = 1$$

olur. Çatılar arasındaki geçişin başka bir şekilde ifade edilişi ise,

$$\begin{aligned} V_1^* &= \cos\theta V_1 - \sin\theta V_2 \\ V_2^* &= \sin\theta V_1 + \cos\theta V_2 \\ V_3^* &= V_3 \end{aligned}$$

şeklindedir. Frenet çatıları arasındaki geçişin matris formunda ifade edilişi

$$\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 1\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} & -\frac{\lambda_3 k_2}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} & 0 \\ \frac{\lambda_3 k_2}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2}} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_3 k_2 & 0 \\ \lambda_3 k_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+(\lambda_3 k_2)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 4.5.3 (α, β), $(3, 0)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun.Bu eğrilerin teğet vektörleri sırasıyla V_1 , V_1^* ve vektörler arasıdaki açı θ olmak üzere

$$k_1 - k_1^* = \theta$$

bağıntısı vardır.

İspat. $\langle V_1^*, V_1\rangle = \cos\theta$ eşitliğinin türevi alındığında,

$$\begin{aligned}
\langle (V_1^*)', V_1\rangle + \langle V_1^*, V_1'\rangle &= (\cos\theta)' \\
\langle k_1^* V_2^*, V_1\rangle + \langle V_1^*, k_1 V_2\rangle &= (\cos\theta)' \\
k_1^*\langle V_2^*, V_1\rangle + k_1\langle V_1^*, V_2\rangle &= (\cos\theta)' \qquad (4.5.2)
\end{aligned}$$

olur.

$$V_1^* = \cos\theta V_1 - \sin\theta V_2\,, \qquad V_2^* = \sin\theta V_1 + \cos\theta V_2\,, \qquad V_3^* = V_3$$

eşitliklerindeki V_1^* ve V_2^* , (4.5.2) denkleminde yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}
k_1^*\langle(\sin\theta V_1 + \cos\theta V_2), V_1\rangle + k_1\langle(\cos\theta V_1 - \sin\theta V_2), V_2\rangle &= (\cos\theta)' \\
k_1^*(\sin\theta\langle V_1, V_1\rangle + \cos\theta\langle V_2, V_1\rangle) + k_1(\cos\theta)\langle V_1, V_2\rangle - \sin\theta\langle V_2, V_2\rangle &= (\cos\theta)' \\
k_1^*\sin\theta - k_1\sin\theta &= (\cos\theta)' \\
\sin\theta(k_1^* - k_1) &= -\theta\sin\theta \\
k_1^* - k_1 &= -\theta \\
k_1 - k_1^* &= \theta \ \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

Teorem 4.5.4 (α, β), $(3, 0)$ tipli Bertrand eğri çifti olsun. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat.

$$\begin{aligned}
d\big(\alpha(s), \beta(s)\big) &= \|\lambda_3(s).V_3(s)\| \\
&= |\lambda_3(s)|.\|V_3(s)\| \\
&= \mathit{sabit}
\end{aligned}$$

Teorem 4.5.5 (3,0) tipli Bertrand eğri çiftinin eğriliği

$$k_1^* = \frac{\sqrt{\big((\lambda_3 k_2)^2)k_2\big)^2 + (\lambda_3 k_2^2)^2 + \big(k_1 - (\lambda_3 k_2)' + (\lambda_3 k_2)^2 k_1^2\big)}}{1 + (\lambda_3 k_2)^2\sqrt{1 + (\lambda_3 k_2)^2}}$$

bağıntısı ile ifade edilir.

İspat. (3,0) tipli Bertrand eğri çiftinin genel denklemi

$$\beta = \alpha + \lambda_3 V_3$$

tür.

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{ds} &= \alpha^{'} + \lambda_3^{'} V_3 + \lambda_3 V_3^{'} \\ &= V_1 + \lambda_3^{'} V_3 - \lambda_3 k_2 V_2 \\ &= V_1 - \lambda_3 k_2 V_2 + \lambda_3^{'} V_3 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

$$\lambda_3^{'} = 0 \quad \text{olduğundan}$$

$$\beta^{'} = V_1 - \lambda_3 k_2 V_2 \quad \text{dir.}$$

$$\lambda_3 k_2 = a \quad \text{olsun.}$$

O halde

$$\beta^{'} = V_1 - aV_2 \quad \text{olur.}$$

$\beta^{'}$ nin s parametresine göre türevi alındığında,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big(\frac{d\beta}{ds}\Big) &= V_1^{'} - [a^{'} V_2 + aV_2^{'}] \\ &= k_1 V_2 - [a^{'} V_2 + a(-k_1 V_1 + k_2 V_3)] \\ &= k_1 V_2 - a^{'} V_2 + ak_1 V_1 - ak_2 V_3 \\ \beta^{''} &= ak_1 V_1 + (k_1 - a^{'} V_2 - ak_2 V_3) \end{aligned}$$

olur.

$$\beta^{'''} = (ak_1)^{'} V_1 + (ak_1)V_1^{'} + (k_1 - a^{'})^{'} V_2 + (k_1 - a^{'})V_2^{'} - [(ak_2)^{'} V_3 + (ak_2)V_3^{'}]$$

$$\beta^{'''} = (ak_1)^{'} V_1 + ak_1^2 V_2 + (k_1 - a^{'})^{'} V_2 - k_1^2 V_1 + a^{'} k_1 V_1 + k_1 k_2 V_3 - a^{'} k_2 V_3 - (ak_2^{'})V_3 + ak_2^2 V_2$$

$$\beta^{'''} = [(ak_1)^{'} - k_1^2 + a^{'} k_1]V_1 + [(k_1 - a^{'})^{'} + ak_1^2 + ak_2^2]V_2 + [k_1 k_2 - a^{'} k_2 - (ak_2)^{'}]V_3$$

olur. $(\beta^{'} \wedge \beta^{''})$'nün determinantı alındığında,

$$\beta^{'} \wedge \beta^{''} = (a^2 k_2, a k_2, k_1 - a^{'} + a^2 k_1)$$

olur.

$$\|\beta^{'} \wedge \beta^{''}\| = \sqrt{(a^2 k_2)^2 + (a k_2)^2 + (k_1 - a^{'} + a^2 k_1)^2}$$

$$\|\beta^{'}\| = \sqrt{1 + (-a)^2} = \sqrt{1 + a^2}$$

Bulunan ifadeler

$$k_1^* = \frac{\|\beta^{'} \wedge \beta^{''}\|}{\|\beta^{'}\|^3}$$

eşitliğinde yerine yazıldığında

$$k_1^* = \frac{\sqrt{(a^2 k_2)^2 + (a k_2)^2 + (k_1 - a^{'} + a^2 k_1)^2}}{1 + a^2 \sqrt{1 + a^2}}$$

eşitliği elde edilir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak, Genelleştirilmiş Bertrand eğri çiftinin tanımı verilerek $n = 3$ olması durumunda elde edilen beş farklı tipteki Bertrand eğri çiftleri tanımlandı. Aşağıda genel denklemleri verilen,

$$
\begin{aligned}
\beta &= \alpha + \lambda_1 V_1 \quad \text{(1,0)-tipli} \\
\beta &= \alpha + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \quad \text{(1,1)-tipli} \\
\beta &= \alpha + \lambda_2 V_2 \quad \text{(2,0)-tipli} \\
\beta &= \alpha + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 \quad \text{(2,1)-tipli} \\
\beta &= \alpha + \lambda_3 V_3 \quad \text{(3,0)-tipli}
\end{aligned}
$$

Bertrand eğri çiftlerinin her birisi için Frenet çatıları arasındaki bağıntı, aralarındaki uzaklık , Frenet vektörleri arasındaki açı ve her bir Bertrand eğri çiftinin eğrilik hesaplamaları verildi. Buradan $(2, 0)$-tipli Bertrand eğri çiftinin literatürde en iyi bilinen 3-boyutlu Öklid uzayındaki Bertrand eğri çifti ile aynı olduğu görüldü.

Benzer çalışma olarak bu elde ettiğimiz beş farklı tipteki Bertrand eğri çiftlerinin tekrar Bertrandı hesaplanarak yeni Bertrand eğri çiftleri elde edilebilir.Bu elde edilen Bertrand eğri çiftlerinin karakteristik özellikleri incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

Balgetir, H., Bektaş, M., & Ergüt, M. (2004). Bertrand curves for nonnull curves in three dimensional Lorentzian space. *Hadronic Journal*, 27, 229-236.

Balgetir, H., Bektaş, M., & Inoguchi, J. (2004). Null Bertrand curves and their characterizations. *Note di Matematica*, 23(1), 7-13.

Bertrand, J., (1850). La theories de courbes a double courbure. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees* , 15, 332-350.

Choi, J., Kang, T., & Kim, Y. (2012). Bertrand curves in 3- dimensional space forms. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 1040-1046.

Çelik, Ü. (2015). Bertrand Eğri Çiftine ait Frenet Çatısına göre Smarandache Eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ordu.

Ekmekçi, N., & İlarslan, K. (2001). On Bertrand curves and their characterization. *Diferensiyel Geometri Dyn. Syst.(electironic)*, 3(2).

Erdoğan, N. (1986) . Bertrand Eğri Çiftleri Üzerine Genelleştirmeler. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.

Görgülü, A., & Özdamar, E. (1986). A Generalization of the Bertrand Curves As General Inclined Curves in E^n. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics* , 35, 53-60 .

Güner, G. (2011). Küresel Eğriler ve Bertrand Eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Trabzon.

Izumiya, S., & Takeuchi, N. (2002). Generic properties of helices and Bertrand curves. *Journal of Geometry*, 74, 97-109.

İnalcık, A.(2010). 5-Boyutlu Uzaylarda Bertrand Eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Sakarya.

Lutfu, Ş. (2016). 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yönlü Bertrand Eğrisi. Yüksek Lisans Tezi, Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kilis.

Matsuda, H., & Yorozu S. (2003). Notes On Bertrand Curves. *The Yokohama mathematical journal*, 50(1), 41-58.

Masal, M., & Azak , A. Z. (2017). 3-Boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğriler ve Bishop çatısı.*Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 21(6),1140-1145.

O'Neill, B., (1983). Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. *Academic Press*, New York.

Özçınar, M. (2017). Bertrand Eğrilerinin Karakteristik Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Sakarya.

Öztekin, H., & Bektaş, M. (2010). Representation Formulae for Bertrand Curves in the Minkowski 3-space. *Scientia Magna*, 6, 89-96.

Sabuncuoğlu, A. (2006). Diferensiyel Geometri. Nobel Yayınları, 258, Ankara, 440 pp.

Tanrıöver, N. (1986). Bertrand Curves in n-dimensional Euclidean Space. *Journal of Karadeniz University*, Faculty of Arts and Sciences, series of Mathematics-Physics, IX, Trabzon.

Tanrıöver, N., & Sabuncuoğlu , A. (1989). On Bertrand Curves in n-dimensional Euclidean Space. *Matematik- İstatistik Dergisi*, Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara, 2.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Eminenur KARTAL
Doğum Yeri	:	SAMSUN
Doğum Tarihi	:	14.01.1992
Medeni Hali	:	Evli
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü enur.krtl.27@gmail.com
Lise	:	Samsun Yeşilkent Anadolu Lisesi 2010
Lisans	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü-2015