T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Fatma POLAT

TAM OLMAYAN METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUŞ–2018

T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Fatma POLAT

TAM OLMAYAN METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICI TURAN

MUŞ–2018

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Muş Alparslan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "Tam Olmayan Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri" adlı tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

■ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

□ Tezim sadece Muş Alparslan Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.

□ Tezimin ...... yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir.

.../.../2018

Fatma POLAT

TEZ KABUL TUTANAĞI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Dr. Öğretim Üyesi Gülcan ATICİ TURAN ve Dr. Öğretim Üyesi Hüseyin IŞIK danışmanlığında, Fatma POLAT tarafından hazırlanan "**Tam Olmayan Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri**" konulu bu çalışma 04/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Harun POLAT
Muş Alparslan Üniversitesi Öğretim Üyesi
İmza:

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICİ TURAN
Muş Alparslan Üniversitesi Öğretim Üyesi
İmza:

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Ziyattin TAŞ
Bingöl Üniversitesi Öğretim Üyesi
İmza:

Yukarıdaki imzalar adı geçen öğretim üyelerine aittir.

/2018

Prof. Dr. Murad Aydın ŞANDA
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın hazırlanmasında emeği bulunan başta babam Prof. Dr. Harun POLAT ve ailem olmak üzere Yüksek Lisans danışmanlarım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICİ TURAN' a ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin IŞIK' a şükranlarımı sunarım.

Fatma POLAT

Temmuz, 2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TAM OLMAYAN METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Fatma POLAT

1. Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Gülcan ATICİ TURAN

2. Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Hüseyin IŞIK

2018, 62 sayfa

Bu tez çalışmasında, tam olmayan metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmı olup, bu çalışma ile ilgili ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde materyal ve yöntem başlığı altında konuya ilişkin temel kavramlar verilmiştir. Daha sonra sabit nokta kavramı ve Banach büzülme prensibi, α-tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ve α-tam metrik uzaylarda genelleştirilmiş w_α-küme değerli büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Üçüncü bölüm olan araştırma ve bulgular kısmında ise w-uzaklık yöntemi ile $\mathcal{R}$-bağıntılı kümeler üzerinde sabit nokta sonuçları incelenmiştir. Daha sonra w-α-uzaklık ve genelleştirilmiş w-α-rasyonel büzülme dönüşümü tanımı ve ilgili teorem ve örnek verilmiştir. Ayrıca w-α-rasyonel büzülme dönüşümü tanımı yapılmış ve bu tanım kullanılarak sabit nokta ile ilgili teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Son bölüm olan tartışma ve sonuç bölümünde, burada elde edilen sonuçlar yorumlanmış ve literatürdeki bazı sabit nokta teoremlerinin var olduğu vurgulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: İkili bağıntı, Sabit nokta, α-geçişli dönüşümü, α-tam metrik uzay, w-uzaklık.

ABSTRACT

Master's Thesis

SOME FIXED POINT THEOREMS IN NON-COMPLETE METRIC SPACES

Fatma POLAT

1. Supervisor: Dr. Lecturer Gülcan ATICI TURAN

2. Supervisor: Dr. Lecturer Hüseyin IŞIK

2018, Page: 62

In this thesis, some fixed point theorems in non-complete metric spaces are investigated. This study consists of three chapters. The first chapter is the introduction part and the preliminary informations about this work is given. In the second chapter, under the title of material and method, basic concepts related to the subject are given. Then fixed point concept and Banach contraction principle, fixed point theorems in α-complete metric spaces and fixed point theorems for generalized w_α-set-valued contraction mappings in α-complete metric spaces are investigated. In the third chapter, research and findings, fixed point results on $\mathcal{R}$-relation sets by w-distance method are examined. Then the definitions of w-α-distance and the generalized w-α-rational contraction mapping, related theorem and example are given. Also, w-α-rational contraction mapping is defined and by using this definition, the theorem related fixed point is expressed and proved.

The part of discussion and conclusion that is final chapter, the results obtained here in interpreted and it is emphasized that some fixed point theorems exist in the literature.

Keywords: Binary relation, Fixed point, α-admissible mappings, α-complete metric space, w-distance.

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	Negatif olmayan reel sayıların kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	:	Sıfır sayısını içeren doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\Vert . \Vert$	:	Norm
$(X, \Vert . \Vert)$	:	Normlu uzay
(X, d)	:	Metrik uzay
$F(T)$	:	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
T^n	:	T altındaki n. iterasyonu
$Cl(X)$	:	X in boş olmayan kapalı altkümeleri
$CB(X)$	:	X in boş olmayan kapalı sınırlı altkümeleri
$\lceil . \rceil$	:	Tavan(ceil) fonksiyonu
$P(X)$	:	X in kuvvet kümesi
$\times$	:	Kartezyen çarpım

1. GİRİŞ

Sabit Nokta Teorisi matematiğin birçok alt dalında (fonksiyonel analiz, genel topoloji, diferansiyel denklemler, yaklaşım teorisi ve benzeri) geniş uygulama alanlarına sahip olduğundan halen bu konu üzerinde yoğun olarak çalışılmaktadır. Bunların dışında biyoloji, kimya, fizik, istatistik ve ekonomi gibi alanlarda da uygulamaları görülmektedir (Jungck, 1986; Gündoğdu, 2005 ve Işık, 2016).

X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ özelliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T nin bir sabit noktası denir. Yani, T dönüşümü altında değişmeyen bir nokta T nin sabit noktasıdır. Geometrik olarak reel değişkenli ve reel değerli bir dönüşümün sabit noktası, dönüşümün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesiştiği noktadır. Sabit noktanın tanımından X kümesi veya T dönüşümü üzerinde hiçbir yapıya gerek olmadığı için, Sabit Nokta Teorisi çalışmaları bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var oluğunu araştırmaktadır. Dolayısıyla sabit nokta teorisi bir varlık teorisidir. Bu teoriler genellikle sabit noktanın ne olacağını belirtmemektedir. Ancak bazı sabit nokta teoremleri sabit noktanın varlığının yanı sıra tek olup olmadığını, tek ise nasıl bulanabileceğini de göstermektedir (Helvacı, 2014; Işık, 2016).

Banach (1922) tam metrik uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmalarını başlatmış ve büzülme dönüşümü prensibi olarak da bilinen teoremi ifade ve ispat etmiştir: "(X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun, yani her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ mevcut olsun. Bu durumda T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir."

Nadler (1969) yaptığı çalışmalarında "$A, B \in Cl(X)$ için $H: Cl(X) \times Cl(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dönüşümü, a dan $B \subseteq X$ e uzaklığı $d(a, B) = inf\{d(a, b): b \in B\}$ alındığında $H(A, B) = \max\{sup_{a\in A}\, d(a, B), sup_{b\in B}\, d(b, A)\}$" Hausdorff metriğini kullanarak, küme değerli büzülme kavramını verip, büzülme prensibinin küme değerli versiyonunu ispatlamıştır: "(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ sabiti varsa T ye küme değerli büzülme dönüşümü adı verilir".

İlk olarak Kada vd. (1996) w-uzaklık fonksiyonu kavramını tanımlamışlar: "(X,d) bir metrik uzay olsun. Her bir $x,y,z \in X$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\omega: X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonuna X üzerinde bir w-uzaklık denir.

(w1) $\omega(x,z) \leq \omega(x,y) + \omega(y,z)$;

(w2) $\omega(x,.): X \to [0,\infty)$ dönüşümü alttan yarı süreklidir.

(w3) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\omega(z,x) \leq \delta$ ve $\omega(z,y) \leq \delta$ iken $d(x,y) \leq \varepsilon$ sağlayan en az bir $\delta > 0$ vardır". Daha sonra bu tanımı sabit nokta teorisinde kullanarak önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Samet vd. (2012) yılında α-geçişli dönüşümü tanımlamışlar: "$T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x,y \in X$ için $\alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx,Ty) \geq 1$ oluyorsa T ye bir α-geçişli dönüşümü denir". Diğer taraftan tam metrik uzaylarda sabit nokta ile ilgili teoremleri ifade ve ispat etmişlerdir. Daha sonra Hussain vd. (2014) α-η-tam metrik uzay ve α-η-sürekli fonksiyon kavramlarını tanımlamışlar ve α-η-tam metrik uzayda rasyonel büzülme dönüşümleri için sabit nokta sonuçlarını elde etmişlerdir.

Nadlerden sonra geliştirilmeye başlanılan küme değerli dönüşümler ve w-uzaklık fonksiyonu ile birlikte çok sayıda teorem ispatlanmıştır. Kutbi ve Sintunavarat (2013) genelleştirilmiş w_α-küme değerli büzülme dönüşümünü tanımlamışlar ve α-tam metrik uzaylarda bu dönüşümü kullanarak sabit nokta teoremleri ispatlamışlar. Böylece daha kullanışlı sonuçlar elde etmişlerdir.

Son zamanlarda Senapati ve Dey (2017) w-uzaklık kavramını kullanarak keyfi bir ikili bağıntı ile verilen metrik uzaylarda Banach sabit nokta teoremini ispatlamışlar ve bazı şartları getirerek sabit noktanın tekliğini göstermişlerdir.

Bu çalışmada, w-α-uzaklık, küme değerli genelleştirilmiş w-α-rasyonel büzülme dönüşümü ve w-α-rasyonel büzülme dönüşümü kavramlarını tanımladık. Ayrıca bu kavramlar ile ilgili örnekler, teoremler ve bu teoremlerin ispatlarını verdik.

2. MATERYAL ve METOT

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanımlar verilecektir.

2.1.1. Tanım A ve B boş olmayan iki küme olsun A nın her bir elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına götüren bir f bağıntısına A dan B ye bir dönüşüm denir ve $f: A \to B$ ile gösterilir (Bayraktar, 1994).

2.1.2. Tanım $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ kümesine kapalı aralık,

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ kümesine açık aralık,

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$ kümesine soldan açık sağdan kapalı (yarı açık) aralık ve

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$ kümesine soldan kapalı sağdan açık (yarı açık) aralık denir. Sonsuz açık aralıklar $a \in \mathbb{R}$ için

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}: x < a\}$

Sonsuz kapalı aralıklar $a \in \mathbb{R}$ için

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$

dır (Sarıgöl ve Jafarov, 2007).

2.1.3. Tanım X boştan farklı bir küme ve $d: X \times X \to [0, +\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

Her $x, y, \in X$ için

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

Her $x, y, z \in X$ için

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$dir (Bayraktar, 1994).

Örneğin; Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlanan bir $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin mutlak değer (alışılmış, doğal) metriği denir (Bayraktar, 1994).

2.1.4. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsar denir. Kısaca $x_n \to x$ ile gösterilir (Bayraktar, 1994).

(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n \in \mathbb{N}$ ve her $m, n \geq N$ için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir (Soykan, 2012).

(iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için X deki her (x_n) Cauchy dizisi X de yakınsak ise yani $x_n \to x$ ve $x \in X$ ise (X, d) ye tam metrik uzay veya kısaca tam denir (Bayraktar, 1994).

2.1.5. Tanım (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $d(x, x_0) < \delta$ şartını sağlayan $\rho\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f ye x_0 noktasında sürekli denir. Eğer f her $x_0 \in X$ için sürekli ise, X de süreklidir denir (Musayev ve Alp, 2000).

2.1.6. Tanım $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{x \to x_0} inf\, f(x) \geq f(x_0)$ ise f fonksiyonuna x_0 noktasında alttan yarı süreklidir denir (Suzuki and Takahashi, 1996).

2.1.7. Tanım L boş olmayan bir cümle ve F, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F üzerinde lineer uzay (veya vektör uzay) denir.

A. L, $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir. (kapalılık özelliği)

G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir. (birleşme özelliği)

G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in L$ vardır. (özdeş eleman özelliği)

G4. Her bir $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in \theta$ vardır. (ters elemanın varlığı)

G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir. (değişme özelliği)

B. $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1. $\alpha . x \in L$ dir. (skalerle çarpmaya göre kapalılık)

L2. $\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$ dir.

L3. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.

L4. $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$, $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.

L5. $1.x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır.) (Bayraktar, 1994).

2.1.8. Tanım N bir lineer uzay olsun. $\|.\|: N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değeri $\|x\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\|.\|$ ye N de bir norm denir. Her $x, y \in N$ için

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Bayraktar, 1994).

2.1.9. Tanım (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

(i) $x_n < x_{n+1}$ ve $x_n > x_{n+1}$ ise (x_n) dizisine sırasıyla monoton artan ve monoton azalan dizi,

(ii) $x_n \leq x_{n+1}$ ve $x_n \geq x_{n+1}$ ise (x_n) dizisine sırasıyla azalmayan ve artmayan dizi adı verilir (Sarıgöl ve Jafarov, 2007).

2.2. Sabit Nokta Kavramı ve Banach Büzülme Prensibi

2.2.1. Tanım X boştan farklı bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer bir $x \in X$ için $Tx = x$ ise, x noktasına T nin bir sabit noktası denir $(T(x) = x)$ (Agarwal, 2007).

2.2.2. Örnek

(i) X boştan farklı bir küme olmak üzere $I: X \to X$ özdeş dönüşümü için X in her bir noktası bir sabit noktadır.

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun sabit noktaları $x = 1$ ve $x = 0$ dır.

(iii) $X = \mathbb{R}$ ise $T: X \to X$, $Tx = x^3 - x^2 - x$ dönüşümünün $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ sabit noktaları vardır.

(iv) $T: (0,1] \to (0,1]$, $Tx = sinx$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Bu dönüşüm için $x = 0$ tek sabit nokta olabilirdi.

(v) $X = \mathbb{R}$ ve $Y = \mathbb{R}^n$, $n > 1$ olmak üzere herhangi bir $T: X \to Y$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

(vi) $X = (-4,3]$ olmak üzere $T: X \to X$, $x = \frac{3}{4}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ dönüşümünün sabit noktaları -3 ve 3 tür.

(vii) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\alpha, \mu) = (\alpha, -\mu)$ biçiminde tanımlanan fonksiyon için $\{(\alpha, 0): \alpha \in \mathbb{R}\}$ kümesinin her bir elemanı T için sabit noktadır.

2.2.3. Tanım X boştan farklı bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. $x \in X$ için x in T altındaki n. iterasyonu $T^n x$ ile gösterilir ve $T^{n+1}x = T(T^n x)$ olarak tanımlanır (Picard, 1890; Karahan, 2015).

2.2.4. Tanım X boştan farklı bir küme ve $T_1, T_2: X \to X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer $T_1 x = T_2 x = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T_1 ve T_2 nin ortak sabit noktasıdır denir (Jungck, 1986).

2.2.5. Örnek $X = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T_1, T_2: X \to X, T_1 x = x - cosx \quad \text{ve} \quad T_2 x = x - cotx$$

dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ dir.

2.2.6. Örnek $X = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T_1, T_2: X \to X, T_1 x = x^2 + 2x - 2 \quad \text{ve} \quad T_2 x = x^2 - 2x + 2$$

dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\{1\}$ dir.

2.2.7. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

a. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \qquad (1)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabit sayısı varsa T ye Lipschitz dönüşüm denir. (1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir.

b. Eğer (1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa T ye büzülme veya daraltma dönüşümü denir.

c. Her $x, y \in X$ için $k = 1$ olması halinde

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise T ye genişlemeyen dönüşüm denir.

d. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise T ye büzülebilir dönüşüm denir (Agarwal, 2009; Karahan, 2015).

Her Lipschitz dönüşümü süreklidir. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için

$$d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k}$$

iken

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) < k\delta = \varepsilon$$

olup T Lipschitz dönüşümü süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, büzülme veya genişlemeyen dönüşüm olamaz.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün süreklidir fakat tersi doğru değildir. Lipschitz dönüşümü düzgün sürekli olduğundan yukarıdaki dönüşüm sınıfları da düzgün süreklidir (Türkan, 2014).

2.2.8. Örnek $X = \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ olmak üzere $T: X \to X$,

$$Tx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{2} sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

dönüşümü sürekli fakat Lipschitz bir dönüşüm değildir.

2.2.9. Teorem (Banach Büzülme Dönüşümü Prensibi) (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Banach, 1922; Karahan, 2015).

İspat. T büzülme dönüşümü olduğundan her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \qquad 0 \leq k \leq 1$$

olacak şekilde bir k reel sayısı vardır. x_0, X de keyfi bir nokta ve

$$x_1 = Tx_0, \ x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ \ldots, \ x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq kd(x_n, x_{n-1}) \\ &= kd(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq k^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

dir. Eğer $m \geq n$ ise

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq k^n d(x_0, x_1) + k^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + k^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq k^n (1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^n \frac{1-k^{m-n}}{1-k} d(x_0, x_1) \\ &< \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \to 0 \quad (k \in [0,1)) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan (x_n) dizisi X de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olacak şekilde X de bir x noktası vardır. T sürekli olduğundan $n \to \infty$ iken

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = Tx$$

olur ve bu yüzden x, T nin bir sabit noktasıdır. Ayrıca x noktası tektir. Gerçekten eğer y başka bir sabit nokta ise

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

yazılabilir. $k < 1$ olduğundan $d(x,y) = 0$ yani $y = x$ dir.

Not. Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan büzülme dönüşümlerinin sabit noktalarının mevcut olması gerekmez. Bunun için ya uzay üzerine ya da dönüşüm üzerine bazı ek koşullar konulması gereklidir. Örneğin;

$X = (0,1]$ olmak üzere $T: X \to X$ ve $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümünü alalım. Bu T dönüşümü büzülme dönüşümüdür, fakat sabit noktası yoktur.

2.3. α- Tam Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

2.3.1. Tanım $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1$$

oluyorsa T ye bir α-geçişli dönüşümü denir (Samet vd., 2012).

2.3.2. Tanım $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha, \eta: X \times X \to [0, \infty)$ iki fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y) \geq \eta(x, y) \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq \eta(Tx, Ty)$$

oluyorsa T, η ye göre bir α-geçişli dönüşümdür denir (Salimi vd., 2013).

Yukarıdaki tanımda $\eta(x, y) = 1$ alınırsa 2.3.1. Tanımı elde edilir. Ayrıca $\alpha(x, y) = 1$ alınırsa T ye bir η-altgeçişli dönüşüm denir.

2.3.3. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $\alpha, \eta: X \times X \to [0, \infty)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$ şartını sağlıyan her (x_n) Cauchy dizisi X de yakınsak ise X metrik uzayına α- η-tam denir. Her $x, y \in X$ için $\eta(x, y) = 1$ ise X e bir α-tam metrik uzay ve her $x, y \in X$ için $\alpha(x, y) = 1$ ise (X, d) ye bir η-tam metrik uzay denir (Hussain vd., 2014).

2.3.4. Örnek $X = (0, \infty)$ olsun ve $d(x, y) = |x - y|$ metriği X üzerinde tanımlansın. A, X in kapalı bir alt kümesi olsun. $\alpha, \eta: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümleri

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2, & x, y \in A, \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ve

$$\eta(x, y) = 2xy,$$

şeklinde tanımlansın. Açıkcası, (X, d) bir tam metrik uzay değildir, fakat (X, d) bir α- η-tam metrik uzayıdır. Gerçekten, her $n \in \mathbb{N}$ için (x_n), $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$ olacak şekilde X de bir Cauchy dizisi ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A$ dır. Şimdi (A, d) bir tam metrik uzay olduğundan $n \to \infty$ iken $x_n \to z$ olacak şekilde $z \in A$ vardır (Hussain vd., 2014).

2.3.5. Tanım (X, d) bir metrik uzay olsun. $\alpha, \eta: X \times X \to [0, \infty)$ ve $T: X \to X$ olsun. $x \in X$ ve $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ olduğunda her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq$

$\eta(x_n, x_{n+1})$ şartını sağlayan (x_n) dizisi için $Tx_n \to Tx$ var ise T ye (X, d) üzerinde α- η-sürekli dönüşümü denir (Hussain vd., 2014).

2.3.6. Örnek $X = [0, \infty)$ ve $d(x, y) = |x - y|$, X üzerinde bir metrik olsun. $T: X \to X$ ve $\alpha, \eta: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümleri

$$Tx = \begin{cases} x^5, & x \in [0,1], \\ \sin\pi x + 2, & (1, \infty), \end{cases}$$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1, & x, y \in [0,1], \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ve

$$\eta(x, y) = x^2,$$

şeklinde tanımlansın.

Açıkcası T sürekli değildir. Fakat T, (X, d) üzerinde α- η-süreklidir. Gerçekten, $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ ve $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$ ise o halde $x_n \in [0,1]$ dir ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_n^5 = x^5 = Tx$$

dir (Hussain vd., 2014).

2.3.7. Tanım $\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa (c)-kıyaslama fonksiyonudur denir.

(i) ψ fonksiyonu azalmayan;

(ii) $a \in (0,1)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ ve herhangi bir $t \in \mathbb{R}^+$ ve $k \geq k_0$ için $\psi^{k+1}(t) \leq a\psi^k(t) + v_k$ olacak şekilde terimleri negatif olmayan yakınsak bir $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ serisi vardır (Bianchini and Grandolfi, 1968).

Tüm (c)-kıyaslama fonksiyonlarının kümesini Ψ ile göstereceğiz.

2.3.8. Lemma $\psi \in \Psi$ ise bu taktirde aşağıdaki şartlar sağlanır:

(i) Her $t \in \mathbb{R}^+$için $n \to \infty$ iken $\left(\psi^n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sıfıra yakınsar;

(ii) Her $t \in (0, \infty)$ için $\psi(t) < t$;

(iii) ψ sıfırda süreklidir;

(iv) Her $t \in \mathbb{R}^+$için $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k(t)$serisi yakınsaktır (Berinde, 2007).

2.3.9. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

$$M(x, y) = max\left\{d(x, y), \frac{d(x,Tx)}{1+d(x,Tx)}, \frac{d(y,Ty)}{1+d(y,Ty)}, \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$$

olsun. O halde

(a) $\psi \in \Psi$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\eta(x, Tx) \leq \alpha(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$$

ise T ye bir α-η-ψ-rasyonel büzülme dönüşümü denir.

(b) $\psi \in \Psi$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$$

ise T ye bir α- ψ-rasyonel büzülme dönüşümü denir (Hussain vd., 2014).

2.3.10. Teorem (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca $\alpha, \eta: X \times X \to [0, \infty)$ iki fonksiyon ve $\psi \in \Psi$ olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) (X, d) bir α-η-tam metrik uzay;

(ii) T, η ye göre bir α-geçişli dönüşüm;

(iii) T, X üzerinde α-η-ψ-rasyonel büzülme dönüşümü;

(iv) T, X üzerinde bir α-η-sürekli dönüşüm;

(v) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq \eta(x_0, Tx_0)$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır.

O halde T nin bir sabit noktası vardır (Hussain vd., 2014).

İspat. (v) den dolayı $\alpha(x_0, Tx_0) \geq \eta(x_0, Tx_0)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0 = Tx_{n-1}$ ile X de bir (x_n) dizisi tanımlansın. Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = x_n$ ise o halde $x = x_n$, T için bir sabit nokta olur. Bundan dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \neq x_n$ olduğunu kabul edilsin. T, η ye göre bir α-geçişli dönüşüm ve $\alpha(x_0, Tx_0) \geq \eta(x_0, Tx_0)$ olduğundan

$$\alpha(x_1, x_2) = \alpha(Tx_0, T^2x_0) \geq \eta(Tx_0, T^2x_0) = \eta(x_1, x_2)$$

dir. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1}) = \eta(x_n, Tx_n) \tag{2}$$

elde edilir. (iii) den dolayı

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \psi\big(M(x_{n-1}, x_n)\big) \tag{3}$$

yazılabilir ki burada

$$M(x_{n-1}, x_n) = max\left\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{d(x_{n-1}, Tx_{n-1})}{1+d(x_{n-1}, Tx_{n-1})}, \frac{d(x_n, Tx_n)}{1+d(x_n, Tx_n)}, \frac{d(x_{n-1}, Tx_n)+d(x_n, Tx_{n-1})}{2}\right\}$$

$$= max\left\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{d(x_{n-1}, x_n)}{1+d(x_{n-1}, x_n)}, \frac{d(x_n, x_{n+1})}{1+d(x_n, x_{n+1})}, \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1})}{2}\right\}$$

$$\leq max\left\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1}, x_n)+d(x_n, x_{n+1})}{2}\right\}$$

$$= max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}$$

dır. Şimdi ψ azalmayan olduğundan (3) den

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\})$$

elde edilir. Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} = d(x_n, x_{n+1})$ ise o halde

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\})$$

$$= \psi\big(d(x_n, x_{n+1})\big) < d(x_n, x_{n+1})$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bundan dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)$ dir. Tümevarımdan $d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n\big(d(x_0, x_1)\big)$ elde edilir.

$\varepsilon > 0$ alındığında $\sum_{n\geq N} \psi^n\big(d(x_0, x_1)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. $m > n \geq N$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde üçgen eşitsizliği ile

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{n\geq N} \psi^n\big(d(x_0, x_1)\big) < \varepsilon$$

elde edilir. Sonuç olarak $\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$. Bundan dolayı (x_n) bir Cauchy dizisidir. Diğer taraftan (2) den her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$ dır. X bir α-η-tam metrik uzay olduğundan $n \to \infty$ iken $x_n \to z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Ayrıca T bir α-η-sürekli dönüşümü olduğundan $n \to \infty$ iken $x_{n+1} = Tx_n \to Tz$ dir. Limitin tekliğinden dolayı $z = Tz$ elde edilir.

2.3.11. Örnek $X = (-\infty, -2) \cup [-1,1] \cup (2, +\infty)$ olsun.

$$d(x,y) = \begin{cases} max\{|x|, |y|\}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

metriği X üzerinde tanımlı olsun. $T: X \to X$, $\alpha, \eta: X \times X \to [0,\infty)$ ve $\psi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ dönüşümleri

$$Tx = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 1}\,, & x \in (-\infty, -3], \\ x^3 - 1\,, & x \in (-3, -2), \\ \frac{1}{4}x^2, & x \in [-1,0], \\ \frac{1}{4}x\,, & x \in (0,1], \\ 5 + \sin \pi x\,, & x \in (2,4), \\ 3x^3 + \ln x + 1\,, & x \in [4, \infty), \end{cases}$$

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1, & x, y \in [-1,1], \\ \quad x^2, & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

$$\eta(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2}t$$

şeklinde tanımlansın.

Açıkcası (X, d) bir tam metrik uzay değildir. Fakat bir α- η-tam metrik uzayıdır. Gerçekten her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$ olacak şekilde (x_n) bir Cauchy dizisi ise o halde her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) \subseteq [-1,1]$ dir. $([-1,1], d)$ tam metrik uzay olduğundan (x_n) dizisi $[-1,1] \subseteq X$ de yakınsaktır. $\alpha(x,y) \geq \eta(x,y)$ olsun; o halde $x, y \in [-1,1]$ dir. Diğer taraftan her $w \in [-1,1]$ için $Tw \in [-1,1]$. O halde $\alpha(Tx, Ty) \geq \eta(Tx, Ty)$ olur. Yani T, η ye göre bir α-geçişli dönüşümdür. $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizisi $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$ eşitsizliğini sağlasın. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) \subseteq [-1,1]$ ve bu yüzden $(Tx_n) \subseteq [-1,1]$ dır. T, $[-1,1]$ üzerinde sürekli olduğundan, $n \to \infty$ iken $Tx_n \to Tx$ dir. Yani T bir α- η-sürekli dönüşümdür. Açıkcası $\alpha(0, T0) \geq \eta(0, T0)$ dır.

$\alpha(x,y) \geq \eta(x, Tx)$ olsun. Şimdi eğer $x \notin [-1,1]$ ya da $y \notin [-1,1]$ ise bu taktirde $x^2 \geq x^2 + y^2 + 1$ eşitsizliğinden $y^2 + 1 \leq 0$ bulunur ki bu da bir çelişkidir. O halde $x, y \in [-1,1]$ dır. Aşağıdaki durumlar göz önüne alınırsa;

(i) $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in [-1,0)$ olsun; o halde

$$d(Tx,Ty) = \frac{1}{4}max\{x^2, y^2\} \leq \frac{1}{2}max\{|x|, |y|\} = \psi(d(x,y)) \leq \psi(M(x,y))$$

(ii) x$\neq y$ olacak şekilde $x, y \in (0,1]$ olsun; o halde

$$d(Tx,Ty) = \frac{1}{4}max\{|x|, |y|\} \leq \frac{1}{2}max\{|x|, |y|\} = \psi(d(x,y)) \leq \psi(M(x,y))$$

(iii) $x \in (-1,0)$ ve $y \in (0,1)$ olsun; o halde

$$d(Tx,Ty) = \frac{1}{4}max\{x^2, y\} \leq \frac{1}{2}max\{|x|, |y|\} = \psi(d(x,y)) \leq \psi(M(x,y));$$

(iv) $x = y \in [-1,0)$, $x = y \in (0,1]$ olsun ya da $x = -1$, $y = 1$ olsun; o halde $Tx = Ty$ dır. Yani

$$d(Tx,Ty) = 0 \leq \psi(M(x,y)) .$$

dır. Böylece T bir α-η-ψ-rasyonel büzülme dönüşümüdür. 2.3.10. Teoreminin bütün şartları sağlandığından T nin bir sabit noktası vardır. Burada $x = 0$, T nin bir sabit noktasıdır.

2.3.10. Teoreminde her $x, y \in X$ için $\eta(x,y) = 1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir (Hussain vd., 2014).

2.3.12. Sonuç (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon ve $\psi \in \Psi$ olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) (X, d) bir α-tam metrik uzay;

(ii) T, bir α-geçişli dönüşüm;

(iii) T, X üzerinde α-ψ- rasyonel büzülme dönüşümü;

(iv) T, X üzerinde bir α-sürekli dönüşüm;

(v) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır.

O halde T nin bir sabit noktası vardır (Hussain vd., 2014).

2.3.13. Sonuç (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki T, rasyonel büzülme dönüşümü, yani $\psi \in \Psi$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x,y))$ olsun. O halde T nin bir sabit noktası vardır (Hussain vd., 2014).

2.3.14. Sonuç (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ sürekli bir dönüşüm öyle ki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq rM(x,y)$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada,

$0 \leq r < 1$ ve $M(x,y) = max\left\{d(x,y), \frac{d(x,Tx)}{1+d(x,Tx)}, \frac{d(y,Ty)}{1+d(y,Ty)}, \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$ dır. O halde T nin bir sabit noktası vardır (Hussain vd., 2014).

2.4. α-Tam Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş w_α-Küme Değerli Büzülme Dönüşümleri için Sabit Nokta Teoremleri

2.4.1. Tanım (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to Cl(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $x \in X$ noktası için $x \in Tx$ ise T nin bir sabit noktası denir ve T nin sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile tanımlanır (Kutbi ve Sintunavarat, 2014).

2.4.2. Tanım (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to Cl(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Her bir $x, y \in X$ için $H(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y)$ olacak şekilde bir $\lambda \in (0,1)$ sabit sayısı varsa T ye bir küme değerli büzülme dönüşümü denir (Kutbi ve Sintunavarat, 2014).

2.4.3. Tanım (X,d) bir metrik uzay olsun. Her bir $x, y, z \in X$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\omega: X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonuna X üzerinde bir w-uzaklık denir.

(w1) $\omega(x,z) \leq \omega(x,y) + \omega(y,z)$;

(w2) $\omega(x,.): X \to [0,\infty)$ dönüşümü alttan yarı süreklidir.

(w3) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\omega(z,x) \leq \delta$ ve $\omega(z,y) \leq \delta$ iken $d(x,y) \leq \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ vardır (Kada vd., 1996).

2.4.4. Örnek $(X, \|.\|)$ normlu lineer uzay olsun. $\omega: X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $\omega(x,y) = \|x\| + \|y\|$ olarak tanımlanırsa X üzerinde bir w-uzaklıkdır.

Gerçekten her $x, y, z \in X$ için

(i) $\omega(x,z) = \|x\| + \|z\| \leq \|x\| + \|y\| + \|y\| + \|z\| = \omega(x,y) + \omega(y,z)$ olur.

(ii) Normlu uzaylar sürekli olduğundan $\omega(x,.): X \to [0,\infty)$ dönüşümü alttan yarı süreklidir.

(iii) Her $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ alındığında $\omega(z,x) \leq \delta$ ve $\omega(z,y) \leq \delta$ ise $d(x,y) = \|x - y\| \leq \|z\| + \|x\| + \|z\| + \|y\| \leq \omega(z,x) + \omega(z,y) \leq \delta + \delta = \varepsilon$ olur (Karayılan, 2000).

2.4.5. Uyarı w-uzaklık fonksiyonu ω simetrik olmayabilir. Ayrıca bazı x ler için $\omega(x,x) \neq 0$ mümkün olacağından, $\omega(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ sağlanmayabilir (Kada vd., 1996).

2.4.6. Tanım (X,d) bir metrik uzay olsun. X üzerindeki $\omega: X \times X \to [0,\infty)$ w-uzaklık fonksiyonu her $x \in X$ için $\omega(x,x) = 0$ ise ω ya bir w_0-uzaklığı denir (Du, 2008).

2.4.7. Lemma (X,d) bir metrik uzay ve $\omega: X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu X üzerinde bir w-uzaklık olsun. (x_n) ve (y_n), X de iki dizi, (α_n) ve (β_n), $[0,\infty)$ da sıfıra yakınsayan iki dizi olsun. O halde $x, y, z \in X$ için aşağıdaki şartlar sağlanır;

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(x_n, y) \leq \alpha_n$ ve $\omega(x_n, z) \leq \beta_n$ ise $y = z$ dir. Özellikle $\omega(x,y) = 0$ ve $\omega(x,z) = 0$ ise $y = z$ dir.

(ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(x_n, y_n) \leq \alpha_n$ ve $\omega(x_n, z) \leq \beta_n$ ise o halde (y_n) dizisi z ye yakınsar.

(iii) $m > n$ ile herhangi bir $n, m \in \mathbb{N}$ için $\omega(x_n, x_m) \leq \alpha_n$ ise o halde (x_n) bir Cauchy dizisidir.

(iv) Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(y, x_n) \leq \alpha_n$ ise, bu taktirde (x_n) bir Cauchy dizisidir (Kada vd., 1996).

İspat. (ii) $\Rightarrow$(i) gerektirmesi doğrudur. Şu halde (i) ve (ii) nin kanıtı için sadece (ii) nin kanıtlanması yeterlidir. $\varepsilon > 0$ verilsin. w-uzaklığının tanımından

$$\omega(z,x) \leq \delta \text{ ve } \omega(z,y) \leq \delta \text{ iken } d(x,y) \leq \varepsilon \tag{4}$$

sağlayan en az bir $\delta > 0$ vardır.

$\alpha_n \to 0$ olduğundan her $n \geq N_1$ için $\alpha_n < \delta$ olacak şekilde en az bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

Benzer biçimde $\beta_n \to 0$ olduğundan her $n \geq N_2$ için $\beta_n < \delta$ olacak şekilde en az bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

$n_0 = max\{N_1, N_2\}$ olarak alındığında her $n \geq n_0$ için $\alpha_n < \delta$ ve $\beta_n < \delta$ olur. Böylece her $n \geq n_0$ için

$$\omega(x_n, y_n) \leq \alpha_n < \delta \text{ ve } \omega(x_n, z) \leq \beta_n < \delta$$

olur ki o halde (4) den $d(y_n, z) \leq \varepsilon$ bulunur. Bu ise $\big(d(y_n, z)\big)$ nin sıfıra yakınsadığını gösterir. (iii) nin kanıtı için;

$\varepsilon > 0$ verilsin. (4) de olduğu gibi $\delta > 0$ seçilsin. $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğundan yine her $n \geq n_0$ için $\alpha_n < \delta$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n, m \geq n_0 + 1$ için;

$$\omega(x_{n_0}, x_n) \leq \alpha_{n_0} < \delta \text{ ve } \omega(x_{n_0}, x_m) \leq \alpha_{n_0} < \delta$$

olup, buradan $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ bulunur. Şu halde (x_n) bir Cauchy dizisidir. (iv) nin kanıtı için;

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$, (iii) nin kanıtındaki gibi seçildiğinde, her $n, m \geq n_0$ için,

$$\omega(y, x_n) \leq \alpha_n < \delta \text{ ve } \omega(y, x_m) \leq \alpha_n < \delta$$

olup, buradan $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Not. (X, d) bir metrik uzay ve $\omega: X \times X \to [0, \infty)$ w-uzaklık olsun. $x \in X$ ve $A \in Cl(X)$ için $\omega(x, A) := inf_{y \in A}\, \omega(x, y)$ olarak tanımlanır.

2.4.8. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to Cl(X)$ olsun. Eğer $\lambda \in (0,1)$ ve X üzerinde bir $\omega: X \times X \to [0, \infty)$ w-uzaklığı mevcut öyle ki her $x, y \in X$ için ve $u \in Tx$ için

$$\omega(u, v) \leq \lambda \omega(x, y)$$

olacak şekilde bir $v \in Ty$ var ise T küme değerli dönüşümüne w-büzülme denir (Suzuki ve Takahashi, 1996).

2.4.9. Tanım (X, d) bir metrik uzay, $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ bir dönüşüm ve $T: X \to Cl(X)$ olsun. Eğer $\lambda \in (0,1)$ ve X üzerinde bir $\omega: X \times X \to [0, \infty)$ w-uzaklığı mevcut öyle ki her $x, y \in X$ için ve $u \in Tx$ için

$$\alpha(u, v)\omega(u, v) \leq \lambda \omega(x, y)$$

olacak şekilde bir $v \in Ty$ var ise T küme değerli dönüşümüne w_α-büzülme denir (Kutbi ve Sintunavarat, 2013).

2.4.10. Tanım (X, d) bir metrik uzay, $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ bir dönüşüm ve $T: X \to Cl(X)$ olsun. Eğer $\lambda \in (0,1)$ ve X üzerinde bir $\omega: X \times X \to [0, \infty)$ w_0-uzaklığı mevcut öyle ki her $x, y \in X$ için ve $u \in Tx$ için

$$\alpha(u, v)\omega(u, v) \leq \lambda max\left\{\omega(x, y), \omega(x, Tx), \omega(y, Ty), \frac{1}{2}[\omega(x, Ty) + \omega(y, Tx)]\right\}$$

olacak şekilde bir $v \in Ty$ var ise T küme değerli dönüşümüne genelleştirilmiş w_α-büzülme denir (Kutbi ve Sintunavarat, 2013).

2.4.11. Tanım X boş olmayan bir küme, $T: X \to Cl(X)$ ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ verilen iki dönüşüm olsun. Her $x \in X$ ve $\alpha(x, y) \geq 1$ şartını sağlayan her $y \in Tx$ için $\alpha(y, z) \geq 1$ şartı her $z \in Ty$ için sağlanıyorsa T ye bir α-geçişli dönüşüm denir (Mohammadi vd., 2013).

2.4.12. Teorem (X, d) bir metrik uzay, $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon ve $T: X \to Cl(X)$ bir genelleştirilmiş w_α-küme değerli büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki (X, d) bir α-tam metrik uzay olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) T bir α-geçişli dönüşümdür;

(ii) $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ vardır;

(iii) $y \notin Ty$ olacak şekilde her $y \in X$ için $inf\{\omega(x, y) + \omega(x, Tx): x \in X\} > 0$ dır;

Bu taktirde $F(T) \neq \emptyset$ dır (Kutbi ve Sintunavarat, 2014).

İspat. (ii) den dolayı $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ vardır. T bir genelleştirilmiş w_α-büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, x_2)\omega(x_1, x_2) \leq \lambda max\{&\omega(x_0, x_1), \omega(x_0, Tx_0), \omega(x_1, Tx_1), \\ &\frac{1}{2}[\omega(x_0, Tx_1) + \omega(x_1, Tx_0)]\} \end{aligned} \tag{5}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ bulunabilir. T bir α-geçişli dönüşüm ve $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_1 \in Tx_0$ olduğundan

$$\alpha(x_1, x_2) \geq 1 \tag{6}$$

elde edilir. (5) ve (6) denklemlerinden

$$\omega(x_1, x_2) \leq \alpha(x_1, x_2)\omega(x_1, x_2) \leq \lambda max\{\omega(x_0, x_1), \omega(x_0, Tx_0), \omega(x_1, Tx_1), \frac{1}{2}[\omega(x_0, Tx_1) + \omega(x_1, Tx_0)]\}$$

elde edilir.Tekrardan T bir genelleştirilmiş w_α-büzülme olduğundan

$$\alpha(x_2, x_3)\omega(x_2, x_3) \leq \lambda max\{\omega(x_1, x_2), \omega(x_1, Tx_1), \omega(x_2, Tx_2), \frac{1}{2}[\omega(x_1, Tx_2) + \omega(x_2, Tx_1)]\} \tag{7}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ ve T bir α-geçişli dönüşüm olduğundan

$$\alpha(x_2, x_3) \geq 1 \tag{8}$$

elde edilir. (7) ve (8) denklemlerinden

$$\omega(x_2, x_3) \leq \alpha(x_2, x_3)\omega(x_2, x_3) \leq \lambda max\{\omega(x_1, x_2), \omega(x_1, Tx_1), \omega(x_2, Tx_2), \frac{1}{2}[\omega(x_1, Tx_2) + \omega(x_2, Tx_1)]\}$$

elde edilir. Bu işlemler devam ettirilirse her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in Tx_{n-1}$,

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \tag{9}$$

ve

$$\omega(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda max\{\omega(x_{n-1}, x_n), \omega(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \omega(x_n, Tx_n), \frac{1}{2}[\omega(x_{n-1}, Tx_n) + \omega(x_n, Tx_{n-1})]\}$$

elde edilir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda max\{\omega(x_{n-1}, x_n), \omega(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \omega(x_n, Tx_n),$$

$$\frac{1}{2}[\omega(x_{n-1},Tx_n)+\omega(x_n,Tx_{n-1})]\Big\}$$

$$\leq \lambda max\{\omega(x_{n-1},x_n),\omega(x_{n-1},x_n),\omega(x_n,x_{n+1}),$$

$$\frac{1}{2}[\omega(x_{n-1},x_{n+1})+\omega(x_n,x_n)]\Big\}$$

$$=\lambda max\left\{\omega(x_{n-1},x_n),\omega(x_n,x_{n+1}),\frac{1}{2}[\omega(x_{n-1},x_{n+1})]\right\}$$

$$\leq \lambda max\left\{\omega(x_{n-1},x_n),\omega(x_n,x_{n+1}),\frac{1}{2}[\omega(x_{n-1},x_n)+\omega(x_n,x_{n+1})]\right\}$$

$$\leq \lambda max\{\omega(x_{n-1},x_n),\omega(x_n,x_{n+1})\} \tag{10}$$

dır. Bazı $n' \in \mathbb{N}$ için $max\{\omega(x_{n'-1},x_{n'}),\omega(x_{n'},x_{n'+1})\}=\omega(x_{n'},x_{n'+1})$ ise bu taktirde $\omega(x_{n'},x_{n'+1})=0$ ve bu yüzden $\omega(x_{n'-1},x_{n'})=0$ elde edilir. w-uzaklığının özelliğinden

$$\omega(x_{n'-1},x_{n'+1})\leq\omega(x_{n'-1},x_{n'})+\omega(x_{n'},x_{n'+1})=0$$

elde edilir.

$\omega(x_{n'-1},x_{n'})=0$ ve $\omega(x_{n'-1},x_{n'+1})=0$ olduğundan 2.4.7 Lemması kullanılarak $x_{n'}=x_{n'+1}$ bulunur. Bu ise $x_{n'}\in Tx_{n'}$ ve bu yüzden $x_{n'}$ noktasının, T nin bir sabit noktası olduğu anlamına gelir. Şimdi kabul edelim ki her $n\in\mathbb{N}$ için $max\{\omega(x_{n-1},x_n),\omega(x_n,x_{n+1})\}=\omega(x_{n-1},x_n)$ olsun. (10) den her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\omega(x_n,x_{n+1})\leq\lambda\omega(x_{n-1},x_n) \tag{11}$$

elde edilir. (11) tekrarlanarak her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\omega(x_n,x_{n+1})\leq\lambda^n\omega(x_0,x_1)$$

elde edilir.

Her $n,m\in\mathbb{N}$ için $m>n$ olsun. Bu taktirde

$$\omega(x_n,x_m)\leq\omega(x_n,x_{n+1})+\omega(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+\omega(x_{m-1},x_m)$$

$$\leq\lambda^n\omega(x_0,x_1)+\lambda^{n+1}\omega(x_0,x_1)+\cdots+\lambda^{m-1}\omega(x_0,x_1)$$

$$\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \omega(x_0, x_1)$$

elde edilir.

$0 < \lambda < 1$ olduğundan $n \to \infty$ iken $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \omega(x_0, x_1) \to 0$ dır. 2.4.7 Lemmadan (x_n) nin, X de bir Cauchy dizisi olduğu bulunur. (9) den her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ olduğu bilinir. X in α tamlığı kullanılarak bazı $z \in X$ için $n \to \infty$ iken $x_n \to z$ elde edilir. $\omega(x_n, .)$ alttan yarı sürekli olduğundan

$$\omega(x_n, z) \leq lim_{m \to \infty} \, inf \omega(x_n, x_m) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \omega(x_0, x_1)$$

yazılabilir. Son olarak kabul edelim ki $z \notin Tz$ olsun. Bu taktirde hipotezden

$$0 < inf\{\omega(x, z) + \omega(x, Tx) : x \in X\}$$

$$\leq inf\{\omega(x_n, z) + \omega(x_n, Tx_n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\leq inf\{\omega(x_n, z) + \omega(x_n, x_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\leq inf\left\{\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \omega(x_0, x_1) + \lambda^n \omega(x_0, x_1) : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= \left(\left\{\frac{2-\lambda}{1-\lambda}\right\} \omega(x_0, x_1)\right) inf\{\lambda^n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$= 0$$

çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $z \in Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır.

2.4.13. Sonuç (X, d) bir tam metrik uzay, $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ ve $T: X \to Cl(X)$ bir genelleştirilmiş w_α-büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) T bir α-geçişli dönüşümdür;

(ii) $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ vardır;

(iii) $y \notin Ty$ olacak şekildeki her $y \in X$ için

$inf\{\omega(x, y) + \omega(x, Tx) : x \in X\} > 0$ dır;

Bu taktirde $F(T) \neq \emptyset$ dır (Kutbi ve Sintunavarat, 2013).

İspat. (X, d) tam metrik uzay α-tamı sağladığından 2.4.12. Teoreminin ispatı kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

2.4.14. Teorem (X, d) tam metrik uzay ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ ve $T: X \to Cl(X)$ bir w_α-büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki (X, d) bir α-tam metrik uzay olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) T bir α-geçişli dönüşümdür;

(ii) $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ vardır;

(iii) $y \notin Ty$ olacak şekildeki her $y \in X$ için

$inf\{\omega(x, y) + \omega(x, Tx): x \in X\} > 0$ dır;

Bu taktirde $F(T) \neq \emptyset$ dır (Kutbi ve Sintunavarat, 2014).

İspat. İspatı 2.4.12. Teoreminin ispatına benzerdir.

2.4.15. Örnek $X = (-1, \infty)$ ve $d: X \times X \to [0, \infty)$ metriği her $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlansın. $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1, & x, y \in [0,1], \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ile tanımlansın. $T: X \to Cl(X)$ küme değerli dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{x}{6}\right\}, & x \in [0,1], \\ \{x, 5|x|\}, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ile tanımlansın.

Şimdi T nin, $\lambda = \frac{1}{2}$ ve her $x, y \in X$ için $\omega(x, y) = y$ olarak tanımlanan $\omega: X \times X \to [0, \infty)$ w-uzaklığı ile bir w_α-küme değerli büzülme dönüşümü olduğu gösterilir $x, y \in [0,1]$ için $u \in Tx = \left\{\frac{x}{6}\right\}$ olsun. Yani $u = \frac{x}{6}$ ve

$$\alpha(u, v)\omega(u, v) = \alpha\left(\frac{x}{6}, \frac{y}{6}\right)\omega\left(\frac{x}{6}, \frac{y}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{36} + 1\right)\frac{y}{6}$$

$$\leq (1 + 1 + 1)\frac{y}{6}$$

$$= \frac{1}{2}y$$

$$= \lambda\omega(x, y)$$

olacak şekilde bir $v = \frac{y}{6} \in Ty$ bulunabilir.

Diğer durumlarda w_α-büzülme şartının sağlandığı kolayca görülür. Bu nedenle T bir w_α- küme değerli büzülme dönüşümüdür.

Açıkcası (X, d) bir tam metrik uzay değildir. Fakat (X, d) bir α-tam metrik uzaydır. Gerçekten (x_n), her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ olacak şekilde X de bir Cauchy dizisi olsun. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in [0,1]$ dir. $([0,1], d)$ tam metrik uzay olduğundan $n \to \infty$ iken $x_n \to z$ olacak şekilde $z \in A$ vardır. Bu nedenle (X, d) bir α-tam metrik uzaydır. Ayrıca T nin bir α-geçişli olduğu görülür, $x_1 = \frac{1}{6} \in T1$ ve $\alpha(x_0, x_1) = \alpha\left(1, \frac{1}{6}\right) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 = 1$ vardır. Son olarak $y \notin Ty$ olacak şekildeki $y \in X$ için $y \in (0,1]$ elde edilir. Buradan

$$inf\{\omega(x, y) + \omega(x, Tx) : x \in X\} > 0$$

olur. 2.4.14. Teoreminin bütün şartları sağlandığından T nin bir sabit noktası vardır (Kutbi ve Sintunavarat, 2014).

2.5. w-Uzaklık Yöntemi ile $\mathcal{R}$- Bağıntılı Kümeler Üzerinde Sabit Nokta Sonuçları

2.5.1. Tanım X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{R}$, $X \times X$ üzerinde bir ikili bağıntı olsun. O halde $(x, y) \in \mathcal{R}$ ise x noktası y ye göre $\mathcal{R}$ bağlantılıdır denir (Lipschutz, 1964).

2.5.2. Tanım $\mathcal{R}$, X üzerinde tanımlanan bir ikili bağıntı olsun. Her $x, y \in X$ için $[x, y] \in \mathcal{R}$ ise $\mathcal{R}$ ikili bağıntısına tamdır denir. Burada $[x, y] \in \mathcal{R}$ ifadesi $(x, y) \in \mathcal{R}$ ya da $(y, x) \in \mathcal{R}$ olduğu anlamına gelir (Maddux, 2006).

2.5.3. Tanım $\mathcal{R}$ boş olmayan bir X kümesi üzerinde tanımlanmış ikili bağıntı olsun. O halde her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ ise X deki bir (x_n) dizisine $\mathcal{R}$-koruyandır denir (Alam ve Imdad, 2015).

2.5.4. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{R}$, X üzerinde bir ikili bağıntı olsun. X deki her $\mathcal{R}$-koruyan Cauchy dizisi X de yakınsak ise X metrik uzayına $\mathcal{R}$-tamdır denir (Alam ve Imdad, 2015).

2.5.5. Tanım X boş olmayan bir küme ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (fx, fy) \in \mathcal{R}$ ise X üzerindeki $\mathcal{R}$ ikili bağıntısına f-kapalı denir (Alam ve Imdad, 2015).

2.5.6. Tanım X boş olmayan bir küme ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow [fx, fy] \in \mathcal{R}$ ise X üzerindeki bir $\mathcal{R}$ ikili bağıntısına zayıf f-kapalı denir (Alam ve Imdad, 2015).

Her f-kapalı $\mathcal{R}$ ikili bağıntısı zayıf f-kapalıdır fakat genelde tersi doğru değildir.

2.5.7. Örnek X boş olmayan sonlu bir küme ve $\mathcal{R}$ de bazı $A, B \in P(X)$ için "$A \subseteq B$ ise $(A, B) \in \mathcal{R}$" ile X in kuvvet kümesi $P(X)$ üzerinde tanımlanmış bir ikili bağıntı olsun. Her $A \in P(X)$ için $f(A) = A^c$ ile $f: P(X) \to P(X)$ fonksiyonu tanımlansın. O halde $(A, B) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde $A, B \in P(X)$ için $(f(A), f(B)) \notin \mathcal{R}$ fakat $(f(B), f(A)) \in \mathcal{R}$ dır. Bundan dolayı $\mathcal{R}$ ikili bağıntısı f-kapalı değildir fakat zayıf f-kapalıdır (Senapati ve Dey, 2017).

2.5.8. Tanım (X, d) bir $\mathcal{R}$ ikili bağıntısı ile verilen bir metrik uzay olsun. O halde $x_n \to x$ olacak şekilde (x_n) in her $\mathcal{R}$-koruyan dizisi her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$[x_{n_k}, x] \in \mathcal{R}$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi varsa $\mathcal{R}$ d-self-kapalıdır denir (Alam ve Imdad, 2015).

2.5.9. Önerme (X, d) bir metrik uzay, $\mathcal{R}$ X üzerinde bir ikili bağıntı, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki büzülme şartları eşdeğerdir:

(i) Her $x, y \in X$ için $(x, y) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ dır.

(ii) Her $x, y \in X$ için $[x, y] \in \mathcal{R}$ olacak şekilde $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ dır (Alam ve Imdad, 2015).

İspat. (ii)⇒(i) sağladığı açıktır. Tersine, (i) nin sağlandığı kabul edilsin. $x, y \in X$ olacak şekilde $[x, y] \in \mathcal{R}$ alınsın. Eğer $(x, y) \in \mathcal{R}$ ise bu taktirde (i) deki eşitsizlikten dolayı (ii) sağlanır. Diğer taraftan $(y, x) \in \mathcal{R}$ ise bu taktirde d nin simetrik özelliği ve (i) deki eşitsizlik kullanılarak $d(Tx, Ty) = d(Ty, Tx) \leq \alpha d(y, x) = \alpha d(x, y)$ elde edilir. Bu da (i) ⇒(ii) olduğunu gösterir.

$X(T, \mathcal{R}) = \{x \in X : (x, Tx) \in \mathcal{R}\}$ olarak tanımlansın.

2.5.10. Teorem (X, d) bir $\mathcal{R}$ ikili bağıntısı ile verilen bir tam metrik uzay olsun. Kabul edelim ki $T: X \to X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlansın:

(i) $X(T, \mathcal{R})$ boştan farklıdır;

(ii) $\mathcal{R}$, T-kapalıdır;

(iii) ya T süreklidir ya da $\mathcal{R}$ d-self-kapalıdır;

(iv) $(x, y) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ bir $\alpha \in [0,1)$ vardır.

Bu taktirde $F(T) \neq \emptyset$ dır (Alam ve Imdad, 2015).

İspat. x_0, $X(T, \mathcal{R})$ nin keyfi bir elemanı olsun. (x_n) Picard iterasyon dizisi her $n \in \mathbb{N}_0$ için $x_n = T^n x_0$ olarak tanımlansın. $(x_0, Tx_0) \in \mathcal{R}$ olduğundan (ii) şartı kullanılarak her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$(Tx_0, T^2x_0), (T^2x_0, T^3x_0), \dots, (T^n x_0, T^{n+1}x_0), \dots \in \mathcal{R}$$

ve bu yüzden $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ elde edilir. Böylece (x_n) dizisi $\mathcal{R}$-koruyandır. $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ ye büzülme şartı uygulanırsa her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \alpha d(x_n, x_{n+1})$ bulunur. Bu yüzden tümevarım yöntemiyle

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \alpha^{n+1} d(x_0, Tx_0) \tag{12}$$

her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için elde edilir.

(12) ve üçgen eşitsizliği kullanılarak her $n \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ için

$$d(x_{n+1}, x_{n+p}) \leq d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

$$\leq (\alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \cdots + \alpha^{n+p-1}) d(x_0, Tx_0)$$

$$= \alpha^n d(x_0, Tx_0) \sum_{j=1}^{p-1} \alpha^j \to 0 \ (n \to \infty)$$

elde edilir. Bu ise (x_n) in X de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d) tam olduğundan $x_n \xrightarrow{d} x$ olacak şekilde $x \in X$ vardır.

Şimdi kabul edelim ki T sürekli olsun. Bu taktirde $x_{n+1} = Tx_n \xrightarrow{d} Tx$ dır. Limitin tekliği nedeniylede $Tx = x$ elde edilir. Yani x, T nin bir sabit noktasıdır. Şimdi kabul edelim ki $\mathcal{R}$ d-self-kapalı olsun. (x_n), bir $\mathcal{R}$-koruyan dizi ve $x_n \xrightarrow{d} x$ olduğundan her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $[x_{n_k}, x] \in \mathcal{R}$ olacak şekilde (x_n) nin bir (x_{n_k}) altdizisi vardır.

(iv) büzülme şartı, 2.5.9. Önermesi ve $[x_{n_k}, x] \in \mathcal{R}$ ve $x_{n_k} \to x$ kullanılarak, $k \to \infty$ iken $d(x_{n_k+1}, Tx) = d(Tx_{n_k}, Tx) \leq \alpha d(x_{n_k}, x) \to 0$ elde edilir. Bu yüzden $x_{n_k+1} \to Tx$ $(k \to \infty)$ dır.

Tekrardan limitin tekliği nedeniyle $Tx = x$ elde edilir. Yani x, T nin bir sabit noktasıdır.

2.5.11. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{R}$, X üzerinde tanımlanmış bir ikili bağıntısı olsun. x e yakınsayan her (x_n) $\mathcal{R}$-koruyan dizisi için $n \to \infty$ iken $f(x_n) \to f(x)$ ise bu taktirde $f: X \to X$ fonksiyonu x noktasında $\mathcal{R}$-süreklidir denir (Alam ve Imdad, 2015).

2.5.12. Teorem (X, d) bir $\mathcal{R}$ ikili bağıntısı ile verilen bir metrik uzay olsun. Kabul edelim ki $T: X \to X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) $Y \subseteq X, TX \subseteq Y \subseteq X$ vardır öyle ki (Y, d), $\mathcal{R}$-tamdır;

(ii) $X(T, \mathcal{R}) \neq \emptyset$;

(iii) $\mathcal{R}$, T-kapalıdır;

(iv) T, $\mathcal{R}$ -süreklidir ya da $\mathcal{R}\big|_Y$, d-self-kapalıdır;

(v) $M_T(x,y) = max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$ alındığında her $(x,y) \in \mathcal{R}$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için $d(Tx,Ty) \leq \varphi\big(M_T(x,y)\big)$ olacak şekilde $\varphi \in \Psi$ vardır;

Bu taktirde $F(T) \neq \emptyset$ (Ahmadullah vd., 2016).

İspat. $X(T,\mathcal{R})$ boştan farklı olduğundan $x_0 \in X(T,\mathcal{R})$ olsun. Başlangıç noktası x_0 olan bir (x_n) Picard dizisi, yani her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} = Tx_n$ tanımlansın. $(x_0, Tx_0) \in \mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}$, T-kapalı olduğundan

$$(Tx_0, T^2x_0), (T^2x_0, T^3x_0), \dots, (T^nx_0, T^{n+1}x_0), \dots \in \mathcal{R}$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ ve bu yüzden (x_n), $\mathcal{R}$-koruyandır. (v) şartından her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \varphi\big(M_T(x_{n-1}, x_n)\big) \tag{13}$$

elde edilir ki burada

$$M_T(x_{n-1}, x_n) = max\left\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_n, Tx_n), \frac{d(x_{n-1}, Tx_n)+d(x_n, Tx_{n-1})}{2}\right\}$$

$$\vdots$$

$$M_T(x_{n-1}, x_n) \leq max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} \tag{14}$$

elde edilir. (13), (14) ve φ nin azalmayan özelliği kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}) \tag{15}$$

elde edilir. Şimdi (x_n) dizisinin (X,d) de bir Cauchy olduğu gösterilir: Bazı $r \in \mathbb{N}_0$ için $x_r = x_{r+1}$ olduğu taktirde o halde sonuç tamamlanır. Diğer durumda her $n \in \mathbb{N}_0$ için $x_n \neq x_{n+1}$ dır. Bazı $s \in \mathbb{N}$ için $d(x_{s-1}, x_s) \leq d(x_s, x_{s+1})$ olduğu kabul edilsin. (15) ve 2.3.8.lemma (ii) yi kullanılarak

$$d(x_s, x_{s+1}) \leq \varphi\big(d(x_s, x_{s+1})\big) < d(x_s, x_{s+1})$$

çelişkisi elde edilir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{n-1}, x_n)$ ve bu yüzden $d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)$ dir. Tümevarım ve φ nin azalmayan özelliği ile her $n \in \mathbb{N}_0$ için $d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi^n\big(d(x_0, x_1)\big)$ elde edilir. Şimdi $m \geq n$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}_0$ için

$$d(x_n,x_m) \le d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1},x_m)$$
$$\le \varphi^n(d(x_0,x_1)) + \varphi^{n+1}(d(x_0,x_1)) + \cdots + \varphi^{m-1}(d(x_0,x_1))$$
$$= \sum_{k=n}^{m-1} \varphi^k(d(x_0,x_1))$$
$$\le \sum_{k\ge n} \varphi^k(d(x_0,x_1)) \to 0 \ (n \to \infty)$$

elde edilir. Bu yüzden (x_n), X de bir Cauchy dizisidir. $(x_n) \subseteq TX \subseteq Y$ olduğundan (x_n), Y de $\mathcal{R}$-koruyan Cauchy dizisidir. (Y,d), $\mathcal{R}$-tam olduğundan $x_n \xrightarrow{d} p$ olacak şekilde $p \in Y$ vardır. Eğer T, $\mathcal{R}$-sürekli ise o halde

$$p = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T \lim_{n\to\infty} x_n = Tp.$$

Bu nedenle p, T nin sabit noktasıdır.

Eğer $\mathcal{R}|_Y$, d-self-kapalı ise, bu taktirde $x_n \xrightarrow{d} p$ olacak şekilde Y $\mathcal{R}$-koruyan dizisi için, her $k \in \mathbb{N}_0$ için $[x_{n_k}, p] \in \mathcal{R}|_Y \subseteq \mathcal{R}$ olacak şekilde (x_n) nin bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır.

$\delta := d(Tp,p) \ge 0$ alınsın. Kabul edelim ki $\delta > 0$ olsun. (v) şartı, 2.5.9. Önermesi ve her $k \in \mathbb{N}_0$ için $[x_{n_k}, p] \in \mathcal{R}$ kullanılarak

$$d(x_{n_k+1}, Tp) = d(Tx_{n_k}, Tp) \le \varphi\left(M_T(x_{n_k}, p)\right) \tag{16}$$

bulunur ki burada

$$M_T(x_{n_k}, p) = max\left\{d(x_{n_k}, p), d(x_{n_k}, x_{n_k+1}), d(p,Tp), \frac{d(x_{n_k},Tp)+d(p,x_{n_k+1})}{2}\right\} \tag{17}$$

dır.

$M_T(x_{n_k}, p) = d(p,Tp) = \delta$ ise, bu taktirde (16) eşitsizliğinden $d(x_{n_k+1}, Tp) \le \varphi(\delta)$ bulunur. Burada $k \to \infty$ için limit alınırsa $\delta \le \varphi(\delta)$ olur ki bu bir çelişkidir. Diğer taraftan, $x_n \xrightarrow{d} p$ olması nedeniyle her $k \ge h$ için $M_T(x_{n_k}, p) \le \frac{2}{3}\delta$ olacak şekilde $h = h(\delta)$ vardır. φ azalmayan olduğundan her $k \ge h$ için

$$\varphi\left(M_T(x_{n_k}, p)\right) \le \varphi\left(\tfrac{2}{3}\delta\right) \tag{18}$$

elde edilir. (16) ve (18) kullanılarak her $k \geq h$ için

$$d(x_{n_k+1}, Tp) = d(Tx_{n_k}, Tp) \leq \varphi\left(\frac{2}{3}\delta\right)$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit ve 2.3.8. Lemma (ii) si kullanılırsa $\delta \leq \varphi\left(\frac{2}{3}\delta\right) < \frac{2}{3}\delta < \delta$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $\delta = 0$ ve bu yüzden

$$d(Tp, p) = \delta = 0 \Rightarrow Tp = p$$

dır.

2.5.13. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{R}$, X üzerinde tanımlanmış bir ikili bağıntı olsun. x noktasına yakınsayan her (x_n) $\mathcal{R}$-koruyan dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} inf\, f(x_n) \geq f(x)$$

oluyorsa bu taktirde $f: X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ fonksiyonu x noktasında $\mathcal{R}$-alttan yarı süreklidir denir (Senapati ve Dey, 2017).

2.5.14. Örnek $X = \mathbb{R}$ olmak üzere (X, d) bir alışılmış metrik uzay olsun. Bazı $n \in \mathbb{Z}$ için $x, y \in \left[n, n + \frac{1}{3}\right)$ bağıntısı $(x, y) \in \mathcal{R}$ olarak tanımlansın. Her $x \in X$ için $x \in [n, n + 1]$ olacak şekilde her zaman bir $n \in \mathbb{Z}$ tamsayısı bulunabilir. $f: X \to X$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \lceil x \rceil, & x \in \left[n, n + \frac{1}{3}\right), \\ x - 1, & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu fonksiyon $\mathcal{R}$-sürekli değildir fakat $\mathcal{R}$-alttan yarı süreklidir. (x_n), bir k tamsayısına yakınsayan sabit olmayan bir $\mathcal{R}$-koruyan dizi olsun. O halde her $n > n_0$ için $x_n \in \left(k, k + \frac{1}{3}\right)$ olacak şekilde bazı $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu nedenle,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = k + 1 \quad \text{ve} \quad f(k) = k$$

elde edilir. Böylece f, $\mathcal{R}$-sürekli değildir. Fakat k ya yakınsayan her (x_n) $\mathcal{R}$-koruyan dizisi için $\lim_{n\to\infty} inf\, f(x_n) \geq f(k)$ dır. Bu f nin $\mathcal{R}$-alttan yarı sürekli olduğunu gösterir. Ayrıca f bir alttan yarı sürekli fonksiyon değildir. (x_n), k ya soldan yakınsayan sabit olmayan bir dizi olsun. O halde her $n \geq n_k$ için $x_n > (k - 1) + \frac{1}{3}$ olacak şekilde bazı $n_k \in \mathbb{N}$ elde edilmelidir. Bu her $n \geq n_k$ için $f(x_n) = x_n - 1$ ve

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = k - 1$ olmasını gerektirir. Bundan dolayı $x_n \to k$ alındığında $\lim_{n\to\infty} \inf f(x_n) \geq f(k)$ elde edilemez. Bu nedenle f bir alttan yarı sürekli fonksiyon değildir (Senapati ve Dey, 2017).

2.5.15. Örnek $X = [0, \infty)$ ve d, X üzerinde alışılmış metrik olsun. $xy \geq x$ ya da $xy \geq$ y ise $(x, y) \in \mathcal{R}$ olarak tanımlansın. $f: X \to X$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0,1), \\ \frac{3}{4}, & x = 1, \\ x, & x > 1, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

f fonksiyonu ne alttan yarı sürekli ne de $\mathcal{R}$-süreklidir, fakat bu fonksiyon $\mathcal{R}$-alttan yarı sürekli fonksiyondur. $x = 1$ noktası göz önüne alınsın. (x_n), 1 e yakınsayan sabit olmayan bir dizi olsun. (x_n), 1 e soldan yakınsıyorsa her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) = \frac{1}{2}$ elde edilir. (x_n), 1 e sağdan yakınsıyorsa bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) = x_n$ ve bu yüzden $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ dir. Bundan dolayı $\lim_{n\to\infty} \inf f(x_n) \geq f(1)$ sağlanmaz. Bu nedenle f fonksiyonu $x = 1$ de alttan yarı sürekli değildir. Şimdi (x_n), 1 e yakınsayan bir $\mathcal{R}$-koruyan dizisi olsun. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R} \Rightarrow x_n x_{n+1} \geq x_n$ ya da $x_n x_{n+1} \geq x_{n+1}$ dır. Bu yüzden aşağıdaki iki durum ortaya çıkar:

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = 1$ ve $f(x_n) = \frac{3}{4} = f(1)$

(ii) (x_n) sabit olmayan bir $\mathcal{R}$-koruyan dizisi ise bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 1$ ve $f(x_n) = x_n$ ve bu yüzden $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ dir. Bu nedenle $\lim_{n\to\infty} \inf f(x_n) \geq \frac{3}{4} = f(1)$. Bu f nin bir $\mathcal{R}$-alttan yarı sürekli fonksiyon olduğunu gösterir.

Yukarıdaki açıklamalardan f fonksiyonu $x = 1$ de $\mathcal{R}$-sürekli değildir. Çünkü 1 e yakınsayan herhangi bir $\mathcal{R}$-koruyan dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(1)$ dir (Senapati ve Dey, 2017).

Yukarıdaki iki örnekte $\mathcal{R}$-alttan yarı sürekli fonksiyonun hem $\mathcal{R}$- sürekli hem de alttan yarı sürekli fonksiyonlardan daha zayıf olduğu görülür.

2.5.16. Uyarı Her alttan yarı sürekli fonksiyon $\mathcal{R}$-alttan yarı süreklidir fakat tersi doğru değildir.

2.5.17. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{R}$, X üzerinde tanımlanmış bir ikili bağıntısı olsun. $\omega: X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu eğer aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X üzerinde bir w- $\mathcal{R}$-uzaklık denir.

(w1) Herhangi bir $x, y, z \in X$ için $\omega(x, z) \leq \omega(x, y) + \omega(y, z)$;

(w2) Herhangi bir $x \in X$ için $\omega(x, .): X \to [0, \infty)$ dönüşümü $\mathcal{R}$-alttan yarı süreklidir.

(w3) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\omega(z, x) \leq \delta$ ve $\omega(z, y) \leq \delta$ iken $d(x, y) \leq \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ vardır (Senapati ve Dey, 2017).

2.5.18. Lemma (X, d), $\mathcal{R}$ ikili bağıntısı ile verilen bir metrik uzay ve $\omega: X \times X \to [0, \infty)$ bir w-$\mathcal{R}$-uzaklık olsun. (x_n) ve (y_n), X de iki $\mathcal{R}$-koruyan dizi ve $x, y, z \in X$ olsun, (u_n) ve (v_n) sıfıra yakınsayan pozitif reel sayıların dizileri olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(x_n, y) \leq u_n$ ve $\omega(x_n, z) \leq v_n$ ise $y = z$ dir. Özellikle $\omega(x, y) = 0$ ve $\omega(x, z) = 0$ ise $y = z$ dir.

(ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(x_n, y_n) \leq u_n$ ve $\omega(x_n, z) \leq v_n$ ise o halde $y_n \to z$ dir.

(iii) Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $m > n$ olmak üzere $\omega(x_n, x_m) \leq u_n$ ise (x_n), X de bir $\mathcal{R}$-koruyan Cauchy dizisidir.

(iv) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(x_n, y) \leq u_n$ ise (x_n), X de bir $\mathcal{R}$-koruyan Cauchy dizisidir (Senapati ve Dey, 2017).

İspat. İspatı 2.4.7. Lemmasının ispatına benzerdir.

2.5.19. Teorem Bir ω, w-uzaklığı ile (X, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{R}$, X de herhangi keyfi ikili bağıntı olsun. $T: X \to X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu taktirde $F(T) \neq \emptyset$ dır.

(i) $T(X) \subseteq Y$ olacak şekilde $Y \subseteq X$ vardır öyle ki (Y, d), $\mathcal{R}$-tamdır;

(ii) $X(T, \mathcal{R}) \neq \emptyset$ ve $\mathcal{R}$, T-kapalıdır ;

(iii) T, $\mathcal{R}$-sürekli ya da $x_n \to x$ olacak şekildeki her $\mathcal{R}$-koruyan (x_n) dizisinin her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $(x_{n_k}, x) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır;

(iv) $(x,y) \in \mathcal{R}$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $\omega(Tx, Ty) \leq \lambda\omega(x,y)$ olacak şekilde bir $\lambda \in [0,1)$ vardır (Senapati ve Dey, 2017).

İspat. $X(T,\mathcal{R}) \neq \emptyset$ olduğundan $(x_0, Tx_0) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde bir $x_0 \in X(T,\mathcal{R})$ noktası vardır. $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ ile bir (x_n) dizisi tanımlansın. $\mathcal{R}$ nin T-kapalılık özelliğinden (x_n) nin bir $\mathcal{R}$-koruyan dizisi olduğu görülür, yani her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ dir. (iv) deki büzülme prensibi uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
\omega(x_n, x_{n+1}) = \omega(Tx_{n-1}, Tx_n) &\leq \lambda\omega(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq \lambda^2\omega(x_{n-2}, x_{n-1}) \\
&\vdots \\
&\leq \lambda^n\omega(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

sağlanır. Bu her $m > n$ için kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\omega(x_n, x_m) &\leq \omega(x_n, x_{n+1}) + \omega(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \omega(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq \omega(x_0, x_1)[\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{m-1}] \\
&\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\omega(x_0, x_1) \qquad (19)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$u_n = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\omega(x_0, x_1)$ olarak tanımlansın. Açıkcası $n \to \infty$ iken $u_n \to 0$ dır. Bu nedenle 2.5.18 Lemmasının (iii) şartı ile (x_n) in Y de bir $\mathcal{R}$-koruyan Cauchy dizisidir. (Y, d), $\mathcal{R}$-tam olduğundan bazı $\tilde{x} \in Y$ için $n \to \infty$ iken $x_n \to \tilde{x}$ elde edilir. Şimdi $\tilde{x}$ nın T nin bir sabit noktası olduğu gösterilsin. İlk olarak T nin $\mathcal{R}$-sürekli olduğu göz önüne alınsın. Bu taktirde

$$d(\tilde{x}, T\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, T\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} d(Tx_n, T\tilde{x}) = d(T\tilde{x}, T\tilde{x}) = 0$$

elde edilir. Bu da $\tilde{x}$ nın T nin bir sabit noktası olduğunu gösterir.

Alternatif olarak, $x_n \to x$ olacak şekilde her $\mathcal{R}$-koruyan (x_n) dizisinin her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $(x_{n_k}, x) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi var olsun. ω nın $\mathcal{R}$-alttan yarı sürekliliği ile (19) daki eşitsizlik birleştirilirse

$$\omega(x_{n_k+1}, \tilde{x}) \leq \lim_{k\to\infty} inf\, \omega(x_{n_k+1}, x_{n_k+m}) \leq \lim_{k\to\infty} inf \frac{\lambda^{n_k-1}}{1-\lambda}\omega(x_0, x_1) = 0$$

elde edilir. $\mathcal{R}$, T-kapalı ve $(x_{n_k}, \tilde{x}) \in \mathcal{R}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\omega(Tx_{n_k}, T\tilde{x}) &\leq \lambda\omega(x_{n_k}, \tilde{x}) \\ &\leq \lambda \lim_{k\to\infty} inf\, \omega(x_{n_k}, x_{n_k+m}) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} inf \frac{\lambda^{n_k+1}}{1-\lambda}\omega(x_0, x_1) = 0\end{aligned}$$

sağlanır. 2.5.18. Lemmasının (i) şartı ile $T\tilde{x} = \tilde{x}$ elde edilir, böylece $\tilde{x}$, T nin bir sabit noktasıdır.

2.5.20. Teorem 2.5.19. Teoreminin hipotezlerine ek olarak

(i) Her $x, y \in TX$ için $(z, x), (z, y) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde en az bir $z \in TX$ vardır

ya da

(ii) $\mathcal{R}|_{TX}$ tamdır

şartını sağlarsa o halde T nin bir tek sabit noktası vardır (Senapati ve Dey, 2017).

İspat. Aşağıdaki iki durum göz önüne alınsın:

1. Durum: 2.5.19 Teoreminin hipotezine ek olarak (i) şartı sağlasın. O halde T nin herhangi iki $\tilde{x}, \tilde{y}$ sabit noktası için $(z, \tilde{x}) \in \mathcal{R}$ ve $(z, \tilde{y}) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde bir $z \in TX$ noktası vardır. $\mathcal{R}$, T-kapalı olduğundan her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $(T^n z, \tilde{x}) \in \mathcal{R}$ ve $(T^n z, \tilde{y}) \in \mathcal{R}$ dır. T nin büzülme şartı kullanılarak

$$\omega(T^n z, \tilde{x}) = \omega(T^n z, T^n \tilde{x}) \leq \lambda^n \omega(z, \tilde{x})$$

ve

$$\omega(T^n z, \tilde{y}) = \omega(T^n z, T^n \tilde{y}) \leq \lambda^n \omega(x_0, \tilde{y})$$

elde edilir.

$u_n = \lambda^{n+1}\omega(z, \tilde{x})$ ve $v_n = \lambda^{n+1}\omega(z, \tilde{y})$ olsun. Açıkcası (u_n) ve (v_n) sıfıra yakınsayan reel sayıların iki dizisidir. Bu nedenle 2.5.18 Lemmasındaki (i) ile $\tilde{x} = \tilde{y}$ elde edilir, yani T nin bir tek sabit noktası vardır.

2. Durum: 2.5.19 Teoreminin hipotezine ek olarak (ii) şartı sağlasın. T nin iki sabit noktası $\tilde{x}, \tilde{y}$ olsun. O halde $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{R}$ ya da $(\tilde{y}, \tilde{x}) \in \mathcal{R}$ elde edilmelidir. $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{R}$ için $\omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = \omega(T\tilde{x}, T\tilde{y}) \leq \lambda\omega(\tilde{x}, \tilde{y}) < \omega(\tilde{x}, \tilde{y})$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\tilde{x} = \tilde{y}$ elde edilir. Benzer metodla $(\tilde{y}, \tilde{x}) \in \mathcal{R}$ ise $\tilde{x} = \tilde{y}$ elde edilir.

2.5.21. Örnek $X = [1,3)$ olmak üzere (X, d) bir metrik uzay ve d, X üzerinde tanımlanan alışılmış metrik olsun. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X^2 : x \geq y\}$ ikili bağıntısı tanımlansın. $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [1,2), \\ 2, & x \in [2,3), \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. 2.5.10 Teoremindeki verilen hipotezlere göre kontrol edilirse;

1. $Y = [1,2]$ olsun. O halde $TX \subseteq Y$ ve (Y, d) nin $\mathcal{R}$-tam olduğu açıktır.

2. $(x, Tx) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde $x = 1$ için $Tx = \frac{1}{2}$ dır, yani $X(T, \mathcal{R})$ boştan farklıdır.

3. (x_n), x e yakınsayan bir $\mathcal{R}$-koruyan dizisi olsun. Bu nedenle her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ dir, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq x_{n+1}$ ve bu yüzden (x_n), x e yakınsayan azalan bir dizidir. Bu nedenle her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, x) \in \mathcal{R}$ elde edilmelidir.

4. 2.5.10 Teoreminde verilen büzülme prensibinin bu örneğe uygulanamayacağı gösterilirse, Örneğin $x = 2$, $y = 1$ olsun. O halde $(x, y) \in \mathcal{R}$ ve $Tx = 2$, $Ty = \frac{1}{2}$ olduğu açıktır. O halde

$d(Tx, Ty) = d\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ ve $d(x, y) = 1$ dir. Bu nedenle $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ olacak şekilde herhangi bir $k \in [0,1)$ bulunamaz. Ancak bir ω, w- uzaklık fonksiyonu $\omega(x, y) = |x| + |y|$ olarak alınırsa o halde $(x, y) \in \mathcal{R}$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1)$ için $\omega(Tx, Ty) \leq \lambda\omega(x, y)$ ve elde edilir.

Bundan dolayı 2.5.20 Teoreminin bütün şartları sağlanır ve $x = 2$, T nin bir tek sabit noktasıdır (Senapati ve Dey, 2017).

Not. $x = 2$, $y = 1$ için $M_T = max\left\{d(2,1), d\left(1,\frac{1}{2}\right), d(2,2), \frac{d(1,2)+d\left(2,\frac{1}{2}\right)}{2}\right\} = \frac{5}{4}$ elde edilir. 2.3.4. Tanımındaki ψ fonksiyonunun tanımından dolayı $d(Tx,Ty) \leq \psi(M_T(x,y))$ olacak şekilde herhangi bir ψ fonksiyonu bulunamaz. Bundan dolayı bu örnekte 2.5.12 Teoremi kullanılamaz (Senapati ve Dey, 2017).

2.5.22. Örnek $X = [0,2]$ olmak üzere (X,d) bir alışılmış metrik uzay olsun $xy \leq x$ veya $xy \leq y$ bağlantısı $(x,y) \in \mathcal{R}$ olarak tanımlansın. Bir $\omega: X \times X \to X$ w-uzalığı fonksiyonu $\omega(x,y) = y$ şeklinde tanımlansın. $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 1 - x, & \frac{2}{3} < x < 1, \\ \frac{3}{4}, & x = 1, \\ x - \frac{1}{2}, & x > 1, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$(x,y) \in \mathcal{R}$ ise o halde $xy \leq x$ veya $xy \leq y$ dir. $xy \leq x$ olsun. Bu nedenle aşağıdaki durumlar ortaya çıkar:

1. Durum: $x = 0$ olsun. O halde herhangi bir $y \in [0,2]$ için $(x,y) \in \mathcal{R}$. Bu nedenle, aşağıdaki durumlar vardır:

(i) $0 \leq y \leq \frac{2}{3}$ için $Tx = 0$ ve $Ty = \frac{y}{3}$ dır. Bu nedenle $\omega(Tx,Ty) = Ty = \frac{y}{3}$ ve dolayısıyla $\omega(Tx,Ty) = \frac{y}{3} \leq \frac{1}{3}\omega(x,y)$;

(ii) $\frac{2}{3} < y < 1$ ise, bu taktirde $Ty \in \left(0,\frac{1}{3}\right)$ ve $\omega(Tx,Ty) = 1 - y < y = \omega(x,y)$ dır. Özellikle $k \in [\frac{1}{2},1)$ alındığında $\omega(Tx,Ty) \leq k\omega(x,y)$ dır;

(iii) $y = 1$ olsun. O halde $\omega(T0,T1) = \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}\omega(0,1)$ dır.

(iv) $y > 1$ için $k \in [\frac{3}{4},1)$ olmak üzere $\omega(Tx,Ty) = y - \frac{1}{2} \leq ky = k\omega(x,y)$ elde edilir.

2. Durum: Her $y \in [0,2]$ $x = 0$ ve her $k \in [0,1)$ için

$\omega(Ty,Tx) = 0 = k\omega(y,x)$

elde edilir.

3. Durum: $x \neq 0$ olsun. Bu taktirde $y \leq 1$ dir. Bu nedenle, aşağıdakiler elde edilir.

(i) $0 \leq y \leq \frac{2}{3}$ için $\omega(Tx, Ty) \leq \frac{1}{3}\omega(x, y)$;

(ii) $\frac{2}{3} < y < 1$ için $k \in [\frac{1}{2}, 1)$ alındığında $\omega(Tx, Ty) \leq k\omega(x, y)$;

(iii) $y = 1$ ve her $x \in X$ için $\omega(Tx, T1) = \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}\omega(x, 1)$;

(iv) $y \leq 1$ ve $x > 1$ için $k \in [\frac{3}{4}, 1)$ alındığında $\omega(Ty, Tx) \leq k\omega(y, x)$ elde edilir.

Yukarıdaki üç durumda da T, 2.5.12. Teoremindeki (v) şartı sağlar. Şimdi 2.5.20. Teoreminin diğer hipotezleri kontrol edilirse:

(i) $Y = \left[0, \frac{3}{2}\right]$ olsun. O halde $TX \subseteq Y$ ve $\mathcal{R}\,|_Y$ $\mathcal{R}$-tamdır.

(ii) $X(T, \mathcal{R}) \neq \emptyset$ dır.

(iii) $\mathcal{R}$, T-kapalıdır.

(iv) T, $x = 1$ ve $x = \frac{2}{3}$ de $\mathcal{R}$- sürekli değildir. Ancak $x_n \to x$ olacak şekildeki her $\mathcal{R}$-koruyan (x_n) dizisinin her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\left(x_{n_k}, x\right) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisi bulunabilir.

(v) Herhangi bir $x, y \in Y$ için $(z, x), (z, y) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde her zaman bir $z \in Y$ bulunabilir.

Önceden T nin büzülme şartını sağladığı elde edilmişti. Bu nedenle 2.5.20. Teoremindeki bütün şartlar sağlanmıştır. $x = 0$, T nin bir tek sabit noktasıdır (Senapati ve Dey, 2017).

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. w-α-Uzaklık Yöntemi ile Sabit Nokta Sonuçları

3.1.1. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. $x \in X$ e yakınsayan ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ şartını sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \inf f(x_n) \geq f(x)$$

şartı sağlanıyorsa bu taktirde $f: X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ fonksiyonu x noktasında α-alttan yarı süreklidir denir.

3.1.2. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. $\omega: X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa ω ya X üzerinde bir w-α-uzaklık denir.

(i) Herhangi bir $x, y, z \in X$ için $\omega(x, z) \leq \omega(x, y) + \omega(y, z)$ dir,

(ii) Herhangi bir $x \in X$ için $\omega(x, .): X \to [0, \infty)$ dönüşümü bir α-alttan yarı süreklidir,

(iii) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\omega(z, x) \leq \delta$ ve $\omega(z, y) \leq \delta$ iken $d(x, y) \leq \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ vardır.

3.1.3. Tanım (X, d) bir metrik uzay olsun. X üzerinde bir $\omega: X \times X \to [0, \infty)$ w-α-uzaklık fonksiyonu her $x \in X$ için $\omega(x, x) = 0$ ise ω ya bir w_0-α–uzaklık denir.

3.1.4. Örnek $X = [0, \infty)$ olsun. $T: X \to X$ ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümleri

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

ve

$$Tx = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{4}{5}, & x = \frac{1}{2} \\ x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Açıkcası T fonksiyonu ne α- süreklidir ne de alttan yarı süreklidir. Fakat bu fonksiyon α- alttan yarı süreklidir.

Gerçekten (x_n), $x = \frac{1}{2}$ noktasına yakınsayan sabit olmayan bir dizi olsun. Eğer $x_n \to \frac{1}{2}^-$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n = \frac{3}{2}$ olur. Eğer $x_n \to \frac{1}{2}^+$ ise bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n = x_n$ ve bu yüzden $\lim_{n\to\infty} Tx_n = \frac{1}{2}$ olur. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} inf\, Tx_n \geq T\frac{1}{2}$ sağlanamaz. Bu yüzden T fonksiyonu $x = \frac{1}{2}$ noktasında alttan yarı sürekli değildir. Şimdi (x_n), $x = \frac{1}{2}$ noktasına yakınsayan ve $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ şartını sağlayan sabit olmayan bir dizi olsun. Bu taktirde $(x_n) \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan $Tx_n = \frac{3}{2}$ dir. Ancak $Tx_n \to \frac{3}{2} \neq T\frac{1}{2} = \frac{4}{5}$ olması nedeniyle T fonksiyonu $\frac{1}{2}$ noktasında α-sürekli değildir. Bununla beraber T fonksiyonu $x = \frac{1}{2}$ noktasında α-alttan yarı süreklidir. Gerçekten $\frac{3}{2} = \lim_{n\to\infty} inf\, Tx_n \geq T\frac{1}{2} = \frac{4}{5}$ dir.

3.1.5. Lemma (X, d) bir metrik uzay, $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ şeklinde bir dönüşüm ve $\omega: X \times X \to [0, \infty)$ bir w-α-uzaklık olsun. (x_n) ve (y_n), sırasıyla $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $\alpha(y_n, y_{n+1}) \geq 1$ şartlarını sağlayan X de iki dizi ve $x, y, z \in X$ olsun. (u_n) ve (v_n) sıfıra yakınsayan pozitif reel sayıların dizileri olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(x_n, y) \leq u_n$ ve $\omega(x_n, z) \leq v_n$ ise $y = z$ dir. Özellikle $\omega(x, y) = 0$ ve $\omega(x, z) = 0$ ise $y = z$ dir.

(ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(x_n, y_n) \leq u_n$ ve $\omega(x_n, z) \leq v_n$ ise o halde $y_n \to z$.

(iii) Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $m > n$ olmak üzere $\omega(x_n, x_m) \leq u_n$ ise, o halde (x_n), X de $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ şartını sağlayan bir Cauchy dizisidir.

(iv) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(x_n, y) \leq u_n$ ise, (x_n) X de $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ şartını sağlayan bir Cauchy dizisidir.

İspat. İspatı 2.4.7. Lemmanın ispatına benzerdir.

3.1.6. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ ve $T: X \to Cl(X)$ verilen iki dönüşüm olsun. Eğer $\lambda \in (0,1)$ ve X üzerinde bir $\omega: X \times X \to [0, \infty)$ w_0-α-uzaklığı mevcut öyle ki her $x, y \in X$ için ve $u \in Tx$ için

$$\alpha(u, v)\omega(u, v) \leq \lambda max\left\{\omega(x, y), \frac{\omega(x, Tx)}{1+\omega(x, Tx)}, \frac{\omega(y, Ty)}{1+\omega(y, Ty)}, \frac{1}{2}[\omega(x, Ty) + \omega(y, Tx)]\right\}$$

olacak şekilde bir $v \in Ty$ var ise T küme değerli dönüşümüne genelleştirilmiş w-α-rasyonel büzülme denir.

3.1.7. Tanım (X,d) bir metrik uzay, X üzerinde bir $\omega: X \times X \to [0,\infty)$ w_0- α-uzaklık ve $T: X \to Cl(X)$ bir dönüşüm olsun.

$$M(x,y) = max\left\{\omega(x,y), \frac{\omega(x,Tx)}{1+\omega(x,Tx)}, \frac{\omega(y,Ty)}{1+\omega(y,Ty)}, \frac{\omega(x,Ty)+\omega(y,Tx)}{2}\right\}$$

olsun. O halde $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere her $x,y \in X$ için

$$\alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow \omega(Tx,Ty) \leq \lambda M(x,y)$$

ise T ye bir küme değerli w-α-rasyonel büzülme dönüşümü denir.

3.1.8. Teorem (X,d) bir metrik uzay, $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ verilen bir fonksiyon ve $T: X \to Cl(X)$ bir genelleştirilmiş küme değerli w-α-rasyonel büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) $T(X) \subseteq Y$ ile $Y \subseteq X$ vardır öyle ki (Y,d), α-tamdır;

(ii) T bir α-geçişli dönüşümdür;

(iii) $\alpha(x_0,x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ vardır;

(iv) T, α-sürekli

ya da

(iv') Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n,x_{n+1}) \geq 1$ ve $x_n \to x \in X$ olacak şekildeki (x_n) dizisinin her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\alpha\left(x_{n_k},x\right) \geq 1$ olacak şekilde bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisi vardır;

O halde $F(T) \neq \emptyset$ dır.

İspat. (ii) den dolayı $\alpha(x_0,x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ vardır. T bir genelleştirilmiş w-α-rasyonel büzülme dönüşümü olduğundan

$$\alpha(x_1,x_2)\omega(x_1,x_2) \leq \lambda max\Big\{\omega(x_0,x_1), \frac{\omega(x_0,Tx_0)}{1+\omega(x_0,Tx_0)}, \frac{\omega(x_1,Tx_1)}{1+\omega(x_1,Tx_1)},$$

$$\frac{1}{2}[\omega(x_0,Tx_1)+\omega(x_1,Tx_0)]\Big\} \tag{20}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ bulunabilir. T bir α-geçişli dönüşüm ve $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_1 \in Tx_0$ olduğundan

$$\alpha(x_1, x_2) \geq 1 \tag{21}$$

elde edilir. (20) ve (21) deki denklemlerinden

$$\omega(x_1, x_2) \leq \alpha(x_1, x_2)\omega(x_1, x_2) \leq \lambda max\left\{\omega(x_0, x_1), \frac{\omega(x_0,Tx_0)}{1+\omega(x_0,Tx_0)}, \frac{\omega(x_1,Tx_1)}{1+\omega(x_1,Tx_1)},\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}[\omega(x_0, Tx_1) + \omega(x_1, Tx_0)]\right\}$$

elde edilir.

Tekrardan T bir genelleştirilmiş w-α-rasyonel büzülmesi olduğundan

$$\alpha(x_2, x_3)\omega(x_2, x_3) \leq \lambda max\left\{\omega(x_1, x_2), \frac{\omega(x_1,Tx_1)}{1+\omega(x_1,Tx_1)}, \frac{\omega(x_2,Tx_2)}{1+\omega(x_2,Tx_2)},\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}[\omega(x_1, Tx_2) + \omega(x_2, Tx_1)]\right\} \tag{22}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ ve T bir α-geçişli dönüşüm olduğundan

$$\alpha(x_2, x_3) \geq 1 \tag{23}$$

elde edilir. (22) ve (23) deki denklemlerinden

$$\omega(x_2, x_3) \leq \alpha(x_2, x_3)\omega(x_2, x_3) \leq \lambda max\left\{\omega(x_1, x_2), \frac{\omega(x_1,Tx_1)}{1+\omega(x_1,Tx_1)}, \frac{\omega(x_2,Tx_2)}{1+\omega(x_2,Tx_2)},\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}[\omega(x_1, Tx_2) + \omega(x_2, Tx_1)]\right\}$$

elde edilir. Bu işlemler devam ettirilirse her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in Tx_{n-1}$,

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \tag{24}$$

ve

$$\omega(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda max\left\{\omega(x_{n-1}, x_n), \frac{\omega(x_{n-1},Tx_{n-1})}{1+\omega(x_{n-1},Tx_{n-1})}, \frac{\omega(x_n,Tx_n)}{1+\omega(x_n,Tx_n)},\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}[\omega(x_{n-1}, Tx_n) + \omega(x_n, Tx_{n-1})]\right\}$$

elde edilir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda max\Big\{\omega(x_{n-1}, x_n), \frac{\omega(x_{n-1},Tx_{n-1})}{1+\omega(x_{n-1},Tx_{n-1})}, \frac{\omega(x_n,Tx_n)}{1+\omega(x_n,Tx_n)},$$

$$\frac{1}{2}[\omega(x_{n-1}, Tx_n) + \omega(x_n, Tx_{n-1})]\Big\}$$

$$= \lambda max\Big\{\omega(x_{n-1}, x_n), \frac{\omega(x_{n-1},x_n)}{1+\omega(x_{n-1},x_n)}, \frac{\omega(x_n,x_{n+1})}{1+\omega(x_n,x_{n+1})},$$

$$\frac{1}{2}[\omega(x_{n-1}, x_{n+1}) + \omega(x_n, x_n)]$$

$$\leq \lambda max\Big\{\omega(x_{n-1}, x_n), \omega(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2}[\omega(x_{n-1}, x_{n+1})]\Big\}$$

$$\leq \lambda max\Big\{\omega(x_{n-1}, x_n), \omega(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2}[\omega(x_{n-1}, x_n) + \omega(x_n, x_{n+1})]\Big\}$$

$$\leq \lambda max\{\omega(x_{n-1}, x_n), \omega(x_n, x_{n+1})\}. \tag{25}$$

elde edilir. O halde $\omega(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda max\{\omega(x_{n-1}, x_n), \omega(x_n, x_{n+1})\}$ elde edilir. Bazı $k \in \mathbb{N}$ için $max\{\omega(x_{k-1}, x_k), \omega(x_k, x_{k+1})\} = \omega(x_k, x_{k+1})$ ise bu taktirde $\omega(x_k, x_{k+1}) = 0$ ve bu yüzden $\omega(x_{k-1}, x_k) = 0$ elde edilir. w- α-uzaklığının özelliğinden

$$\omega(x_{k-1}, x_{k+1}) \leq \omega(x_{k-1}, x_k) + \omega(x_k, x_{k+1}) = 0$$

elde edilir.

$\omega(x_{k-1}, x_k) = 0$ ve $\omega(x_{k-1}, x_{k+1}) = 0$ olduğundan 3.1.5 Lemması kullanılarak $x_k = x_{k+1}$ bulunur. Bu ise $x_k \in Tx_k$ ve bu yüzden x_k nın, T nin bir sabit noktası olduğu anlamına gelir. Şimdi kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$max\{\omega(x_{n-1}, x_n), \omega(x_n, x_{n+1})\} = \omega(x_{n-1}, x_n)$$

olsun. (25) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda\omega(x_{n-1}, x_n) \tag{26}$$

elde edilir. Tümevarım yöntemiyle her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda\omega(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq \lambda^2 \omega(x_{n-2}, x_{n-1})$$

$$\vdots$$

$$\leq \lambda^n \omega(x_0, x_1)$$

elde edilir.

Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $m > n$ olsun. Bu taktirde

$$\omega(x_n, x_m) \leq \omega(x_n, x_{n+1}) + \omega(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \omega(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq \lambda^n \omega(x_0, x_1) + \lambda^{n+1} \omega(x_0, x_1) + \cdots + \lambda^{m-1} \omega(x_0, x_1)$$

$$\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \omega(x_0, x_1)$$

elde edilir.

$0 < \lambda < 1$ olduğundan $n \to \infty$ iken $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \omega(x_0, x_1) \to 0$ dır. 3.1.5 Lemmadan $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ şartını sağlayan (x_n) nin Y de bir Cauchy dizisi olduğu bulunur. (24) den her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ olduğunu biliyoruz. (Y, d), α-tam olduğundan bazı $z \in Y$ için $n \to \infty$ iken $x_n \to z$ elde edilir. Şimdi z nin T nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. İlk olarak T nin α-sürekli olduğunu göz önüne alalım. Bu taktirde

$$d(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tz) = \lim_{n\to\infty} d(Tx_n, Tz) = d(Tz, Tz) = 0$$

elde edilir. Bu da z nin T nin bir sabit noktası olduğunu gösterir.

Şimdi kabul edelim ki (iv') şartı sağlansın. Bu taktirde her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\alpha(x_{n_k}, z) \geq 1$ olacak şekilde (x_n) nin bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Bu durumda $\omega(x_n, x_m) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \omega(x_0, x_1)$ eşitsizliğinden w-α-uzaklığın alttan yarı sürekliliği kullanılarak

$$\omega(x_{n_k+1}, z) \leq \lim_{k\to\infty} inf\, \omega(x_{n_k+1}, x_{n_k+m}) \leq \lim_{k\to\infty} inf \frac{\lambda^{n_k-1}}{1-\lambda} \omega(x_0, x_1) = 0 \quad (27)$$

dır. Ayrıca T genelleştirilmiş w-α-rasyonel büzülme dönüşümü ve $\alpha(x_{n_k}, z) \geq 1$ olduğundan

$$\omega(x_{n_k+1}, Tz) = \omega(Tx_{n_k}, Tz) \le \lambda max\left\{\omega(x_{n_k}, z), \frac{\omega(x_{n_k}, x_{n_k+1})}{1+\omega(x_{n_k}, x_{n_k+1})}, \frac{\omega(z,Tz)}{1+\omega(z,Tz)},\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left[\omega(x_{n_k}, Tz) + \omega(z, x_{n_k+1})\right]\right\}$$

$$\le \lambda max\left\{\omega(x_{n_k}, z), \omega(x_{n_k}, x_{n_k+1}), \omega(z, Tz), \frac{1}{2}\left[\omega(x_{n_k}, Tz) + \omega(z, x_{n_k+1})\right]\right\}$$

$$\le \lambda max\{\omega(x_{n_k}, z), \omega(x_{n_k}, x_{n_k+1}), \omega(z, x_{n_k+1}) + \omega(x_{n_k+1}, Tz)\}$$

$$\le \lambda max\left\{\lim_{k\to\infty} inf \frac{\lambda^{n_k}}{1-\lambda}\omega(x_0, x_1), \lim_{k\to\infty} inf \lambda^{n_k}\omega(x_0, x_1), \lim_{k\to\infty} inf \frac{\lambda^{n_k}}{1-\lambda}\omega(x_0, x_1) + \right.$$

$$\left.\omega(x_{n_k+1}, Tz)\right\}$$

dir. Eğer $\omega(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ ise $\omega(x_{n_k+1}, Tz) \le \lambda\omega(x_{n_k+1}, Tz)$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde

$$\omega(x_{n_k+1}, Tz) = 0 \tag{28}$$

dır. (27) ve(28) birleştirilirse 3.1.5. Lemmadan $z = Tz$ elde edilir.

3.1.9. Teorem (X, d) bir metrik uzay, $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon ve $T: X \to Cl(X)$ bir küme değerli w-α-rasyonel büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) $T(X) \subseteq Y$ ile $Y \subseteq X$ vardır öyle ki (Y, d), α-tamdır;

(ii) T bir α-geçişli dönüşümdür;

(iii) $\alpha(x_0, x_1) \ge 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ vardır;

(iv) T, α-sürekli

ya da

(iv') Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \ge 1$ ve $x_n \to x \in X$ olacak şekildeki (x_n) dizisinin her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\alpha(x_{n_k}, x) \ge 1$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır;

O halde $F(T) \neq \emptyset$ dır.

İspat. İspatı 3.1.8. Teoreminin ispatına benzerdir.

$X(T,\mathcal{R}) = \{x \in X : (x,y) \in \mathcal{R}, y \in Tx\}$ olarak tanımlansın.

3.1.10. Sonuç Bir ω, w-$\mathcal{R}$-uzaklığı ile (X,d) bir metrik uzay, şeklinde bir dönüşüm ve $\mathcal{R}$, X de herhangi keyfi ikili bağıntı olsun. $T: X \to Cl(X)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu taktirde $F(T) \neq \emptyset$ dır.

(i) $T(X) \subseteq Y$ ile $Y \subseteq X$ vardır öyle ki (Y,d), $\mathcal{R}$-tamdır;

(ii) $X(T,\mathcal{R}) \neq \emptyset$ ve $\mathcal{R}$, T-kapalıdır;

(iii) T, $\mathcal{R}$-sürekli

ya da

(iii') Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ ve $x_n \to x \in X$ olacak şekildeki (x_n) dizisinin her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $(x_{n_k}, x) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır;

(iv) $x,y \in \mathcal{R}$ olacak şekilde her $x,y \in X$ için bir $\lambda \in [0,1)$ vardır öyle ki $\omega(Tx,Ty) \leq \lambda M(x,y)$ dir.

$$M(x,y) = max\left\{\omega(x,y), \frac{\omega(x,Tx)}{1+\omega(x,Tx)}, \frac{\omega(y,Ty)}{1+\omega(y,Ty)}, \frac{\omega(x,Ty)+\omega(y,Tx)}{2}\right\}$$

vardır.

İspat. $\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \mathcal{R} \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olsun. $\alpha(x_0,x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ varsa, bu taktirde $X(T,\mathcal{R}) \neq \emptyset$ olduğundan $(x_0, Tx_0) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde bir $x_0 \in X(T,\mathcal{R})$ noktası vardır. $(x_0,x_1) \in \mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}$, T kapalı olduğundan $(x_1,x_2) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. α nın tanımından dolayı da $\alpha(x_1,x_2) \geq 1$ olur. Bu işleme devam edilirse $x_n = Tx_{n-1}$ olacak şekilde $\alpha(x_n,x_{n+1}) \geq 1$ elde ederiz. Yani T, α-geçişlidir. α nın tanımından dolayı ve (Y,d), $\mathcal{R}$-tam olduğundan aynı zamanda (Y,d) α-tamdır. (iii) ve (iii') şartları 3.1.8. Teoreminin (iv) ve (iv') hipotezlerini gerektirir. Şimdi $\alpha(x,y) \geq 1$ olsun. Bu taktirde $(x,y) \in \mathcal{R}$ dir. Hipotez (iv) den dolayı da

$$\omega(Tx,Ty) \leq \lambda M(x,y)$$

olacak şekilde bir bir $\lambda \in [0,1)$ vardır. Bu yüzden 3.1.8. Teoreminin bütün şartları sağlandığından T nin bir sabit noktası vardır. Ayrıca w-$\mathcal{R}$-uzaklığı w-α-uzaklığı gerektirir.

3.1.11. Sonuç (X,d) bir tam metrik uzay, $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ verilen bir fonksiyon ve $T: X \to Cl(X)$ bir küme değerli genelleştirilmiş w-α-rasyonel büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) T bir α-geçişli dönüşümdür;

(ii) $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ vardır;

(iii) T, α-sürekli ya da her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $x_n \to x \in X$ olacak şekildeki (x_n) dizisinin her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\alpha(x_{n_k}, x) \geq 1$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır;

Bu taktirde $F(T) \neq \emptyset$ dır.

İspat. (X,d) tam metrik uzay α-tamı sağladığından 3.1.8. Teoreminin ispatı kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

3.1.12. Örnek $X = (-1,\infty)$ ve $d: X \times X \to [0,\infty)$ metriği her $x,y \in X$ için $d(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlansın. $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x,y \in [0,1], \\ 0, & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

ile tanımlansın. $T: X \to Cl(X)$ küme değerli dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{1}{4}x^2\right\}, & x \in [0,1], \\ \{|x|, |x+2|\}, & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

ile tanımlansın.

Şimdi T nin, $\lambda = \frac{1}{2}$ ve her $x,y \in X$ için $\omega(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$ olarak tanımlanan $\omega: X \times X \to [0,\infty)$ w-α-uzaklığı ile bir küme değerli w-α-rasyonel büzülme dönüşüm olduğunu gösterelim. $x,y \in [0,1]$ için $u \in Tx = \left\{\frac{1}{4}x^2\right\}$ olsun. Yani $u = \frac{1}{4}x^2$ ve

$$\begin{aligned} \alpha(u,v)\omega(u,v) &= \alpha\left(\frac{x^2}{4}, \frac{y^2}{4}\right)\omega\left(\frac{x^2}{4}, \frac{y^2}{4}\right) \\ &= \left(\frac{x^4}{16} + \frac{y^4}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\max\{x^2, y^2\}\right) \end{aligned}$$

$$\leq (1+1)\frac{1}{4}\max\{x^2, y^2\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\max\{|x|, |y|\}$$

$$= \lambda\omega(x, y)$$

$$\leq \lambda M(x, y)$$

olacak şekilde bir $v = \frac{1}{4}y^2 \in Ty$ bulunabilir. Yani $\alpha(u, v)\omega(u, v) \leq \lambda M(x, y)$ dir. Bu nedenle T bir küme değerli w-α-rasyonel büzülme dönüşümdür.

Açıkcası (Y, d) bir tam metrik uzay değildir. Fakat (Y, d) bir α-tam metrik uzaydır. Gerçekten (x_n), her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ olacak şekilde Y de bir Cauchy dizisi olsun. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in [0,1]$ dir. $([0,1], d)$ tam metrik uzay olduğundan $n \to \infty$ iken $x_n \to z$ olacak şekilde $z \in [0,1]$ vardır. Bu nedenle (Y, d) bir α-tam metrik uzaydır.

$\alpha(x, y) \geq 1$ olsun; o halde $x, y \in [0,1]$ dir. Diğer taraftan her $c \in [0,1]$ için $Tc \in [0,1]$. O halde $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ olur. Yani T, bir α-geçişli dönüşümdür. $x_1 = \frac{1}{4} \in T1$ ve $\alpha(x_0, x_1) = \alpha\left(1, \frac{1}{4}\right) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 = 1$ vardır.

$n \to \infty$ iken $x_n \to x$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizisi $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ eşitsizliğini sağlasın. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) \subseteq [0,1]$ ve bu yüzden $(Tx_n) \subseteq [0,1]$ dır. T, $[0,1]$ üzerinde sürekli olduğundan, $n \to \infty$ iken $Tx_n \to Tx$ dir. Yani T bir α-sürekli dönüşümdür.

Alternatif olarak $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $x_n \to z \in X$ olsun. Bu durumda $x_n \in [0,1]$ ve $x_{n_k} \to z$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Dolayısıyla $\alpha(x_{n_k}, z) \geq 1$ dir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Tam olmayan metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerini inceledik. Sabit nokta kavramı, Banach büzülme prensibi ve α-tam metrik uzaylarda küme değerli genelleştirilmiş w_α-büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremlerini üzerinde durulmuştur. w-uzaklık yöntemi ile $\mathcal{R}$-bağıntılı kümeler üzerinde sabit nokta sonuçlarını inceledik. w-α-uzaklık ve küme değerli genelleştirilmiş w-α-rasyonel büzülme ve küme değerli w-α-rasyonel büzülme tanımını verdik, teoremlerini ispatladık ve bir örnekle gösterdik. Literatürdeki bazı sabit nokta teoremlerinin bu şekilde çözüm kümelerinin var olduğunu söyleyebiliriz.

5. KAYNAKLAR

Ahmadullah, M., Imdad, M., Gubran, R., 2016. Relation-theoretic metrical fixed point theorems under nonlinear contractions. Fixed Point Theory, Article ID 1611.04136. (accepted article).

Alam, A., Imdad, M., 2015. Relation-theoretic contractive principle. Journal Fixed Point Theory Applications, 17 (4), 693-702.

Agarwal, R. P., O' Regan, D., Sahu, D. R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically non-expansive mappings. Journal Nonlinear Convex Analysis, 8 (1), 61-79.

Agarwal, R. P., O'Regan, D., Sahu, D. R., 2009. Fixed point theory for lipschitzian-type mappings with applications. Series Topological Fixed point Theory and Its Applications, Springer, New York.

Banach, S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fundamenta Mathematicae, 3, 133-181.

Bayraktar, M., 1994. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları, 314, Erzurum.

Berinde, V., 2007. Iterative approximation of fixed points. Springer, 337, Almanya.

Bianchini, R. M., Grandolfi, M., 1968. Trasformazioni di tipo contrattivo generaliz-zato in uno spazio metrico. Atti Della Accademia Nazionale dei Lincei, 45, 212-216.

Gündoğdu, Ş., 2005. Sabit nokta teoremleri. Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.

Du, W. S., 2008. Fixed point theorems for generalized hounders metrics. International Mathematical Forum, 3, 1011- 1022.

Helvacı, A., 2014. Metrik uzayda F-büzülme dönüşümleri için sabit nokta sonuçları. Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale.

Hussain, N., Kutbi, M. A., Salimi, P., 2014. Fixed point theory in α-complete metric spaces with applications. Abstract and Applied Analysis, 1-2, 1-11.

Işık, H., 2016. Genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Jungck, G., 1986. Compatible mappings and common fixed points. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 9 (4), 771- 779.

Kada, O., Suzuki, T., Takahashi, W., 1996. Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metriz spaces. Mathematica Japonica, 44 (2), 381-391.

Karahan, İ., 2015. Genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta yaklaşım metotları ve varyasyonel eşitsizlik problemleri. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Karayılan, H., 2000. w- uzaklık fonksiyonu ve sabit nokta teoremleri. Yüksek Lisans Tezi, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Edirne.

Kutbi, M. A., Sintunavarat, W., 2013. The existence of fixed point theorems via w-distance and α-admissible mappings and applications. Abstract and Applied Analysis, 141, 1-8.

Kutbi, M. A., Sintunavarat, W., 2014. Fixed point theorems for generalized w_α-contraction multivalued mappings in α-complete metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 139, 1-9

Lipschutz, S., 1964. Schaum' s outlines of theory and problems of set theory and related topics. Schaum' s Outline Series in Mathematics, 57, 60, 653.

Maddux, R. D., 2006. Relation algebras. Studies in Logic and Foundations of Mathematics, 150, 7-15.

Mohammadi, B., Rezapour, S., Shahzad, N., 2013. Some results on fixed points of α-ψ ćirić generalized multifunctions. Fixed Point Theory Applications, 24, 1-10.

Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz. Balcı Yayınları, 470, Kütahya.

Nadler, S.B., 1969. Multivalued contraction mappings. Pacific Journal of Mathematics, 30, 475-488.

Picard, C. E., 1890. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 6 (4), 145- 210.

Salimi, P., Latif, A., Hussain, N., 2013. Modified α-ψ-conractive mappings with applications. Fixed Point Theory and Applications, 151, 1-19.

Samet, B., Vetro, C., Vetro, P., 2012. Fixed point theorems α-ψ-conractive type mappings. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 75 (4), 2154- 2165.

Sarıgöl, M. A., ve Jafarov, S., 2007. Analiz. I. Ekin Yayınevi, 370, Bursa.

Senapati, T., Dey, K. D., 2017. Relation-theoretic metrical fixed point results via w-distance with applications. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 19, 2945- 2961.

Soykan, Y., 2012. Metrik Uzaylar ve Topolojisi. Nobel Akademik Yayıncılık, 537, Bursa.

Suzuki, T., Takahashi, W., 1996. Fixed point theorems and characterizations of metric completeness. Topological Methods Nonlinear Analysis, 8, 371- 382.

Suzuki, T., 2008. A generalized banach contraction principle that characterizes metric completeness. Proceedings of the American Mathematical Society, 136 (5), 1861- 1869.

Türkan, Ş., 2014. Asimtotik genişlemeyen dönüşümler ve sabit nokta iterasyonları. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	Fatma POLAT
Doğum Yeri	Erzurum/Karayazı
Doğum Tarihi	12/05/1992

LİSANS ÖNCESİ EĞİTİM

İlköğretim	Menderes İlköğretim Okulu / Adıyaman
Lise	İmam Hatip Lisesi / Adıyaman

LİSANS EĞİTİM BİLGİLERİ

Üniversite	Muş Alparslan Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM BİLGİLERİ

Üniversite	Muş Alparslan Üniversitesi
Fakülte	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik

İLETİŞİM

E-mail	fpolat90@gmail.com