T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

Cihat ARDİL

BİSHOP ÇATISI YARDIMIYLA FERMİ WALKER TÜREVİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUŞ-2018

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

Cihat ARDİL

BİSHOP ÇATISI YARDIMIYLA FERMİ WALKER TÜREVİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. Talat KÖRPINAR

MUŞ-2018

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Muş Alparslan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "Bishop Çatısı Yardımıyla Fermi-Walker Türevi Üzerine" adlı seminerimin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, seminerimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

☑ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☐ Tezimin sadece Muş Alparslan Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.

☐ Tezimin süresiz erişime açılmasını istemiyorum. ....Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

04/10/2018

Cihat ARDİL

TEZ KABUL TUTANAĞI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Doç. Dr. Talat KÖRPINAR danışmanlığında, Cihat ARDİL tarafından hazırlanan "Bishop Çatısı Yardımıyla Fermi-Walker Türevi Üzerine" konulu bu çalışma 04./10/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Talat KÖRPINAR İmza :

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü.

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Muhsin İNCESU İmza :

Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi.

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK İmza :

Bitlis Eren Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,Matematik Bölümü.

Yukarıdaki imzalar adı geçen öğretim üyelerine aittir.

04./10../2018

Prof. Dr. Murad Aydın ŞANDA

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Talat KÖRPINAR'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Cihat ARDİL

EKİM, 2018

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR……………………………………………………………………ii
İÇİNDEKİLER iii
ÖZET...iv
ABSTRACT v
KISALTMA VE SİMGELER vi
1. GİRİŞ 1
2. MATERYAL VE METOT 2
2.1. Temel Kavramlar 2
2.2. Fermi-Walker Türevi...8
3. ARAŞTIRMA BULGULARI 9
3.1. Öklid 3-Uzayında Bishop Çatısına Göre Manyetik Eğriler 9
3.1.1. Öklid 3-Uzayında Bishop Çatısına Göre **T**-Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi...... 9
3.1.2. Öklid 3-Uzayında Bishop Çatısına Göre $\mathbf{N}_1$ −Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi.14
3.1.3. Öklid 3-Uzayında Bishop Çatısına Göre $\mathbf{N}_2$ −Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi 17
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 19
KAYNAKLAR..20
ÖZGEÇMİŞ 212

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİSHOP ÇATISI YARDIMIYLA FERMİ WALKER TÜREVİ ÜZERİNE

Cihat ARDİL

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Talat KÖRPINAR

2018, 22 sayfa

Bu tez çalışmasında, Bishop çatısına göre elde edilen $\mathbf{T}, \mathbf{N}_1$ ve $\mathbf{N}_2$ manyetik eğrilerinin Fermi-Walker türevleri hesaplanmış ve bazı önemli sonuçlar verilmiştir. Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmı olup, bu çalışma ile ilgili ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, materyal ve yöntem başlığı altında konuya ilişkin temel kavramlar verilmiştir. Daha sonra Fermi-Walker türevleri başlığı altında uyguladığımız yöntem tanıtılmıştır. Fermi-Walker türevi ve Fermi-Walker paralelliği Bishop çatısına göre çalışılmıştır. Üçüncü bölümde, üç boyutlu Öklid uzayında manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevleri elde edilmiştir. Bishop çatısına göre $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}_1$ ve $\mathbf{N}_2$ manyetik eğrileri karakterize edildi.

Son bölüm olan tartışma ve sonuç bölümünde, elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır. Sonuçlar, Fermi-Walker türevinin geometride ve özellikle paralel vektör alanlarının hareketlerinde önemli bir uygulaması olduğunu göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Bishop çatısı, Fermi-Walker türevi, Manyetik alan, Manyetik eğriler

ABSTRACT

Master's Thesis

ON THE FERMI-WALKER DERIVATIVE BY THE BISHOP FRAME

Cihat ARDİL

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

2018, Page: 22

In this thesis, Fermi-Walker derivatives of magnetic curves of magnetic curves $\mathbf{T}, \mathbf{N}_1$ and $\mathbf{N_2}$ obtained according to the bishop frame were calculated and some important results obtained. This study consists of four parts. The first part is the introduction part and the preliminary information about this work is given. In the second chapter, basic concepts related to the subject are given under the title of Fermi-Walker derivatives method was introduced. The Fermi-Walker derivation and the Fermi-Walker parallels were studied according to the Bishop frame. In the third chapter Fermi-Walker derivatives of magnetic curves are obtained in three dimensional Euclidean space. According to the Bishop frame $\mathbf{T}, \mathbf{N_1}$ and $\mathbf{N_2}$ are characterized.

In the final part of the discussion and conclusion, the results obtained here are interpreted. The results show that the Fermi-Walker derivative is an important application in geometry and especially in the motion of paralel vector fields.

Key Words: Bishop frame, Fermi-Walker derivative, Magnetic curves, Magnetic field

KISALTMA VE SİMGELER

α	**:** $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı eğri
T(s)	**:** Teğet vektör alanı
∇	**:** Levi-Civita konneksiyonu
$\widetilde{\nabla}$	**:** Fermi-Walker türevi

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride kullanılan ve önemli uygulama alanları olan bir türev Fermi-Walker türevi olarak bilinir. Bilinen adi türev tanımıyla elde edilen birçok kavram Fermi-Walker türevi ile tanımlandığında farklı anlam ve uygulama alanları ortaya çıkmıştır. Bu yeni türevin geometride ve özellikle paralel vektör alanlarının hareketlerinde önemli bir uygulaması mevcuttur. Bir $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında verilen bir uzay eğrisinin teğeti $\mathbf{T}$ olmak üzere $\mathbf{T}$ nin eğri boyunca paralel olması $\mathbb{E}^n$ nin verilen ∇ konneksiyonu için $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}=0$ şartını sağlaması ile mümkündür. Bu eğri bu şartı sağlaması durumunda geodezik olarak adlandırılır. $\mathbb{E}^n$ de verilen bütün doğrular geodezikler olacaktır. $\mathbb{E}^n$ de verilen bir eğrinin geodezik olup olmadığı ise Fermi-Walker türevi ile bulunur. Fermi-Walker türevi, Fermi-Walker paralelliği ve bu türev ile elde edilen dönmeyen çatılar değişik uzay zamanlarında farklı eğriler için elde edilmiştir.

Ayrıca elastik olmayan eğri ailelerinin akışının Fermi-Walker türevi ile karakterizasyonu ve Fermi-Walker paralelliği (Körpınar vd., 2015) tarafından incelenmiştir. Uzayda dikkate değer eğri ailelerinin bir sınıfı da manyetik eğrilerdir. Manyetik eğriler manyetik alanlardaki hareketli ve yüklü parçacıkların izlediği yörüngenin takibi ile elde edilen eğrilerdir. n-boyutlu Riemann manifoldlarında bir manyetik alan $\mathbf{D}$ kapalı bir 2- form olmak üzere 1-1 bir tensör alanı olan Φ Lorentz denklemi ile tanımlanır. Özel olarak bu tanım 3-boyutlu uzaylardaki bir B manyetik alandaki bir α eğrisi için $\nabla_{\alpha'}\ \alpha' = \Phi(\alpha'\ )$ olarak verilir. 3- boyutlu Riemann manifoldlarında Frenet çatısı yardımıyla bir manyetik alandaki manyetik eğriler ile elastik teorisi arasındaki ilişki birçok yeni çalışmanın önünü açmıştır. Örneğin 3-boyutlu Riemann ve yarı Riemann manifoldlarındaki bazı manyetik eğriler ve bu eğrilerin akışı yardımıyla tanımlanan Killing manyetik alanları bulunmuştur (Bozkurt vd., 2014; Özdemir vd., 2015). Yine 3- boyutlu Öklid uzayında manyetik eğriler Bishop ve tip 2 –Bishop çatısına göre tanımlanmıştır (Kazan ve Karadağ, 2017). Manyetik eğrilerin verilen manyetik alan içerisinde geodezik eğrilerinin genelleştirilmiş bir hali olmasından dolayı manyetik eğriler için Fermi-Walker türevinin hesaplanması önemli ilişkileri açığa çıkaracaktır. Bu tez çalışmasında Bishop çatısına göre elde edilen $\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ manyetik eğrilerinin Fermi-Walker türevleri hesaplanmış ve bazı önemli sonuçlar verilmiştir.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar açıklanmıştır. Diğer bölümlerde kullanılan kavramlarla ilgili bazı teorem ve önermeler verilmiştir.

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir cümle ve K cismi üzerindeki vektör uzayı $\mathbf{V}$ olsun. Aşağıda verilen önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \to \mathbf{V}$$

fonksiyonu varsa, A ya $\mathbf{V}$ ile birleşen afin uzay denir.

(i) $\forall P, Q, R \in A$ için

$$f(P,Q) + f(Q,R) = F(P,R)$$

(ii) $\forall P, Q, R \in A$ ve $\alpha \in \mathbf{V}$ için

$$f(P,Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen bir vektör uzayı da $\mathbf{V}$ olsun. $\mathbf{V}$ vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına Öklid uzayı denir. (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.3. n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ ve I, $\mathbb{R}$ nin irtibatlı açık alt cümlesi olmak üzere,

$$\alpha: I \subset R \to \mathbb{E}^n$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine $\mathbb{E}^n$ de bir eğri ve $t \in I$ değişkenine de eğrinin parametresi denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.4. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Bu durumda $\Psi = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^r\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$ olmak üzere Ψ den elde edilen $\{V_1, \ldots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Frenet r-ayaklısı alanı ve $m \in M$ için $\{\mathbf{V}_1(m), \ldots, \mathbf{V}_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı denir. Her bir $\mathbf{V}_i, 1 \le i \le r$ ye Frenet vektörü denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.5. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisi, $t \in I$ için eğrinin teğet vektör alanı

$$\mathbf{T}(t) = \alpha'(t)$$

eğrinin asli normal vektör alanı

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}$$

eğrinin binormal vektör alanı

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$$

olmak üzere bu vektörlerden oluşan $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ sistemine Frenet 3-ayaklısı denir.$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet 3-ayaklısı ortonormal bir çatıdır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.6. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{\mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_r(s)\}$ olsun. Buna

$$k_i: I \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq r$$

$$s \to k_i(s) = \langle \mathbf{V}_i'(s), \mathbf{V}_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.7.

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$$

$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

s yay parametresi ile verilen bir eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olsun.

$$\mathbf{T}'(s) = k_1(s)\mathbf{N}(s)$$

$$\mathbf{N}'(s) = -k_1(s)\mathbf{T}(s) + k_2(s)\mathbf{B}(s)$$

$$\mathbf{B}'(s) = -k_2(s)\mathbf{N}(s)$$

denklemlerine Frenet formülleri denir (Hacısalihoğlu, 2000). Burada $k_1 = \kappa$, $k_2 = \tau$ alınabilir.

Tanım 2.1.8. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$\boldsymbol{\kappa(s) = k_1(s) = \| \alpha''(s) \|}$$

değerine $\alpha(s)$ eğrisinin s-noktasındaki eğriliği denir (Carmo Monfredo, 1976).

Tanım 2.1.9. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. $\alpha''(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\mathbf{B}'(s) = \tau(s).\mathbf{N}(s)$$

eşitliği ile tanımlı $\tau(s)$ sayısına $\alpha(s)$ eğrisinin s-noktasındaki burulması denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.10. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir $\alpha(s)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı $\mathbf{T} = \alpha'(s)$ olsun. $\mathbf{T}$ vektör alanı belirli bir u vektörü ile sabit açı yapıyorsa $\alpha(s)$ eğrisine genel helis denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.11. X , s yay parametreli $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}} X = \nabla_{\mathbf{T}} X - \langle \mathbf{T}, X \rangle A + \langle A, X \rangle \mathbf{T}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}} X$ türevine $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının Fermi Walker türevi denir (Benn ve Tucker , 1989).

Burada $\mathbf{T} = \frac{d\alpha}{ds}$, $A = \frac{d\mathbf{T}}{ds}$ dir.

Tanım 2.1.12. X , s yay parametreli $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere eğri boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}} X = 0$$

ise X vektör alanına $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir denir (Benn ve Tucker, 1989).

Tanım 2.1.13. s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}} \mathbf{T} = w^* \wedge \mathbf{T}$$

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}} \mathbf{N} = w^* \wedge \mathbf{N}$$

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}} \mathbf{B} = w^* \wedge \mathbf{B}$$

olacağından

$$w^* = \tau \mathbf{T}$$

vektörüne $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet çatısına göre Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü denir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

Tanım 2.1.14. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa, \tau\}$ olsun.$\varpi = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$ vektör alanına γ eğrisinin Darboux vektör alanı denir.

$$\mathbf{W}(s) = \frac{\varpi(s)}{\|\varpi(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}(\tau(s)\mathbf{T}(s) + \kappa(s)\mathbf{B}(s))$$

vektörüne is γ eğrisinin Darboux göstergesi denir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

Tanım 2.1.15. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathbf{T}$ olsun. Eğri boyunca

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{N}_1 \rangle = \langle \mathbf{T}, \mathbf{N}_2 \rangle = \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle = 0$$

şartını sağlayan vektör alanları $\mathbf{N}_1$ ve $\mathbf{N}_2 = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}_1$ olmak üzere $\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$vektör alanları hareketli α eğrisi boyunca ortonormal bir çatı oluşturur. Bu $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ çatısına Bishop Çatısı denir (Bishop, 1975).

Tanım 2.1.16. α birim hızlı bir eğri olsun. α nın Frenet vektör alanı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olmak üzere α nın ikinci türevi sıfır olsa bile, α eğrisi boyunca hareketli bir ortonormal çatı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta(s) & -\cos\theta(s) & 0 \\ \cos\theta(s) & \sin\theta(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Bu çatıya 2. tip Bishop çatısı adı verilir. α eğrisinin 2. tip Bishop çatısının denklemleri

$$\begin{bmatrix} \zeta_1' \\ \zeta_2' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

dir. Burada $\theta = \arctan\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, $\theta(s) = \int_0^s \kappa(s)ds$ (Yılmaz ve Turgut, 2010).

Tanım 2.1.17. $\alpha = \alpha(s)$, $\mathbb{E}^3$ te bir regüler eğri olsun. Eğer S^2 birim küresinin O merkezine 2. tip Bishop çatısını dördüncü vektör alanına dönüştürülürse $\varphi = \varphi(s_\varphi)$ eğrisinin küresel görüntüsü elde edilir. Bu eğri binormal Bishop küresel görüntüsü olarak adlandırılır (Bishop, 1975).

Tanım 2.1.18. M,$\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir hiperyüzey ve α:I⊂ℝ→M regüler bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ noktasında M hiperyüzeyinin bir eğrilik vektörü var ise α eğrisine , M hiperyüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi denir (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 2.1.19. $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında yay parametresi ile verilen $\alpha'(s)$, eğrisinin burulması $\tau(s) = 0$ ise α eğrisine düzlemsel eğri denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.20. M, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir hiperyüzey ve α:I⊂ℝ→M regüler bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ noktasında M hiperyüzeyinin bir eğrilik vektörü var ise α

eğrisine, M hiperyüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α eğrisine M hiperyüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri denir (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 2.1.21. $\mathbb{E}^{n+1}$ de M hiperyüzeyi üzerindeki prametre eğri $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to M$ olsun. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \Rightarrow M$ eğrisinin her noktasındaki ivme vektörü M hiperyüzeyine ortogonal ise α eğrisine M hiperyüzeyinde geodezik eğri denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.22. $U = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ ve $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sıfırdan farklı vektörler olsunlar. $\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{V} = \langle \overleftarrow{U}, \overleftarrow{V} \rangle = u_1 \mathrm{v}_1 + \ldots . u_n v_n$ ifadesine $\overleftarrow{U}$ ve $\overleftarrow{V}$ iççarpımı denir. Eğer $\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{V} = 0$ ise o zaman bu vektörler diktir (ortogonaldir) denir (Carmo, 1976).

Tanım 2.1.23. $\mathbb{E}^n$ de bir $\mathbf{P}$ noktası ve $\mathbb{R}^n$ de bir $\overleftarrow{V}$ vektöründen oluşan $(\mathbf{P}, \overleftarrow{V})$ ikilisine bir tanjant vektör denir. Burada $\mathbf{P}$ tanjant vektörün başlangıç noktası ve V de vektör kısmıdır. Bir tanjant vektör kısaca $\overleftarrow{U}_p = (\mathbf{P}, \overleftarrow{V})$ ile gösterilir, (Carmo, 1976).

Tanım 2.1.24. $U = (u_1, u_2, \ldots u_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörü verilmiş olsun. $\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{U}$ vektörünün kareköküne $\overleftarrow{U}$ vektörünün normu denir. $\| \overleftarrow{U} \| = \sqrt{\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{U}} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$ şeklinde gösterilir (Carmo, 1976).

Tanım 2.1.25. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları, $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ olmak üzere

$$\tau: I \to \mathbb{R}^3, \tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Carmo, 1976).

Tanım 2.1.26. $\mathbb{E}^3$ uzayında φ eğrisinin, Frenet Serret çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ tarafından tanımlanır. Keyfi bir φ eğrisi için $\mathbb{E}^3$ uzayında 1. ve 2. eğrilik sırasıyla κ ve τ dur ve Frenet Serret formülü aşagıdaki gibi gösterilir (Bishop, 1975).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Tanım 2.1.27. α birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\alpha: I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olduğuna göre;

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s),$$

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|},$$

$$\mathbf{B}(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

dir (Hacısalihoğlu, 2009).

Burada

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 1,$$

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle = 0.$$

Burada eğrilik fonksiyonları $\kappa = \kappa(s) = \| \mathbf{T}'(s) \|$ ve $\tau(s) = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{B}' \rangle$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.28. $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$ vektörlerine, $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir.

$$\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$$

kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir (Carmo, 1976).

Tanım 2.1.29. M, $\mathbb{E}^n$ nin $(n-1)-$ boyutlu altmanifoldu olsun ve α eğrisi $s\varepsilon I$ yay parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet $(n-1)-$ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots V_{n-1}(s)\}$ olsun. Bu Frenet vektör alanları paralel öteleme ile küre merkezine taşındığında, küre üzerinde oluşan eğrilere küresel gösterge eğrileri denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.30. α nın tanjant doğruları, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa γ ya silindirik helis (Genel helis) denir. $\gamma(s)$ nin bir silindir helis olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$ nin sabit olmasıdır. Eğer τ ve κ sıfırdan farklı sabitler ise helise dairesel helis denir (Yılmaz ve Turgut, 2010).

Tanım 2.1.31. $\alpha: I \to \mathbb{E}^n$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin normali olan bir sabit L doğrusu ile α sabit bir açı yapıyorsa α eğrisine bir slant helis adı verilir, (Yılmaz ve Turgut, 2010).

Tanım 2.1.32. Yarıçapı $r > 0$ ve merkezi orjin olan küre $\mathbb{E}^3$ uzayında aşağıdaki gibi tanımlanır (Bishop, 1975).

$$S^2 = \{p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{E}^3 : \langle p, p \rangle = r^2\}.$$

Tanım 2.1.33. $U = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ ve $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sıfırdan farklı vektörler olsunlar. $\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{V} = \langle \overleftarrow{U}, \overleftarrow{V} \rangle = u_1 v_1 + \ldots u_n v_n$ ifadesine $\overleftarrow{U}$ ve $\overleftarrow{V}$ iççarpımı denir. Eğer $\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{V} = 0$ ise o zaman bu vektörler diktir (ortogonaldir) denir (Carmo, 1976).

Tanım 2.1.34. $\mathbb{E}^n$ de bir $\mathbf{P}$ noktası ve $\mathbb{R}^n$ de bir $\overleftarrow{V}$ vektöründen oluşan $(\mathbf{P}, \overleftarrow{V})$ ikilisine bir tanjant vektör denir. Burada $\mathbf{P}$ tanjant vektörün başlangıç noktası ve V de vektör kısmıdır. Bir tanjant vektör kısaca $\overleftarrow{U}_p = (\mathbf{P}, \overleftarrow{V})$ ile gösterilir (Carmo, 1976).

Tanım 2.1.35. Frenet Eğrisi: C^n sınıfının birim hızlı eğrisi $\beta: I \to \mathbb{E}^n$ bir Frenet eğrisi ise $\beta'(s), \beta''(s), \ldots, \beta^{(n-1)}(s)$ vektörleri eğri boyunca her noktada lineer bağımsızdır. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ çatısı ile $\gamma: I \subset R \to \mathbb{E}^3$ Frenet eğrisi için $V(s) = u(s)\mathbf{T}(s) + v(s)\mathbf{N}(s) + w(s)\mathbf{B}(s)$ ile verilen V vektör alanını düşünelim. Burada u, v, w

$$u^2(s) + v^2(s) + w^2(s) = 1$$

I eğrisine cevap veren fonksiyondur. O zaman V nin $\overline{\gamma}(s)$ integral eğrisi $\mathbb{E}^3$ de I üzerinde bir birim hızlı eğridir (Hacısalihoğlu, 2000).

2.2. Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde de Fermi-Walker türevi Bishop çatısına göre ifade edilen herhangi bir vektör alanı için ve Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerekli durumlar incelendi.

Teorem 2.2.1. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ Bishop çatısı, s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi ve eğri boyunca herhangi bir vektör alanı X olmak üzere, Bishop çatısındaki eğri boyunca **X** vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{X}) + k_2(\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{X})$$

şeklinde ifade edilir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

Lemma 2.2.1. **X** vektör alanının Bishop çatısındaki eğri boyunca Fermi-Walker türevi ile bilinen türevinin çakışması için gerek ve yeter şart

$$X = \lambda(k_1\mathbf{N}_2 - k_2\mathbf{N}_1)$$

olmasıdır. Burada λ sabittir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

Teorem 2.2.2. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ Bishop çatısı ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler olmak üzere s yay parametreli bütün $\alpha(s)$ uzay eğrileri boyunca $X = \lambda_1\mathbf{T} + \lambda_2\mathbf{N}_2 + \lambda_3\mathbf{N}_3$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

Teorem 2.2.3. Bishop çatı vektörleri bütün $\alpha(s)$ eğrileri boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

Sonuç 2.2.1. s yay parametreli bütün $\alpha(s)$ eğrileri boyunca $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ Bishop çatısı non-rotating çatıdır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Öklid 3-Uzayında Bishop Çatısına Göre Manyetik Eğriler

3.1.1. Öklid 3-Uzayında Bishop Çatısına Göre T-Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi

Manyetik alanın $\mathbf{T}$ teget vektör alanını etkilemesi sonucunda elde edilen yörüngeleri $\mathbf{T}$ -manyetik eğriler olarak bilinir. Bu durumda, $\mathbf{D}$ manyetik alanının $\mathbf{T}$ -manyetik eğrileri aşağıdaki Lorentz denklemini sağlayan eğrilerdir (Bozkurt vd., 2014).

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \times \mathbf{D} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}.$$

Önerme 3.1.1.1. α eğrisi, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, k_1, k_2\}$ Bishop sistemi ile Öklid 3-uzayının Bishop çatısına göre $\mathbf{T}$-manyetik eğri olsun. O zaman

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2$$

dir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Teorem 3.1.1.1. α eğrisi uzayda Bishop çatısına göre $\mathbf{T}$-manyetik eğri olsun. $\mathbf{\Phi}(\mathbf{T})$ nin Fermi-Walker türevi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = (k_1^2 + k_2^2 - (k_1 + k_2))\mathbf{T} + k_1'\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2.$$

İspat: $\mathbf{\Phi}(\mathbf{T})$ alanı Fermi-Walker türevinde yerine yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) - k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{T})) + k_2(\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{T})) \tag{3.1.1.2}$$

elde edilir. İlk olarak $\mathbf{\Phi}(\mathbf{T})$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = k_1'\mathbf{N_1} + k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N_1} + k_2'\mathbf{N}_2 + k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N_2}$$

olur. Burada $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N_1}$ ve $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N_2}$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = k_1'\mathbf{N_1} - k_1^2\mathbf{T} + k_2'\mathbf{N}_2 - k_2^2\mathbf{T}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = -(k_1^2 + k_2^2)\mathbf{T} + k_1'\mathbf{N_1} + k_2'\mathbf{N}_2$$

eşitliği bulunur. İkinci olarak $\mathbf{N}_2$ ve $\Phi(\mathbf{T})$ ifadesinin vektörel çarpımını bulalım.

$$\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = \mathbf{N}_2 \wedge (k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2)$$

eşitliğinden

$$\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = -k_1\mathbf{T}$$

ifadesi elde edilir. $-k_1$ ifadesiyle çarpılırsa

$$-k_1(\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{T})) = k_1^2\mathbf{T} \tag{3.1.1.3}$$

bulunur. Son olarak $\mathbf{N}_1$ ve $\mathbf{\Phi}(\mathbf{T})$ nin vektörel çarpımı alınırsa

$$\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = \mathbf{N}_1 \wedge (k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2)$$

olur ve

$$\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = k_2\mathbf{T}$$

ifadesi bulunur. $\mathbf{N}_1$ ve $\mathbf{\Phi}(\mathbf{T})$ nin vektörel çarpımını k_2 ile çarpılırsa

$$k_2\ (\ \mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{T})) = k_2^2\mathbf{T} \tag{3.1.1.4}$$

olur. (3.1.1.2) denkleminde (3.1.1.3) ve (3.1.1.4) denklemleri yerine yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = -(k_1^2 + k_2^2)\mathbf{T} + k_1'\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2 + k_1^2\mathbf{T} + k_2^2\mathbf{T}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = k_1'\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.1.1. Eğer $\Phi(\mathbf{T})$ Fermi-Walker anlamında paralel ise o zaman k_1 ve k_2 eğrilikleri sabittir.

İspat: Teorem (3.1.1.1) den elde ettiğimiz $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})$ ifadesi sıfıra eşit olduğunda Fermi-Walker anlamında paraleldir. Ayrıca

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = 0$$

eşitliğinde $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})$ ifadesini yerine yazılırsa

$$k_1'\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2=0$$

elde edilir. Denklemleri ayrı ayrı sıfıra eşitlediğimizde

$$k_1' = 0,\ k_2' = 0$$

bulunur.

Önerme 3.1.1.2. α eğrisi Bishop çatısına göre $\mathbf{T}$-manyetik eğri olsun. O zaman

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_1) = -k_1\mathbf{T} + p\mathbf{N}_2$$

dir (Kazan ve Karadağ, 2017). Burada

$$p = g(\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_1), \mathbf{N}_2) \text{ dir.}$$

Teorem 3.1.1.2. α eğrisi uzayda $\mathbf{T}$ manyetik eğri olsun. (3.1.1.2) tanımından $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1})$ manyetik eğrisinin Fermi-Walker türevi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) = (-k_1 - pk_2 + p)\mathbf{T} + p'\mathbf{N}_2.$$

İspat: $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{N}_1)$ ifadesi Fermi-Walker türevinde yerine yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) - k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{N}_1)) + k_2(\mathbf{N}_1 \wedge \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{N}_1)) \tag{3.1.1.5}$$

elde edilir. İlk olarak $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{N}_1)$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) = -k_1'\mathbf{T} - k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathrm{T} + p'\mathbf{N}_2 + p\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2.$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) = -k_1'\mathbf{T} - k_1^2\mathbf{N}_1 - k_1k_2\mathbf{N}_2 + p'\mathbf{N}_2 - pk_2\mathbf{T}$$

eşitliği bulunur. İkinci olarak $\mathbf{N}_2$ ve $\Phi(\mathbf{N}_1)$ ifadesinin vektörel çarpımını bulalım.

$$\mathbf{N}_2 \wedge \Phi(\mathbf{N}_1) = \mathbf{N}_2 \wedge (-k_1\mathbf{T} + p\mathbf{N}_2)$$

eşitliğinden

$$\mathbf{N}_2 \wedge \Phi(\mathbf{N}_1) = -k_1\mathbf{N}_1$$

ifadesi elde edilir. $-k_1$ ifadesi ile çarpılırsa

$$-k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \Phi(\mathbf{N}_1) = k_1^2\mathbf{N}_1 \tag{3.1.1.6}$$

bulunur. Böylece $\mathbf{N}_1$ ve $\Phi(\mathbf{N}_1)$ nin vektörel çarpımı alınırsa

$$\mathbf{N}_1 \wedge \Phi(\mathbf{N}_1) = \mathbf{N}_1 \wedge -k_1\mathbf{T} + p\mathbf{N}_2$$

olur ve

$$\mathbf{N}_1 \wedge \Phi(\mathbf{N}_1) = -k_1\mathbf{N}_1$$

ifadesi bulunur. $\mathbf{N}_1$ ve $\Phi(\mathbf{N}_1)$ nin vektörel çarpımı

$$\mathbf{N}_1 \wedge \Phi(\mathbf{N}_1) = \mathbf{N}_1 \wedge (-k_1\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{T} + p\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{N}_2)$$

olur. $\mathbf{N}_1$ ve $\Phi(\mathbf{N}_1)$ nin vektörel çarpımını k_2 ile çarpılırsa

$$k_2(\mathbf{N}_1 \wedge \Phi(\mathbf{N}_1) = k_2k_1\mathbf{N}_2 + p\mathbf{T} \tag{3.1.1.7}$$

bulunur. (3.1.1.5) denkleminde (3.1.1.6) ve (3.1.1.7) denklemleri yerine yazılırsa

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) = (-k_1 - pk_2)\mathbf{T} - k_1^2\mathbf{N}_1 + (-k_1k_2 + p')\mathbf{N}_2 + k_1^2\mathbf{N}_1 + k_1k_2\mathbf{N}_2 + p\mathbf{T}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) = (-k_1 - pk_2 + p)\mathbf{T} + p'\mathbf{N}_2$$

bulunur.

Sonuç 3.1.1.2. $\Phi(\mathbf{N}_1)$ Fermi-Walker anlamında paralel ise o zaman

$$p = sabit,$$
$$k_1 = -pk_2$$

dir.

İspat. $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)$ ifadesi kullanılırsa

$$(-k_1 - pk_2 + p)\mathbf{T} + p'\mathbf{N}_2 = 0$$

elde edilir. Denklemleri ayrı ayrı sıfıra eşitlediğimizde

$$p' = 0,$$
$$k_1 = -pk_2$$

bulunur.

Önerme 3.1.1.3. α eğrisi uzayda $\mathbf{T}$ -manyetik eğrisi olsun. O zaman

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = -k_2\mathbf{T} + p\mathbf{N}_1$$

dir (Kazan ve Karadağ, 2017). Burada

$$p = g(\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_1), \mathbf{N}_2)$$

dir.

Teorem 3.1.1.3. α eğrisi uzayda $\mathbf{T}$ manyetik eğri olsun. $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_2})$ vektör alanının Fermi-Walker türevi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = -k_2'\mathbf{T} - p'\mathbf{N}_1.$$

İspat: $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_2})$ alanını Fermi-Walker türevinde yerine yazarsak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) - k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N_2})) + k_2(\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N_2})) \tag{3.1.1.8}$$

elde edilir. İlk olarak $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_2})$ ifadesinin türevini alacak olursak

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = -k_2'\mathbf{T} - k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - p'\mathbf{N}_1 - p\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1$$

olur. Burada $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}$ ve $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1$ifadelerini yerine yazarsak

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = -k_2'\mathbf{T} - k_2(k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2) - p'\mathbf{N}_1 + pk_1\mathbf{T}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = (-k_2' + pk_1)\mathbf{T} + (-k_1k_2 - p')\mathbf{N}_1 - k_2^2\mathbf{N}_2$$

eşitliği bulunur. İkinci olarak $\mathbf{N}_2$ ve $\Phi(\mathbf{N}_2)$ ifadesinin vektörel çarpımını bulalım.

$$\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = \ \mathbf{N}_2 \ \wedge (\ -k_2\mathbf{T} - p\mathbf{N}_1)$$

eşitliğinden

$$\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = -k_2\mathbf{N}_1 + p\mathbf{T}$$

ifadesi elde edilir. $-k_1$ ifadesi ile çarpılırsa

$$-k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2)) = k_1k_2\mathbf{N}_1 - k_1p\mathbf{T} \tag{3.1.1.9}$$

bulunur. Son olarakta $\mathbf{N}_1$ ve $\Phi(\mathbf{N}_2)$ nin vektörel çarpımını aldığımızda

$$\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_1 \wedge (-k_2\mathbf{T} - p\mathbf{N}_1)$$

olur ve

$$\mathbf{N}_1 \wedge \Phi(\mathbf{N}_2) = k_2\mathbf{N}_2$$

ifadesi bulunur. $\mathbf{N}_1$ ve $\Phi(\mathbf{N}_2)$ nin vektörel çarpımı k_2 ile çarpılırsa

$$k_2(\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2)) = k_2^2\mathbf{N}_2 \tag{3.1.1.10}$$

olur. (3.1.1.8) denkleminde (3.1.1.9) ve (3.1.1.10) denklemleri yerine yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = (-k_2' + pk_1)\mathbf{T} + (-k_1k_2 - p')\mathbf{N}_1 - k_2^2\mathbf{N}_2 + k_1k_2\mathbf{N}_1 - k_1p\mathbf{T} + k_2^2\mathbf{N}_2$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = -k_2'\mathbf{T} - p'\mathbf{N}_1$$

elde edilir ve ispat biter.

Sonuç 3.1.1.3. $\Phi(\mathbf{N}_2)$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel ise k_2 ve p sabittir.

İspat. Teorem (4.1.3) den elde ettiğimiz ifade sıfıra eşit olduğunda Fermi-Walker anlamında paraleldir. Böylece

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = 0$$

eşitliğinde $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)$ ifadesini yerine koyduğumuzda

$$-k_2'\mathbf{T} - p'\mathbf{N}_1 = 0$$

elde edilir. Böylece

$$k_2' = 0, \ p^{\prime} = 0$$

bulunur.

3.1.2. Öklid 3-Uzayında Bishop Çatısına Göre $\mathbf{N_1}$-Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi

Manyetik alanın $\mathbf{N}_1$vektör alanını etkilemesi sonucunda elde edilen yörüngeleri $\mathbf{N}_1$-manyetik eğriler olarak bilinir. Bu durumda, $\mathbf{D}$ manyetik alanının $\mathbf{N}_1$-manyetik eğrileri aşağıdaki Lorentz denklemini sağlayan eğrilerdir (Bozkurt vd., 2014).

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_1) = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{D} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1.$$

Önerme 3.1.2.1. α eğrisi Bishop çatısına göre $\mathbf{N}_1$-manyetik eğri olsun. O zaman

$$\Phi(\mathbf{T}) = k_1\mathbf{N}_1 + \mu\mathbf{N}_2, \tag{3.1.2.1}$$

$$\Phi(\mathbf{N}_1) = -k_1\mathbf{T}\ , \tag{3.1.2.2}$$

$$\Phi(\mathbf{N}_2) = -\mu\mathbf{T}, \tag{3.1.2.3}$$

dir. Burada $\mu = g(\Phi(\mathbf{T}), \mathbf{N}_2)$ dir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Teorem 3.1.2.1. α eğrisi uzayda $\mathbf{N}_1$manyetik eğri olsun. $\Phi(\mathbf{T})$ nin Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = \mu(k_2 - k_1)\mathbf{T} + k_1'\mathbf{N}_1 + \mu'\mathbf{N}_2$$

dir.

İspat. $\mathbf{\Phi}(\mathbf{T})$ alanını Fermi-Walker türevinde yerine yazarsak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) - k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \Phi(\mathbf{T})) + k_2(\mathbf{N}_1 \wedge \Phi(\mathbf{T})) \tag{3.1.2.4}$$

bulunur.

İlk olarak (3.1.2.1) denkleminden $\Phi(\mathbf{T})$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = \nabla_{\mathbf{T}}(k_1\mathbf{N}_1 + \mu\mathbf{N}_2)$$

olur. Burada $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1$ ve $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2$ ifadelerini yerine yazacak olursak

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = k_1'\mathbf{N}_1 - k_1^2\mathbf{T} + \mu'\mathbf{N}_2 - k_1\mu\mathbf{T}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = -(k_1^2 + k_1\mu)\mathbf{T} + k_1'\mathbf{N}_1 + \mu'\mathbf{N}_2$$

eşitliği bulunur. $\mathbf{N}_2$ ve $\mathbf{\Phi}(\mathbf{T})$ ifadesinin vektörel çarpımını bulalım.

$$\mathbf{N}_2 \wedge \ \mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = \mathbf{N}_2 \wedge (k_1\mathbf{N}_1 + \mu\mathbf{N}_2)$$

eşitliğinden

$$\mathbf{N}_2 \wedge \ \mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = -k_1\mathbf{T}$$

ifadesi elde edilir. $-k_1$ ifadesiyle çarpılınca

$$k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \Phi(\mathbf{T})) = k_1^2\mathbf{T} \tag{3.1.2.5}$$

bulunur. $\mathbf{N}_1$ ve $\mathbf{\Phi}(\mathbf{T})$ nin vektörel çarpımını aldığımızda

$$\mathbf{N}_1 \wedge \ \mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = \mathbf{N}_1 \wedge (k_1\mathbf{N}_1 + \mu\mathbf{N}_2)$$

olur.

$$\mathbf{N}_1 \wedge \ \mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = \mu\mathbf{T}$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$k_2(\mathbf{N}_1 \wedge \Phi(\mathbf{T})) = k_2\mu\mathbf{T} \tag{3.1.2.6}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = k_1^{'}\mathbf{N}_1 + \mu^{'}\mathbf{N}_2 + \mu(k_2 - k_1)\mathbf{T}$$

olur.

Sonuç 3.1.2.1. $\Phi(\mathbf{T})$ Fermi-Walker anlamında paralel ise $k_1 = k_2 = sabit$ ve μ sabittir.

Teorem 3.1.2.2.

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1}) \ = -(k_1^{'} + k_1^2)\mathbf{T} + k_1^2\mathbf{N_1} + k_2k_1\mathbf{N_2}$$

İspat: $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1})$ alanını Fermi-Walker türevinde yerine yazarsak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1}) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N_1}) - k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \Phi(\mathbf{N_1})) + k_2(\mathbf{N}_1 \wedge \Phi(\mathbf{N_1})) \tag{3.1.2.7}$$

elde edilir. (3.1.2.2) denkleminde $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1})$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_1) = -k_1^{'}\mathbf{T} - k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}$$

olur. Burada $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}$ ifadelerini yerine yazarsak

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_1) = -(k_1^{'} + k_1^2)\mathbf{T}$$

elde edilir. $\mathbf{N}_2$ ve $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_1)$ ifadesinin vektörel çarpımını bulalım

$$(\mathbf{N_2} \wedge \ \mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1}) = -k_1\mathbf{N_1}$$

ifadesi elde edilir. $-k_1$ ifadesiyle çarpılınca

$$-k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \ \mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1})) = k_1^2\mathbf{N_1} \tag{3.1.2.8}$$

bulunur. Son olarakta $\mathbf{N}_1$ ve $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1})$ nin vektörel çarpımını aldığımızda

$$\mathbf{N}_1 \wedge \ \mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1}) = \mathbf{N_1} \wedge (-k_1\mathbf{T})$$

olur ve

$$\mathbf{N}_1 \wedge \ \mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1}) = k_1\mathbf{N}_2$$

ifadesi bulunur. $\mathbf{N}_1$ ve $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1})$ nin vektörel çarpımını μ ile çarpılırsa

$$k_2(\mathbf{N}_2 \wedge \ \mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1})) = k_2k_1\mathbf{N_2} \qquad (3.1.2.9)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N_1}) \ = -(k_1^{'} + k_1^2)\mathbf{T} + k_1^2\mathbf{N_1} + k_2k_1\mathbf{N_2}$$

bulunur.

Sonuç 3.1.2.2. $\Phi(\mathbf{N_1})$ Fermi-Walker anlamında paralel ise $k_1 = k_2 = 0$ dır.

Teorem 3.1.2.3. α eğrisi $\mathbf{N_1}$ magnetik eğri olsun. (3.1.2.3) denkleminden Öklid-3 uzayında Bishop çatısına göre $\mathbf{N}_2$ manyetik eğrisinin Fermi-Walker türevi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_2}) = -\mu^{'}\mathbf{T}.$$

İspat : $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_2})$ nin Fermi-Walker türevinde yerine yazarsak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N_2}) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N_2}) - k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \Phi(\mathbf{N_2})) + k_2(\mathbf{N}_1 \wedge \Phi(\mathbf{N_2})) \qquad (3.1.2.10)$$

elde edilir. İlk olarak (3.1.2.3) denkleminde $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_2})$ alanının türevi alınırsa

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = -\mu^{'}\mathbf{T} - \mu\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}$$

olur. Burada $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}$ ifadesini yerine yazarsak

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = -\mu^{'}\mathbf{T} - \mu k_1\mathbf{N_1} - \mu k_2\mathbf{N}_2$$

eşitliği bulunur. İkinci olarak $\mathbf{N}_2$ ve $\Phi(\mathbf{N}_2)$ ifadelerinin vektörel çarpımını bulalım.

$$\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = \mathbf{N}_2 \wedge (-\mu\mathbf{T})$$

eşitliğinden

$$\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = -\mu\mathbf{N_1}$$

ifadesi elde edilir. $-k_1$ ifadesiyle çarpılırsa

$$-k_1(\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2)) = \mu k_1\mathbf{N_1} \qquad (3.1.2.11)$$

bulunur. Son olarakta $\mathbf{N}_1$ ve $\Phi(\mathbf{N}_2)$ ifadelerinin vektörel çarpımını aldığımızda

$$\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = -\mu(\mathbf{N_1} \wedge \mathbf{T})$$

eşitliğinden

$$\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) \quad = \mu \mathbf{N}_2$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$k_2(\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2)) = \mu k_2 \mathbf{N}_2 \tag{3.1.2.12}$$

bulunur. (3.1.2.10) denkleminde (3.1.2.11) ve (3.1.2.12) denklemleri yerine yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}} \mathbf{\Phi}(\mathbf{N_2}) = -\mu' \mathbf{T}$$

olur.

Sonuç 3.1.2.3. $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N_1})$ Fermi-Walker anlamında paralel ise $\mu = sabit$ dir.

3.1.3. Öklid 3-Uzayında Bishop Çatısına Göre $\mathbf{N_2}$-Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi

Manyetik alanın $\mathbf{N}_2$ vektör alanını etkilemesi sonucunda elde edilen yörüngeleri $\mathbf{N}_2$-manyetik eğriler olarak bilinir. Bu durumda, **D** manyetik alanının $\mathbf{N}_2$ -manyetik eğrileri aşağıdaki Lorentz denklemini sağlayan eğrilerdir (Bozkurt vd., 2014).

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = \mathbf{N}_2 \times \mathbf{D} = \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{N}_2.$$

Önerme 3.1.3.1. α eğrisi Bishop çatısına göre $\mathbf{N}_2$-manyetik eğri olsun. O zaman

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{T}) = \omega \mathbf{N}_1 + k_2 \mathbf{N}_2,$$

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_1) = -\omega \mathbf{T},$$

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_2) = -k_2 \mathbf{T}$$

dir. Burada $\mu = g(\Phi(\mathbf{T}), \mathbf{N}_2)$ dir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Sonuç 3.1.3.1.

i) $\mathbf{\Phi}(\mathbf{T})$ Fermi-Walker anlamında paralel ise

$$\omega = sabit,$$

$$k_2 = sabit,$$

$$k_1 = \frac{1}{\omega} k_1^2$$

dır

ii) $\mathbf{\Phi}(\mathbf{N}_1)$ Fermi-Walker anlamında paralel ise

$$\omega = sabit$$

dir.

iii) $\mathbf{\Phi}(\mathbf{T})$ Fermi-Walker anlamında paralel ise

$$k_2 = sabit$$

dir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Bishop çatısına göre elde edilen $\mathbf{T}$,$\mathbf{N_1}$,$\mathbf{N_2}$ manyetik eğrilerinin Fermi-Walker türevleri hesaplandı ve bazı önemli sonuçlar verildi. Bu çalışmanın temel amacı bilinen adi türev yardımıyla elde edilen birçok kavram Fermi-Walker türevi ile tanımladığında farklı anlam ve uygulama alanları ortaya çıkarmaktadır. Fermi-Walker türevi geometride ve özellikle paralel vektör alanlarının hareketlerinde önemli bir uygulaması mevcuttur.

Fermi-Walker türevi, Fermi-Walker paraleliği elde edilen dönmeyen çatilar değişik uzay zamanlarında farklı eğriler için elde edilmiştir. Uzayda dikkate değer eğri ailelerinin bir sınıfıda manyetik eğrilerdir. Üçüncü bölümde Öklid 3-uzayında Bishop çatısına göre $\mathbf{T}$,$\mathbf{N_1}$ ve $\mathbf{N_2}$ manyetik eğriler tanıtılmıştır. Manyetik eğriler için Fermi-Walker türevinin hesaplanması önemli ilşkileri ortaya çıkarmaktadır.

3. Bölümde Öklid 3-uzayında Bishop çatısına göre elde edilen manyetik eğrilerinin Fermi-Walker türevleri hesaplanmış ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Benn, I. M., Tucker, R. W. 1989. Wave mechanics and inertial guidance, The American Physical Society, 39 (6), 1594-1601.

Bishop, R. L.1975. There is more than one way to frame a curve, The American Mathematical Monthly, 82 (3), 246-251.

Bozkurt, Z., Gök, I., Yaylı, Y., Ekmekci, F.N. 2014. A new approach for magnetic curves in 3D Riemannian manifolds, Journal of Mathematical Physics 55, 053501.

Carmo, M. P. 1976. Differantial Geometry of Curves and Surfaces, Instituto de Matematica Puro e Applicada(IMPA). Rio de Janeiro, Brazil.

Dandolof, R. 1989. Berry's Phase and Fermi-Walker parallel transport. Physics Letters A, 139 (1-2), 19-20.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt I-II. A. Ü. Fen Fakültesi, Ankara.

Choi J.H., Kim Y.H. 2012. Associated curves of a frenet curve and their aplications, Aplied Mathematics and Computation, 18 (208), 9116-9124.

Karakuş, F., Yaylı, Y. 2012. On the Fermi-Walker derivative and non-rotating frame, Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 9(8), 1-11.

Kazan, A., Karadağ, H.B. 2017. Magnetic Curves According to Bishop Frame and Type-2 Bishop Frame in Euclidean 3-Space, British Journal of Mathematics & Computer Science, 22 (4), 1-18.

Körpınar, T., Turhan, E. 2011. On characterization of B-canal surfaces in terms of biharmonic B-slant helices according to Bishop frame in Heisenberg group Heis ^{3}, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 382, 57–65.

Körpınar, T., Asil, V., Baş, S. 2010. Characterizing inextensible flows of timelike curves according to Bishop frame in Minkowski space, Journal of Vectorial Relativity, 4 (5), 18-25.

Körpınar T., V. Asil, M. T. Sarıaydın and M. İncesu. 2015. A characterization for Bishop equations of parallel curves according to Bishop frame in E^3, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 33 (1), 33-39.

Körpınar ,T., Sarıaydın M.T, Turhan E. 2013. curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space. Advenced Modelling and Optimization, 15, 713-717.

Kula L, Ekmekçi N, Yaylı Y, İlarslan K., 2010. Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space. Turkish Journal of Mathematics, 34, 261-273.

O'Neill, B. 1966. Elementary Differential Geometry. Academic Press, New York.

Özdemir, Z., Gök, I, Yaylı, Y., Ekmekci, F.N. 2015. Notes on magnetic curves in 3D semi-Rieamannian manifolds, Turkish Journal of Mathematics, 39, 412-426

Pripoae, G. T. 2000. Generalized Fermi-Walker parallelism induced by generalized schouthen connections. Balkan Society of Geometers. Differential Geometry and Lie Algebras, 117-125.

Pripoae, G. T.1999. Generalized Fermi-Walker transport, LibertasMath., XIX. 65-69.

Sabuncuoğlu, A. 2006. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, Ankara.

Uzumiya S, Takeuchi N., 2004. New special curves and developable surfaces. Turkish Journal of Mathematics, 28, 153-163.

Walker, A.G. 1932. Relative coordinates. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 52, 345-353.

Weinberg, S. 1972. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, J. Wiley Publ., New York.

Williams M.Z., Stein F.M. 1964. A triple product of vectors in four-space. Math Mag, 37, 230-235.

Yılmaz, S., Turgut, M., 2010. A new version of Bishop frame and an aplication to spherical images, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 371, 764-776.

Yılmaz S, Özyılmaz E, Turgut M. 2010. New spherical indicatrices and their characterizations, Analele Stiint Univ, 18, 337-354.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Cihat ARDİL

Doğum Yeri : Muş

Doğum Tarihi : 10.02.1982

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Muş Anadolu Öğretmen Lisesi (2000)

Lisans : Muş Alparslan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2015)

Yüksek Lisans : Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Devam Ediyor)