T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ SİNİR AĞLARININ ÜSTEL KARARLILIĞI

Veysel GÜVEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2019
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ SİNİR AĞLARININ ÜSTEL KARARLILIĞI

Veysel GÜVEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Haziran-2019
MUŞ

TEZ KABUL VE ONAYI

Veysel GÜVEN tarafından hazırlanan "**Gecikmeli Sinir Ağlarının Üstel Kararlılığı**" adlı tez çalışması 18/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Dr. Öğr. Üyesi Muhammed Recai TÜRKMEN Afyon Kocatepe Üniversitesi-Matematik	……………………
Danışman Doç. Dr. Erdal KORKMAZ Muş Alparslan Üniversitesi-Matematik	……………………
Üye Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU Muş Alparslan Üniversitesi-Matematik	……………………

Yukarıdaki sonuç;
Ensitütü Yönetim Kurulu 21/06/2019 Tarih ve 17/XIII nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Veysel GÜVEN

Tarih:27/06/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GECİKMELİ SİNİR AĞLARININ ÜSTEL KARARLILIĞI

Veysel GÜVEN

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

2019, 27 Sayfa

Jüri
Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Muhammed Recai TÜRKMEN
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Bu tez çalışmasında; gecikmeli sinir ağlarının denge noktasının üstel karalılığı ele alındı. Birinci bölümde; denge noktasının üstel kararlılığı ve sinir ağları hakkında genel bir bilgi verilerek literatürde yapılan çalışmalar özetlendi. İkinci bölümde; çalışmada kullanılacak temel kavramlar verilerek Lyapunov metodu hakkında bilgi verildi. Üçüncü bölümde; gecikmeli sinir ağlarını modellendiren iki farklı diferansiyel denklem sisteminin denge noktasının üstel kararlılığı için yeter şartlar Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak elde edildi. Son bölümde; araştırmacılar için bazı denklem modellerinin denge noktasının global asimptotik kararlılığının araştırılması tavsiye edildi.

Anahtar Kelimeler: Gecikmeli Diferansiyel Denklemler, Lyapunov fonksiyon, Sinir ağları, Üstel kararlılık.

ABSTRACT

MS THESIS

EXPONENTIAL STABILITY OF NEURAL NETWORKS WITH DELAY

Veysel GÜVEN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCEOF MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS SCIENCE

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

2019, 27 Page

Jury
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal KORKMAZ
Jury Member: Asst. Prof. Dr. Muhammed Recai TÜRKMEN
Jury Member: Asst. Prof. Dr. Muaz SEYDAOĞLU

In this thesis; the expnential stability of the equilibrium point of delayed neural networks was studied. In the first chapter; giving the basic properties of the exponential stability and the neural network, some results which are in the literature were introduced. In the second chapter; the basic notions and main idea about Lyapunov method were exhibited. In the third chapter; it was shown that the exponential stability of the equilibrium point of two different systems of differential equations that model delayed neural networks can be obtained by using the second method of Lyapunov. In the last chapter; for the reader to investigating the exponential stability of the equilibrium point of some equation models was advised.

Keywords: Differential Equations with Delay, Exponential stability, Lyapunov function, Neural Networks.

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca her türlü bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, desteğini her zaman yanımda hissettiğim, mesleki açıdan her zaman benim için bir ufuk çizgisi olan ve özellikle bu süreçte bana büyük sabır gösteren çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Erdal KORKMAZ'a teşekkür eder saygı ve şükranlarımı sunarım.

Veysel GÜVEN
MUŞ-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

R	: Reel sayılar kümesi
N	: Doğal sayılar kümesi
(X, d)	: Metrik uzay
$\|.\|$	: Norm
$(X, \|.\|)$	: Normlu uzay
$\ni$	: Öyle ki
δ	: Delta
μ	: Ölçü
λ	: Lambda
(X, τ)	: Topolojik uzay

Kısaltmalar

HSA	: Hücresel Sinir Ağları
GHSA	: Gecikmeli Hücresel Sinir Ağları

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu çalışmada, lineer ve lineer olmayan sistemlerin çözümlerinin kararlılık davranışlarını belirlemek için Lyapunov'un ikinci metodu kullanılacaktır. Bu metodun en büyük avantajı çözüme yönelik herhangi bir bilgi sahibi olmaksızın geniş anlamda kararlılığı elde edebilmektir. Bu metot sinir ağlarının kararlılığı araştırılırken oldukça kullanışlıdır.

Sinir ağlarının temel özellikleri, asenkron paralel işleme sürekli zaman dinamikleri ve ağ elemanlarının global etkileşimidir. Sinir ağların etkileyici uygulamaları, optimizasyon, lineer ve lineer olmayan programlama, ilişkisel bellek, şekil tanıma ve bilgisayar vizyonu gibi çeşitli alanlar için önerilmiştir. Sinir ağları yoğun bir şekilde çalışılmış ve sinyal işleme sistemlerine, özellikle statik görüntü işlemesinde ve doğrusal olmayan cebirsel denklemleri çözmek için başarıyla uygulanmıştır. Bu tür uygulamalar, denge noktalarının veya tek bir denge noktasının varlığına ve kararlılığın nitel özelliklerine dayanmaktadır (Chua ve Yang, 1988a; Forti ve Tesi, 1995). Donanım uygulamasında, amplifikatörlerin sonlu anahtarlama hızları ve iletişim zamanından dolayı zaman gecikmeleri meydana gelir. Zaman gecikmeleri, salınımlara ve ayrıca ağların kararsızlığına neden olabilir. Bu nedenle, gecikmeli sinir ağlarının kararlılık çalışması pratikte gereklidir. Sinir ağların asimptotik kararlılığını sağlayan koşullar verilmiştir (Civalleri ve ark., 1993; Roska ve ark., 1993; Gopalsamy ve He, 1994; Driessche ve Zou, 1998; Arik ve Tavanoglu, 1998; Liao ve Wang, 2000; Cao, 2001; Zhang, 2002; Zhang ve Jin, 2000; Zhan ve Yang, 2001). Üstel kararlılık (Chen, 2001a; Chen, 2001b; Chu, 2001) çalışmalarda tartışılmaktadır. Gecikmeli sinir ağlarının kararlılığı (Xu ve ark., 2001; Joy, 2000; Yi ve ark., 2001) çalışmalarda tartışılmıştır, ancak gecikmeli sinir ağlarının üstel kararlılık tartışılmamıştır.

Keyfi gecikmelere sahip sinir ağlarının denge noktaları için varlık, teklik ve global üstel kararlılığı detaylı bir şekilde araştırılmıştır. Lyapunov fonksiyonu yardımıyla, keyfi gecikmeleri içeren diferansiyel eşitsizlikler elde edildi. (Zhang ve Jin, 2000; Siljiak, 1978) çalışmalarındaki M-matris teorisini kullanarak, diferansiyel eşitsizliklerin kararlılık şartları elde edildi. Diferansiyel eşitsizliklerin nitelik özelliklerinden keyfi gecikmelere sahip sinir ağlarının global üstel kararlılığı için yeter şartlar elde edildi.

Sinir ağlarının önemli bir sınıfı olan Hücresel Sinir Ağları (HSA) sinir ağlarının bazı temel özelliklere sahiptir ve görüntü işleme ve şekil tanıma gibi alanlarda önemli potansiyel uygulamalara sahiptir. Chua ve Yang (1988a) HSA'yı uygulayan devre şeması ve bağlantı düzeni sunmuştur. HSA, sinyal işlemede uygulanabilir ve ayrıca bazı görüntü işleme ve şekil tanıma problemlerini çözmek için de kullanılabilir (Chua ve Yang, 1988b). Bununla birlikte, Gecikmeli Hücresel Sinir Ağları (GHSA) kullanarak bazı dinamik görüntü işleme ve şekil tanıma problemlerini çözmek için gereklidir (Liao, 1994a; Civalleri ve ark., 1993). HSA ve GHSA'nın kararlılığının araştırılmasının teoride önemli bir problem olduğu bilinmektedir ve bu nedenle hem teoride hem de uygulamada önemli bir yeri vardır. Son zamanlarda, HSA'nın kararlılığı için bazı sonuçlar elde edilmiştir (Chua ve Yang, 1988a; Liao, 1994a, 1994b).

2. TEORİK ESASLAR

2.1. Temel kavramlar

Fiziksel fenomen tanımlanan matematiksel modeller ya da denklemler çoğunlukla $x(t_0) = x_0$ başlangıç bilgisi ile birlikte

$$\dot{x} = F(t, x) \tag{2.1}$$

formundaki adı diferansiyel denklemlerdir. Genellikle tüm ölçüm türlerinden kaynaklanan ilk verilerde hatalar olabileceğinden, ilk verilerdeki küçük farklılıkların (2.1) in çözümlerinin istenen davranışını ne kadar etkilediğini bilmek önemlidir. İlk verilerde yeterince küçük bir değişiklik yapılması durumunda, ilgili çözümde önemli bir sapma gözlenirse, o zaman verilen başlangıç verilerinden elde edilen çözüm kabul edilemezdir, çünkü gerekli fenomeni yaklaşık olarak tanımlamamaktadır. Çözümlerin kayda değer bir şekilde istenen davranıştan sapmasına izin vermeyecek koşulların araştırılması problemi, bunun için önemlidir. (2.1) in çözümlerinin davranışlarıyla ilgili bu tür problemlerle ilgilenen matematik alanı genellikle kararlılık teorisi olarak tercih edilir.

$t_0 \geq 0$ sağında var olan (t_0, x_0) başlangıç noktasından geçen (2.1) in bir çözümü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ olsun. Biz $x(t)$ çözümü için kararlılığın temel kavramlarını tanıştırmadan önce t_0 ve x_0 başlangıç değerleri üzerine $x(t, t_0, x_0)$ çözümlerinin sürekli bağımlılığına ilişkin bir sonuç ispatlayacağız.

Teorem 2.1. $F(t, x)$ fonksiyonu $B = \{(t, x): t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, \|x - x_0\| \leq b\}$ kümesinde sürekli ve $(t, x_1), (t, x_2) \in B$ için

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$$

Lipchitz şartını sağlasın. O zaman $x_n \to x_0$ demek $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için $x(t, t_0, x_n) \to x(t, t_0, x_0)$ düzgün demektir (Ahmad ve Rao, 1999).

İspat. Sırasıyla (t_0, x_0) ve (t_0, x_n) den geçen (2.1) in herhangi iki çözümü $x(t, t_0, x_0)$ ve $x(t, t_0, x_n)$ olsun.

$$x(t; t_0, x_n) = x_n + \int_{t_0}^{t} F\big(s, x(s; t_0, x_n)\big)ds,$$

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, x(s; t_0, x_0)\big)ds.$$

Lipchitz şartını kullanarak $t \geq t_0$ için

$$\|x(t,t_0,x_n) - x(t,t_0,x_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \int_{t_0}^{t} K\|x(s,t_0,x_n) - x(s,t_0,x_0)\|ds.$$

Biz şimdi (2.1) in $x(t,t_0,x_0)$ çözümü için çeşitli kararlılık kavramları tanımlarız ve bu kavramların eşdeğer olmadığını örneklerle göstereceğiz. Bundan sonra kararlılıkla biz (t_0,∞) aralığı üzerinde kararlılığı kastediyoruz.

Tanım 2.2. $x(t)$, (2.1) in çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (2.1)in herhangi bir $\dot{x}(t) = x(t,t_0,\bar{x}_0)$ çözümü için $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) in $x(t)$ çözümüne kararlıdır denir (Lyapunov, 1949).

Tanım 2.3. Eğer (2.1) in $x(t)$ çözümü kararlı ve bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ var $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| \to 0$ oluyorsa (2.1) in $x(t)$ çözümüne asimptotik kararlı denir (Lyapunov, 1949).

Tanım 2.4. Eğer (2.1) in $x(t)$ çözümü kararlı değilse kararsız olarak bilinir (Lyapunov, 1949).

Birinci ve üçüncü tanımlar 1892 de A. M. Lyapunov tarafından önerilmiştir. Bunlar (2.1) in sağ tarafından ki küçük farklılıklar altında kararlılığın korunmasına izin vermediği için biraz zayıftır. Bu nedenle, sürekli hareket eden pertürbasyonlar altında çözümlerin kararlılığını tartışmak için aşağıdaki güçlü kavramlara ihtiyacımız var.

Tanım 2.5. $x(t)$, (2.1) in çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (2.1) in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t,t_0,\bar{x}_0)$ çözümü ve $t_1 \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_1$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) in $x(t)$ çözümüne düzgün kararlıdır denir (Presidskii, 1933).

Tanım 2.6. Eğer (2.1)in $x(t)$, çözümü düzgün kararlı ve bir $\delta_0 > 0$ vardır ve her bir $\eta > 0$ için bir $T = T(\eta) > 0$ vardır ki $t_1 \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta_0$ iken her $t \geq t_1 + T$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \eta$ oluyorsa (2.1) in $x(t)$ çözümüne düzgün asimptotik kararlıdır denir (Malkin, 1966).

Tanım 2.7. $x(t)$, (2.1) in çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (2.1) in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t,t_0,\bar{x}_0)$ çözümü ve $t_1 \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) in $x(t)$ çözümüne kuvvetli kararlıdır denir (Ascoli, 1950).

Tanım 2.8. Bir $\lambda > 0$ var ve verilen her $\varepsilon > 0$ için $\forall t \geq t_0$ için

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon),\ \|x(t;x_0,t_0)\| \leq \varepsilon \exp[-\lambda(t - t_0)]$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa (2.1) in sıfır çözümü üstel asimptotik kararlıdır denir (Malkin, 1952).

Not 2.9. Tanım 2.2'deki δ başlangıç anı t_0 bağlı iken Tanım 2.5'deki δ, t_0 dan bağımsızdır. Tanımlardan; kuvvetli kararlı ise düzgün kararlı, düzgün kararlı ise kararlı, düzgün asimptotik kararlı ise asimptotik kararlı olduğu açıktır. Bu ifadelerin tersi genellikle doğru değildir. Bununla birlikte otonom sistemler ve periyodik sistemler ($F(t+w,x) = F(t,x)$) için eğer sıfır (ya da herhangi bir sabit) çözümü kararlı ise düzgün kararlıdır, asimptotik kararlı ise düzgün asimptotik kararlıdır (Ahmad, 1999).

Farz edelim ki

$$x' = f(x) \tag{2.2}$$

otonom sisteminin $x(t) \equiv 0$ sıfır çözümü kararlıdır. (2.2) için biliyoruz ki eğer $x(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ bir çözümü ve $\alpha \geq 0$ ise o zaman $x(t+\alpha)$, $t \in [t_0 - \alpha, \infty)$ da bir çözümdür (Ahmad, 1999).

Not 2.10. $x_0(t)$, C nin bir elemanı olsun. (2.1) sisteminde $x = y + x_0(t)$ alınarak

$$\frac{dy}{dt} = f\big(t, y + x_0(t)\big) - f\big(t, x_0(t)\big) \tag{2.3}$$

denklemine dönüşür. Şu halde (2.3) denkleminin sağ tarafı $G(t,y)$ ile gösterilirse $G(t,0) \equiv 0$ olur. Yani (2.3) denkleminin $y(t) \equiv 0$ çözümü (2.1) denkleminin $x_0(t)$ çözümüne özdeştir. Bu nedenle $x_0(t)$'nin yerine (2.3) denkleminin $y(t) \equiv 0$ kararlılığını tartışmak yeterlidir (Ahmad, 1999).

Örnek 2.11.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemi ele alınsın.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -\int_{t_0}^{t} dt$$

$$\ln x - \ln x_0 = t_0 - t$$

$$\ln x = \ln x_0 + t_0 - t$$

$$x(t) = e^{\ln x_0} e^{t_0 - t}$$

$$x(t) = x_0 e^{t_0 - t}$$

$$\overline{x}(t) = \overline{x_0} e^{t_0 - t}$$

$|\overline{x_0} - x_0| < \delta$ iken

$$|x(t)-\overline{x}(t)| = |x_0 e^{-t+t_0} - \overline{x_0} e^{-t+t_0}| = e^{-t+t_0}|x_0 - \overline{x_0}| < \frac{|x_0 - \overline{x_0}|}{e^{t-t_0}} < \delta$$

$\forall t \geq t_0$ için $\delta = \varepsilon$ olduğunda $x(t)$ çözümü kararlıdır. Dikkat edilirse δ sayısı t_0 dan bağımsızdır. Şu halde $x(t)$ çözümü düzgün kararlıdır. Ayrıcı $t \to \infty$ olduğunda $|\overline{x_0} - x_0| \to 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü asimptotik kararlı hatta düzgün asimptotik kararlıdır.

Örnek 2.12.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemi ele alınsın.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\ln x - \ln x_0 = t - t_0$$

$$x(t) = x_0 e^{t-t_0}$$

$|x_0 - 0| < \delta$ iken

$$|x(t) - 0| = |x_0 e^{t-t_0}| = e^{t-t_0}|x_0| < \delta e^{t-t_0}$$

$\forall t \geq t_0$ için $|x(t)| < \delta$ olacak şekilde bir ε sayısı yoktur. Dolayısıyla sıfır çözüm kararsızdır.

Örnek 2.13. $\frac{dx}{dt} = 0$ denkleminin sıfır çözümü kararlıdır ama asimptotik kararlı değildir.

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(t) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \overline{x}(0) = c \\ \overline{x}(t) = c \end{cases}$$

$|0 - c| < \delta$ iken $|x(t) - \overline{x}(t)| = |\overline{x}(t)| = |c| < \delta = \varepsilon$ olduğundan kararlıdır.

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - \overline{x}(t)| = \lim_{t\to\infty} c = c \neq 0$$

olduğundan asimptotik kararlı değildir.

Örnek 2.14.

$$u' = -\left[13 + 12\sin\log(t+1) + \frac{12t}{t+1}\cos\log(t+1)\right]u \tag{2.4}$$

denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır ama düzgün kararlı değil ve düzgün asimptotik kararlı değildir.

(2.4)'ün genel çözümü

$$u(t) = u(0)\exp[-(13 + 12\sin\log(t+1))t]$$

şeklindedir.

$$|u(t)| \leq |u(0)|e^{-t}$$

olup $t \to \infty$ alınırsa $|u(t)| \to 0$ olduğundan (2.4) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Eğer $t_n = e^{(4n+1)\pi/2} - 1$ ve $\widetilde{t_n} = e^{(4n+3)\pi/2} - 1$ alınırsa

$$\frac{\widetilde{u_n}}{u_n} = \exp[-\widetilde{t_n} + 25t_n] = \exp\left[(25 - e^{\pi})e^{(4n+1)\pi/2} - 24\right]$$

olur. $n \to \infty$ olduğunda $25 > e^{\pi}$ olduğundan dolayı $\frac{\widetilde{u_n}}{u_n} \to$ olur. (2.4) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlı değildir. Dolayısıyla düzgün asimptotik kararlı değildir.

Örnek 2.15.

$$u'' + u = 0 \tag{2.5}$$

denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır ama asimptotik kararlı değildir.(2.5) denklemi $\sin t$ ve $\cos t$ çözümlerin temel bir sistemine sahiptir. Diyelim ki

$$u(t) = u(0)\sin t$$

olsun. $t_1 \geq t$ için

$$|u(t_1)| = |u(0)\sin t_1| \leq |u(0)| = \delta$$

iken $\forall t \geq t_1$ için

$$|u(t)| = |u(0)\sin t| \leq |u(0)| = \delta < \varepsilon$$

olduğundan sıfır çözüm düzgün kararlıdır. Ama $t \to \infty$ iken $|u(t)| \nrightarrow 0$ olduğundan asimptotik kararlı değildir.

Şimdi

$$x'(t) = f(t, x_t),\ x_t = (t + \theta),\ -r \leq \theta \leq 0,\ t \geq 0 \tag{2.6}$$

otonom olmayan gecikmeli diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. Burada $f: [0, \infty) \times C_H \to R^n$ sürekli bir dönüşüm, $f(t, 0) = 0$; $(C, \|.\|)$ sürekli fonksiyonların Banach uzayı; $r > 0$ olmak üzere $\phi: [-r, 0] \to R^n$;

$$C_H = \{\phi \in (C[-r, 0], R^n): \phi < H\}$$

dır. Varlık teorisine göre, $\phi \in C_H$ ve $t \geq 0$ ise, bu takdirde (2.6) denklem sisteminin $[t_0, t_0 + \alpha)$ aralığında $t > t_0$ için en az bir $x(t; t_0, \phi)$ çözümü vardır öyle ki $x_t(t, \phi)$ olur. Burada α pozitif bir sabittir ve $\|.\|$ sembolü ise R^n de bir norm olup

$$\|\phi_t\| = \max_{t-\alpha \leq s \leq t} |\phi(t)|$$

şeklinde tanımlıdır (Burton, 1985).

Tanım 2.16. A ve h pozitif sabitler olmak üzere, $x(t_0, \phi)$ fonksiyonu $[t_0 - h, t_0 + A]$'dan R^n'ye tanımlı olsun. Bu fonksiyon $t = t_0$ $(t_0 \geq 0)$ noktasında $\phi \in C_H$ başlangıç şartına sahip ve aşağıdaki özellikleri sağlasın:

(i) Her $t_0 \leq t \leq t_0 + A$ için $x(t_0, \phi) \in C_H$

(ii) $x(t_0, \phi) = \phi$

(iii) Her $t_0 \leq \mathrm{t} \leq t_0 + A$ için $x(t_0, \phi)$, (2.6) denklemini sağlar.

Bu takdirde $x(t_0, \phi)$ fonksiyonuna (2.6) denkleminin bir çözümü denir (Yoshizawa, 1966).

Teorem 2.17. Eğer her t ve $\phi \in C_H$ için $f(t, \phi)$ sürekli bir fonksiyon; $H_1 < H$, $t_0, 0 \leq t_0 < c$ (burada c pozitif bir sabit) ise, bu takdirde (2.6) denkleminin $t = t_0$ noktasında ϕ başlangıç değerine sahip bir çözüm var ve $t > t_0$ için bu çözüm sürekli türevlenebilirdir. (Yoshizawa, 1966).

2.2. Lyapunov'un İkinci Metodu

Tanım 2.1. Ω, R^n de açık bir küme olmak üzere $V: \Omega \subseteq R^n \rightarrow R,\ 0 \in$ olsun. $V(0) = 0$ ve $\forall x \in \Omega,\ (x \neq 0)$ için,

- $V(x) > 0$ ise V fonksiyonuna pozitif tanımlıdır denir.
- $V(x) < 0$ ise V fonksiyonuna negatif tanımlıdır denir.
- $V(x) \geq 0$ ise V fonksiyonuna pozitif yarı tanımlıdır denir.
- $V(x) \leq 0$ ise V fonksiyonuna negatif yarı tanımlıdır denir.

(Ahmad, 1999).

Tanım 2.2. Sürekli pozitif tanımlı $W: R^n \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna bir wedge denir (Burton, 1985).

Tanım 2.3. Ω, R^n de sıfır vektörünü içeren bir bölge olsun ayrıca $V: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $t\ \geq 0$ için $V(t, 0) = 0$, $V(t, x)$ fonksiyonu pozitif tanımlı ve birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise bu takdirde V ye bir Lyapunov fonksiyonu adı verilir (Burton, 1985).

Teorem 2.4. (Lyapunov Kararlılık Teoremi): Ω orijinin bir komşuluğu olsun. Eğer $V: \Omega \rightarrow R$ diferansiyellenebilir bir fonksiyonu;

- $V(0) = 0$
- $V(x),\ \Omega - \{0\}$'da pozitif tanımlı ise,
- $\dot{V}(x)$ da yarı negatif tanımlı ise,

bu şartları altında orijin ve 0 çözüm kararlıdır. Bu şartlara ek olarak

- $\dot{V}(x), \Omega - \{0\}$ da negatif tanımlı ise, şartını sağlıyorsa orijin ve 0 çözüm asimptotik kararlıdır (Burton, 1985).

Teorem 2.5. (Chetaev Kararsızlık Teoremi): Ω orijinin bir komşuluğu olsun. Aşağıdaki özelliklere sahip bir $V(x)$ fonksiyonu ve Ω'da bir Ω_1 bölgesi verilsin.

- $V(x)$, Ω_1 bölgesinde birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir.
- $V(x)$ ve $\dot{V}(x), \Omega_1$ de pozitif tanımlıdır.
- Ω_1 bölgesinin sınır noktalarında $V(x) = 0$ dir. ($V(x) = 0$ sağlayan tek çözüm, sistemin sıfır çözümüdür.)
- Orijin Ω_1 bölgesinin bir sınır noktasıdır.

Bu şartlar altında orijin ve 0 çözüm kararsızdır (Burton, 1985).

Tanım 2.6. Sürekli ve ϕ'ye göre Lipschitz koşulunu sağlayan bir $V: [0, \infty) \times C_H \rightarrow [0, \infty)$, fonksiyoneline, W bir wedge olmak üzere aşağıdaki şartları sağlaması halinde (2.6) denklemi için bir Lyapunov fonksiyoneli denir:

(i) $W(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi)$, $V(t, 0) = 0$

(ii) $V'_{(2.6)}(t, x_t) = \limsup_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[V\big(t + h, x_{t+h}(t_0, \phi)\big) - V\big(t, x_t(t_0, \phi)\big) \right] \leq 0$

(Burton, 1985).

Teorem 2.7. $V(t, \phi)$, (2.6) denklemi için aşağıdaki şartları sağlayan bir Lyapunov fonksiyoneli ve W_1, W_2 birer wedge fonksiyonu olmak üzere

(i) $W_1(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq W_2(\|\phi(0)\|)$,

(ii) $V'_{(2.6)}(t, x_t) \leq 0$,

ise, o zaman (2.6) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır (Yunfeng, 1992).

Teorem 2.8. $V(t, \phi)$, (2.6) denklemi için aşağıdaki şartları sağlayan bir Lyapunov fonksiyoneli ve W_1, W_2 ve W_3 birer wedge fonksiyonu olmak üzere

(i) $W_1(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq W_2(\|\phi(0)\|)$,

(ii) $V'_{(2.6)}(t, x_t) \leq -W_3(|x(t)|)$,

ise, o zaman (2.6) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Sinha, 1973).

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

3.1. Gecikmeli Sinir Ağlarının Üstel Kararlılığı

Bu bölümde,

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -d_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \left[a_{ij} g_j\left(u_j(t)\right) + b_{ij} g_j\left(u_j\left(t - \tau_{ij}(t)\right)\right)\right] + J_i,$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n \qquad (3.1)$$

gecikmeli diferansiyel denklem ile tanımlı keyfi gecikmelere sahip sinir ağlarının global üstel kararlılığı için yeter şartlar verilecektir. Burada $u_i, i = 1,2, \dots, n,$ için $i.$ nöronu ifade eder ve n nöronların sayısıdır. $A = \left(a_{ij}\right)_{nxn}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{nxn}$ bağıntı matrisleridir, $J = (J_1, J_2, \dots, j_n)^T$ sabit girdi vektörüdür. $g(u) = (g_1(u_1), g_2(u_2), \dots, g_n(u_n))^T$nöronların aktivasyon fonksiyonudur ve $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) > 0.$ Keyfi gecikmeleri $\tau_{ij}, (i, j = 1,2, \dots, n)$ sınırlı fonksiyonlardır. Yani $0 \leq \tau_{ij}(t) \leq \tau$. (3.1) in başlangıç şartları $[-\tau, 0]$ üzerinde sınırlı ve sürekli $\emptyset_i$ fonksiyonları için

$$u_i(s) = \emptyset_i(s), \qquad -\tau \leq s \leq 0,$$

şeklinde tanımlıdır (Zhang, 2003).

Nöronların aktivasyon fonksiyonlarının aşağıdaki iki şartı sağlandığı kabul edilsin.

(A_1). $j \in (1,2, \dots, n)$ olmak üzere L_j Lipschitz sabitleri için

$$\left|g_j(u_j) - g_j(v_j)\right| \leq L_j \left|u_j - v_j\right|$$

$g_j: R \to R$ fonksiyonları global Lipschitz şartını sağlar.

(A_2). $j \in (1,2, \dots, n)$ olmak üzere $\forall u_j, v_j$ için, $g_i: R \to R$ fonksiyonları

$$0 \leq (u_j - v_j)\left|g_j(u_j) - g_j(v_j)\right| \leq L_j\left(u_j - v_j\right)^2$$

şartını sağlar. Burada

$$L = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_n) > 0.$$

Genellikle kullanılan Parçalı lineer fonksiyonlar ve sigmoit fonksiyonları gibi aktivasyon fonksiyonlarının çoğu (A_1) ve (A_2) şartlarını sağlar.

Tanım 3.1. Her $t \geq 0,$ için

$$\|u(t) - u^*\| \leq M\|\emptyset - u^*\|e^{-\lambda t}$$

olacak şekilde $\lambda > 0$ ve $M > 0$ sabitleri mevcutsa, o zaman (3.1) in u^*denge noktası global üstel kararlıdır denir. Burada $\|\emptyset - u^*\| = \max_{1\leq i\leq n} \sup_{s\in[-\tau,0]} |\emptyset_i(s) - u_i^*|$ (Zhang, 2003).

Kolaylık için, bir matris $A = \left(a_{ij}\right)_{nxn}$ ile gösterisin. $|A|$ bir matrisin mutlak değeri $|A| = \left(|a_{ij}|\right)_{nxn}$, $A^* = \left(a_{ij}^*\right)_{nxn}$ ile gösterilsin. Burada $i, j = 1,2,, \ldots n,$ olmak üzere $a_{ii}^* = \max\{0, a_{ii}\}$, $a_{ij}^* = |a_{ij}| (i \neq j)$; $x \in R^n$ için $|x|$ ise $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)^T$ olarak tanımlansın. $\|x\|$ ise,

$$\|x\| = max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

ile tanımlanan bir vektör normunu göstersin.

Sınırlı aktivasyon fonksiyonları için sinir ağların denge noktasının varlığı daima garanti altına alınırken, sınırlı olmayan aktivasyon fonksiyonları için hiçbir şekilde denge noktası yoktur (Forti ve Tesi, 1995).

Tanım 3.2. $A = \left(a_{ij}\right)_{nxn}$ bir reel matris olmak üzere, $a_{ij} \leq 0,\ i, j = 1,2, \ldots, n, (i \neq j)$ ve A matrisinin bütün ardışık minörleri pozitif ise, o zaman A matrisine bir M matrisidir denir (Zhang, 2003).

Chen ve Yang (1988a) aşağıdaki bağlantılı doğrusal olmayan dönüşümün çözümlerini araştırmışlardır.

$$H(u) = -D(u) + (A + B)g(u) + J. \tag{3.2}$$

(3.1)'in denge noktaları $H(u) = 0$ çözümleridir. Eğer $H(u), R^n$ üzerinde bir homeomorfizma ise, $H(u^*) = 0$ olacak şekilde bir tek u^* çözümü vardır. Yani (3.1) denklem sisteminin yalnız bir u^* denge noktası vardır (Chua ve Yang, 1988).

Zhang ve Yang (2001) makalesindeki sonuçlar yardımıyla, bir sonraki teoremi elde etmek kolaydır.

Teorem 3.3. Eğer (A_1) şartı sağlanırsa ve $\alpha = DL^{-1} - (|A| + |B|)$ bir Mmatrisi ise, o zaman her J girdisi için (3.1) sisteminin yalnız bir u^* denge noktası vardır (Zhang, 2003).

Lemma 3.4. Eğer $H(u) \in C^0$

i) $H(u), R^n$ üzeride bire birdir.

ii) $\lim_{\|u\|\to\infty} \|H(u)\| \to \infty$.

şartları sağlarsa, $H(u)$'ya R^n üzerinde bir homeomorfizmdir (Forti ve Tesi, 1995; Zhang ve Yang, 2001).

Teorem 3.5. Eğer (A_2) şartı sağlanırsa ve $\alpha = DL^{-1} - (A^* + |B|)$ bir M matris ise, o zaman her J girdisi için (3.1) sisteminin yalnız bir u^*denge noktası vardır (Zhang, 2003).

İspat. Her J girdisinin eşsiz bir denge noktasına u^* sahip olduğunu ispatlamak için $H(u)$'nın R^n'nin bir homeomorfizmi olduğunu ispatlamaktadır. Devamında, $H(u)$ nun bir homeomorfizm olduğunu iki adımda ispatlamalıyız.

İlk adım olarak, Lemma 3.4'teki şart (i) anın tamamlandığını ispatlamak için, farz edelim ki, $x \neq y$ iken $H(x) = H(y)$ olacak şekilde $x, y \in R^n$ mevcut olsun. Yani H birebir bir dönüşüm olmasın.(3.2) denkleminden

$$-D(x-y) + (A+B)\big(g(x) - g(y)\big) = 0 \qquad (3.3)$$

elde edilir.

(A_2)'den, $g(x) - g(y) = K(x-y)$ olacak şekilde $K = \mathrm{diag}(k_1, L_2, \dots, k_n)$ $(0 \leq K \leq L)$ matris vardır. Böylece (3.3) denklemi

$$[-D + (A+B)K](x-y) = 0 \qquad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\dot{z} = [-D + (A+B)K]z. \qquad (3.5)$$

eşitliğini göz önüne alalım. α bir M matrisi olduğundan Zhang ve Jin (2000)'deki ve Siljiak (1978)'deki çalışmalarındaki M matrisinin özelliğini kullanarak, $-D + (A^* + |B|)L$ bir M matrisidir. Böylece$(i = 1,2, \dots, n)$ için

$$-d_i u \xi_i + \sum_{j=1}^{n} \xi_i \big(a_{ji}^* + |b_{ji}|\big) L_j < 0, i = 1,2, \dots, n \qquad (3.6)$$

olacak şeklide $\xi_i > 0$ vardır.

$$V(z) = \sum_{j=1}^{n} \xi_i |z_i|$$

Lyapunov fonksiyonu göz önüne alınsın. (3.5)'in çözümleri boyunca V'nin V^+D üst sağ türevi hesaplanarak,

$$\begin{aligned} D^+V(z) &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \{\mathrm{sgn}[-d_i z_i + \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) K_j z_j]\}, \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left[-d_i u \xi_i + \sum_{j=1}^{n} \xi_i \big(a_{ji}^* + |b_{ji}|\big) L_j,\right] |z_i| < 0, \quad (\|z\| \neq 0). \end{aligned}$$

elde edilir.

Lyapunov'un kararlılık teoreminden, (3.5) global asimptotik kararlıdır. Böylece matrisi $[-D + (A+B)K]$ kararlı bir matristir ve $det[-D + (A+B)K] \neq 0$ tır. (3.4) denklemi $x = y$ için sağlanır. Şu halde H birebir bir dönüşümdür. Bu ise bir çelişkidir. Lemma 3.4'ün (ii) şartı teorem 3.3'in ispatına benzer olarak yapılır.

Teorem 3.6. (A_1) sağlansın ve $\alpha = DL^{-1} - (|A| + |B|)$ bir M matrisi olsun. O zaman, her J için, (3.1) sisteminin yalnız bir denge noktası vardır ve bu denge noktası global üstel kararlıdır (Zhang, 2003).

İspat. α bir M matris olduğundan ve teorem 3.3'ten, (3.1) siteminin yalnız bir u^* denge noktası vardır. Diyelim ki $x(t) = u(t) - u^*$ olsun. (3.1) sistemi

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j\left(x_j\left(t - \tau_{ij}(t)\right)\right), \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.7}$$

olarak yazılabilir. Burada $j = 1, 2, \dots, n$ için $f_j(x_j) = g_j(x_j + u_j^*) - g_j(u_j^*)$. (3.7)'nin başlangıç şartı $\psi(s) = \phi(s) - u^*, -\tau \le s \le 0$ dir. (3.7) sisteminin $x = 0$ noktasında yalnız bir denge noktası vardır. α, bir M matrisi olduğundan, M matrisinin özelliği uygulanarak, $D - (|A| + |B|)L$ matrisi bir M matrisidir ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$-\xi_i d_i + \sum_{j=1}^{n} \xi_j\left(|a_{ij}| + |b_{ij}|\right)L_j < 0 \; (i = 1, 2, \dots, n)$$

olacak şekilde $\xi_i > 0$ vardır. $i = 1,2, \dots, n$ için

$$F_i(\mu) = -\xi_i(d_i - \mu) + \sum_{j=1}^{n} \xi_i\left(|a_{ij}| + e^{\mu\tau}|b_{ij}|\right)L_j$$

fonksiyonları tanımlansın. Şu halde $i = 1,2, \dots, n$ için

$$F_i(0) = -\xi_i d_i + \sum_{j=1}^{n} \xi_i\left(|a_{ij}| + |b_{ij}|\right)L_j < 0.$$

olarak elde edilir. Böylece

$$-\xi_i(d_i - \lambda) + \sum_{j=1}^{n} \xi_i\left(|a_{ji}^*| + e^{\lambda\tau}|b_{ji}|\right)L_j < 0, i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.8}$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sabiti vardır. Burada, τ (3.1) sinir ağlarının varsayımından dolayı sabittir. Diyelim ki $y_i(t) = e^{\lambda t} x_i(t)$. (3.7)'nin çözümleri boyunca $|y_i(t)|$'nin $D^+|y_i(t)|$ sağ üst türevi hesaplanarak

$$\begin{aligned} D^+|y_i(t)| &= e^{\lambda\tau} \operatorname{sgn} x_i \left\{ -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \left[a_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + b_{ij} f_j\left(x_i\left(\tau - \tau_{ij}(t)\right)\right) \right\} + \lambda e^{\lambda t} |x_i(t)| \end{aligned}$$

$$\leq e^{\lambda t}\left\{(-d_i+\lambda)|x_i(t)|\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[|a_{ij}|\left|\left(x_j(t)\right)\right|\right.$$

$$\left.+|b_{ij}|\left|f_j\left(x_i\left(\tau-\tau_{ij}(t)\right)\right)\right|\right\}$$

$$\leq e^{\lambda t}\left\{(-d_i+\lambda)|x_i(t)|\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}L_j\left[|a_{ij}||x_j(t)|+|b_{ij}|\left|x_i\left(\tau-\tau_{ij}(t)\right)\right|\right]\right\}$$

$$\leq(-d_i+\lambda)|y_i(t)|+\sum_{j=1}^{n}L_j\left[|a_{ij}||y_j(t)|\right.$$

$$\left.+e^{\lambda\tau_{ij}(t)}|b_{ij}|e^{\lambda\left(t-\tau_{ij}(t)\right)}\left|x_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right)\right|\right]$$

$$\leq(-d_i+\lambda)|y_i(t)|\sum_{j=1}^{n}L_j\left[|a_{ij}||y_j(t)|+e^{\lambda\tau}|b_{ij}|\sup_{t-\tau\leq s\leq t}|y_i(s)|\right] \qquad (3.9)$$

elde edilir.

$$\gamma=\{z(l): z_i=\xi_i l, \qquad l>0, \qquad i=1,2,\dots,n\}$$

eğrisi ve

$$\Omega(z)=\{u: 0\leq u\leq z, \qquad z\in\gamma\}$$

kümesi tanımlansın. Diyelim ki $\xi_{min}=min_{1\leq i\leq n}\{\xi_i\}$ ve $\xi_{max}=max_{1\leq i\leq n}\{\xi_i\}$ olsun. $\lambda>0$ sabiti için $l_0=(1+\delta)\|\psi\|/\xi_{min}$ alındığında

$$\{|y|: |y|=e^{\lambda\tau}|\psi(s)|, -\tau\leq s\leq 0\}\subset\Omega\big(z_0(l_0)\big)$$

olarak elde edilir. Yani $-\tau\leq s\leq 0,\ i=1,2,\dots,n$ için

$$|y_i(s)|=e^{\lambda s}|\psi_i(s)|<\xi_i(l_0)$$

dir. Varsayalım ki $t\in[0,+\infty]$ ve $i=1,2,\dots,n$ için $|y_i(t)|<\xi_i l_0$ olsun. Eğer doğru değilse, o zaman $i=1,2,\dots,n$ için

$$|y_i(t_1)|=\xi_i l_0,\ \ D^+|y_i(t_1)|\geq 0, -\tau\leq t\leq t_1$$

olacak şekilde i ve t_1 $(t_1>0)$ vardır. Ancak (3.9) ve (3.8) denklemlerinden

$$D^{+}|y_i(t)| \leq \left[(-d_i+\lambda)\xi_i + \sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|) + e^{\lambda\tau}(|a_{ij}|)\, L_j\xi_i\right] l_0 < 0$$

olarak elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Şu halde $t \in [0, +\infty)$ için $|y_i(t)| < \xi_i l_0$ dir. Hatta $t \geq 0$ için,

$$|x_i(t)| < \xi_i l_0 e^{-\lambda t} \leq (1+\delta)\|\psi\|\xi_{max}/\xi_{min} e^{-\lambda t} = M\|\psi\|e^{-\lambda t}$$

olarak elde edilir. Burada $M = (1+\delta)\,\xi_{max}/\xi_{min}$. Tanım 3.1'den, (3.7) sisteminin sıfır çözümü global üstel kararlıdır, yani (3.1) sisteminin denge noktası global üstel kararlıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

Chen (2001a) ve (2001b) çalışmalarında, sabit gecikmeli sinir ağlarının üstel kararlılığını çalışmak için etkili bir yaklaşım sunmuştur. Ancak keyfi gecikmeli sistemlerin üstel kararlılığını tartışmak için bu yaklaşımı uygulamak zordur. Sinir ağların global asimptotik kararlılığı sağlayan bir koşul Cao'nun (2001) çalışmasında verilmiştir. Cao'nun (2001) çalışmasındaki teorem1'in şartları sağlandığında $\alpha = DL^{-1} - (|A| + |B|)$ matrisi bir M matrisidir. Cao'nun (2001) çalışmasındaki bu koşul Teorem 3.3'ün özel bir halidir. Sabit gecikmeli sinir ağları için kararlılık koşulları daha önceki çalışmalarda tartışılmıştır (Civalleri ve ark., 1993; Chua ve Roska, 1990; Diessche ve Zou, 1998; Arik ve Tavanoğlu, 1998; Liao ve Wang, 2000; Cao, 2001). Bu çalışmalar da Teorem 3.3'ün özel bir halidir. Keyfi gecikmeli sinir ağlarının kararlılığı tartışılmıştır, ancak üstel kararlılığı tartışılmamıştır (Xu ve ark., 2001; Joy, 2000; Yi ve ark., 2001).

Teorem 3.7. (A_2) şartı sağlansın ve $\alpha = DL^{-1} - (A^* + |B|)$ bir M matrisi olsun. O zaman her bir J için (3.1) sisteminin yalnız bir u^* denge noktası vardır ve bu denge noktası üstel kararlıdır (Zhang, 2003).

İspat. α bir M matrisi olduğundan ve Teorem 3.5'ten, (3.1) sisteminin yalnız bir u^* denge noktası vardır. $x(t) = u(t) - u^*$ olsun. (3.1) sistemi (3.7) sistemi olarak yazılabilir. $y_i(t) = e^{\lambda t}x_i(t)$ olsun. (3.7)'nin $|y_i(t)|$ çözümü boyunca $D^{+}|y_i(t)|$ sağ üst türevini hesaplanarak

$$D^{+}|y_i(t)| \leq (-d_i+\lambda)|y_i(t)| + \sum_{j=1}^{n} L_j\left[a_{ij}^{*}|y_i(t)| + e^{\lambda\tau}|b_{ij}| \sup_{t-\tau\leq s\leq t}|y_j(s)|\right]$$

elde edilir. Teorem 3.6'nın ispatına benzer olarak, (3.7) sisteminin denge noktası global üstel kararlıdır.

(Arik ve Tavanoğlu, 1998), (Chen, 2001a) ve (Chen, 2001b) çalışmalardaki sonuçlar Teorem 3.7'nin özel bir halidir.

3.2. Gecikmeli Hücresel Sinir Ağları için Global Üstel Kararlılık Koşulları

Zhou ve Cao (2002) çalışmasında

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j\left(x_j(t-\tau_j)\right) + I_i, \qquad (3.10)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

gecikmeli diferansiyel denklemi ile tanımlı GHSA modelinin bir sınıfını araştırdı. Çoğu yazar, t −ye bağlı olmayan τ_j gecikmeleri için GHSA'nın kararlılığı ve periyodik çözümleri üzerine çalışmıştır. Ancak çok az sayıda yazar t −ye bağlı $\tau_j(t)$ gecikmeleri için GHSA'nın kararlılığını üzerine çalışmıştır. Oysaki t −ye bağlı $\tau_j(t)$ gecikmeleri için GHSA'lar pratikte daha yaygındır. Gecikmelerin sınırlı olduğu bilinmekte olmasına rağmen ve kesin değerleri bilinmemektedir. Pratikte bir dinamik değişim süreci için kesin sabit gecikme neredeyse yoktur. Ancak sabit gecikme, sadece zamana bağlı gecikmelerin ideal bir yaklaşımdır. Bu nedenle zamana bağlı gecikmelere sahip sistemler üzerinde çalışmak, sabit gecikmelere sahip sistemler üzerinde çalışmaktan daha önemlidir (Liao ve Xiao, 2000).

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j\left(x_j(t-\tau_j(t))\right) + I_i, \qquad (3.11)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

ile tanımlı GHSA'yı göz önüne alalım. Burada n, bir sinir ağındaki birim sayısıdır, $x_i(t)$,t anındaki i. birimin durumunu ifade eder, $f_j\left(x_j(t)\right)$,t anındaki j. birimindeki çıktıyı ifade eder, a_{ij}, b_{ij}, I_i, c_i'ler birer sabittir. a_{ij}, t anındaki i. birim üzerinde j. biriminin gücünü ifade eder, b_{ij}, $t-\tau_j(t)$ anındaki i. birim üzerinde j. biriminin gücünü ifade eder. I_i, i. birimdeki dış önyargıyı ifade eder. $\tau_j(t)$, j. aksonu boyunca iletim gecikmesini ifade eder ve $0 \le \tau_j(t) \le \tau$ olup τ bir sabittir. c_i, i. birimin ağdan ayrıldığında ve harici girişlerle bağlantısının kesildiğinde potansiyel resetleme oranını temsil eder (Liao ve Xiao, 2000).

Bu bölümde Liao ve Xiao (2000) makalesinden esinlenerek $\left|a_{ij}(t)\right| \le \rho_{ij}$, $\rho_{ij} \ge 0$ olmak üzere,

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j\left(x_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right) + I_i, \qquad (3.12)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

ile tanımlı GHSA modelinin bir sınıfının denge noktasının global üstel kararlılığı araştırıldı.

Burada, hücre fonksiyonun f_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ çıktısı ile hücrenin durumu arasındaki ilişkilerin her birinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu varsayılmıştır:

(H_1) f_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, R üzerinde sınırlıdır.

(H_2) Herhangi bir $u, v \in R$ için $|f_i(u) - f_i(v)| \le \mu_i |u - v|$ olacak şekilde bir $\mu_i > 0$ sayısı vardır.

(H_2)'den f_i'nin R üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğunu bulmak kolaydır, özellikle, hücrenin çıktısı ile hücrenin durumu arasındaki ilişki $f_i(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$ parçalı bir doğrusal fonksiyonla tanımlanırsa $\mu_i = 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ için f_i fonksiyonu yukarıdaki hipotezleri (H_1) ve (H_2)'yi açıkça sağlar.

Eğer $x = x^* = (x_1^*, \ x_2^*, \dots, x_n^*)^T$, (3.12) sisteminin bir çözümü ise $y_i(t) = x_i(t) - x_i^*$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} &= -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \left[f_j\left(x_j^* + y_i(t)\right) - f_j\left(x_j^*\right) \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \left[f_j\left(x_j^* + y_j\left(t - \tau_j(t)\right)\right) - f_j\left(x_j^*\right) \right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

denkleminin bir çözümüdür.

Lemma 3.1. Hücre fonksiyonunun f_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ çıktısının yukarıdaki (H_1) ve (H_2) hipotezlerin sağlasın. O zaman (3.12) sisteminin bir denge noktası vardır (Zhou ve Cao, 2002).

Lemma 3.2. (3.12) sistemi için, f_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ hücre fonksiyonunun çıktısının yukarıdaki (H_1) ve (H_2)hipotezlerini sağlasın. O zaman (3.12) sisteminin bütün çözümleri $[0, \infty)$ üzerinde sınırlıdır (Zhou ve Cao, 2002).

Lemma 3.3. k_1,k_2 sabit sayıları için $k_1 > k_2 > 0$ olsun. $y(t)$, $[t_0 - \tau, t_0]$ üzerinde negatif olmayan bir sürekli fonksiyon olsun. $t > t_0$ için

$$D^+ y(t) \le -k_1 y(t) + k_2 \bar{y}(t) \tag{3.14}$$

sağlansın. Burada $\bar{y}(t) = \sup_{t-\tau \le s \le t} \{y(s)\} \tau$ ve $\tau \ge 0$ sabittir. $t \ge t_0$ için

$$y(t) \le \bar{y}(t_0) e^{-\lambda(t - t_0)} \tag{3.15}$$

eşitsizliği mevcuttur. Burada λ

$$\lambda = k_1 - k_2 e^{\lambda \tau} \tag{3.16}$$

denkleminin tek pozitif çözümüdür (Zhou ve Cao, 2002).

İspat. İlk önce, (3.16) eşitliğinin tek bir pozitif çözüme sahip olduğunu gösterelim.

$$\Delta(0) = -k_1 + k_2 < 0, \qquad \Delta(k_1) = k_2 e^{k_1\tau} > 0 \text{ ve } \Delta'(\theta) = 1 + k_2 \tau e^{\theta\tau} > 0$$

olduğundan

$$\Delta(\theta) = \theta - k_1 + k_2 e^{\theta\tau} = 0, \theta \in [0, k_1]$$

elde edilir. Böylece $\Delta(\theta)$ kesinlikle monoton artan bir fonksiyondur. Bu nedenle, (3.16) denklemini sağlayan $[0, k_1]$ aralığında tek bir λ vardır.

$$x(t) = \bar{y}(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}, \qquad t_0 - \tau \le t < \beta \tag{3.17}$$

$c > 1$ herhangi bir sabit olsun.

$$y(t) < cx(t), \qquad t_0 - \tau \le t \le t_0$$

elde edilir. Kabul edelim ki $y(t) < cx(t)$ olacak şekilde $t \in (t_0, \beta)$ var olsun. $y(t)$ ve $x(t)$ sürekli fonksiyonlar olduğundan,

$$y(t) < cx(t), \qquad t_0 - \tau \le t < t_1, \qquad y(t_1) = cx(t_1) \tag{3.18}$$

olacak şekilde $t_1 \in (t_0, \beta)$ vardır. Açıkça (3.14) denkleminden

$$D^+y(t_1) \le -k_1 y(t_1) + k_2 \bar{y}(t_1) < -k_1 cx(t_1) + k_2 cx(t_1 - \tau) = cx'(t_1) \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.7) ve (3.8) eşitsizlikleri birlikte düşünüldüğünde, herhangi $\beta > t$ için

$$y(t) < cx(t), \qquad t \in (t_0, \beta) \tag{3.20}$$

olduğu görülür. $c \to 1$ olduğunda, (3.9)' eşitsizliğinden

$$y(t) \le x(t) = \bar{y}(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{3.21}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.4. (3.12) sisteminin bir denge noktası $x = x^*$ olsun. $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ hücre fonksiyonlarının çıktısı yukarıdaki hipotezleri (H_1) ve (H_2) şartlarını sağlasın. Eğer

$$\min_{1\le i\le n}\left(c_i - \mu_i \sum_{j=1}^{n} |\rho_{ij}|\right) > \max_{1\le i\le n}\left(\mu_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ji}|\right) > 0$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman (3.12) sisteminin x^* denge noktası global üstel kararlıdır. (3.16)'nın tek pozitif λ çözümü (3.12) sistemi için üstel Lyapunov fonksiyonudur.

İspat. Lyapunov fonksiyonunu $V_1(y) = \sum_{i=1}^{n} |y_i(t)|$ göz önüne alalım. (3.13) sisteminin çözümü boyunca $V_1(y)$'nin D^+V_1 türevi hesaplanarak,

$$D^+V_1 \quad \le \sum_{i=1}^{n}\left[-c_i|y_i(t)| + \sum_{j=1}^{n} \mu_j |a_{ij}(t)||y_i(t)|\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mu_j|b_{ij}|\left|y_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right|\Bigg]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[c_i-\mu_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}(t)|\right]|y_i(t)|+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_j|b_{ij}|\,|y_j(t-\tau_j(t))|$$

$$\leq \min_{1\leq i\leq n}\left(c_i-\mu_i\sum_{j=1}^{n}|\rho_{ij}|\right)\sum_{i=1}^{n}|y_i(t)|+\max_{1\leq i\leq n}\left(\mu_i\sum_{j=1}^{n}|b_{ji}|\right)\sum_{i=1}^{n}|\bar{y}(t)|$$

$$=-k_1V_1(y)+k_2\bar{V}_1 \tag{3.22}$$

elde edilir. Burada

$$k_1=\min_{1\leq i\leq n}\left(c_i-\mu_i\sum_{j=1}^{n}|\rho_{ij}|\right)>0$$

$$k_2=\max_{1\leq i\leq n}\left(\mu_i\sum_{j=1}^{n}|b_{ji}|\right)>0$$

$$\bar{V}_1(y)=\sum_{i=1}^{n}|\bar{y}(t)|$$

dir. Lemma 3.3’ten,

$$\sum_{j=1}^{n}|y_i(t,t_0,y_0)|=V_1(t)\leq\bar{V}_1(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{3.23}$$

elde edilir. Burada λ, (3.16) denkleminin tek pozitif çözümüdür. (3.23) denkleminden (3.12) sisteminin $x=x^*$ denge noktası global üstel kararlıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.5. (3.12) sisteminin bir denge noktası $x=x^*$ olsun. $f_i(i=1,2,\dots,n)$ hücre fonksiyonlarının çıktısı yukarıdaki hipotezleri (H_1) ve (H_2) şartlarını sağlasın. Eğer

$$\min_{1\leq i\leq e}\left(2c_i-\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_i|\rho_{ij}|+|b_{ij}|+\mu_i|\rho_{ji}|\right)\right)>\max_{1\leq i\leq n}\left(\mu_i\sum_{j=1}^{n}|b_{ji}|\right)>0$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman (3.12) sisteminin x^* denge noktası global üstel kararlıdır. (3.16)'nın tek pozitif λ çözümü (3.12) sistemi için üstel Lyapunov fonksiyonudur.

İspat. Lyapunov fonksiyonunu $V_2(y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2(t)$ göz önüne alalım. (3.13) sisteminin çözümü boyunca $V_2(y)$’nin D^+V_2 türevi hesaplanarak,

$$\frac{dV_2}{dt}\leq\sum_{i=1}^{n}\Bigg[y_i(t)\left(-c_iy_i(t)\right)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\left(f_j(x_j^*+y_i(t)-f_j(x_j^*)\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\left(f_j(x_j^* + y_i(t-\tau_j(t))) - f_j(x_j^*)\right)\Bigg]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\Bigg[-c_i {y_i}^2(t) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j |a_{ij}(t)|\,|y_i(t)||y_j(t)|$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \mu_j |b_{ij}|\,|y_i(t)|\,\left|y_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right|\Bigg]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\Bigg[-c_i {y_i}^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mu_j \left|\rho_{ij}\right|\left({y_i}^2(t) + {y_j}^2(t)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mu_j |b_{ij}|\left({y_i}^2(t) + \bar{y}_j^2(t)\right)\Bigg]$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\left(2c_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\mu_j\left(\left|\rho_{ij}\right| + |b_{ij}|\right) + \mu_i\left|\rho_{ji}\right|\right)\right){y_i}^2(t)\Bigg]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mu_i |b_{ij}| \bar{y}_j^2(t)$$

$$\leq \min_{1\leq i\leq n}\left(2c_i - \sum_{j=1}^{n}\mu_j\left(\left|\rho_{ij}\right| + |b_{ij}| + \mu_i\left|\rho_{ji}\right|\right)\right)V_2(y)$$

$$+\max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_i|b_{ji}|\right)\bar{V}_2(y)$$

$$= -k_1 V_2(y) + k_2 \bar{V}_2(y) \qquad (3.24)$$

Burada

$$k_1 = \min_{1\leq i\leq n}\left(2c_i - \sum_{j=1}^{n}\mu_j\left(\left|\rho_{ij}\right| + |b_{ij}| + \mu_i\left|\rho_{ji}\right|\right)\right) > 0$$

$$k_2 = \max_{1\leq i\leq n}\left(\mu_i \sum_{j=1}^{n}|b_{ji}|\right) > 0$$

$$\bar{V}_2(y) = \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_j^2(t)$$

dir. Lemma 3.3'ten,

$$V_2(y) \leq \bar{V}_2(y(0))e^{-\lambda(t-t_0)} \qquad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) eşitsizliği

$$\|y(t,t_0,y_0)\| \leq \|\bar{y}(t_0,y_0)\| e^{-(\lambda/2)(t-t_0)} \tag{3.26}$$

olarak yazılabilir. Burada λ, (3.16) denkleminin tek pozitif çözümüdür. (3.26) denkleminden (3.12) sisteminin $x = x^*$ denge noktası global üstel kararlıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.6. Kolaylık sağlamak için

$$n = 2, I_1 = I_2 = 1, c_1 = c_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1,$$

$$f_i(x_i) = \frac{1}{2}(|x_i + 1| - |x_i - 1|)(i = 1,2), 0 \leq \tau_i(t) \leq \tau\ (\tau = 1),$$

$$\left(a_{ij}(t)\right)_{2x2} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

$$\left(b_{ij}\right)_{2x2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.8 \\ -0.05 & 0.15 \end{pmatrix}$$

olsun. Şu halde

$$\left(\rho_{ij}\right)_{2x2} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alındığında Teorem 3.4'ün koşullarının sağlandığı ve teorem 3.5'in koşullarının sağlanmadığı kolayca görülür. Teorem 3.4'ten dolayı $k_1 = 1$, $k_2 = 0.95$ olduğundan

$$\lambda = 1 - 0.95e^{\lambda}$$

denkleminin tek pozitif çözümü λ olsun. Bu denklem üstel Lyapunov fonksiyonu olarak kullanıldığında

$$x^* = (x_1^*, x_2^*)^T = (0{,}9131403, 0{,}0222717)^T$$

denge noktası global üstel kararlıdır.

Örnek 3.7. Kolaylık sağlamak için

$$n = 2, I_1 = I_2 = 1, c_1 = c_2 = 4, \mu_1 = \mu_2 = 1,$$

$$f_i(x_i) = \frac{1}{2}(|x_i + 1| - |x_i - 1|)(i = 1,2), 0 \leq \tau_i(t) \leq \tau\ (\tau = 1)$$

$$\left(a_{ij}(t)\right)_{2x2} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin t & \cos t \\ 0 & -2\cos t \end{pmatrix}$$

$$\left(b_{ij}\right)_{2x2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 \\ -0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

olsun. Şu halde

$$\left(\rho_{ij}\right)_{2x2} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

alındığında Teorem 3.5'in koşullarının sağlandığı ve teorem 3.4'ün koşullarının sağlanmadığı kolayca görülür. Teorem 3.5'ten dolayı $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ olduğundan

$$\lambda = 2 - e^{\lambda}$$

denkleminin tek pozitif çözümü λ olsun. Bu denklem üstel Lyapunov fonksiyonu olarak kullanıldığında

$$x^* = (x_1^*, x_2^*)^T = (0{,}7352941, 0{,}4411765)^T$$

denge noktası global üstel kararlıdır.

Örnek 3.8. Kolaylık sağlamak için

$$n = 2, I_1 = I_2 = 1, c_1 = c_2 = 4, \mu_1 = \mu_2 = 1,$$

$$f_i(x_i) = \frac{1}{2}(|x_i + 1| - |x_i - 1|)(i = 1{,}2), 0 \leq \tau_i(t) \leq \tau\ (\tau = 1)$$

$$\left(a_{ij}(t)\right)_{2x2} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin t & \cos t \\ -\cos t & -2\cos t \end{pmatrix}$$

$$\left(b_{ij}\right)_{2x2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

olsun. Şu halde

$$\left(\rho_{ij}\right)_{2x2} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

alındığında hem teorem 3.4'ün koşullarının sağlandığı hem de teorem 3.5'in koşullarının sağlandığı kolayca görülür. Teorem 3.4'ten dolayı $k_1 = 1$, $k_2 = 0{,}6$ olduğundan

$$\lambda = 1 - 0{,}6e^{\lambda}$$

denkleminin tek pozitif çözümü λ olsun. Bu denklem üstel Lyapunov fonksiyonu olarak kullanıldığında

$$x^* = (x_1^*, x_2^*)^T = (0.6060606, 0.1515152)^T$$

denge noktası global üstel kararlıdır. Diğer taraftan Teorem 3.5'ten dolayı $k_1 = 1{,}4$, $k_2 = 0{,}6$ olduğundan

$$\lambda = 1{,}4 - 0{,}6e^{\lambda}$$

denkleminin tek pozitif çözümü λ olsun. Bu denklem üstel Lyapunov fonksiyonu olarak kullanıldığında

$$x^* = (x_1^*, x_2^*)^T = (0.6060606, 0.1515152)^T$$

denge noktası global üstel kararlıdır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Kısaca, değişken gecikmelere sahip büyük bir sinir ağı sınıfı için denge noktasının varlığının, tekliğinin ve global üstel kararlılığının kapsamlı bir analizi sunuldu. Vektör Lyapunov fonksiyon yöntemi ve M-matris teorisi fikrini uygulayarak, gecikmelerden bağımsız olarak global üstel kararlılık için yeterli koşulları elde edildi. Sonuçlar hem simetrik hem de simetrik olmayan ara bağlantı matrislerine ve tüm sürekli sinir hücre aktivasyon fonksiyonlarına uygulanabilir.

Bu çalışmada, genişletilmiş Halanay'ın gecikme diferansiyel eşitsizliği ve Lyapunov fonksiyonlarını kullanarak, zamana bağlı gecikmeler için GHSA'ların denge noktalarının global üstel kararlılığı incelenmiştir. Sunulan sonuçlar bilinmeyen herhangi bir fonksiyondan bağımsızdır ve kullanımı kolay olan cebirsel kriterlere bağlıdır. Ayrıca, (a_{ij}) ve (b_{ij}) bağlantı matrislerinin simetrik olduğu varsayılmamıştır. Yalnızca hücre fonksiyonlarının çıktısı için (H_1) ve (H_2) hipotezlerini sağlaması gerekir.

4.2 Öneriler

Araştırmacılara, bu çalışmayı Hopfield Sinir Ağları ve İki Yönlü İlişkisel Bellek Ağları gibi daha karmaşık sistemlerin denge noktalarının global üstel kararlılığını araştırmaları önerilir.

KAYNAKLAR

Ahmad, S., Rao, M.R.M., 1999. Theory of ordinary differential equations with applications of biology and engineering. *Affiliated East-west Press Private Limited*, New Delhi.

Arik, S., Tavanoglu, V., 1998. Equilibrium analysis of delayed CNNs, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. I, vol. 45, pp. 168-171.

Ascoli, G.,1950. Comments on some stability issues 1 (İtalyanca), *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei*, 9 129–34.

Burton, T.A., 1985. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering, 178. *Academic Press*, Inc., Orlando, FL.

Cao, J., 2001. A set of stability criteria for delayed cellular neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1 48 (4) 494-498.

Civalleri, P.P., Gill, L.M., Pandolfi, L., 1993. On stability of cellular neural networks with delay, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. I, vol. 40, pp. 157-164.

Chen, T., 2001a. Global convergence of delayed dynamical systems, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 12, pp. 1532-1536.

Chen, T., 2001b. Global exponential stability of delayed Hopfield neural networks, *Neural Networks*, vol. 14, pp. 977-980.

Chu, T., 2001. An exponential convergence estimate for analog neural networks with delay, *Physics Letters A*, vol. 283, pp. 113-118.

Chua, L.O., T. Roska, T. 1990. Cellular neural networks with nonlinear and delay-type template elements, *IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications*, 90 12-25

Chun, L.O., Yang, L., 1988a. Cellular neural networks: theory, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1 35 1257-1272.

Chun, L.O., Yang, L., 1988b. Cellular neural networks applications, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1 35 1273-1290.

Driessche, P.V.D., Zou, X., 1998. Global attractivity in delayed Hopfield neural networks models, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol.58, no. 6, pp. 1878-1890.

Forti, M., Tesi, A., 1995. New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. I, vol. 42, pp.354-366.

Gopalsamy, K., He, X., 1994. Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol.76, pp. 344-358.

Joly, M., 2000. Results concerning the absolute stability of delayed neural networks, *Neural Networks*, vol. 13, pp. 613-616.

Liao, X.X., 1994a. Math theory (I) of cellular neural networks (Çince), *Science in China (Series A)* 24 (9) 902- 910.

Liao, X.X., 1994b. Math theory (II) of celular neural networks (Çince), *Science in China (Series A)* 24 (10) 1037-1046.

Liao, X.X., Xiao, D.M., 2000. Globally exponential stability of Hoptield neural networks with time varying delays (Çince), *Acta Electron. Sinica* 28 (4) 87-90.

Liao, T., Wang, F., 2000. Global stability for cellular neural networks with time delay, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 11, pp. 1481-1484.

Lyapunov, A.M., 1949. General problem of movement stability (Rusça), *Annals of Mathematics Studies* 17, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

Malkin, I.G., 1952. Theory of stability motion, *Translated by Atomic Energy Commission, AEC—TR—3352, Moscow*.

Malkin, I.G., 1966. Theory of stability motion (Rusça), *United States Atomic Energy Commission, Tech. ReportABC–TR–3352, Nauka, Moscow*.

Presidskii, K.P., 1933. On Stability of Motion in First Approximation, *Matematicheskii Sbornik*, 49, 284–93.

Roska, T., Wu, C.W., Chua L.O., 1993. Stability of cellular neural networks with dominant nonlinea and delay-type template, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1 40 (4) 270-272.

Siljiak, D.D., 1978. Large-Scale Dynamic Systems-Stability and Structure. *Elsevier*, New York.

Sinha, A.S.C., 1973. On stability of solutions of some third and fourth order delay differential equations, *Information and Control*, 23, 165–172.

Xu, D., Zhao, H., Zhu, H., 2001. Global dynamics of Hopfield neural networks involving variable delays, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 42, pp. 39-45.

Yi, Z., Heng, P.A., Leung, K.S., 2001. Convergence analysis of cellular neural networks with unbounded delay, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. I, vol. 48, pp. 680-687.

Yoshizawa, T., 1966. Stability Theory by Liapunov's Second Method. *The Mathematical Society of Japan*, Tokyo.

Yunfeng, Z., 1992. On stability, boundedness and existence of periodic solution of a kind of third order nonlinear delay differential system. *Annals of Differential Equations*, 8 (2): 249-259.

Zhang, J., 2002. Absolutely exponential stability in delayed cellular neural networks, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 30, no. 4, pp. 395-409.

Zhang, J., 2003. Global exponential stability of neural networks with variable delays, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 50, no. 2, pp. 288-291.

Zhang, J., Jin, X., 2000. Global stability analysis in delayed Hopfield neural networks models, *Neural Networks*, vol.13, no. 7 pp. 745-753.

Zhang, J., Yang, Y., 2001. Global stability analysis of bidirectional associative memory neural networks with time delay, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 29, no. 2, pp. 185-196.

Zhou, D.M., Cao, J.D., 2002. Global exponential stability conditions for cellular neural networks with time-varying delays (Çince), *Applied Mathematics and Computation*, 131 487-496.

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	√	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	√	
Denklem yazımları uygun mu?	√	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	√	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	√	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	√	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	√	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	√	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	√	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	√	
+Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	√	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

	Unvanı Adı SOYADI	İmza
Öğrenci :	Veysel GÜVEN	....
Danışman :	Doç. Dr. Erdal KORKMAZ	....

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum /vermiyorum**.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı
Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI	Tarih	İmza
Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖNLÜ	27.06.2019	....

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Veysel GÜVEN
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Muş-07/01/1987
Telefon	**:**	536 922 54 69
Faks	**:**	
e-mail	**:**	Veyselguven49@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Muş Lisesi, Muş	2007
Üniversite	:	Muş Alparslan Üniversitesi	2015
YüksekLisans	:	Muş Alparslan Üniversitesi	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2017-2019	Muş Final Temel Lisesi	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER

İngilizce,