T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT İNDİSLİ KESİRLİ FARK DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Koray İbrahim ATABEY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2019

MUŞ

T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT İNDİSLİ KESİRLİ FARK DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Koray İbrahim ATABEY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

Haziran-2019
MUŞ

TEZ KABUL VE ONAYI

Doç. Dr. Muhammed ÇINAR danışmanlığında, Koray İbrahim ATABEY tarafından hazırlanan "Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı" adlı tez çalışması .11./..06../2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Mikail ET Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü	....
Danışman Doç. Dr. Muhammed ÇINAR Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi	....
Üye Prof. Dr. Harun POLAT Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	....

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .19./.06../2019 Tarih ve ..16..../...IV.... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

Koray İbrahim ATABEY

Tarih: 11.06.2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİFT İNDİSLİ KESİRLİ FARK DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Koray İbrahim ATABEY

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

2019, 30 Sayfa

Jüri

Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR
Jüri Üyesi: Prof. Dr. Mikail ET
Jüri Üyesi: Prof. Dr. Harun POLAT

Bu çalışmanın amacı, çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı, $(\lambda,\mu)-$ istatistiksel yakınsaklık ve Cesaro, kuvvetli p-Cesaro, De la Vallée-Poussin, kuvvetli p- De la Vallée-Poussin toplanabilirlik tanımlarını vererek bunlar arasındaki ilişkileri incelemek ve istatistiksel yakınsaklık kavramını genişletmektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde tezin konusu hakkında genel bilgiler verilerek tezin amacı vurgulanmış ve sonraki bölümlerden bahsedilmiştir. İkinci bölümde kaynak araştırmasına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde bulgular bölümünü aydınlatmak için bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ve çift indisli kesirli fark dizilerinin $(\lambda,\mu)-$ istatistiksel yakınsaklığı tanımları yapılarak örnek ve teoremlere yer verilmiştir. Son bölümde bazı sonuçlara ulaşılarak bu konu ile ilgili ileride çalışılabilecek alanlara öneride bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: $\lambda-$İstatistiksel yakınsaklık, İstatistiksel yakınsaklık, Kesirli farklar

ABSTRACT

MS THESIS

ON STATISTICAL CONVERGENCE OF DİFFERENCE DOUBLE SEQUENCE OF FRACTİONAL ORDER

Koray İbrahim ATABEY

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS SCIENCE

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed ÇINAR

2019, Page 30

Jury
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed ÇINAR
Jüri Üyesi: Prof. Dr. Mikail ET
Jüri Üyesi: Prof. Dr. Harun POLAT

The aim of this study is to explore the relationship between statistical convergence, double $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$-statistical convergence, Cesaro, p-strongly Cesaro, De la Vallée-Poussin, p-strongly De la Vallée-Poussin summability in statistical convergence of difference double sequence of fractional order via giving their definitions and to expand the definition of statistical convergence.

This thesis insists of five chapters. The first chapter is reserved for the introduction. In this chapter, the aim of the thesis is given by giving general information about the subject of the thesis and the following chapters are mentioned. In the second chapter, the source research is included. In the third chapter, some basic definitions and theorems are given to illuminate the findings section. In the fourth chapter, on statistical convergence of difference double sequences of fractional order and the double $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$ - statistical convergence definitions and examples and theorems are given. In the last chapter, some results were reached and suggestions were made about the area that can be studied in the future.

Keywords: $\lambda -$Statistical Convergence, Fractional Difference and Statistical Convergence

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında göstermiş olduğu her türlü yardım, rehberlik ve çok değerli katkılarından dolayı danışman hocam Doç. Dr. Muhammed ÇINAR' a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca bu süreçte bana destek olan eşim Nejla ATABEY ve kızım Asya ATABEY' e de çok teşekkür ediyorum.

Koray İbrahim ATABEY

MUŞ-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

N	: Doğal sayılar kümesi
R	: Reel sayılar kümesi
$\delta(K)$	: K kümesinin doğal yoğunluğu
c	: Yakınsak dizi uzaylarının kümesi
c_2	: Çift indisli yakınsak dizi uzayı
S	: İstatistiksel yakınsak dizi uzayı
S_2	: İstatistiksel yakınsak çift indisli dizi uzayı
$[C,1,1]$	: Tüm kuvvetli *Cesaro* toplanabilir dizi uzayı
$[\mathrm{V},\lambda,\mu]$	: Tüm kuvvetli (V,λ,μ) toplanabilir dizi uzayı
$\Delta^{\widetilde{\alpha}}(S_2)$	: İstatistiksel yakınsak çift indisli kesirli fark dizilerinin uzayı
$\Delta^{\widetilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$	: (λ,μ) −İstatistiksel yakınsak çift indisli kesirli fark dizilerinin uzayı
$w^2(\Delta_p^{\widetilde{\alpha}})$	: Kuvvetli p- *Cesaro* toplanabilir çift indisli kesirli fark dizilerinin uzayı
$[\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_{\mathrm{p}}^{\widetilde{\alpha}})$	: Kuvvetli p- Vallée-Poussin toplanabilir çift indisli kesirli fark dizilerinin uzayı

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık Analizin çok çalışılan konularından biridir. Yıllar boyunca ve farklı isimler altında *Fourier* analizi teorisinde, *ergodik* teoride, sayı teorisinde, ölçü teorisinde, trigonometrik serilerde, Turnike teorisinde ve *Banach* uzaylarında istatistiksel yakınsama tartışılmış daha sonra dizi uzayları ve toplanabilme teorisine uygulanmıştır. İstatistiksel yakınsaklık *Fast* (1951), *Steinhaus* (1951), *Schoenberg* (1959), *Zygmund* (1979), *Salat* (1980), *Fridy* (1985), *Connor* (1988), *Rath* ve *Tripathy* (1994), Nuray ve Savaş (1995), *Mursaleen* (2000), Savaş (2000), Et ve Nuray (2001), Duman ve Orhan (2004), Güngör ve Gökhan (2005) ve daha birçok bilim adamı tarafından çalışılmıştır.

Bu çalışmanın amacı, çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı, $(\lambda, \mu)-$ istatistiksel yakınsaklık ve Cesaro, kuvvetli p- Cesaro, De la Vallée-Poussin, kuvvetli p- De la Vallée-Poussin toplanabilirlik tanımlarını vererek bunlar arasındaki ilişkileri incelemek ve istatistiksel yakınsaklık kavramını genişletmektir.

Özgün olarak bu tezde "Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı" ve "Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin (λ, μ) $-$İstatistiksel Yakınsaklığı" tanımları verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde kaynak araştırmasına değinilmiş. Üçüncü bölümde ise dördüncü bölümdeki bulgular bölümünü aydınlatmak için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı, çift indisli kesirli fark dizilerinde $(\lambda, \mu)-$ istatistiksel yakınsaklık, Cesaro, kuvvetli p- Cesaro, De la Vallée-Poussin, kuvvetli p- De la Vallée-Poussin toplanabilirlik tanımları yapılarak örnek ve teoremlere yer verilmiştir. Son bölümde bazı sonuçlara ulaşılarak bu konu ile ilgili ileride çalışılabilecek alanla ilgili öneride bulunulmuştur.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

İstatistiksel yakınsaklık fikri, 1935'te Varşova'da yayınlanan *Zygmund* (1979)'un monografisinin ilk baskısında verildi. İstatistiksel yakınsama kavramı, *Steinhaus* (1951) ve Fast (1951) tarafından kısa bir not olarak verildi ve daha sonra bağımsız olarak *Schoenberg* (1959) istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi.

İstatistiksel yakınsaklık, yaklaşık elli yıldan fazla bir süre önce tanıtılsa da, son zamanlarda aktif bir araştırma alanı haline geldi. Farklı matematikçiler istatistiksel yakınsaklığın özelliklerini incelediler ve bu kavramı ölçüm teorisi, trigonometrik seri, yaklaşım teorisi, lokal dışbükey uzaylar, sonlu toplamsal küme fonksiyonları, Banach uzaylarında ve doğal sayı kümesinin Stone-Chech kompaktlaştırmasının alt kümeleri gibi çeşitli alanlarda uyguladılar.

Çift indisli diziler ilk kez Pringsheim (1900) tarafından verildi ve Türkiye'de Türkmenoğlu (1993) tarafından "Bazı Çift İndisli Dizi Uzayları" başlığı altında doktora tezi olarak çalışıldı. Fark dizileri kavramı Kızmaz (1981) tarafından tanımlandı. Et ve Çolak (1995) bu kavramı genelleştirdi. Baliarsingh (2013) kesirli fark operatörlerini kullanarak bazı dizi uzaylarını genelleştirdi, daha sonra Baliarsingh ve Dutta (2015), Baliarsingh (2016) konuya ilişkin çalışmalar yaptılar. Kesirli fark operatörü kullanılarak dizilerin istatistiksel yakınsaklığı Baliarsingh ve ark., (2018) tarafından genelleştirildi.

Yukarıda verilenler kaynaklardan faydalanarak çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı, $(\lambda,\mu)-$ istatistiksel yakınsaklığı ve Cesaro, kuvvetli p-Cesaro, De la Vallée-Poussin, kuvvetli p- De la Vallée-Poussin toplanabilirliği tanımları verilerek bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiş ve istatistiksel yakınsaklık kavramı genişletilmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Tezin bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1. X boş olmayan bir küme ve F' de R veya C kümelerinden birini göstersin.

$$+: XxX \to X, \qquad (x, y) \to x + y,$$

$$. : FxX \to X, \qquad (a, x) \to ax,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in$ X ve $a, b \in$ F için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $x + y = y + x$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3. Her $x \in X$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır;
4. Her $x \in X$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$;
5. Her $x \in X$ için $1. x = x$;
6. $a(x + y) = ax + ay$;
7. $(a + b)x = ax + by$;
8. $(ab)x = a(bx)$.

Bu durumda X' e F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir. $F = R$ alınırsa X' e reel vektör uzayı ve $F = C$ alınırsa X' e kompleks vektör uzayı adı verilir (Musayev ve Alp., 2000).

Tanım 3.2. X bir F cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$$\|.\|: X \to R^+, \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in F$ için

N1. $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

N2. $\|ax\| = |a|\|x\|$;

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|$ dönüşümü X üzerinde bir norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir (Musayev ve Alp., 2000).

Tanım 3.3. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzaydaki her *Cauchy* dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* adı verilir (Musayev ve Alp., 2000).

Kompleks terimli tüm $x = (x_k)$, $(k = 1, 2, 3, \dots)$ dizileri kümesini w ile göstereceğiz. $x = (x_k), y = (y_k) \in w$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$\ell_\infty = \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\}$$

sınırlı,

$$c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k \;\; mevcut\}$$

yakınsak,

$$c_0 = \{x = (x_k) : \lim_k x_k = 0\}$$

sıfır dizileri uzayı, $\|x\| = \sup_k |x_k|$ normu ile birer Banach uzayıdır (Musayev ve Alp., 2000).

Tanım 3.4. X boş olmayan bir küme ve $k \in N^+$olmak üzere $x_k : N^+ \to X$ fonksiyonuna dizi denir. Diziler değer kümesine göre isimlendirilirler; $X = R$ olduğunda reel terimli dizi, $X = C$ olduğunda kompleks terimli dizi olarak söylenir (Musayev ve Alp., 2000).

Tanım 3.5. $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi , $L \in R$ olmak üzere $\forall\, \varepsilon > 0$ için öyle bir $N_0 \in N$ var ve her $k \geq N_0(\varepsilon) \in N$ için $|x_k - L| \leq \varepsilon$ oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi L'ye yakınsıyor denir ve $x_k \to L$ şeklinde gösterilir (Musayev ve Alp., 2000).

Tanım 3.6. $x = (x_k)$ dizi verilsin. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L'ye kuvvetli *Cesaro* toplanabilirdir. Tüm kuvvetli *Cesaro* toplanabilir dizi uzayını [C,1] şeklinde, yani

$$[C, 1] = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0, bazı\ L\ ler\ için \right\}$$

olarak tanımlayacağız **(**Boss ve Cass, 2000).

Tanım 3.7. N doğal sayılar kümesi ve X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere

$$f: NxN \rightarrow X$$
$$(j,k) \rightarrow f(j,k) = x_{jk}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna "çift indisli dizi" denir. Çift indisli $x = (x_{jk})$ dizisini

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & \cdots & x_{0k} \\ x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{j0} & x_{j1} & \ldots & x_{jk} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz (Burkill ve Burkill, 1980).

Bu çalışmada

$$w^2 = \{x = (x_{jk}) : \forall\, j,k \in N \; için \; (x_{jk}) \in C\}$$

ile tüm kompleks terimli çift indisli dizi uzaylarını,

$$l_\infty{}^2 = \{x = (x_{jk}) : \forall\, j,k \in N \; için \; \sup_{j,k\geq 1} |\, x_{jk}| < \infty\}$$

ile çift indisli sınırlı dizi uzaylarını,

$$c^2 = \{x = (x_{jk}) : \forall\, j,k \in N \; için \; \lim_{j,k\to\infty} x_{jk} \; mevcut\}$$

ile çift indisli yakınsak dizi uzaylarını,

$$c_0{}^2 = \{x = (x_{jk}) : \forall\, j,k \in N \; için \; \lim_{j,k\to\infty} x_{jk} = 0\}$$

ile çift indisli sıfıra yakınsayan dizilerin uzayını göstereceğiz (Türkmenoğlu, 1993).

Tanım 3.8. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için öyle $N_0 \in N$ var ve tüm $j,k \geq N_0$ için $|x_{jk} - L| \leq \varepsilon$ oluyorsa $x = (x_{jk})$ dizisinin *Pringsheim* limiti L dir denir (Pringsheim, 1900).

Tanım 3.9. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için öyle $N_0 \in N$ ve $M_0 \in N$ sayıları var ve tüm $j,m \geq N_0$, $k,n \geq M_0$ için $|x_{mn} - x_{jk}| \leq \varepsilon$ oluyorsa $x = (x_{jk})$ dizisine bir *Cauchy* dizisi denir (Pringsheim, 1900).

Tanım 3.10. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. Tüm $j,k \in N$ için öyle bir $M > 0$ sayısı var ve $|\, x_{jk}| < M$ oluyorsa $x = (x_{jk})$ dizisi sınırlıdır denir

(Mursaleen ve Edely, 2003).

3.2. Doğal Yoğunluk Fonksiyonu ve İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.11 Doğal yoğunluk fonksiyonu, K doğal sayıların bir alt kümesi olmak üzere

$$\delta: K \subset N \to [0,1]$$

olarak tanımlanır. $|K(n)|$ doğal sayıların bir K alt kümesini n' den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta_1(K) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{|K(n)|}{n}$$

ifadesine K kümesinin doğal yoğunluğu ya da yoğunluğu denir. $(\frac{K(n)}{n})$ dizisinin limiti mevcut ise K kümesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K(n)|}{n}$$

şeklinde tanımlanır (Niven ve Zuckerman 1980).

Tanım 3.12 $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in N: |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L' ye istatistiksel yakınsaktır denir.

$$\mathrm{st} - \lim_{k\to\infty} x_k = \mathrm{L}$$

veya

$$x_k \to L(S)$$

şeklinde gösterilir (Fast, 1951).

Teorem 3.13. Bir dizi yakınsaksa aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır (Fridy, 1985).

İspat: $x_k \to L$ olsun. O halde $\forall\, \varepsilon > 0$ için öyle bir $N_0 \in N$ var ve her $k \geq N_0(\varepsilon) \in N$ için $|x_k - L| \leq \varepsilon$ oluyor demektir. Fakat $k \leq N_0$ için $|x_k - L| \geq \varepsilon$ tir. Buda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}. N_0 = 0$$

anlamına gelir ki $x_k \to L(S)$ sonucuna bizi ulaştırır. Bu teoremin tersi doğru değildir bunu aşağıdaki örnekle gösterebiliriz.

Örnek 3.14.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}\,, & k = m^2 \\ 1\,, & k \neq m^2 \end{cases} \quad m \in N$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini inceleyelim. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n\colon |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n\colon x_k \neq 1\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sqrt{n} = 0$$

olduğundan $st - \lim x = 1$ olur. Buna rağmen dizi ne sınırlıdır ne de yakınsaktır.

Tanım 3.15. $\forall\, \varepsilon > 0$ ve $h.h.k$ için $\left|x_k - x_{N_0}\right| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_0(\varepsilon) \in N$ varsa, yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n\colon \left|x_k - x_{N_0}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy* dizi denir (Fridy, 1985).

Tanım 3.16. Tüm pozitif reel sayıların azalmayan, sonsuza giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \qquad \lambda_1 = 0$$

koşulunu sağlayan $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesini Λ sembolüyle göstereceğiz. (Mursaleen, 2000).

Tezde $n_0 \in N = \{1, 2, 3, ...\}$ olmak üzere N_{n_0} kümesini $N_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ şeklinde tanımlayacağız.

Tanım 3.17. $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, pozitif reel sayıların azalmayan, sonsuza giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \qquad \lambda_1 = 0$$

$$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$$

koşulunu sağlayan bir dizisi olsun. Genelleştirilmiş De la Vallée-Poussin ortalaması

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j\in I_n} x_j$$

şeklinde tanımlanır. $n \to \infty$ iken $t_n(x) \to L$ gidiyorsa $x = (x_k)$ dizisi L' ye $(\mathrm{V}, \lambda) -$ toplanabilirdir denir (Mursaleen, 2000).

Tanım 3.18. $K \subset N$ olsun ve K'nın $\lambda -$yoğunluğunu

$$\delta_\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n\colon k \in K\}|$$

olarak tanımlanır. Burada $\lambda_n = n$ olması durumunda K'nın $\lambda -$yoğunluğunu $\delta_\lambda(K)$, K'nın doğal yoğunluğuna dönüşür. Her $K \subset N$ için $(\lambda_n/n) \leq 1$ ise $\delta(K) \leq \delta_\lambda(K)$ olur (Mursaleen, 2000).

Tanım 3.19. $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| > \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi L ye λ −istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_\lambda - \lim_{k\to\infty} x_k = L$$

şeklinde gösterilir. Tüm λ −istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini S_λ ile göstereceğiz (Mursaleen, 2000).

Tanım 3.20. $x = (x_k)$ bir dizi ve $M > 0$ olmak üzere

$$\delta_\lambda(\{k \le n : |x_k| > M\}) = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi λ −istatistiksel sınırlıdır denir (Mursaleen ve ark., 2010).

Tanım 3.21. $K \subset NxN$ ve $j \le m,\ k \le n$ olmak üzere $K(m,n)$ kümesinin elemanlarını (j,k) olarak kabul edelim ve $K(m,n)$ kümesini

$$K(m,n) = \{j \le m \ ve \ k \le n : (j,k) \in K\}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\delta_2(K) = \lim_{m,n\to\infty} \inf \frac{|K(m,n)|}{mn}$$

ifadesi K kümesinin doğal yoğunluğudur. $\frac{|K(m,n)|}{mn}$ kümesinin limiti tek ise K kümesinin doğal yoğunluğu aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\delta_2(K) = (P) - \lim_{m,n\to\infty} \frac{|K(m,n)|}{mn}$$

(Mursaleen ve Edely, 2003).

Örnek 3.22. $K = \{(j^2, k^2) : j,k \in N\}$ olarak tanımlarsa K kümesinin yoğunluğu

$$\delta_2(K) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} |K(m,n)| \le \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \left(\sqrt{m}\sqrt{n}\right) = 0$$

olur (Mursaleen ve Edely, 2003).

Tanım 3.23. $x = (x_{jk})$ reel terimli çift indisli bir dizi olmak üzere,

$$\delta_2\left(\{(j,k);\ j \le m \ ve \ k \le n : \left| x_{jk} - L \right| \ge \varepsilon\}\right) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_2 - \lim_{j,k\to\infty} x_{jk} = \mathrm{L}$$

şeklinde gösterilir. Tüm çift indisli istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_2 ile gösterilir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Örnek 3.24. $x = (\, x_{jk})$ reel terimli çift indisli dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$x_{jk} = \begin{cases} jk, & j\ ve\ k\ tam\ kare \\ 1\ , & diğer\ durumda \end{cases}$$

çift indisli dizisi ne yakınsaktır ne de sınırlıdır. Fakat $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$|\{(\mathrm{j,k});\ \mathrm{j} \le \mathrm{m}\ \mathrm{ve}\ \mathrm{k} \le \mathrm{n} : |x_{jk} - 1| \ge \varepsilon\}| \le \sqrt{m}\sqrt{n}$$

ve

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} |\{(\mathrm{j,k});\ \mathrm{j} \le \mathrm{m}\ \mathrm{ve}\ \mathrm{k} \le \mathrm{n} : |\, x_{jk} - 1| \ge \varepsilon\}| \le \lim_{m,n\to\infty} \frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn} = 0$$

$$st_2 - \lim_{j,k\to\infty} x_{jk} = 1$$

olur.

Sonuçlar 3.25.

i. Eğer bir $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi yakınsaksa aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir.

ii. $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisinin satır ve sütunları sonlu ise $x = (x_{jk})$ dizisi istatistiksel yakınsaktır. s_1 ve s_2 sonlu reel sayılar olmak üzere

$$K(m,n) \le s_1 m + s_2 n$$

iii. Eğer bir $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi L ye istatistiksel yakınsaksa L tektir.

$x = (x_{jk})$ dizisi istatistiksel yakınsaksa bu dizinin sınırlı ya da yakınsak olmasına gerek yoktur (Örnek 3.2.14. deki gibi) (Mursaleen ve Edely, 2003).

Tanım 3.26. $\lambda = (\lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_n)$ sonsuza giden, pozitif sayıların azalmayan ve

$$\lambda_{m+1} \le \lambda_m + 1, \qquad \lambda_1 = 0$$

$$\mu_{n+1} \le \mu_n + 1, \qquad \mu_1 = 0$$

koşullarını sağlayan iki dizi olsun. $K \subset NxN$ alalım ve K nın (λ, μ) yoğunluğunu

$$\delta_{\lambda,\mu}(K) = (P) \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{m - \lambda_m + 1 \le j \le m, n - \mu_n + 1 \le k \le n : (j,k) \in K\}|$$

şeklinde tanımlayacağız.

$\lambda_m = m,\ \mu_n = n$ olduğu durumda $\delta_{\lambda,\mu}(K)$ yoğunluğu $\delta_2(K)$ yoğunluğuna indirgenir. Her $K \subset NxN$ için $\lambda_m/m \le 1$ ve $\mu_n/n \le 1$ ise $\delta_2(K) \le \delta_{\lambda,\mu}(K)$ tir (Mursaleen ve ark., 2010).

Tanım 3.27. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi, $\forall\ \varepsilon > 0$ için $K \subset NxN$

$$K = \{j \in J_m, k \in I_n: |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

olarak tanımlandığında $\delta_{\lambda,\mu}(K) = 0$ oluyorsa $x = (x_{jk})$ dizisi L' ye (λ, μ) istatistiksel yakınsaktır denir. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\delta_{\lambda,\mu}(K) = (P) \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \left|\left\{j \in J_m, k \in I_n: \left|x_{jk} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına (λ, μ) istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_{\lambda\mu} - \lim_{m,n\to\infty} x_{jk} =$ L şeklinde gösterilir. Tüm (λ, μ) istatistiksel yakınsak çift indisli dizilerin kümesini $S_{\lambda,\mu}$ ile gösterilir.

Eğer $\lambda_m = m,\ \ \mu_n = n$ ise $S_{\lambda,\mu},\ \ S_2$ ye indirgenir. $\delta_2(K) \leq \delta_{\lambda,\mu}(K)$ olduğu için $S_{\lambda,\mu} \subset S_2$ kapsaması elde edilir (Mursaleen ve ark., 2010).

Tanım 3.28. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi ve $M > 0$ olmak üzere;

$$\delta_{\lambda,\mu}(\{(j,k): |x_{jk}| > M\}) = 0$$

oluyorsa $x = (x_{jk})$ dizisi (λ, μ) istatistiksel sınırlıdır denir (Mursaleen ve ark., 2010).

Tanım 3.29. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi, $\lambda_m\ ve\ \mu_n \in \Lambda$, $I_n = [n - \mu_n + 1, n]$ ve $J_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ olmak üzere

$$t_{m,n}(x) = \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j\in J_m} \sum_{k\in I_n} x_{jk}$$

toplamına çift indisli diziler için De la Vallée-Poussin ortalaması denir (Mursaleen ve ark., 2010).

Tanım 3.30. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olmak üzere;

$$(P) - \lim_{m,n\to\infty} t_{m,n}\left(|x_{jk} - L|\right) = 0$$

ise $x = (x_{jk})$, L ye kuvvetli $(\mathrm{V}, \lambda, \mu)$ toplanabilirdir denir. Tüm kuvvetli $(\mathrm{V}, \lambda, \mu)$ toplanabilir dizilerin kümesini $[\mathrm{V}, \lambda, \mu]$ ile göstereceğiz.

Eğer $\lambda_m = m,\ \ \ \mu_n = n$ olduğu durumda kuvvetli $(\mathrm{V}, \lambda, \mu)$ −toplanabilirlik, kuvvetli Cesaro toplanabilirliğe indirgenir (Mursaleen ve ark., 2010).

Teorem 3.31. $\lambda = (\lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_n)$ sonsuza giden, pozitif sayıların azalmayan ve

$$\lambda_{m+1} \leq \lambda_m + 1, \qquad \lambda_1 = 0$$

$$\mu_{n+1} \leq \mu_n + 1, \qquad \mu_1 = 0$$

koşullarını sağlayan iki dizi olsun. Bu durumda;

i. $x_{jk} \to L$ [V, λ, μ] iken $x_{jk} \to L$ $(S_{\lambda,\mu})$ tır. Fakat tersi doğru değildir.

ii. Eğer $x_{jk} \in {l_2}^{\infty}$ ve $x_{jk} \to L$ $(S_{\lambda,\mu})$ ise $x_{jk} \to L$ [V, λ, μ] tır ve böylece $x_{jk} \to L[C,1,1]$ tir.

iii. ${S_{\lambda,\mu}}^{\infty} = [V,\lambda,\mu] \cap {l_2}^{\infty}$ (Mursaleen ve ark., 2010).

3.3 Fark Dizileri

Fark dizileri kavramı ilk kez Kızmaz (1981) tarafından 1981 yılında tanımlandı. $x = (x_k)$ kompleks terimli dizi ve $k \in N$ olmak üzere

$$\Delta x = (\Delta x)_k = (x_k - x_{k+1})$$

$\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları Kızmaz(1981) tarafından

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) \colon \Delta x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) \colon \Delta x \in c\}$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) \colon \Delta x \in c_0\}$$

olarak tanımlandı ve

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normuyla birer *Banach* uzayı oldukları gösterildi.

$x = (x_k)$ kompleks terimli dizi ve $k, m \in N$ olsun. Et ve Çolak (1995)

$$\Delta^0 x = (x)_k \,, \Delta x = (x_k - x_{k+1})$$

$$\Delta^m x = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$$

$$(\Delta^m x)_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) \colon \Delta^m x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) \colon \Delta^m x \in c\}$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) \colon \Delta^m x \in c_0\}$$

uzaylarına genelleştirdiler ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normuyla birer *Banach* uzayı olduklarını gösterdiler.

3.4. Kesirli Fark Dizileri

Tanım 3.32. Gamma fonksiyonu $\alpha \notin \{0,-1,-2,-3\ ,\dots\}$ ve α reel sayı olmak üzere;

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$$

olarak tanımlanır ve

i. α herhangi bir doğal sayı olursa $\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$

Örneğin $\Gamma(1)=1!\ ,\Gamma(2)=1!\ ,\Gamma(3)=2!\ ,\Gamma(4)=3!$ ...

ii. $\alpha \notin \{0,-1,-2,-3,\dots\}$ ve α reel sayı olursa $\Gamma(\alpha+1)=\alpha.\Gamma(\alpha)$ elde edilir.

w tüm reel değerli dizi uzayını göstermek üzere $x=(x_k)\in w$, $\alpha \notin \{0,-1,-2,-3,\dots\}$ ve α reel sayı olmak üzere fark operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlayacağız;

$$(\Delta^{\alpha}x)_{\mathrm{k}}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(\alpha+1)}{i!\,\Gamma(\alpha-i+1)}x_{k+i}$$

$$(\Delta^{(\alpha)}x)_{\mathrm{k}}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(\alpha+1)}{i!\,\Gamma(\alpha-i+1)}x_{k-i}$$

$$(\Delta^{-\alpha}x)_{\mathrm{k}}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(1-\alpha)}{i!\,\Gamma(1-\alpha-i)}x_{k+i}$$

$$(\Delta^{(-\alpha)}x)_{\mathrm{k}}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(1-\alpha)}{i!\,\Gamma(1-\alpha-i)}x_{k-i}$$

ilk iki operatörün açılımı yapılırsa;

$$(\Delta^{\alpha}x)_k=x_k-\alpha.x_{k+1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k+2}-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k+3}+\cdots$$

$$(\Delta^{(\alpha)}x)_k=x_k-\alpha.x_{k-1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k-2}-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k-3}+\cdots$$

elde edilir (Baliarsingh, 2013). Δ^{α} ve $\Delta^{(\alpha)}$ için;

i. $\alpha=1$ durumunda Δ^{α} operatörü Kızmaz (1981) tarafından tanımlanan

$$(\Delta x)_k=(x_k-x_{k+1})$$

operatörüne indirgenir.

ii. $\alpha=m\ (m\in N)$ durumunda Δ^{α} operatörü Et ve Çolak (1995) tarafından verilen

$$(\Delta^m x)_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

operatörüne indirgenir.

Fark operatörlerinde kesirli olan αlar $\tilde{\alpha}$ ile gösterilerek fark operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(\Delta^{\tilde{\alpha}} x)_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{i!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-i+1)} x_{k+i}$$

(Baliarsingh, 2013).

Kesir dereceli fark operatörü çift indisli diziler için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m!\,n!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-m+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-n+1)} x_{j+m,k+n}$$

$$\Delta^{(\tilde{\alpha})}(x_{jk}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m!\,n!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-m+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-n+1)} x_{j-m,k-n}$$

$$\Delta^{-\tilde{\alpha}}(x_{jk}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(1-\tilde{\alpha})^2}{m!\,n!\,\Gamma(1-\tilde{\alpha}-m)\Gamma(1-\tilde{\alpha}-n)} x_{j+m,k+n}$$

$$\Delta^{-(\tilde{\alpha})}(x_{jk}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(1-\tilde{\alpha})^2}{m!\,n!\,\Gamma(1-\tilde{\alpha}-m)\Gamma(1-\tilde{\alpha}-n)} x_{j-m,k-n}$$

$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}$ için bu operatörün açılımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\Delta^{\frac{1}{2}}(x_{jk}) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}{m!\,n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n+1\right)} x_{j+m,k+n} \\
&= x_{j,k} - \frac{1}{2}x_{j,k+1} - \frac{1}{8}x_{j,k+2} - \frac{1}{16}x_{j,k+3} - \frac{5}{128}x_{j,k+4} - \cdots - \frac{1}{2}x_{j+1,k} \\
&\quad \frac{1}{4}x_{j+1,k+1} + \frac{1}{16}x_{j+1,k+2} + \frac{1}{32}x_{j+1,k+3} + \frac{5}{256}x_{j+1,k+4} + \cdots - \frac{1}{2}x_{j+2,k} \\
&\quad \frac{1}{16}x_{j+2,k+1} + \frac{1}{64}x_{j+2,k+2} + \frac{1}{128}x_{j+2,k+3} + \frac{5}{1024}x_{j+2,k+4} + \cdots
\end{aligned}$$

elde edilir (Baliarsingh, 2016).

3.5. Kesirli Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 3.33. $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{\mathrm{k} \leq \mathrm{n} : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L ye $\Delta^{\tilde{\alpha}} -$ istatistiksel yakınsaktır denir. $\Delta^{\tilde{\alpha}} -$ istatistiksel yakınsak kümeleri $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S)$ ile gösterilir ve $x_k \to L\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S)\right)$ olarak yazılır (Baliarsingh ve ark., 2018).

Örnek 3.34. $x = (x_k)$ bir dizi olsun ve $y = (y_k) = (\Delta^{\tilde{\alpha}} x_k)$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlarsak

$$y_k = \begin{cases} 1 \ , & k = n^2 \\ \dfrac{1}{k} \ , & diğer\ durumda \end{cases} \quad n = 0,1,2,3, \ldots$$

(y_k) yakınsak olmamasına rağmen 0' a istatistiksel yakınsaktır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 4.1. $x = (x_{jk})$ reel terimli çift indisli bir dizi $K \subset NxN$ ve olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$K(m,n) = \{(\mathrm{j},\mathrm{k});\mathrm{j} \leq \mathrm{m}\ \mathrm{ve}\ \mathrm{k} \leq \mathrm{n} : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L\right| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfır yani;

$$P - \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \left|\{(\mathrm{j},\mathrm{k});\mathrm{j} \leq \mathrm{m}\ \mathrm{ve}\ \mathrm{k} \leq \mathrm{n} : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L\right| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi L'ye $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −istatistiksel yakınsaktır denir. $x_{jk} \to L\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)\right)$ ile gösterilir. Tüm $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −istatistiksel yakınsak çift indisli dizilerin kümesini $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.2. $x = (x_{jk})$ dizisi kompleks terimli çift indisli bir dizi olmak üzere tüm $j,k \in N$ için $|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})| < M$ olacak şekilde $M > 0$ var yani $\sup_{j,k\geq 1}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}\right| < \infty$ ise $(\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}))$ çift indisli dizi sınırlıdır denir. Bütün $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −sınırlı çift indisli dizi uzayını

$$l_\infty{}^2(\Delta^{\tilde{\alpha}}) = \left\{x = (x_{jk}) : \forall\, j,k \in N \text{ için } \sup_{j,k\geq 1}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}\right| < \infty\right\}$$

şeklinde göstereceğiz.

Yakınsak çift indisli bir dizi aşikar olarak istatistiksel yakınsaktır fakat tersi doğru değildir ancak çift indisli dizilerin kesirli farklarından oluşan dizinin sınırlı ve istatistiksel yakınsak olması gerekmez. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 4.3. $x = (x_{jk})$ çift indisli dizi olsun ve $y = (y_{jk}) = (\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk})$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$y_{jk} = \begin{cases} 1 \quad , & j = m^3, k = n^3 \\ \dfrac{1}{\mathrm{j}+\mathrm{k}}\,, & \textit{diğer durumda} \end{cases} \quad n,m = 1,2,3,\ldots$$

(y_{jk}) yakınsak olmamasına rağmen istatistiksel yakınsaktır, gerçekten

$$\left(y_{jk}\right)=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+2} & \frac{1}{1+3} & & 1 & \frac{1}{1+9} & \cdots \\ \frac{1}{2+1} & \frac{1}{2+2} & \frac{1}{2+3} & \cdots & \frac{1}{2+8} & \frac{1}{2+9} & \cdots \\ \frac{1}{3+1} & \frac{1}{3+2} & \frac{1}{3+3} & & \frac{1}{3+8} & \frac{1}{3+9} & \cdots \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & . & & \cdots & & . & \end{bmatrix}$$

olup

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\left\{(\mathrm{j},\mathrm{k});\ \mathrm{j}\le \mathrm{m}\ \text{ve}\ \mathrm{k}\le \mathrm{n}:\left|y_{jk}-0\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\le\lim_{m,n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{m}\sqrt[3]{n}}{mn}=0$$

dır. Dolayısıyla $\left(y_{jk}\right)$, 0 a istatistiksel yakınsaktır, yani $y_{jk}\to 0\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)\right)$ tır.

Örnek 4.4. $x=\left(x_{jk}\right)=\frac{1+(-1)^{j+k}}{2}$ dizisini göz önüne alırsak $x=\left(x_{jk}\right)$ sınırlıdır, ıraksaktır ve istatistiksel yakınsak değildir. $\Delta^{\tilde{\alpha}}\left(x_{jk}\right)$ dizisini aşağıdaki gibi açarsak

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}\left(x_{jk}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m!\,n!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-m+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-n+1)}x_{j+m,k+n}\Big)$$

$$\begin{aligned}\Delta^{\tilde{\alpha}}\left(x_{jk}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\Big(&(-1)^{m+0}\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m!\,0!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-m+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)}x_{j+m,k+0}\\ &+(-1)^{m+1}\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m!\,1!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-m+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)}x_{j+m,k+1}\\ &+(-1)^{m+2}\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m!\,2!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-m+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)}x_{j+m,k+2}\\ &+(-1)^{m+3}\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m!\,3!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-m+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)}x_{j+m,k+3}\cdots\Big)\end{aligned}$$

$m=0$ için

$$(-1)^0\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{0!0!\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)}x_{j+0,k+0}+(-1)^1\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{0!1!\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)}x_{j+0,k+1}+$$

$$(-1)^2\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{0!2!\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)}x_{j+0,k+2}+(-1)^3\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{0!3!\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)}x_{j+0,k+3+\cdots}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1).\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{0!\,0!\,\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}x_{j,k}-\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1).\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{0!\,1!\,\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha})}x_{j,k+1}\\ &\qquad+\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1).\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{0!\,2!\,\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-1)}x_{j,k+2}-\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1).\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{0!\,3!\,\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-2)}x_{j,k+3}\cdots\\ &=\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{0}x_{j,k}-\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{1}x_{j,k+1}+\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{2}x_{j,k+2}-\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{3}x_{j,k+3}\cdots\end{aligned}$$

$m = 1$ için

$$(-1)^1 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{1!0!\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)} x_{j+1,k+0} + (-1)^2 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{1!1!\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)} x_{j+1,k+1} +$$

$$(-1)^3 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{1!2!\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)} x_{j+1,k+2} + (-1)^4 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{1!3!\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)} x_{j+1,k+3+\cdots}$$

$$= -\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{1!\,0!\,\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\alpha}+1)} x_{j+1,k} + \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{1!\,1!\,\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\alpha})} x_{j+1,k+1}$$

$$- \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{1!\,2!\,\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\alpha}-1)} x_{j+1,k+2} + \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{1!\,3!\,\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\alpha}-2)} x_{j+1,k+3} \cdots$$

$$= -\binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{0} x_{j+1,k} + \binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{1} x_{j+1,k+1} - \binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{2} x_{j+1,k+2} + \binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{3} x_{j+1,k+3} \cdots$$

$m = 2$ için

$$(-1)^2 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{2!0!\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)} x_{j+2,k+0} + (-1)^3 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{2!1!\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)} x_{j+2,k+1} +$$

$$(-1)^4 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{2!2!\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)} x_{j+2,k+2} + (-1)^5 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{2!3!\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)} x_{j+2,k+3+\cdots}$$

$$= +\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{2!\,0!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)} x_{j+2,k} - \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{2!\,1!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-1)\Gamma(\tilde{\alpha})} x_{j+2,k+1}$$

$$+ \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{2!\,2!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-1)\Gamma(\tilde{\alpha}-1)} x_{j+2,k+2}$$

$$- \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{2!\,3!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-1)\Gamma(\tilde{\alpha}-2)} x_{j+2,k+3} \cdots$$

$$= \binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{0} x_{j+2,k} - \binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{1} x_{j+2,k+1} + \binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{2} x_{j+2,k+2} - \binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{3} x_{j+2,k+3} \cdots$$

$m = 3$ için

$$(-1)^3 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{3!0!\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)} x_{j+3,k+0} + (-1)^4 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{3!1!\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)} x_{j+3,k+1} +$$

$$(-1)^5 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{3!2!\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)} x_{j+3,k+2} + (-1)^6 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{3!3!\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)} x_{j+3,k+3} + \cdots$$

$$= -\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{3!\,0!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-2)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)} x_{j+3,k} + \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{3!\,1!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-2)\Gamma(\tilde{\alpha})} x_{j+3,k+1}$$

$$- \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{3!\,2!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-2)\Gamma(\tilde{\alpha}-1)} x_{j+3,k+2} + \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{3!\,3!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-2)\Gamma(\tilde{\alpha}-2)} x_{j+3,k+3} \cdots$$

$$= -\binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{0} x_{j+3,k} + \binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{1} x_{j+3,k+1} - \binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{2} x_{j+3,k+2} + \binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{3} x_{j+3,k+3} \cdots$$

$j+k$ çift olduğunda,

$$\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{0}+\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{2}+\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{4}+\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{6}+\cdots=2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{0}$$

$$\binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{1}+\binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{3}+\binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{5}+\binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{7}+\cdots=2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{1}$$

$$\binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{0}+\binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{2}+\binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{4}+\binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{6}+\cdots=2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{2}$$

$$\binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{1}+\binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{3}+\binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{5}+\binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{7}+\cdots=2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{3}$$

…

$$2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{0}+2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{1}+2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{2}+2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{3}+\cdots=2^{\tilde{\alpha}-1}.2^{\tilde{\alpha}}=2^{2\tilde{\alpha}-1}$$

$j+k$ tek olduğunda,

$$-\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{1}-\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{3}-\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{5}-\binom{\tilde{\alpha}}{0}\binom{\tilde{\alpha}}{7}-\cdots=-2^{\tilde{\alpha}-1}.\binom{\tilde{\alpha}}{0}$$

$$-\binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{0}-\binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{2}-\binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{4}-\binom{\tilde{\alpha}}{1}\binom{\tilde{\alpha}}{6}-\cdots=-2^{\tilde{\alpha}-1}.\binom{\tilde{\alpha}}{1}$$

$$-\binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{1}-\binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{3}-\binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{5}-\binom{\tilde{\alpha}}{2}\binom{\tilde{\alpha}}{7}-\cdots=-2^{\tilde{\alpha}-1}.\binom{\tilde{\alpha}}{2}$$

$$-\binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{0}-\binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{2}-\binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{4}-\binom{\tilde{\alpha}}{3}\binom{\tilde{\alpha}}{6}-\cdots=-2^{\tilde{\alpha}-1}.\binom{\tilde{\alpha}}{3}$$

…

$$-2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{0}-2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{1}-2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{2}-2^{\tilde{\alpha}-1}\binom{\tilde{\alpha}}{3}-\cdots=-2^{\tilde{\alpha}-1}.2^{\tilde{\alpha}}=-2^{2\tilde{\alpha}-1}$$

elde edilir. Yani

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})=\begin{cases}2^{2\tilde{\alpha}-1} & ,j+k\ \ çift\\ -2^{2\tilde{\alpha}-1} & ,i+k\ \ tek\end{cases}$$

şeklinde ifade edebiliriz. $\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})$ dizisi sınırlıdır fakat ne istatistiksel yakınsak ne de yakınsaktır.

Örnek 4.5. $x=(x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun ve $\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})$ aşağıdaki gibi tanımladığımızda

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})=\begin{cases}j+k\ , & j=m^2,k=n^2\ \ m,n\in N\\ 0\ \ , & diğer\ durumda\end{cases}$$

$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})$ istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir.

Gerçekten,

$$\left(\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 8 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\left|\left\{(j,k); j < m, k < n : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - 0\right| > \varepsilon\right\}\right| \leq \sqrt{m}\sqrt{n}$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \left|\left\{(j^2,k^2), \mathrm{j} \leq \mathrm{m\ ve\ k} \leq \mathrm{n} : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - 0\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \lim_{m,n\to\infty} \frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn} = 0$$

Sonuçlar 4.6. $\tilde{\alpha}$ kesirli bir reel sayı olmak üzere;

- **a.** $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ ve S_2 birbirini içermez.
- **b.** $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ ve $l_\infty{}^2(\Delta^{\tilde{\alpha}})$ birbirini içermez.
- **c.** $\Delta^{\tilde{\alpha}}(c^2) \subset \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ ve bu kapsama kesindir.

Tanım 4.7. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{m,n} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} = L$$

ise $x = \left(x_{jk}\right)$ dizisi L'ye $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −Cesaro toplanabilirdir denir. Tüm çift indisli $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −Cesaro toplanabilir dizilerin kümesini $(C,1,1)(\Delta^{\tilde{\alpha}})$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.8. $x = \left(x_{jk}\right)$ çift indisli bir dizi ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{m,n} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p = 0$$

ise $x = \left(x_{jk}\right)$ dizisi L'ye kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$ − Cesaro toplanabilirdir denir. Tüm kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$ − Cesaro toplanabilir çift indisli dizi uzaylarını $w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.9. i. $\tilde{\alpha}$ kesirli bir reel sayı ve $0 < p < \infty$ olmak üzere eğer $x_{jk} \to L$ $(w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$ ise $x_{jk} \to L(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2))$ dir.

ii. Eğer $x_{jk} \to L$ $(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2))$ ve $(x_{jk}) \in l_\infty^2(\Delta^{\tilde{\alpha}})$ ise $x_{jk} \to L$ $(w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$ dir.

İspat: i. $K_\varepsilon(p) = \left\{(j,k);\ j \leq m, k \leq n : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L\right|^p \geq \varepsilon\right\}$ alalım.

$\varepsilon > 0$ ve $x_{jk} \to L$ $(w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$ olsun. $x = \left(x_{jk}\right)$ dizisi L ye kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}-$ Cesaro toplanabilir olduğundan;

$$0 = \lim_{m,n} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p = \frac{1}{mn} (\sum_{(j,k) \in K_\varepsilon(p)} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p + \sum_{(j,k) \notin K_\varepsilon(p)} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p)$$

$$\geq \frac{1}{mn} \left| \left\{ (j,k);\ j \leq m, k \leq n: \left| \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L \right|^p \geq \varepsilon \right\} \right| \varepsilon$$

Böylece $x = \left(x_{jk} \right)$ dizisi L' ye istatistiksel yakınsaktır.

ii. $M = \sup |\Delta^{\tilde{\alpha}} x| + |L|$ ve $I_\varepsilon(p) = \left\{ (j,k);\ j \leq m, k \leq n: \left| \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L \right| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}} \right\}$ alalım. $x = \left(x_{jk} \right)$ dizisi sınırlı istatistiksel yakınsak olduğundan $\forall\, \varepsilon > 0$ ve tüm $m,n \geq N_0$ için öyle bir $N_0 \in N$ vardır ki;

$$\frac{1}{mn} \left| \left\{ (j,k);\ j \leq m, k \leq n : \left| \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L \right| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p} \right\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2.(\|\Delta^{\tilde{\alpha}} x\|_\infty + L)^p} = \frac{\varepsilon}{2.M^p}$$

olur. Şimdi tüm $m,n \geq N_0$ için;

$$\frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p = \frac{1}{mn} (\sum_{(j,k) \in I_\varepsilon(p)} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p + \sum_{(j,k) \notin I_\varepsilon(p)} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p)$$

$$< \frac{1}{mn}.mn.\frac{\varepsilon}{2M^p} M^p + \frac{1}{mn}.mn.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde ederiz.

Bu da $x_{jk} \to L\ (w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$ anlamına gelir.

Sonuç 4.10. $x = \left(x_{jk} \right) \in {l_\infty}^2(\Delta^{\tilde{\alpha}})$ ve $x_{jk} \to L\ (\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2))$ ise aynı zamanda $(C,1,1)(\Delta^{\tilde{\alpha}})$'dir. Fakat $x = \left(x_{jk} \right)$ yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 4.11. $x = \left(x_{jk} \right)$ bir dizi ve her $k \in N$ için $\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} = (-1)^j$ olarak tanımlarsak

$$\lim_{m,n} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} = 0$$

olur. Ama $x = \left(x_{jk} \right)$ istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 4.12. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun.$\forall\, \varepsilon > 0$ için öyle $N_0 \in N$ ve $M_0 \in N$ sayıları var ve tüm $j \geq N_0$, $k \geq M_0$ için

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{mn} \left| \left\{ (j,k); j \leq m, k \leq n: \left| \Delta^{\tilde{\alpha}} (x_{jk} - x_{N_0 M_0}) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa $x = (x_{jk})$ çift indisli bir $\Delta^{\tilde{\alpha}} -$ istatistiksel *Cauchy* dizisidir.

Teorem 4.13. Eğer $x = (x_{jk})$ çift indisli bir $\Delta^{\tilde{\alpha}} -$ istatistiksel yakınsak bir dizi ise $x = (x_{jk})$, $\Delta^{\tilde{\alpha}} -$ istatistiksel *Cauchy* dizisidir.

İspat: Varsayalım ki $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $x_{jk} \to L\ (\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2))$ olsun. Doğaldır ki hemen hemen tüm $j,k \in N$ için $|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve seçilen $N_0, M_0 \in N$ sayıları için $|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Şimdi biz hemen hemen tüm $j,k \in N$ için

$$\begin{aligned} |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - \Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0})| &= |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L + L - \Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0})| \\ &< |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L| + |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0}) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $x = (x_{jk})$, $\Delta^{\tilde{\alpha}} -$ istatistiksel *Cauchy* dizisidir.

4.2. Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin (λ, μ) −İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 4.14. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizinin kesirli De la Vallée-Poussin ortalaması $I_n = [n - \mu_n + 1, n]$ ve $J_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ olmak üzere

$$t_{m,n}(x) = \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j \in J_m} \sum_{k \in I_n} \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.15. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olmak üzere

$$(P) \lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j \in J_m} \sum_{k \in I_n} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p = 0$$

ise $x = (x_{jk})$, L ye kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}} -$ De la Vallée-Poussin toplanabilirdir denir. Tüm kuvvetli $(V, \lambda, \mu)(\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ toplanabilir dizilerin kümesini $[V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ ile göstereceğiz.

Eğer $\lambda_m = m$, $\mu_n = n$ ise kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}} -$ De la Vallée-Poussin toplanabilirliği, kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}} -$ *Cesaro* toplanabilirliğe indirgenir, yani $[V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) = [C, 1, 1](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ dir.

Tanım 4.16. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi, $\forall\ \varepsilon > 0$ için $K \subset NxN$

$$K = \{j \in J_m, k \in I_n : |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

olarak tanımlandığında $\delta_{\lambda,\mu}(K) = 0$ oluyorsa yani;

$$\delta_{\lambda,\mu}(K) = (P) \lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \left|\{j \in J_m, k \in I_n : |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $x = (x_{jk})$ dizisi L ye $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$ istatistiksel yakınsaktır denir. $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$ istatistiksel yakınsak ise $st_{\lambda\mu} - \lim_{m,n\to\infty} \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} = L$ şeklinde yazacağız. Tüm (λ, μ) istatistiksel yakınsak çift indisli dizilerin kümesini $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ ile göstereceğiz.

$\lambda_m = m,\ \mu_n = n$ olması durumda $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ yerine $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ yazacağız.

$\delta_2(K) \leq \delta_{\lambda,\mu}(K)$ olduğu için $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu}) \subset \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ kapsamını elde ederiz.

Tanım4.17. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi ve $M > 0$ olsun.

$$\delta_{\lambda,\mu}(\{(j,k): |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk}| > M\}) = 0$$

oluyorsa $x = (x_{jk})$ dizisi $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$ istatistiksel sınırlıdır denir.

Teorem 4.18. $\lambda = (\lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ kümesine ait olan iki dizi olsun. Bu takdirde

- **i.** Eğer $x_{jk} \to L$ $([\mathrm{V}, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$ ise $x_{jk} \to L(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu}))$ tır, fakat tersi doğru değildir,
- **ii.** Eğer $x_{jk} \in l_2{}^{\infty}(\Delta_2^{\tilde{\alpha}})$ ve $x_{jk} \to L$ $(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu}))$ ise $x_{jk} \to L([\mathrm{V}, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$ ve böylece $x_{jk} \to L([\mathrm{C}, 1{,}1](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$,
- **iii.** $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})^{\infty} = [\mathrm{V}, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \cap l_2{}^{\infty}(\Delta_2^{\tilde{\alpha}})$

tir.

Teorem 4.19. $\lambda = (\lambda_m)$, $\mu = (\mu_n)$, $\theta = (\theta_m)$, $\gamma = (\gamma_n)$ dizileri tüm $m, n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \leq \theta_m$, $\mu_n \leq \gamma_n$ koşulunu sağlayan Λ kümesinin dört elemanı olsun. Bu durumda;

i. Eğer $lim_{m,n\to\infty} inf \frac{\lambda_m \mu_n}{\theta_m \gamma_n} > 0$ (4.1)

ise $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta,\gamma}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$.

ii. Eğer $lim_{m\to\infty} inf \frac{\lambda_m}{\theta_m} = 1$ ve $lim_{n\to\infty} inf \frac{\mu_n}{\gamma_n} = 1$ (4.2)

ise $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta,\gamma})$.

İspat: **i.** tüm $m, n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \leq \theta_m$, $\mu_n \leq \gamma_n$ koşulları sağlansın ve $lim_{m,n\to\infty} inf \frac{\lambda_m \mu_n}{\theta_m \gamma_n} > 0$ olduğunu kabul edelim.

$J_{m_1} = [m - \lambda_m + 1, m]$, $J_{m_2} = [m - \theta_m + 1, m]$, $I_{n_1} = [n - \mu_n + 1, n]$,

$I_{n_2} = [n - \gamma_n + 1, n]$ olarak tanımlanırsa $J_{m_1} \subset J_{m_2}$ ve $I_{n_1} \subset I_{n_2}$ olur ve bu nedenle biz her $\varepsilon > 0$ için

$$\{(j,k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\} \supset \{(j,k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

elde ederiz. Buradan

$$\frac{1}{\theta_m \gamma_n} |\{(j,k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\lambda_m \mu_n}{\theta_m \gamma_n} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{(j,k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Son eşitsizlikte her iki tarafta *Pringsheim* limit alırsak $(m, n \to \infty)$ $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta,\gamma}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ elde ederiz.

ii. $x = (x_{jk}) \in \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ ve $lim_{m\to\infty} inf \frac{\lambda_m}{\theta_m} = 1$, $lim_{n\to\infty} inf \frac{\mu_n}{\gamma_n} = 1$ olduğunu kabul edelim. $J_{m_1} \subset J_{m_2}$ ve $I_{n_1} \subset I_{n_2}$ olduğundan tüm $m, n \in N_{n_0}$ ve her $\varepsilon > 0$ için;

$$\frac{1}{\theta_m \gamma_n} |\{(j,k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$= \frac{1}{\theta_m \gamma_n} |\{m - \theta_m + 1 \leq j < m - \lambda_m, n - \gamma_n + 1 \leq k < n - \mu_n: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$+ \frac{1}{\theta_m \gamma_n} |\{(j,k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{(\theta_m - \lambda_m)(\gamma_n - \mu_n)}{\theta_m \gamma_n} + \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{(j,k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \left(1 - \frac{\lambda_m}{\theta_m}\right)\left(1 - \frac{\mu_n}{\gamma_n}\right) + \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{(j,k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|$$

$lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_m}{\theta_m} = 1$, $lim_{n\to\infty} inf \frac{\mu_n}{\gamma_n} = 1$ ve $x = (x_{jk}) \in \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ olduğundan eşitsizliğin her iki tarafının $m, n \to \infty$ iken limiti alınırsa $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta,\gamma})$ elde edilir.

Teorem 4.20. $\lambda = (\lambda_m)$, $\mu = (\mu_n)$, $\theta = (\theta_m)$, $\gamma = (\gamma_n)$ dizileri tüm $m, n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \leq \theta_m$, $\mu_n \leq \gamma_n$ koşulunu sağlayan Λ kümesinin dört elemanı olsun.

i. Eğer (4.1) sağlanırsa $[V, \theta, \gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$'tir.

ii. Eğer (4.2) sağlanırsa $l_2^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [V, \theta, \gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$'tir.

İspat: i. $m, n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \leq \theta_m$, $\mu_n \leq \gamma_n$ koşulları sağlansın. $J_{m_1} \subset J_{m_2}$ ve $I_{n_1} \subset I_{n_2}$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için;

$$\frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_2}} \sum_{k \in I_{n_2}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \geq \frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_1}} \sum_{k \in I_{n_1}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p$$

yazıp eşitsizliğin sağ tarafını $\lambda_m \mu_n$ ile çarpıp bölersek

$$\frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_2}}\sum_{k\in I_{n_2}}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-L\right|^p \geq \frac{\lambda_m\mu_n}{\theta_m\gamma_n}\frac{1}{\lambda_m\mu_n}\sum_{j\in J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_1}}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-L\right|^p$$

yazabiliriz. Her iki taraftan limit alır ve (4. 1)'i kullanırsak $[\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ elde ederiz.

ii. $x=(x_{jk}) \in {l_2}^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ ise $x=(x_{jk}) \in {l_2}^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}})$ tir. Bundan dolayı tüm j,k ler için öyle bir $M>0$ sayısı vardır ki $\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-L\right|<M$ olur. $J_{m_1} \subset J_{m_2}$ ve $I_{n_1} \subset I_{n_2}$ olduğundan her $\varepsilon>0$ ve tüm $m,n \in N_{n_0}$ için;

$$\frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_2}}\sum_{k\in I_{n_2}}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-L\right|^p = \frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_2}-J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_2}-I_{n_1}}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-L\right|^p + \frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_1}}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-L\right|^p$$

$$\leq \frac{(\theta_m-\lambda_m)(\gamma_n-\mu_n)}{\theta_m\gamma_n}M + \frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_1}}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-L\right|^p$$

$$\leq \left(1-\frac{\lambda_m}{\theta_m}\right)\left(1-\frac{\mu_n}{\gamma_n}\right) + \frac{1}{\lambda_m\mu_n}\sum_{j\in J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_1}}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-L\right|^p$$

Bu nedenle ${l_2}^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ elde edilir.

Sonuç 4.21. $\lambda=(\lambda_m)$, $\mu=(\mu_n), \theta=(\theta_m)$, $\gamma=(\gamma_n)$ dizileri tüm $m,n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \leq \theta_m$, $\mu_n \leq \gamma_n$ koşulunu sağlayan Λ kümesinin dört dizisi olsun. Eğer (4.2) sağlanırsa ${l_2}^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset {l_2}^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ kapsamasını elde ederiz.

Teorem 4.22. $\lambda=(\lambda_m)$, $\mu=(\mu_n), \theta=(\theta_m)$, $\gamma=(\gamma_n)$ dizileri tüm $m,n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \leq \theta_m$, $\mu_n \leq \gamma_n$ koşulunu sağlayan Λ kümesinin dört dizisi olsun. Eğer önce (4.2) sonra (4.1) sağlanırsa;

$x_{jk} \to L\ \left([\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})\right) \Rightarrow\ x_{jk} \to L(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu}))$ ve $[\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ kapsama kesindir.

İspat: $\varepsilon > 0$ ve $x_{jk} \to L\left([\mathrm{V}, \theta, \gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})\right)$ olsun. Biz

$$\sum_{j \in J_{m_2}} \sum_{k \in I_{n_2}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \geq \sum_{j \in J_{m_1}} \sum_{k \in I_{n_1}} \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L\right|^p$$

$$\geq \sum_{\substack{j \in J_{m_1} k \in I_{n_1} \\ |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p$$

$$\geq \left|\{(j,k); j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1} : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L\right|^p \geq \varepsilon\}\right| . \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan tüm $m, n \in N_{n_0}$ için

$$\frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_2}} \sum_{k \in I_{n_2}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \geq \frac{\lambda_m \mu_n}{\theta_m \gamma_n} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \left|\{(j,k); j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1} : |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \geq \varepsilon\}\right| . \varepsilon$$

elde edilir ve (4.1)'den dolayı $x_{jk} \to L(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu}))$ ulaşılır.

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tezde P. Baliarsingh (2016) tarafından tanımlanan çift indisli dizilerin kesir dereceli fark operatörleriyle;

Çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını ($\Delta^{\tilde{\alpha}}$ $-$istatistiksel yakınsaklığı), $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ $-$sınırlılığını, $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ $-$istatistiksel *Cauchy* dizisini, $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ $-$Cesaro toplanabilirliğini, kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}} -$ *Cesaro* toplanabilirliğini, $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ $-$De la Vallée-Poussin ortalamasını, kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$ $-$De la Vallée-Poussin toplanabilirliğini ve $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$ istatistiksel yakınsaklığı tanımları verildi.

$\Delta^{\tilde{\alpha}}$ $-$istatistiksel yakınsak çift indisli bir dizinin aynı zamanda $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ $-$istatistiksel *Cauchy* dizisi olduğunu, kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}} -$ *Cesaro* toplanabilir olan çift indisli dizilerin $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ $-$istatistiksel yakınsak olduğunu ve kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$ $-$De la Vallée-Poussin toplanabilirse $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$ istatistiksel yakınsak olduğu sonuçlarına ulaşıldı.

5.2 Öneriler

Bu tanımlar genelleştirilerek çift indisli kesirli fark dizilerinin $\beta.$ dereceden ağırlıklı ve *deferred* istatistiksel yakınsaklığı çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Baliarsingh, P., 2013, Some new difference sequence spaces of fractional order and their dual spaces, *Applied Mathematics and Computation*, 219 (18), 9737-9742.

Baliarsingh, P. and Dutta, S., 2015, A unifying approach to the difference operators and their applications, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 33 (1), 49-56.

Baliarsingh, P., 2016, On difference double sequence spaces of fractional order, *Indian Journal Mathematical*, 58, 287-310.

Baliarsingh, P., Kadak, U. and Mursaleen, M., 2018, On statistical convergence of difference sequences of fractional order and related Korovkin type approximation theorems, *Quaestiones Mathematicae*, 41 (8), 1117-1133.

Boos, J. and Cass, F. P., 2000, *Classical and modern methods in summability*, Clarendon Press.

Burkill, J. C. and Burkill, H., 1980, A Second Course in Mathematical Analysis Cambridge University Press, *Cambridge*, *New York*.

Connor, J., 1988, The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, *Analysis*, 8 (1-2), 47-64.

Duman, O. and Orhan, C., 2004, μ-statistically convergent function sequences, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54 (2), 413-422.

Et, M. and Çolak, R., 1995, On some generalized difference sequence spaces, *Soochow J. Math*, 21 (4), 376-387.

Et, M. and Nuray, F., 2001, Δ^m statistical convergence, Indian J. Pure Appl. Math., 32(6), 961-969.

Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, In *Colloquium Mathematicae*, 3-4, 241-244.

Fridy, J. A., 1985, On statistical convergence, *Analysis*, *5* (4), 301-314.

Güngör, M. and Gökhan, A., 2005, On uniform statistical convergence, *Int. J. Pure Appl. Math*, 19 (1), 17-24.

Kizmaz, H., 1981, On certain sequence spaces, *Canadian Mathematical Bulletin*, 24 (2), 169-176.

Mursaleen, M., 2000, λ-statistical convergence, *Mathematica Slovaca*, 50 (1), 111-115.

Mursaleen, M., and Edely, O. H., 2003, Statistical convergence of double sequences, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288 (1), 223-231.

Mursaleen, M., Çakan, C., Mohiuddine, S. A. and Savaş, E. ,2010, Generalized statistical convergence and statistical core of double sequences, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 26 (11), 2131-2144.

Musayev, B. ve Alp, M., 2000, Fonksiyonel analiz, Mustafa Balcı, *Ankara*, Kütahya, 63-85.

Niven, I. and Zuckerman, H. S., 1980, The Theory of Numbers, 4-th Ed., New York, John Wiley and Sons.

Nuray, F. and Savaş, E., 1995, Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers, *Mathematica Slovaca*, 45 (3), 269-273.

Pringsheim, A., 1900, Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen, *Mathematische Annalen*, 53 (3), 289-321.

Rath, D. and Tripathy, B. C., 1994, On statistically convergent and statistically Cauchy sequences, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 25, 381-381.

Salat, T., 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca*, 30 (2), 139-150.

Savaş, E., 2000, Strong almost convergence and almost λ-statistical convergence, *Hokkaido Mathematical Journal*, 29 (3), 531-536.

Schoenberg, I. J., 1959, The integrability of certain functions and related summability methods II, *The American Mathematical Monthly*, 66 (7), 562-563.

Steinhaus, H., 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, In *Colloq. Math*2, No. 1, 73-74.

Türkmenoğlu, A., 1993, Bazı çift indisli dizi uzayları, Doktora tezi, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ, 2-5.

Zygmund A, 1979, *Trigonometric Series*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

EK-1

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	√	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	√	
Denklem yazımları uygun mu?	√	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	√	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	√	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	√	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	√	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	√	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	√	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	√	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

	Unvanı Adı SOYADI	İmza
Öğrenci :	Koray İbrahim ATABEY	....
Danışman :	Doç. Dr. Muhammed ÇINAR	....

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum**.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı
Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI	Tarih	İmza
Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖNLÜ	19.06.2019	....

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Koray İbrahim ATABEY
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Yatağan /MUĞLA-12/01/1981
Telefon	**:**	506 930 17 32
Faks	**:**	
e-mail	**:**	korayatabey7@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Muğla Turgut Reis Lisesi, Muğla	1998
Üniversite	:	Akdeniz Üniversitesi	2005
Tezsiz Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi	2006
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2006-2010	Milas Sınav Dergisi Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2010-2014	Ziraat Bankası	Operasyon Asistanı
2014-2019	Milli Eğitim	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER

İngilizce, Yökdil Puan: 56.25