T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ SİNİR AĞLARININ KARARLILIĞI

Şakir ÇETİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2019
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ SİNİR AĞLARININ KARARLILIĞI

Şakir ÇETİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Haziran-2019
MUŞ

TEZ KABUL VE ONAYI

Şakir ÇETİN tarafından hazırlanan "**Gecikmeli Sinir Ağlarının Kararlılığı**" adlı tez çalışması 18/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Dr. Öğr. Üyesi Muhammed Recai TÜRKMEN	……………………
Afyon Kocatepe Üniversitesi-Matematik	
Danışman	
Doç. Dr. Erdal KORKMAZ	……………………
Muş Alparslan Üniversitesi-Matematik	
Üye	
Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU	……………………
Muş Alparslan Üniversitesi-Matematik	

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 21./06./2019 Tarih ve 17/11 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Şakir ÇETİN

Tarih: 12/07/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GECİKMELİ SINIR AĞLARININ KARARLILIĞI

Şakir ÇETİN

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

2019, 33 Sayfa

Jüri
Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Muhammed Recai TÜRKMEN
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Bu tez çalışmasında; gecikmeli sinir ağlarının denge noktasının karalılığı ele alındı. Birinci bölümde; sinir ağlarının denge noktasının kararlılığı hakkında genel bir bilgi verilerek literatürde yapılan çalışmalar özetlendi. İkinci bölümde; bu çalışmada kullanılan temel kavramlar verilerek Lyapunov metodu hakkında bilgi verildi. Üçüncü bölümde; gecikmeli sinir ağlarının iki farklı modeli olan diferansiyel denklem sisteminin denge noktasının üstel kararlılığı için yeter şartlar Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak elde edildi. Son bölümde; araştırmacılar için bazı denklem modellerinin denge noktasının kararlılığının araştırılması tavsiye edildi.

Anahtar Kelimeler: Asimptotik Kararlılık, Gecikmeli Diferansiyel Denklemler, Lyapunov Fonksiyon, Sinir Ağları, Üstel Kararlılık.

ABSTRACT

MS THESIS

STABILITY OF NEURAL NETWORKS WITH DELAY

Şakir ÇETİN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCEOF MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS SCIENCE

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

2019, 33 Pages

Jury
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal KORKMAZ
Jury Member: Asst. Prof. Dr. Muhammed Recai TÜRKMEN
Jury Member: Asst. Prof. Dr. Muaz SEYDAOĞLU

In this thesis; discussed the stability of the equilibrium point of delayed neural networks. In the first chapter; general information about the adjustment of the balance point of neural networks. In the second chapter; The basic concepts used in this study are given and information is given about Lyapunov method. In the third chapter; sufficient conditions for the exponential stability of the equilibrium point of differential equations systems, which are two different models of delayed neural networks, are obtained using Lyapunov's second method. In the last chapter; it was recommended that researchers investigate the stability of the equilibrium point of some equation models.

Keywords: Asimptotic Stability, Differential Equations with Delay, Exponential Stability, Lyapunov Function, Neural Networks.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca her türlü bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, desteğini her zaman yanımda hissettiğim, mesleki açıdan her zaman benim için bir ufuk çizgisi olan ve özellikle bu süreçte bana büyük sabır gösteren çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Erdal KORKMAZ'a ve üniversitemizin değerli rektörü sayın Prof. Dr. Fethi Ahmet POLAT'a teşekkür eder saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli annem ve bu tez çalışmamda bir an olsun desteğini esirgemeyen sevgili eşim Filiz ÇETİN çocuklarım Selahaddin Yusuf ve Celadet Yasin'e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Şakir ÇETİN
MUŞ-2019

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ iii

ÖZET iv

ABSTRACT v

ÖNSÖZ vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI 1

2. TEORİK ESASLAR 5

2.1. Temel kavramlar 5
2.2. Lyapunov'un İkinci Metodu 10

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA 12

3.1. Zaman Değişken Gecikmeli Stokastik Sinir Ağlarının Kararlılığı 12
3.2. Gecikmeli Hücresel Sinir Ağlarının Kararlılığı 22

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 30

4.1 Sonuçlar 30
4.2 Öneriler 30

KAYNAKLAR 31

ÖZGEÇMİŞ 34

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

α	: Alfa.
β	: Beta.
Γ	: Gamma.
V	: Lyapunov Fonksiyonu.
λ	: Lambda
R	: Reel sayılar kümesi.
$C^n[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında n. mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonların kümesi.

Kısaltmalar

GHSA	: Gecikmeli Hücresel Sinir Ağı.
HSA	: Hücresel Sinir Ağı.

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Lineer ve lineer olmayan sistemlerin çözümlerinin kararlılık davranışlarını belirlemek için Lyapunov'un ikinci metodu olarak bilinen bir tekniği vereceğiz. Bu metodun en büyük avantajı çözüme yönelik herhangi bir bilgi sahibi olmaksızın geniş anlamda kararlılığı elde edebilmektir. 1982'e bu metodu bize tanıştıran A. M. Lyapunov, bu metodu sadece basit kararlılık teoremlerini kurmak için kullanmasına rağmen onun basit düşünceleri son 40 yıl boyunca fizik ve mühendislikte yeni problemlerin çözümünde etkili bir şekilde kullanılmıştır. Bu metod sinir ağlarının kararlılığı araştırılırken Lyapunov'un ikinci metodu oldukça kullanışlıdır (Ahmad ve Rao, 1999).

Son 15 yılda sinir ağlarının teorik anlayışı oldukça ilerledi. Çoğu sinir ağlarında gecikme kaçınılmazdır. Örneğin elektronik sinir ağlarında amplifikatörlerin sonlu anahtarlama hızından dolayı zaman gecikmesi ortaya çıkacaktır. Marcus ve Westervelt (1989) makalesinde, Hopfield'in (1982) makalesindeki modele benzer gecikmeli bir ağ için bir model sunmuştur. Bu model $t \geq 0$ için

$$C_i \dot{u}_i(t) = -\frac{1}{R_i} u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\, g_j\left(u_j\left(t-\tau_j\right)\right), \quad 1 \leq i \leq n. \tag{1.1}$$

Burada $u_i(t)$ değişkeni $i.$ nöronun girdisi üzerindeki voltajı temsil eder. Her bir nöron için C_i girdi direncini, τ_i zaman gecikmesini ve $g_i(u)$ transfer fonksiyonunu temsil eder. Bağlantı matrisinin T_{ij} elemanı, $j.$ nöronun tersinir olmayan çıktısının $i.$ nöronun girdisine R_{ij} direnci ile bağlandığı taktirde $1/R_{ij}$ değerini alırken, $j.$ nöronun tersinir çıktısının $i.$ nöronun girdisine R_{ij} direnci ile bağlandığı taktirde $-1/R_{ij}$ değerini alır. Her bir nöronun girdisindeki paralel direnç $R_i = \left(\sum_{j=1}^{n} |T_{ij}|\right)^{-1}$ile tanımlanır. Lineer olmayan $g_i(u)$ transfer fonksiyonu kıvrıktır, $u = 0$'da maksimum eğime sahip ± 1'de doygunluğa ulaşır. Yani matematiksel ifadeyle, $g_i(u)$ azalmayan ve

$$|g_i(u)| \leq 1 \wedge \beta_i |u|, \quad herbir - \infty \leq u \leq \infty. \tag{1.2}$$

Burada β_i, $g_i(u)$ fonksiyonun $u = 0$'daki eğimidir ve bu eğim sonlu olduğu kabul edilmiştir.

$$b_i = \frac{1}{C_i R_i}, \quad a_{ij} = \frac{T_{ij}}{C_i},$$

olarak tanımlandığında (1.1) denklemi

$$\dot{u}_i(t) = -b_i u(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, g_j\left(u_j(t-\tau_j)\right), \quad 1 \le i \le n. \tag{1.3}$$

şeklinde veya

$$\dot{u}_i(t) = -Bu(t) + Ag\big(u_\tau(t)\big), \quad t \ge 0 \tag{1.4}$$

matris formunda yazılabilir. Burada

$$u(t) = \big(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)\big)^T,$$

$$u_\tau(t) = \big(u_1(t-\tau_1), u_2(t-\tau_2), \cdots, u_n(t-\tau_n)\big)^T,$$

$$B = diag(b_1, b_2, \cdots, b_n), \qquad A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n},$$

$$g(u) = \big(g_1(u_1), g_2(u_2), \cdots, g_n(u_n)\big)^T.$$

Dahası

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|, \quad 1 \le i \le n, \tag{1.5}$$

ilişkisi vardır.

$\bar{\tau} \le s \le 0$ için $u(s) = \xi(s)$ başlangıç değeri verildiğinde (1.4) denkleminin $t \ge 0$ üzerinde tek bir global çözümü vardır. Burada $\bar{\tau} = max_{1\le i\le n}\tau_i$ ve $\xi = \{\xi(s): -\bar{\tau} \le s \le 0\}$ fonksiyonu $C([-\bar{\tau}, 0]; R^n)$ üzerinde reel değerli bir fonksiyondur.

Haykin (1994) makalesinde gerçek sinir sistemlerinde sinaptik iletim "Nöroiletenlerinin bırakılması ve diğer olasılıksal sebeplerin etkisiyle oluşan gelişigüzel sapmaların yol açtığı gürültülü süreç" olduğunu ifade eder. Bu tür etkilerin matematiksel olarak ifade edilmesi için kullanılabilecek bir yöntem de olasılıksal eşik modelleri olduğunu söyler. Blythe ve ark. (2001) makalesinde kullandıkları yaklaşım sinir ağları içinden gelen gürültüyü lineer olmayan bir dinamik sistem olarak görmektedir. Böylece nörodinamikte var olan içten gelen stokastikliği temsil etmişlerdir. Le Cun ve ark. (1989) makalesinde gürültünün sadece ilk katmana dahil edildiği ağları tanımlamıştır ve hata türevlerini elde etmek için kullanmıştır. Böylece geriye yayılmayı önlemiştir.

Blythe ve ark. (2001) makalesinde sinir ağlarında stokastik bir perturbasyon olduğunu kabul ediyor ve perturbe edilmiş bu ağın gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin

$$\begin{gathered} dx(t) = \big[-Bx(t) + Ag\big(x_\tau(t)\big)\big]dt + \sigma(x(t), x_\tau(t), t)dw(t), \quad t \ge 0, \\ x(s) = \xi(s), \quad -\bar{\tau} \le s \le 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

olduğunu kabul ediyorlar. Burada $w(t) = \big(w_1(t), w_2(t), \cdots, w_m(t)\big)^T, \mathcal{F}_t = \sigma\{w(s): 0 \leq s \leq t\}$ doğal fitreli $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tam olasılık uzayında $m-$ boyutlu Brownian hareketi, $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\big)^T, x_\tau(t) = \big(x_1(t-\tau_1), x(t-\tau_2), \cdots, x_n(t-\tau_n)\big)^T$ ve $\sigma: R^n \times R^n \times R^+$ fonksiyonu $\sigma(x, y, t) = \sigma_{ij}(x, y, t)_{n\times m}$ olarak tanımlanmıştır. Mao (1994) makalesinde $\sigma(x, y, t)$ fonksiyonu yerel Lipschitz sürekli ve aynı zamanda lineer büyüme şartını sağladığını kabul etmiştir. Böylece $t \geq 0$ üzerinde (1.6) denkleminin tek bir $x(t; \xi)$ global çözümü var olduğunu söyler.

Son zamanlarda gecikmeli stokastik diferansiyel denklemler oldukça çalışılmıştır (Arnold, 1972; Friedman, 1976; Has'minskii, 1981; Kolmanovskii ve Myshkis, 1992; Mao, 1997). Ancak gecikmeli stokastik sinir ağların kendi karakteristik özellikleri vardır ve bütün bu karakteristik özelliklerin kararlılık kriterlerini elde etmek çok istenen bir şeydir. Liao ve Mao (1996a) makalesinde gecikmeli stokastik ağların kararlılığı üzerine çalışmışlardır. Liao ve Mao (1996b) makalesinde gecikmeli stokastik ağların ortalama-kare üstel kararlılığını tartışmışlardır. Blythe ve ark. (2001) makalesinde Semimartingale yakınsaklık teoremini kullanarak gecikmeli stokastik sinir ağın neredeyse kesin üstel kararlılığını tartışmışlardır.

Diğer bir sinir ağı modeli ise Hücresel Sinir Ağı (HSA) modelidir. Son zamanlarda, HSA modellerinin teorik ve uygulamalı çalışmaları dünya çapında yapılan çalışmaların odak noktası olmuştur (Chua ve Yang, 1988a; Chua ve Yang, 1988b). HSA'lar hücresel otomat benzer, yani hücresel sinir ağındaki herhangi bir hücre sadece kendi komşu hücre ile bağlantılıdır. Bir hücre lineer ve lineer olmayan devre elemanları içerir. Bu elemanlar genel olarak lineer kapasitörler, lineer dirençler, lineer ve lineer olmayan kontrollü kaynaklar ve bağımsız kaynaklardır. HSA'lar sinyal işlemede de uygulanabilir. Ayrıca bazı resim işleme ve şekil tanıma problemlerini çözmek için de kullanılabilir. Fakat Gecikmeli Hücresel Sinir Ağları (GHSA) yardımıyla bazı dinamik resim işleme ve şekil tanıma problemlerini çözmek için HSA gereklidir (Roska ve Chua, 1992). GHSA diferansiyel denklemler ile tanımlıdır (fraksiyonel diferansiyel denklemler). HSA sıradan diferansiyel denklemler ile tanımlıdır. HSA ve GHSA'nın kararlılık çalışmaları teoride önemli bir problemdir. HSA'nın kararlılığı üzerine bazı sonuçlar elde edilmiştir (Chua ve Yang, 1988a; Roska ve Chua, 1992; Liao 1994). Fakat çok az araştırmacı GHSA'nın kararlılığı üzerine çalışmıştır (Civalleri ve Gilli, 1993; Lu ve He, 1997; Cao, 1998). Cao ve Wan (1997) makalesinde GHSA'nın global asimptotik kararlılığı için Lyapunov fonksiyonel metodu ile gecikmeden bağımsız bazı yeter şartları sunmuştur. Civalleri ve Gilli (1993) makalesinde GHSA’nın kararlılığı için gecikmeye bağlı yeterli bir şart elde ettiler. Lu ve He (1993) makalesinde bazı GHSA’ların kararlılığı için yeterli bir kriter elde ettiler.

2. TEORİK ESASLAR

Bu bölümde araştırma sonuçları ve tartışma kısmında kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Temel kavramlar

Fizikte yaygın olarak kullanılan matematiksel modeller ya da denklemler çoğunlukla, x bir vektör olmak üzere

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

formundaki diferansiyel denklemlerdir. Burada $t \in I = [0,\infty)$ ve $x \in R^n$ dir. D, R^n de açık bağlantılı bir küme olmak üzere farz edelim ki $f(t,x)$, $I \times D$ üzerinde (t,x) göre süreklidir. $\mathcal{C}$, D de kalan (2.1)'in çözümlerinin bir sınıfı olsun.

Genellikle tüm ölçüm türlerinde kaynaklanan ilk verilerde hatalar olabileceğinden, ilk verilerdeki küçük farklılıkların (2.1) in çözümlerinin istenen davranışını ne kadar etkilediğini bilmek önemlidir. İlk verilerde yeterince küçük bir değişiklik yapılması durumunda, ilgili çözümde önemli bir sapma gözlenirse, o zaman verilen başlangıç verilerinden elde edilen çözüm kabul edilemezdir, çünkü yaygın kullanılan yaklaşık olarak tanımlanamamaktadır. Çözümlerin kayda değer bir şekilde istenen davranıştan sapmasına izin vermeyecek koşulların araştırılması problemi, bunun için önemlidir. (2.1) in çözümlerinin davranışlarıyla ilgili bu tür problemlerle ilgilenen matematik alanı genellikle kararlılık teorisi olarak tercih edilir.

$t_0 \geq 0$ sağında var olan $(t_0,\ x_0)$ başlangıç noktasından geçen (2.1) in çözümü $x(t) = x(t;t_0,x_0)$ olsun. Biz $x(t)$ çözümü için kararlılığın temel kavramlarını tanıştırmadan önce t_0 ve x_0 başlangıç değerleri üzerine $x(t;t_0,x_0)$ çözümlerinin sürekli bağımlılığına ilişkin bir sonuç ispatlayacağız.

Teorem 2.1. $F(t,x)$ fonksiyonu $B = \{(t,x) \colon t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, \|x - x_0\| \leq b\}$ kümesinde sürekli ve (t,x_1), $(t,x_2) \in B$ için

$$\| F(t\,,x_1) - F\,(t,x_2)\| \leq K\,\|x_1 - x_2\|$$

Lipschitz şartını sağlasın. O zaman $x_n \to x_0$ demek $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için $x(t;t_0,x_n) \to x(t;t_0,x_0)$ düzgün demektir (Ahmad ve Rao, 1999).

İspat. Sırasıyla (t_0, x_0) ve (t_0, x_n) den geçen (2.1)'in herhangi iki çözümü $x(t; t_0, x_n)$ ve $x(t; t_0, x_0)$ olsun.

$$x(t; t_0, x_n) \ = \ x_n \ + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s; t_0, x_n\,))\, ds,$$

$$x(t; t_0, x_0) \ = \ x_0 \ + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s; t_0, x_0\,))\, ds.$$

Lipschitz şartını kullanarak t ≥ t_0 için

$$\|x(t, t_0, x_n) - x(t, t_0, x_0)\| \le \|x_n - x_0\| \ + \int_{t_0}^{t} K\, \|x(s, t_0, x_n) - x(s, t_0, x_0)\| ds$$

olarak elde edilir. Bu da

$$\|x(t, t_0, x_n) - x(t, t_0, x_0)\| \le \|x_n - x_0\| exp(K\alpha)$$

olduğu sonucu ima eder.

Biz şimdi (2.1)'in $x(t; t_0, x_0)$ çözümü için çeşitli kararlılık kavramlarını tanımlarız ve bu kavramların eşdeğer olmadığını örneklerle göstereceğiz. Bundan sonra kararlılıkla biz $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde kararlılığı kastediyoruz.

Tanım 2.1. $x(t)$, (2.1)'in çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var öyle ki (2.1)'in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t; t_0, \overline{x_0})$ çözümü için $|\overline{x_0} - x_0| \le \delta$olduğunda $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1)'in $x(t)$ çözümüne kararlıdır denir (Lyapunov, 1949).

Tanım 2.2. $x(t)$, (2.1) çözümü kararlı ve bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ var $|x_0 - \overline{x_0}| < \delta$ iken $t \ge t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| \to 0$ oluyorsa (2.1)'in $x(t)$ çözümüne asimptotik kararlıdır denir (Lyapunov, 1949).

Tanım 2.3. Eğer (2.1)'in $x(t)$ çözümü kararlı değilse kararsızdır denir (Lyapunov, 1949).

Tanım 2.4. $x(t)$, (2.1)'in çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki, (2.1) in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t; t_0, \bar{x}_0)$ çözümü için $t_1 \ge t_0$ ve $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \le \delta$ iken $\forall\, t \ge t_1$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) in $x(t)$ çözümüne düzgün kararlıdır denir (Presidskii, 1933).

Tanım 2.5. $x(t)$, (2.1)'in çözümü düzgün kararlı ve bir $\delta_0 > 0$ vardır ve herbir $\eta > 0$ için bir $T = T(\eta) > 0$ vardır ki $t_1 \ge t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \le \delta_0$ iken her $t \ge t_1 + T$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \eta$ oluyorsa (2.1) in $x(t)$ çözümüne düzgün asimptotik kararlıdır denir (Malkin, 1966).

Tanım 2.6. $x(t)$, (2.1)'in çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki, (2.1)'in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t; t_0, \bar{x}_0)$ çözümü $t_1 \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta$iken her$t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1)'in $x(t)$ çözümüne kuvvetli kararlıdır denir (Ascoli, 1950).

Tanım 2.7. Bir $\lambda > 0$ var ve verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\forall t \geq t_0$ için

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon),\ \|x(t; x_0, t_0)\| \leq \varepsilon \exp[-\lambda(t - t_0)]$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa (2.1)'in sıfır çözümü üstel asimptotik kararlıdır denir (Malkin, 1952).

Not 2.8. Tanım 2.1'deki δ başlangıç anı t_0 bağlı iken Tanım 2.4'teki δ, t_0 dan bağımsızdır. Tanımlardan; kuvvetli kararlı ise düzgün kararlı, düzgün kararlı ise kararlı, düzgün asimptotik kararlı ise asimptotik kararlı olduğu açıktır. Bu ifadelerin tersi genellikle doğru değildir. Bununla birlikte otonom sistemler ve periyodik sistemler ($F(t + w, x) = F(t, x)$) için eğer sıfır (ya da herhangi bir sabit) çözümü kararlı ise düzgün kararlıdır, asimptotik kararlı ise düzgün asimptotik kararlıdır (Ahmad ve Rao, 1999).

Farz edelim ki

$$x' = f(x) \tag{2.2}$$

otonom sisteminin $x(t) \equiv 0$ sıfır çözümü kararlıdır. (2.2) için biliyoruz ki eğer $x(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ bir çözümü ve $\alpha \geq 0$ ise o zaman $x(t + \alpha)$, $t \in [t_0 - \alpha, \infty)$ aralığında bir çözümdür.

Not 2.1. $x_0(t)$, C'nin bir elemanı olsun. (2.1) sisteminde $x = y + x_0(t)$ alınarak

$$\frac{dy}{dt} = f\big(t, y + x_0(t)\big) - f\big(t, x_0(t)\big) \tag{2.3}$$

denklemine dönüşür. Şu halde (2.3) denkleminin sağ tarafı $G(t, y)$ ile gösterilirse $G(t, 0) \equiv 0$ olur. Yani (2.3) denkleminin $y(t) \equiv 0$ çözümü (2.1) denkleminin $x_0(t)$ çözümüne özdeştir. Bu nedenle $x_0(t)$'nin yerine (2.3) denkleminin $y(t) \equiv 0$ kararlılığını tartışmak yeterlidir (Ahmad ve Rao, 1999).

Örnek 2.1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ x(0) = \quad {}_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemi ele alınsın.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -\int_{t_0}^{t} dt$$

$$\ln x - \ln x_0 = t_0 - t$$

$$\ln x = \ln x_0 + t_0 - t$$

$$x(t) = e^{\ln x_0} e^{t_0 - t}$$

$$x(t) = x_0 e^{t_0 - t}$$

$$\overline{x}(t) = \overline{x_0} e^{t_0 - t}$$

$|\overline{x_0} - x_0| < \delta$ iken

$$|x(t) - \overline{x}(t)| = |x_0 e^{-t+t_0} - \overline{x_0} e^{-t+t_0}| = e^{-t+t_0} |x_0 - \overline{x_0}| < \frac{|x_0 - \overline{x_0}|}{e^{t-t_0}} < \delta$$

$\forall t \geq t_0$ için $\delta = \varepsilon$ olduğunda $x(t)$ çözümü kararlıdır. Dikkat Edilirse δ sayısı t_0 dan bağımsızdır. Şu halde $x(t)$ çözümü düzgün kararlıdır. Ayrıca $t \to \infty$ olduğunda $|\overline{x_0} - x_0| \to 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü asimptotik kararlı hatta düzgün asimptotik kararlıdır.

Örnek 2.2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemi ele alınsın.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\ln x - \ln x_0 = t - t_0$$

$$x(t) = x_0 e^{t - t_0}$$

$|x_0 - 0| < \delta$ iken

$$|x(t) - 0| = |x_0 e^{t-t_0}| = e^{t-t_0} |x_0| < \delta e^{t-t_0}$$

$\forall t \geq t_0$ için $|x(t)| < \delta$ olacak şekilde bir ε sayısı yoktur. Dolayısıyla sıfır çözüm kararsızdır.

Örnek 2.3. $\frac{dx}{dt} = 0$ denkleminin sıfır çözümü kararlıdır ama asimptotik kararlı değildir.

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(t) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \overline{x}(0) = c \\ \overline{x}(t) = c \end{cases}$$

$|0 - c| < \delta$ iken $|x(t) - \overline{x}(t)| = |\overline{x}(t)| = |c| < \delta$ olduğundan kararlıdır.

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - \overline{x}(t)| = \lim_{t \to \infty} c = c \neq 0$$

olduğundan asimptotik kararlı değildir.

Örnek 2.4.

$$u' = -\left[13 + 12 \sin \log(t+1) + \frac{12t}{t+1} \cos \log(t+1)\right] u \tag{2.4}$$

denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır ama düzgün kararlı değil ve düzgün asimptotik kararlı değildir.

(2.4)'ün genel çözümü

$$u(t) = u(0)\exp[-(13 + 12\sin\log(t+1))t]$$

şeklindedir.

$$|u(t)| \leq |u(0)|e^{-t}$$

olup $t \to \infty$ alınırsa $|u(t)| \to 0$ olduğundan (2.4) denkleminin sıfır çözümü asimptotik karalıdır. Eğer $t_n = e^{(4n+1)\pi/2} - 1$ ve $\widetilde{t_n} = e^{(4n+3)\pi/2} - 1$ alınırsa

$$\frac{\widetilde{u_n}}{u_n} = \exp[-\widetilde{t_n} + 25t_n] = \exp\left[(25 - e^{\pi})e^{(4n+1)\pi/2} - 24\right]$$

olur. $n \to \infty$ olduğunda $25 > e^{\pi}$ olduğundan dolayı $\frac{\widetilde{u_n}}{u_n} \to$ olur. (2.4) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlı değildir. Dolayısıyla düzgün asimptotik kararlı değildir.

Örnek 2.5.

$$u'' + u = 0 \tag{2.5}$$

denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır ama asimptotik kararlı değildir.

(2.5) denklemi $\sin t$ ve $\cos t$ çözümlerin temel bir sistemine sahiptir. Diyelim ki

$$u(t) = u(0)\sin t$$

olsun. $t_1 \geq t$için

$$|u(t_1)| = |u(0)\sin t_1| \leq |u(0)| = \delta$$

iken $\forall t \geq t_1$ için

$$|u(t)| = |u(0)\sin t| \leq |u(0)| = \delta < \varepsilon$$

olduğundan sıfır çözüm düzgün kararlıdır. Ama $t \to \infty$ iken $|u(t)| \nrightarrow 0$ olduğundan asimptotik kararlı değildir.

Şimdi

$$x'(t) = f(t, x_t),\ x_t = (t + \theta),\ -r \leq \theta \leq 0,\ t \geq 0 \tag{2.10}$$

otonom olmayan gecikmeli diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. Burada $f: [0,\infty) \times C_H \to R^n$ sürekli bir dönüşüm, $f(t,0) = 0$; $(C, \|.\|)$ sürekli fonksiyonların Banach uzayı; $r > 0$ olmak üzere $\phi: [-r, 0] \to R^n$;

$$C_H = \{\phi \in (C[-r,0], R^n): \phi < H\}$$

dır. Varlık teorisine göre, $\phi \in C_H$ ve $t \geq 0$ ise, bu takdirde (2.10) denklem sisteminin $[t_0, t_0 + \alpha)$ aralığında $t > t_0$ için en az bir $x(t; t_0, \phi)$ çözümü vardır öyle ki $x_t(t, \phi)$ olur. Burada α pozitif bir sabittir ve $\|.\|$sembolü ise R^n de bir norm olup

$$\|\phi_t\| = \max_{t-\alpha \leq s \leq t} |\phi(t)|$$

şeklinde tanımlıdır (Burton, 1985).

Tanım 2.8. A ve h pozitif sabitler olmak üzere, $x(t_0, \phi)$ fonksiyonu $[t_0 - h, t_0 + A]$'dan R^n'ye tanımlı olsun. Bu fonksiyon $t = t_0$ $(t_0 \geq 0)$ noktasında $\phi \in C_H$ başlangıç şartına sahip ve aşağıdaki özellikleri sağlasın:

(i) Her $t_0 \leq t \leq t_0 + A$ için $x(t_0, \phi) \in C_H$

(ii) $x(t_0, \phi) = \phi$

(iii) Her $t_0 \leq \mathrm{t} \leq t_0 + A$ için $x(t_0, \phi)$, (2.6) denklemini sağlar.

Bu takdirde $x(t_0, \phi)$ fonksiyonuna (2.6) denkleminin bir çözümü denir (Yoshizawa, 1966).

Teorem 2.2. Eğer her t ve $\phi \in C_H$ için $f(t, \phi)$ sürekli bir fonksiyon; $H_1 < H,\ t_0, 0 \leq t_0 < c$ (burada c pozitif bir sabit) ise, bu takdirde (2.6) denkleminin $t = t_0$ noktasında ϕ başlangıç değerine sahip bir çözüm var ve $t > t_0$ için bu çözüm sürekli türevlenebilirdir (Yoshizawa, 1966).

2.2. Lyapunov'un İkinci Metodu

Tanım 2.9. Ω, R^n de açık bir küme olmak üzere $V\colon \Omega \subseteq R^n \to R,\ 0 \in$ olsun. $V(0) = 0$ ve $\forall x \in \Omega,\ (x \neq 0)$ için,

- $V(x) > 0$ ise V fonksiyonuna pozitif tanımlıdır denir.
- $V(x) < 0$ ise V fonksiyonuna negatif tanımlıdır denir.
- $V(x) \geq 0$ ise V fonksiyonuna pozitif yarı tanımlıdır denir.
- $V(x) \leq 0$ ise V fonksiyonuna negatif yarı tanımlıdır denir.

(Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 2.10. Sürekli pozitif tanımlı $W\colon R^n \to [0, \infty)$ fonksiyonuna bir wedge denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 2.11. Ω, R^n de sıfır vektörünü içeren bir bölge olsun ayrıca $V\colon [0, \infty) \times \Omega \to [0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $t\ \geq 0$ için $V(t, 0) = 0$, $V(t.x)$ fonksiyonu pozitif tanımlı ve birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise bu takdirde V ye bir Lyapunov fonksiyonu adı verilir (Ahmad ve Rao, 1999).

Teorem 2.3. (Lyapunov Kararlılık Teoremi): Ω orjinin bir komşuluğu olsun. Eğer $V\colon \Omega \to R$ diferansiyellenebilir bir fonksiyonu;

- $V(0) = 0$

- $V(x)$, $\Omega - \{0\}$'da pozitif tanımlı ise,
- $\dot{V}(x)$ da yarı negatif tanımlı ise,

bu şartları altında orijin ve 0 çözüm kararlıdır. Bu şartlara ek olarak

- $\dot{V}(x), \Omega - \{0\}$ da negatif tanımlı ise,

şartını sağlıyorsa orijin ve 0 çözüm asimptotik kararlıdır (Burton, 1985).

Teorem 2.4. (Chetaev Kararsızlık Teoremi): Ω orjinin bir komşuluğu olsun. Aşağıdaki özelliklere sahip bir $V(x)$ fonksiyonu ve Ω'da bir Ω_1 bölgesi verilsin.

- $V(x)$, Ω_1 bölgesinde birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir.
- $V(x)$ ve $\dot{V}(x)$, Ω_1 de pozitif tanımlıdır.
- Ω_1 bölgesinin sınır noktalarında $V(x) = 0$ dir. ($V(x) = 0$ sağlayan tek çözüm, sistemin sıfır çözümüdür.)
- Orijin Ω_1 bölgesinin bir sınır noktasıdır.

Bu şartlar altında orijin ve 0 çözüm kararsızdır (Burton, 1985).

Tanım 2.12. Sürekli ve ϕ'ye göre Lipschitz koşulunu sağlayan bir $V: [0,\infty) \times C_H \to [0,\infty)$, fonksiyoneline, W bir wedge olmak üzere aşağıdaki şartları sağlaması halinde (2.10) denklemi için bir Lyapunov fonksiyoneli denir:

(i) $W(|\phi(0)|) \leq V(t,\phi)$, $V(t,0) = 0$

(ii) $V'_{(2.10)}(t,x_t) = \limsup_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[V\big(t+h, x_{t+h}(t_0,\phi)\big) - V\big(t, x_t(t_0,\phi)\big)\right] \leq 0.$

(Burton, 1985).

Teorem 2.5. $V(t,\phi)$, (2.6) denklemi için aşağıdaki şartları sağlayan bir Lyapunov fonksiyoneli ve W_1, W_2 birer wedge fonksiyonu olmak üzere

(i) $W_1(\|\phi(0)\|) \leq V(t,\phi) \leq W_2(\|\phi(0)\|)$,

(ii) $V'_{(2.6)}(t,x_t) \leq 0$,

ise, o zaman (2.6) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır (Yunfeng, 1992).

Teorem 2.6. $V(t,\phi)$, (2.6) denklemi için aşağıdaki şartları sağlayan bir Lyapunov fonksiyoneli ve W_1, W_2 ve W_3 birer wedge fonksiyonu olmak üzere

(i) $W_1(\|\phi(0)\|) \leq V(t,\phi) \leq W_2(\|\phi(0)\|)$,

(ii) $V'_{(2.6)}(t,x_t) \leq -W_3(|x(t)|)$,

ise, o zaman (2.6) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Sinha, 1973).

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

3.1. Zaman Değişken Gecikmeli Stokastik Sinir Ağlarının Kararlılığı

Diyelim ki $C^{2,1}(R^n \times R^+; R^+), R^n \times R^+$ üzerinde tanımlı negatif olmayan $V(x,t)$ fonksiyonların ailesini tanımlısın. Burada $V(x,t)$ fonksiyonları x −e göre iki defa türevlenebilir ve t −ye göre bir defa türevlenebilir sürekli fonksiyonlardır. Her bir $V \in C^{2,1}(R^n \times R^+; R^+)$,bir $\mathcal{L}V$ operatörü tanımlar. Bu operatörler $R^n \times R^n \times R^+$'den R'ye

$$\mathcal{L}V(x,y,t) = V(x,t) + V_x(x,t)[-Bx + Ag(y)] + \frac{1}{2} iz[\sigma^T(x,y,t)V_{xx}(x,t)\sigma(x,y,t)]$$

ile tanımlı (1.6) denklemindeki gecikmeli stokastik sinir ağlar ile ilişkilidir. Burada

$$V_t(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}, \quad V_x(x,t) = \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_n}\right),$$

$$V_{xx}(x,t) = \left(\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times m}.$$

V, $R^n \times R^+$ üzerinde tanımlı iken stres $\mathcal{L}V$, $R^n \times R^n \times R^+$ üzerinde tanımlı olsun. R^n'den R^+'ya sürekli fonksiyonların aile $C(R^n; R^+)$ olsun.

Teorem 3.1. Kabul edelim ki$\phi \in C(R^n; R^+), \phi_i \in C(R; R^+)$, $(1 \le i \le n)$, ve $\lambda_1 > \lambda_2 \ge 0$ için

$$\mathcal{L}V(x,y,t) \le -\lambda_1 \phi(x) + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \phi_i(y_i), \quad (x,y,t) \in R^n \times R^n \times R^+, \tag{3.1}$$

$$V(x,t) \le \phi(x), \quad (x,t) \in R^n \times R^+ \tag{3.2}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x_i) \le \phi(x), \quad x \in R^n \tag{3.3}$$

olacak şekilde bir $V \in C^{2,1}(R^n \times R^+; R^+)$ fonksiyonu var olsun. O zaman her $\xi \in C([-\tau, 0]; R^n)$ için (1.6) denklemi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log\big(V(x(t;\xi),t)\big) \le -\gamma \tag{3.4}$$

özelliğine sahiptir. Burada $\gamma \in (0, \lambda_1 - \lambda_2)$

$$\lambda_1 = \gamma + \lambda_2 e^{\gamma\bar{\tau}}, \quad \bar{\tau} = max_{1\le i\le n}\tau_i \tag{3.5}$$

denkleminin tek köküdür (Blythe ve ark., 2001).

Bu teoremin ispatı Liptser ve Shiryayev (1986) makalesinde kurulan semi martingale yakınsaklık teoremine dayanır.

Lemma 3.1. $A(t)$ ve $U(t)$ sürekli fonksiyonları $A(0) = U(0) = 0$ ve $t \geq 0$ üzerinde uyarlanmış artan süreçler olsun. $M(t)$, $M(0) = 0$ ve reel değerli sürekli yerel martingale olsun. ξ, $E\xi < \infty$ ile negatif olmayan $\mathcal{F}_0$ ölçülebilir rastgele değişken olsun. $t \geq 0$ için

$$X(t) = \xi + A(t) - U(t) + M(t)$$

ile tanımlansın. Eğer $X(t)$ negatif olmayan bir fonksiyon ise, o zaman

$$\left\{\lim_{t\to\infty} A(t) < \infty\right\} \subset \left\{\lim_{t\to\infty} X(t) < \infty\right\} \cap \left\{\lim_{t\to\infty} U(t) < \infty\right\}.$$

Burada $B \subset D$, $P(B \cap D^c) = 0$. Özel olarak, eğer $\lim_{t\to\infty} A(t) < \infty$ ise, o zaman neredeyse bütün $w \in \Omega$ için

$$\lim_{t\to\infty} X(t,w) < \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{t\to\infty} U(t,w) < \infty.$$

Yani hem $X(t)$ hem de $U(t)$ sonlu değişkene yakınsar (Blythe ve ark., 2001).

İspat. Sabit başlangıç verisini $\xi \in C([-\tau, 0]; R^n)$ ve $x(t;\xi) = x(t)$ olsun.$(x,t) \in R^n \times R^+$için

$$U(x,t) = e^{\gamma t} V(x,t)$$

tanımlansın. Burada $U \in C^{2,1}(R^n \times R^n; R^+)$. (3.1) ve (3.2) şartları kullanılarak,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}U(x,y,t) &= e^{\gamma t}[\gamma V(x,t) + \mathcal{L}V(x,y,t)] \\ &\leq e^{\gamma t}\left[-(\lambda_1 - \gamma)\phi(x) + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \phi_i(y_i)\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Herhangi bir $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned}e^{\gamma t} V(x(t),t) &= V(x(t),t) + \int_0^t \mathcal{L}V(x(s), x_\tau(s), s) ds \\ &\quad + \int_0^t e^{\gamma s} V_x(x(s),s)\sigma(x(s), x_\tau(s), s) dw(s) \\ &\leq V(\xi(0),0) - (\lambda_1 - \gamma)\int_0^t e^{\gamma s}\phi\big(x(s)\big) ds \\ &\quad + \lambda_2 \int_0^t e^{\gamma s} \sum_{i=1}^{n} \phi_i\big(x_i(s - \tau_i)\big) ds \\ &\quad + \int_0^t e^{\gamma s} V_x(x(s),s)\sigma(x(s), x_\tau(s), s) dw(s). \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\int_{t-\tau_i}^{t} e^{\gamma s}\phi_i\big(x_i(s)\big)ds \;= \int_{-\tau_i}^{t} e^{\gamma s}\phi_i\big(x_i(s)\big)ds - \int_{0}^{t} e^{\gamma(s-\tau_i)}\phi_i\big(x_i(s-\tau_i)\big)ds$$

$$\le \int_{-\bar{\tau}}^{t} e^{\gamma s}\phi_i\big(x_i(s)\big)ds - e^{-\gamma\bar{\tau}}\int_{0}^{t} e^{\gamma s}\phi_i\big(x_i(s-\tau_i)\big)ds.$$

(3.3) şartıyla birlikte

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau_i}^{t} e^{\gamma s}\phi_i\big(x_i(s)\big)ds \le \int_{-\bar{\tau}}^{t} e^{\gamma s}\phi\big(x(s)\big)ds$$

$$-e^{-\gamma\bar{\tau}}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t} e^{\gamma s}\phi_i\big(x_i(s-\tau_i)\big)ds. \qquad (3.7)$$

(3.6) ve (3.7) eşitsizliklerinden

$$e^{\gamma t}V(x(t),t) + \lambda_2 e^{\gamma\bar{\tau}}\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau_i}^{t} e^{\gamma s}\phi_i\big(x_i(s)\big)ds$$

$$\le V(\xi(0),0) - (\lambda_1-\gamma)\int_{-\bar{\tau}}^{0}\phi\big(\xi(s)\big)ds - \big(\lambda_1-\gamma-\lambda_2 e^{\lambda\bar{\tau}}\big)\int_{0}^{t} e^{\gamma s}\phi\big(x(s)\big)ds$$

$$+\int_{0}^{t} e^{\gamma s}V_x(x(s),s)\sigma(x(s),x_\tau(s),s)dw(s).$$

(3.5) kullanıldığında

$$e^{\gamma t}V(x(t),t) + \lambda_2 e^{\gamma\bar{\tau}}\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau_i}^{t} e^{\gamma s}\phi_i\big(x_i(s)\big)ds \le X(t). \qquad (3.8)$$

Burada

$$X(t) := V(\xi(0),0) + \int_{-\bar{\tau}}^{0}\phi\big(\xi(s)\big)ds + \int_{0}^{t} e^{\gamma s}V_x(x(s),s)\sigma(x(s),x_\tau(s),s)dw(s)$$

negatif olmayan bir martingaledir. Lemma 3.1'den

$$\lim_{t\to\infty} X(t) < \infty$$

olduğu görülür. (3.8)'den

$$\lim_{t\to\infty} sup\,[e^{\gamma t}V(x(t),t)] < \infty$$

olduğundan

$$\lim_{t\to\infty} sup\,\frac{1}{t}\,log\big(V(x(t),t)\big) < -\gamma$$

olmasını gerektirir. Buda ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.2. (1.2) sağlansın. Her $(x,y,t)\in R^n\times R^n\times R^+$ için

$$iz[\sigma^T(,y,t)\sigma(x,y,t)] \le x^T C_1 x + g^T(y)C_2 g(y) + y^T C_3 y \qquad (3.9)$$

olacak şekilde negatif tanımlı olmayan simetrik C_1, C_2 ve $C_3 = diag(\delta_1, \cdots, \delta_n)$ matrisleri var olsun.

$$H = \begin{pmatrix} -2B + C_1 + C_3 + \bar{D} & A \\ A^T & -D + C_2 \end{pmatrix}$$

negatif tanımlı simetrik matrisi olacak şekilde pozitif tanımlı diyagonal bir $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ matrisi var olsun. Burada $\bar{D} = diag(d_1\beta_1^2, \cdots, d_n\beta_1^2)$. $-\lambda = \lambda_{max}(H) H$'nin en büyük öz değeri olsun. Böylece $\lambda > 0$. O zaman her bir $\xi \in C([-\tau, 0]; R^n)$,(1.6) denkleminin çözümünün basit üstel Lyapunov fonksiyonu

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} \log(|x(t;\xi)|) \leq -\frac{\gamma}{2} \tag{3.10}$$

Olarak kurulabilir. Burada $\gamma > 0$

$$\lambda_1 = \gamma + \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda\bar{\tau}} \tag{3.11}$$

denkleminin tek kökü,

$$\lambda_1 = \min_{1\leq i\leq n} (\lambda + \delta_i + d_i\beta_i^2) \ ve\ \lambda_2 = \max_{1\leq i\leq n} \frac{\delta_i + (d_i - \lambda)\beta_i^2}{\lambda + \delta_i + d_i\beta_i^2}. \tag{3.12}$$

Diğer bir değişle, (1.6) gecikmeli stokastik sinir ağı neredeyse kesin üstel kararlıdır (Blythe ve ark., 2001).

İspat. $V(x,t) = |x|^2$ olsun. O zaman

$$\mathcal{L}V(x,y,t) = 2x^T[-Bx + Ag(y)] + iz[\sigma^T(x,y,t)\sigma(x,y,t)].$$

Hipotezden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x,y,t) &\leq -2x^TBx + x^TAg(y) + g^T(y)A^Tx + x^TC_1x + g^T(y)C_2g(y) + y^TC_3y \\ &= x^T(-2B + C_1 + C_3 + \bar{D})x + x^TAg(y) + g^T(y)A^Tx \\ &\quad + g^T(y)(-D + C_2)g(y) - x^T(C_3 + \bar{D})x + y^TC_3y + g^T(y)Dg(y) \\ &= \left(x^T, g^T(y)\right) H \begin{pmatrix} x \\ g(y) \end{pmatrix} - x^T(C_3 + \bar{D})x + y^TC_3y + g^T(y)Dg(y) \\ &\leq -\lambda(|x|^2 + |g(y)|^2) - x^T(C_3 + \bar{D})x + y^TC_3y + g^T(y)Dg(y) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} (\lambda + \delta_i + d_i\beta_i^2)x_i + \sum_{i=1}^{n} [\delta_i y_i^2 + (d_i - \lambda)g_i^2(y_i)] \end{aligned}$$

elde edilir. H'nin yapısından her $1 \leq i \leq n$ için $\lambda \leq d_i$ olduğu görülür. (1.2) kullanılarak

$$\mathcal{L}V(x,y,t) \leq -\sum_{i=1}^{n} (\lambda + \delta_i + d_i\beta_i^2)x_i + \sum_{i=1}^{n} [\delta_i + (d_i - \lambda)\beta_i^2]y_i \tag{2.13}$$

elde edilir. Teorem 3.1'i uygulamak için $\phi \in C(R^n; R^+)$ ve $\phi_i \in C(R; R^+)$ fonksiyonlarını

$$\phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=1}^{n}(\lambda + \delta_i + d_i\beta_i^2)x_i \quad ve \quad \phi_i(y_i) = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda + \delta_i + d_i\beta_i^2)y_i^2$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\phi(x) \geq |x|^2 = V(x,t) \quad ve \quad \phi(x) = \sum_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)$$

olduğu açıktır. Dahası

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x,y,t) \quad &\leq -\lambda_1\phi(x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i + (d_i - \lambda)\beta_i^2}{\lambda + \delta_i + d_i\beta_i^2}\lambda_1\phi_i(y_i) \\ &\leq -\lambda_1\phi(x) + \lambda_1\lambda_2\sum_{i=1}^{n}\phi_i(y_i).\end{aligned}$$

Teorem 3.1'den her $\xi \in C([-\tau,0];R^2)$ için (1.6) denkleminin çözümü

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log(|x(t;\xi)|^2) \leq -\gamma$$

özelliğine sahiptir. Buda ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.3. (1.2) sağlansın. Her $(x,y,t) \in R^n \times R^n \times R^+$ için

$$iz[\sigma^T(x,y,t)\sigma(x,y,t)] \leq \sum_{i=1}^{n}[\mu_i x_i^2 + \theta_i g_i^2(y_i) + \delta_i y_i^2] \tag{3.14}$$

olacak şekilde negatif olmayan μ_i, θ_i ve δ_i sayıları mevcut olsun.

$$\overline{H} = \begin{pmatrix}-2B + \overline{D} & A \\ A^T & -D\end{pmatrix}$$

negatif tanımlı simetrik matrisi olacak şekilde pozitif tanımlı diyagonal bir $D = diag(d_1,\cdots,d_n)$ matrisi var olsun. Burada $\overline{D} = diag(d_1\beta_1^2,\cdots,d_n\beta_1^2), -\overline{\lambda} = \lambda_{max}(\overline{H})$. Böylece $\overline{\lambda} > 0$. Eğer

$$(\mu_i + \delta_i) \vee \theta_i < \overline{\lambda}, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{3.15}$$

ise, o zaman (1.6) gecikmeli stokastik sinir ağı neredeyse kesin üstel kararlıdır. Ayrıca (3.12)'deki λ

$$\lambda = \min_{1\leq i\leq n}\left[\overline{\lambda} - (\mu_i + \delta_i) \vee \theta_i\right] \tag{3.16}$$

ile tanımlandığında basit üstel Lyapunov fonksiyonu (3.10) denklemindeki gibi kurulabilir (Blythe ve ark., 2001).

İspat.

$$C_1 = diag(\mu_1,\cdots,\mu_n),\ C_2 = diag(\theta_1,\cdots,\theta_n),\ C_3 = diag(\delta_1,\cdots,\delta_n),$$

alınsın. O zaman (3.14) denklemi

$$iz[\sigma^T(x,y,t)\sigma(x,y,t)] \leq x^T C_1 x + g^T(y)C_2 g(y) + y^T C_3 y$$

olarak yazılabilir. Teorem 3.2'den dolayı negatif tanımlı bir H matrisinin mevcut olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için herhangi bir $x, y \in R^n$ için

$$\begin{aligned}(x^T, y^T)H\binom{x}{y} &= (x^T, y^T)\bar{H}\binom{x}{y} + (x^T, y^T)\begin{pmatrix} C_1 + C_3 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}\binom{x}{y} \\ &\leq \bar{\lambda}(|x|^2 + |y|^2) + \sum_{i=1}^{n}[(\mu_i + \delta_i)x_i^2 + \theta_i y_i^2] \leq -\lambda(|x|^2 + |y|^2)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada λ (3.16) ile tanımlı ve (3.15)'den dolayı pozitiftir. Buda ispatı tamamlar. ■

Şimdiye kadar gecikmeli ağların neredeyse kesin kararlılığı için birkaç genel kriter elde edildi. Bu kriterlerin kullanımı V Lyapunov fonksiyonunun yapısına veya d_i pozitif sayıların seçimine bağlıydı. Sadece b_i ve β_i gibi sistemin parametrelerine bağlı bazı kriterlere sahip olmak daha uygundur. Ayrıca (1.2) ve (1.5) denklemleri sinir ağlarının özellikleridir, ama şu an kadar sadece (1.2) özelliğini kullanarak bu kriterleri sunduk. Şimdi daha iyi sonuçlar elde etmek için (1.5) özelliğini kullanılacaktır.

Sonuç 3.1. (1.2), (1.5) ve (2.14) denklemleri sağlansın. Tüm $1 \leq i \leq n$ için

$$b_i > \beta_i^2 \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}| \tag{3.17}$$

ve

$$\bar{\lambda} = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{b_i - \beta_i^2 \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|}{1 + \beta_i^2}. \tag{3.18}$$

Eğer

$$(\mu_i + \delta_i) \vee \theta_i < \bar{\lambda}, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{3.19}$$

ise, o zaman (1.6) gecikmeli stokastik sinir ağı neredeyse kesin üstel kararlıdır (Blythe ve ark., 2001).

İspat. $1 \leq i \leq n$ için

$$d_i = \frac{b_i + \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|}{1 + \beta_i^2}$$

olsun. Sonra Teorem 3.3'deki gibi $\bar{H}$ simetrik matrisi tanımlansın. Herhangi $x, y \in R^n$ için (1.5) şartından dolayı

$$\begin{aligned}(x^T, y^T)H\binom{x}{y} &= \sum_{i=1}^{n}(-2b_i + d_i\beta_i^2)x_i^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(-2b_i + d_i\beta_i^2)x_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|(x_i^2 + y_i^2) - \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2\end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(2\quad_i - d_i\beta_i^2)x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ji}\right|\right)y_i^2$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$b_i - d_i\beta_i^2 = d_i - \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ji}\right| = \frac{b_i + \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ji}\right|}{1+\beta_i^2} \geq \bar{\lambda}.$$

Böylece

$$(x^T, y^T)H\binom{x}{y} \leq -\bar{\lambda}(|x|^2 + |y|^2)$$

olur ki buda $\lambda_{max}(\bar{H}) \leq -\bar{\lambda}$ olduğunu ima eder. Teorem 3.3'ün sonucu ispatı tamamlar. ■

Özel olarak ağlar çoğu zaman $\left|a_{ij}\right| = \left|a_{ji}\right|$ anlamında simetriktirler. Böyle simetrik ağlar için bu sonuç oldukça önemlidir.

Sonuç 3.2. (1.2), (1.5) ve (3.14) şartları sağlanmış olsun. Tüm $1 \leq i, j \leq n$ için

$$\left|a_{ij}\right| = \left|a_{ji}\right|, \tag{3.20}$$

tüm $1 \leq i \leq n$ için

$$\beta_i < 1 \tag{3.21}$$

ve

$$\bar{\lambda} = \min_{1\leq i\leq n} \frac{b_i(1-\beta_i^2)}{1+\beta_i^2}. \tag{3.22}$$

olsun. Eğer (3.19) sağlanırsa, o zaman (1.6) gecikmeli stokastik ağı neredeyse kesin kararlıdır (Blythe ve ark., 1999).

İspat. (1.5), (3.20) ve (3.21)'den dolayı tüm $1 \leq i \leq n$

$$\beta_i^2 \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ji}\right| < \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| = b_i.$$

Ayrıca

$$\min_{1\leq i\leq n} \frac{b_i - \beta_i^2 \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ji}\right|}{1+\beta_i^2} = \min_{1\leq i\leq n} \frac{b_i(1-\beta_i^2)}{1+\beta_i^2}$$

olduğu görülür. Sonuç 3.1'den ispat tamamlanır. ■

Bir A matrisinin norm operatör ||A|| ile tanımlayalım. Yani

$$\|A\| = sup\{\,|Ax|: x \in R^n, |x| = 1\}.$$

Sonuç 3.3. (1.2) ve (3.14) sağlansın. Tüm $1 \leq i \leq n$ için

$$2b_i > \|A\|(1+\beta_i^2) \tag{3.23}$$

ve

$$\bar{\lambda} = \min_{1\leq i\leq n} \frac{2b_i}{1+\beta_i^2} - \|A\| \tag{3.24}$$

olsun. Eğer (3.19) sağlanıyorsa, o zaman (1.6) gecikmeli stokastik ağı neredeyse kesin kararlıdır (Blythe ve ark., 1999).

İspat. $1 \leq i \ \leq n$ için

$$d_i = \frac{2b_i}{1+\beta_i^2}$$

olsun. Sonra Teorem 3.3'deki gibi $\bar{H}$ simetrik matrisi tanımlansın. Herhangi $x, y \in R^n$ için

$$\begin{aligned}
(x^T, y^T)H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{n}(-2b_i + d_i\beta_i^2)x_i^2 + 2x^TAy - \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(-2b_i + d_i\beta_i^2)x_i^2 + \|A\|(|x|^2 + |y|^2) - \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n}(2b_i - d_i\beta_i^2 - \|A\|)x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}(d_i - \|A\|)y_i^2
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$2b_i - d_i\beta_i^2 - \|A\| = d_i - \|A\| = \frac{2b_i}{1+\beta_i^2} - \|A\| \geq \bar{\lambda}$$

elde edilir. Bu da $\lambda_{max}(\bar{H}) \leq -\bar{\lambda}$ olduğunu ima eder. Teorem 3.3'ün sonucu ispatı tamamlar. ■

Örnek 3.1. Reel değerli $w(t)$ Brownian hareketi, τ_1 ve τ_2 pozitif sayıları için

$$d\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}dt + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1(x_1(t-\tau_1)) \\ g_2(x_2(t-\tau_2)) \end{pmatrix}dt$$

$$+\begin{pmatrix} 0.2x_2(t-\tau_2) \\ 0.5x_1(t-\tau_1) \end{pmatrix}dw(t) \tag{3.25}$$

Gecikmeli stokastik ağını göz önüne alalım. Burada

$$g_i(u_i) = \frac{1-e^{-u_i}}{1+e^{-u_i}}.$$

$\beta_1 = \beta_2 = 1$için(1.2) şartının sağlandığı açıktır. Teorem 3.2' uygulamak için

$$\sigma(x,y,t) = (0.2y_2, 0.5y_1)^T, \quad \sigma^T(x,y,t)\sigma(x,y,t) = 0.25y_1^2 + 0.04y_2^2$$

olduğu görülür. $C_1 = C_2 = 0$ ve $C_3 = diag(0.25, 0.04)$ için (3.9) şartı sağlanır. $D = diag(d_1, d_2)$ alınırsa,

$$-2b + C\_3 + D \qquad = -D \text{ yani} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 2d_1 & 0 \\ 0 & 2d_2 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 3.875$ ve $d_2 = 1.98$ elde edilir. Teorem 3.2'deki H matrisini tanımlarsak,

$$H = \begin{pmatrix} -3.875 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1.98 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3.875 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1.98 \end{pmatrix}$$

Elde edilir. Şu halde $\lambda_{max}(H) = -1.9578$ olduğundan H negatif tanımlıdır. Teorem 3.2'e göre (3.25) gecikmeli ağı neredeyse kesin üstel kararlıdır. (3.12)'de Üstel Lyapunov fonksiyonunu kurmak için $\lambda_1 = 2.21578$ ve $\lambda_2 = 0.9094$ alınırsa (3.11) denklemi

$$2.21578 = \gamma + 2.015e^{\gamma\bar{\tau}} \tag{3.26}$$

olarak yazılabilir. Eğer τ_1 ve τ_2 biliniyorsa, örneğin $\tau_1 = \tau_2 = 0.1$ ise, o zaman $\bar{\tau} = 0.1$ olur ve (3.26)

$$2.21578 = \gamma + 2.015e^{0.1\gamma}$$

olarak yazılır. Buradan da $\gamma = 0.1668$ elde edilir. Böylece Teorem 3.2 (3.25) denkleminin çözümünün üstel Lyapunov fonksiyonu -0.0834 sayısından büyük değildir.

Örnek 3.2. İki boyutlu $(w_1(t), w_2(t))$Brownian hareketi, B_1, 3×3 tipinde sabit matris, θ_i'ler reel sayılar ve τ_i pozitif sayılıları için

$$dx(t) = [Bx(t) + Ag(x_\tau(t))]dt + B_1 x(t)dw_1(t)$$
$$+\left(\theta_1 \sin(x_1(t-\tau_1)), \theta_2 \sin(x_2(t-\tau_2)), \theta_3 \sin(x_3(t-\tau_3))\right)^T dw_2(t) \tag{3.27}$$

üç boyutlu gecikmeli stokastik sinir ağını göz önüne alalım. Burada

$$B = diag(-2,-3,-4), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$g_i(y_i) = (\beta_i y_i \wedge 1) \vee (-1), \quad \beta_1 = 0.4, \beta_2 = 0.5, \beta_3 = 0.6,$$

$$g(y) = \left(g_1(y_1), g_2(y_2), g_3(y_3)\right)^T.$$

Açıkçası (1.2) ve (1.5) sağlanır ve ağ simetrik olduğundan (3.20) sağlanır. (3.22) 'den dolayı

$$\bar{\lambda} = \min\left\{\frac{2(1-0.4^2)}{1+0.4^2}, \frac{3(1-0.5^2)}{1+0.5^2}, \frac{4(1-0.6^2)}{1+0.6^2}\right\} = 1.448.$$

Diğer taraftan

$$\sigma(x,y,t) = (B_1 x, (\theta_1 \sin y_1, \theta_2 \sin y_2, \theta_3 \sin y_3)^T)$$

$$\sin^2 y_i \leq \left((y_i \wedge 1) \vee (-1)\right)^2 \leq \frac{1}{\beta_i^2}\left((\beta_i \wedge 1) \vee (-1)\right)^2 \frac{g_i^2(y_i)}{\beta_i^2.}$$

Sonuç olarak

$$iz[\sigma^T(x,y,t)\sigma(x,y,t)] \leq \|B_1\|^2|x|^2 + \frac{\theta_1^2}{0.16}g_1^2(y_1) + \frac{\theta_2^2}{0.25}g_2^2(y_2) + \frac{\theta_1^2}{0.36}g_3^2(y_3). \tag{3.28}$$

Sonuç 3.2'den

$$\|B_1\|^2 < 1.448, \quad \theta_1^2 < 0.23168, \quad \theta_2^2 < 0.362, \quad \theta_3^2 < 0.52128. \tag{3.29}$$

Şu halde (3.27) gecikmeli stokastik ağı neredeyse kesin üstel kararlıdır. Elbette ki alternatif bir sonuç elde etmek için $iz[\sigma^T(x,y,t)\sigma(x,y,t)]$ farklı bir şekilde hesaplanabilir. Örneğin

$$\|B_1\|^2 = 0.5, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1 \tag{3.30}$$

Alındığında (3.29) sağlanmaz. Ayrıca

$$\begin{aligned} iz[\sigma^T(x,y,t)\sigma(x,y,t)] &\leq 0.5|\mathrm{x}|^2 + \sin^2(\mathrm{y}_1) + \sin^2(\mathrm{y}_2) + \sin^2(\mathrm{y}_3) \\ &\leq 0.5|\mathrm{x}|^2 + 0.8|y|^2 + 0.2[\sin^2(\mathrm{y}_1) + \sin^2(\mathrm{y}_2) + \sin^2(\mathrm{y}_3)] \\ &\leq 0.5|\mathrm{x}|^2 + 0.8|y|^2 + 1.25g_1^2(y_1) + g_1^2(y_1) + g_1^2(y_1) \end{aligned}$$

(3.19) sağlandığından ve Sonuç 3.2'den dolayı (3.27) gecikmeli stokastik ağı yine de (3.30) şartı altında neredeyse kesin üstel kararlıdır.

Örnek 3.3. Skaler $w(t)$ Brownian hareketi, B_1, 3×3 tipinde sabit matris,

$$dx(t) = \left[Bx(t) + Ag\left(x_\tau(t)\right)\right]dt + B_1 g\left(x_\tau(t)\right)dw(t) \tag{3.31}$$

üç boyutlu gecikmeli stokastik sinir ağını göz önüne alalım. Burada

$$B = diag(-3,-4,-3), \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g_i(y_i) = \frac{e^{\beta_i y_i} - e^{-\beta_i y_i}}{e^{\beta_i y_i} + e^{-\beta_i y_i}}, \quad \beta_1 = 0.4, \beta_2 = 0.5, \beta_3 = 0.4,$$

$$g(y) = \left(g_1(y_1), g_2(y_2), g_3(y_3)\right)^T.$$

Açıkçası (1.2) ve (1.5) sağlanır. $\sigma(x,y,t) = B_1 g(y)$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sigma^T(x,y,t)\sigma(x,y,t) &\leq \|B_1\|^2|g(y)|^2 \\ &\leq \|B_1\|^2[\varepsilon\beta_1^2 y_1^2 + \varepsilon\beta_2^2 y_2^2 + \varepsilon\beta_3^2 y_3^2 + (1-\varepsilon)|g(y)|^2] \\ &\leq \|B_1\|^2[0.25\varepsilon|y|^2 + (1-\varepsilon)|g(y)|^2]. \end{aligned}$$

$\varepsilon = 0.8$ alındığında

$$\sigma^T(x,y,t)\sigma(x,y,t) \leq 0.2\|B_1\|^2(|y|^2 + |g(y)|^2).$$

Yani $\mu_i = 0$ ve $\theta_i = \delta_i = 0.2\|\beta_1\|^2$ için (3.14) sağlanır. Sonuç 3.1'i uygulamak için (3.18)'den

$$\bar{\lambda} = \min\left\{\frac{3 - 0.16 \times 3}{1 + 0.16}, \frac{4 - 0.25 \times 3}{1 + 0.25}, \frac{3 - 0.16 \times 4}{1 + 0.16}\right\} = 2.034.$$

Böylece (3.19)

$$0.2\|B_1\|^2 < 2.034, \quad yani \quad \|B_1\| < 3.189 \tag{3.32}$$

olarak yazılabilir. Sonuç 3.3 gereğince $\|B_1\| < 3.189$ olduğu takdirde (3.31) gecikmeli ağı neredeyse kesin üstel kararlıdır.

3.2. Gecikmeli Hücresel Sinir Ağlarının Kararlılığı

$i = 1,2,\cdots,n$ için

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j\left(x_j(t - r_j)\right) + I_i,\ c_i > 0, \tag{3.33}$$

diferansiyel denklemi ile tanımlı GHSA modelini göz önüne alınsın. Burada n bir sinir ağındaki birim sayısı, $x_i(t)$ t anındaki i. birimin durum vektörü, $f_j\big(x(j)\big)$ t anındaki j. birimin çıktısıdır. a_{ij}, b_{ij}, I_i ve c_i sabitlerdir. a_{ij}, t anındaki i. birimin üzerindeki j. birimin gücünü tanımlar. $b_{ij}, t - r_j$ anındaki i. birimin üzerindeki j. biriminin gücünü tanımlar. I_i , i. birim üzerindeki dış önyargıdır. r_j , j. birimin akson boyunca aktarma gecikmesidir ve negatif olmayan bir sabittir. c_i, i. birimin bir ağ ve dış girdiden bağlantısı kesilirken kendini yenileme oranını temsil eder. $f_i(i = 1,2,\cdots,n)$ hücre çıktısı ile hücre durumu arasındaki ilişki şu özelliklere sahiptir:

(H_1) R üzerinde $f_i(i = 1,2,\cdots,n)$ sınırlıdır;

(H_2) Herhangi $u, v \in R$ için

$$|f_i(u) - f_i(v)| \leq \mu_i |u - v|$$

olacak şekilde $\mu_i > 0$ sayısı vardır.

(H_2)'den f_i, R üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Hücre çıktısı ile hücre durumu arasındaki ilişki özel olarak $f_i(x) = (1/2)(|x + 1| - |x - 1|)$ ile tanımlanırsa, o zaman $\mu_i = 1$ için (H_1) ve (H_2) şartlarını sağladığı görülür. (3.33) denkleminin devre uygulaması yapılmıştır (Chua ve Yang 1998a; Roska ve Chua 1992).

Bu bölümde Cao ve Zhou (1998) makalesinde çalışmış oldukları (3.33) GHSA modelinden farklı olarak, $i = 1,2,\cdots,n$ olmak üzere, $\left|a_{ij}(t)\right| \leq \xi_{ij}$, $\xi_{ij} \geq 0$ için

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, f_j\left(x_j(t - r_j)\right) + I_i,\ c_i > 0, \qquad (3.34)$$

diferansiyel denklemi ile tanımlı GHSA modelinin çözümünün global asimptotik kararlılığı incelendi.

Lemma 3.2. Hücre fonksiyonunun çıktısı $f_i(i = 1,2,\cdots,n)$ (H_1) ve (H_2) şartlarını sağlıyorsa, o zaman (3.34) GHSA için bir denge noktası vardır.

İspat. Eğer $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$(3.34) GHSA için bir denge noktası ise, o zaman x^*

$$\begin{aligned} x_i{}^*(t) &= \frac{1}{c_i}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j(x_j^*) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, f_j(x_j^*) + I_i\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_i}\left(a_{ij}(t) + b_{ij}\right) f_j(x_j^*) + \frac{I_i}{c_i} \end{aligned} \qquad (3.35)$$

lineer olmayan denklem sistemini sağlar.

$B = \left[(1/c_i)\left(a_{ij}(t) + b_{ij}\right)\right]_{n\times n}$, $I = \left((I_1/c_1), (I_2/c_2), \cdots, (I_n/c_n)\right)$ ve $f(x^*) = \left(f_1(x_1^*),\ f_2(x_2^*), \cdots, f_n(x_n^*)\right)^T$ olsun. O zaman (3.35) denklemi

$$x^* = F(x^*) = Bf(x^*) + I \qquad (3.36)$$

formunda yazılabilir. x^*, $F: R^n \to R^n$ dönüşümünün sabit noktasıdır. F dönüşümünün bir sabit noktasının varlığı Brouwer'in sabit nokta teoremi yardımıyla gösterilebilir. Gerçekten $F(x)$ fonksiyonun $i.$ bileşeni $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ ve $M = \max\limits_{1\le i\le n} \sup\limits_{s}\left|f_j(s)\right|$ için

$$\begin{aligned} \left|\left(F(x)\right)_i\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{c_i}\left(a_{ij}(t) + b_{ij}\right)\right] f_j(x_j) + \frac{I_i}{c_i}\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{1}{c_i}\left(a_{ij}(t) + b_{ij}\right)\right|\left|f_j(x_j)\right| + \frac{|I_i|}{c_i} \\ &\le \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{1}{c_i}\left(a_{ij}(t) + b_{ij}\right)\right| M + \frac{|I_i|}{c_i} \end{aligned}$$

özelliğini sağlar.

$$K = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{1}{c_i}\left(a_{ij}(t) + b_{ij}\right)\right| M + \frac{|I_i|}{c_i}\right)$$

olsun. O zaman $F(R^n) \subset Q = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n : |x_i| \le K, i = 1,2, \cdots, n\}$. Şu halde F'nin sürekli olduğu görülür. F'yi Q üzerinde sınırlayalım. Yani $F|_Q : Q \to Q$. $F|_Q$ sınırlı kapalı ve konveks bir Q kümesi üzerinde kendi içine dönüşümdür.

Not 3.1. Brouwer'in teoremi sabit noktanın tekliğini garanti etmez. (3.33) denklem sisteminin denge noktasının hem tekliği hem de global asimptotik kararlılığı için bazı kriterler sunulacaktır (Cao ve Zhou, 1998).

Lemma 3.3. (3.34) GHSA için $f_i(i = 1,2, \cdots, n)$ hücre fonksiyonlarının çıktıları (H_1) ve (H_2) şartlarını sağlasın. O zaman (3.34) GHSA denkleminin tüm çözümleri $[0, +\infty)$ üzerinde sınırlıdır.

İspat. GHSA denkleminin tüm çözümleri

$$-c_i x_i(t) - \alpha_i \le x_i{}' \le -c_i x_i(t) + \alpha_i \tag{3.37}$$

diferansiyel eşitsizliği sağlar. Burada

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} (\xi_{ij} + |b_{ij}|) \sup_{s \in R} |f_j(s)| + |I_i|.$$

(3.37) eşitsizliğinden (3.34) GHSA denkleminin tüm çözümleri $[0, +\infty)$ üzerinde sınırlıdır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.4. (3.34) GHSA için $f_i(i = 1,2, \cdots, n)$ hücre fonksiyonlarının çıktıları (H_1) ve (H_2) şartlarını sağlasın. Ayrıca sistemin parametreleri ξ_{ij}, b_{ij}

(i) $$\frac{\mu_i}{c_i} \sum_{j=1}^{n} (\xi_{ij} + |b_{ij}|) < 1;$$

(ii) $$\frac{1}{c_i} \sum_{j=1}^{n} [\mu_j(\xi_{ij} + |b_{ij}|) + \mu_i(\xi_{ji} + |b_{ji}|)] < 2;$$

(iii) $$\frac{1}{c_i} \sum_{j=1}^{n} (\mu_j^2 \xi_{ij} + \xi_{ji} + \mu_j |b_{ij}| + \mu_i |b_{ji}|) < 2;$$

(iv) $$\frac{1}{c_i} \sum_{j=1}^{n} (\xi_{ij} + \mu_i^2 \xi_{ji} + \mu_j |b_{ij}| + \mu_i |b_{ji}|) < 2;$$

(v) $$\frac{1}{c_i} \sum_{j=1}^{n} (\mu_j \xi_{ij} + \mu_i \xi_{ji} + \mu_j^2 |b_{ij}| + |b_{ji}|) < 2;$$

Şartlarını sağlasın. Burada $\mu_j(j = 1,2, \cdots, n)$, (H_2) hipotezindeki katsayılardır. O zaman (3.34) GHSA denkleminin denge noktası gecikmeye bağlı olmaksızın global asimptotik kararlıdır.

İspat. Eğer $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$(3.34) GHSA için bir denge noktası ise, o zaman (3.34) denkleminde $y_i(t) = x_i(t) - x_i^*(i = 1,2,\cdots,n)$ alınırsa,

$$y_i'(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\left(f_j\left(x_j^* + y_i(t)\right) - f_j(x_j^*)\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\left(f_j\left(x_j^* + y_j(t - r_j)\right) - f_j(x_j^*)\right) \tag{3.38}$$

sağlanır. Açıkçası $(0,0,\cdots,0)^T$, (3.38) denkleminin bir denge noktasıdır. (3.34) denkleminin x^* denge noktasının global asimptotik kararlılığını göstermek için (3.38) denklemini $(0,0,\cdots,0)^T$ denge noktasının global asimptotik kararlığını göstermek yeterlidir. (3.34) ve (3.38) denklemlerinin çözümlerinin varlığı aşağıdaki analizin bir sonucudur.

(I) (i) şartı sağlansın. Lyapunov fonksiyonu

$$V_1(t) = V_1(y)(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(|y_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\mu_j \int_{t-r_j}^{t} |y_i(s)|ds\right) \tag{3.39}$$

olarak tanımlansın. (3.38) denkleminin çözümü boyunca V_1 fonksiyonunun sağ üst D^+V_1 türevi alınsın.

$$D^+V_1 \le \sum_{i=1}^{n}\left[-c_i|y_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}\mu_j\xi_{ij}|y_j(t)| + \sum_{j=1}^{n}\mu_j|b_{ij}||y_j(t-r_j)|\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n}\mu_j|b_{ij}|(|y_j(t)| - |y_j(t-r_j)|)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(-c_i|y_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}\mu_j\xi_{ij}|y_j(t)| + \sum_{j=1}^{n}\mu_j|b_{ij}||y_j(t)|\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(-c_i|y_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}(\mu_j\xi_{ij} + \mu_j|b_{ij}|)|y_j(t)|\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[c_i - \sum_{j=1}^{n}(\mu_i\xi_{ji} + \mu_i|b_{ji}|)\right]|y_i(t)|$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[c_i - \mu_i\sum_{j=1}^{n}(\xi_{ji} + |b_{ji}|)\right]|y_i(t)| \le \gamma_1\sum_{i=1}^{n}|y_j(t)| \tag{3.40}$$

elde edilir. Burada

$$\gamma_1 = \min_{1 \le i \le n} c_i \left(1 - \frac{\mu_i}{c_i} \sum_{j=1}^{n} \left(\xi_{ji} + |b_{ji}| \right) \right) > 0.$$

(3.40) denkleminin bir sonucu

$$V_1(y)(t) + \gamma_1 \int_0^t \sum_{i=1}^{n} |y_i(s)| ds \le V_1(y)(0) \tag{3.41}$$

olarak elde edilir. (3.41) eşitsizliğinden

$$\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} |y_i(t)| dt < +\infty \tag{3.42}$$

elde edilir. Lemma 3.3'den $x_i(t)$, $(0, +\infty)$ üzerinde sınırlıdır. Bu da $y_i(t)$ ve $y_i'(t)$, $(0, +\infty)$ üzerinde sınırlı olduğu anlamına gelir. Böylece $y_i(t)$, $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir. Şu halde $\sum_{i=1}^{n} |y_i(t)|$, $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün sınırlıdır. (3.42)'den

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} |y_i(t)| = 0 \tag{3.43}$$

(3.43) denkleminden (3.38) denkleminin sıfır çözümü herhangi bir gecikme için global asimptotik kararlıdır, dolayısıyla (3.34) GHSA denkleminin denge noktası global asimptotik kararlıdır.

(II) (ii), (iii), ve (iv) şartları sağlansın.

$$V_2(t) = V_2(y)(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} y_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \mu_j |b_{ij}| \int_{t-r_j}^{t} y_j^2(s) ds \right) \tag{3.44}$$

(3.38) denkleminin çözümü boyunca V_2'nin değişim oranını göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[y_i(t) \Bigg(& -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \left(f_j\left(x_j^* + y_i(t)\right) - f_j(x_j^*) \right) \\ & + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \left(f_j\left(x_j^* + y_j(t - r_j)\right) - f_j(x_j^*) \right) \Bigg) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \mu_j |b_{ij}| \left(y_j^2(t) - y_j^2(t - r_j) \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.45}$$

(3.45) denkleminin sağ tarafında $2ab \le a^2 + b^2$ ve $|f_i(u) - f_i(v)| \le \mu_i |u - v|$ eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dt} \le & \sum_{i=1}^{n}\Bigg[-c_i y_i^2(t)+\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}|y_i(t)|\left|f_j\left(x_j^*+y_i(t)\right)-f_j(x_j^*)\right| \\
&+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}||y_i(t)|\left|f_j\left(x_j^*+y_j(t-r_j)\right)-f_j(x_j^*)\right| \\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j|b_{ij}|\left(y_j^2(t)-y_j^2(t-r_j)\right)\Bigg] \\
\le & \sum_{i=1}^{n}\Bigg[-c_i y_i^2(t)+\sum_{j=1}^{n}\mu_j\xi_{ij}|y_i(t)|\,|y_j(t)| \\
&+\sum_{j=1}^{n}\mu_j|b_{ij}||y_i(t)||y_j(t-r_j)| \\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j|b_{ij}|\left(y_j^2(t)-y_j^2(t-r_j)\right)\Bigg] \\
\le & \sum_{i=1}^{n}\Bigg[-c_i y_i^2(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j\xi_{ij}\left(y_i(t)+y_j(t)\right) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j|b_{ij}|\left(y_i^2(t)+y_j^2(t-r_j)\right) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j|b_{ij}|\left(y_j^2(t)-y_j^2(t-r_j)\right)\Bigg] \\
= & \sum_{i=1}^{n}\Bigg[-c_i y_i^2(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j\xi_{ij}y_i^2(t) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j\xi_{ij}y_j^2(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j|b_{ij}|y_i^2(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j|b_{ij}|y_j^2(t)\Bigg] \\
= & -\sum_{i=1}^{n}\left|c_i-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j\xi_{ij}+\mu_i\xi_{ji}+\mu_j|b_{ij}|+\mu_i|b_{ji}|\right]\right|\times y_i^2(t) \\
= & -\sum_{i=1}^{n}\left|c_i-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j\left(\xi_{ij}+|b_{ij}|\right)+\mu_i\left(\xi_{ji}+|b_{ji}|\right)\right]\right|\times y_i^2(t)
\end{aligned}
$$

$$\leq \gamma_2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t). \tag{3.46}$$

Burada

$$\gamma_2 = \min_{1\leq i\leq n} c_i \left[1 - \frac{1}{2c_i}\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j\left(\xi_{ij} + |b_{ij}|\right) + \mu_i\left(\xi_{ji} + |b_{ji}|\right)\right]\right] > 0.$$

$\mu_j|y_i(t)||y_j(t)| \leq (1/2)\left(\mu_i y_i^2(t) + y_j^2(t)\right)$ ve $\mu_j|y_i(t)||y_j(t)| \leq (1/2)\left(y_i^2(t) + \mu_j y_j^2(t)\right)$. Bu eşitsizlikler (3.45) denkleminin sağ tarafı hesaplandığında $|f_i(u) - f_i(v)| \leq \mu_i|u - v|$ olduğundan

$$\frac{dV_2}{dt} \leq -\gamma_3 \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \tag{3.47}$$

elde edilir. Burada

$$\gamma_3 = \min_{1\leq i\leq n} c_i \left[1 - \frac{1}{2c_i}\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j^2\xi_{ij} + \xi_{ji} + \mu_j|b_{ij}| + \mu_i|b_{ji}|\right]\right] > 0.$$

$$\frac{dV_2}{dt} \leq -\gamma_4 \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \tag{3.48}$$

elde edilir. Burada

$$\gamma_4 = \min_{1\leq i\leq n} c_i \left[1 - \frac{1}{2c_i}\sum_{j=1}^{n}\left[\xi_{ij} + \mu_i^2\xi_{ji} + \mu_j|b_{ij}| + \mu_i|b_{ji}|\right]\right] > 0.$$

(3.44) ve (3.46) denklemlerinden veya (3.44) ve (3.47) denklemlerinden veya (3.44) ve (3.48) denklemlerinden teoremin önermeleri altında (I)'deki işlemlere benzer işlemler yapıldığında sonuç doğrudur.

(III) (v) şartı sağlansın.

$$V_3(t) = V_3(y)(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}y_i^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\int_{t-r_j}^{t} y_j^2(s)ds\right) \tag{3.49}$$

(3.38) denkleminin çözümü boyunca V_3'nin değişim oranını göz önüne alalım. (II)'deki gibi sadeleştirme yapıldığında

$$\frac{dV_3}{dt} \leq -\sum_{i=1}^{n}\left[c_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j\xi_{ij} + \mu_i\xi_{ji} + \mu_j^2|b_{ij}| + |b_{ji}|\right]\right] \times y_i^2(t)$$

$$\leq -\gamma_5 \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \tag{3.50}$$

elde edilir. Burada

$$\gamma_5 = \min_{1\leq i\leq n} c_i \left[1 - \frac{1}{2c_i}\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j\xi_{ij} + \mu_i\xi_{ij} + \mu_j^2\left|b_{ij}\right| + \left|b_{ji}\right|\right]\right] > 0.$$

(3.49) ve (3.50) denklemlerinden teoremin önermeleri altında (I)'deki işlemlere benzer işlemler yapıldığında sonuç doğrudur. Yani (i)-(v) şartlarından herhangi birini sağlayan (3.34) GHSA denkleminin denge noktası gecikmeye bağlı olmaksızın global asimptotik kararlıdır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Bu çalışmada $i, j = 1,2, \cdots, n$ olmak üzere $a_{ij}(t)$ sınırlı fonksiyonları için

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, f_j\left(x_j\left(t - r_j\right)\right) + I_i$$

diferansiyel denklemin ile tanımlı GHSA modelini diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlı olması için Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak yeter şartlar araştırılmıştır.

4.2 Öneriler

Bu çalışmada $i, j = 1,2, \cdots, n$ olmak üzere herhangi $a_{ij}(t)$ ve $b_{ij}(t)$ fonksiyonları için

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\, f_j\left(x_j\left(t - r_j\right)\right) + I_i$$

ile tanımlı GHSA modelinin çözümlerinin kararlılığı ve sınırlılığı araştırılması önerilir.

KAYNAKLAR

Ahmad, S., Rao, M.R.M., 1999, Theory of ordinary differential equations with applications of biology and engineering. *Affiliated East-west Press Private Limited*, New Delhi.

Arnold, L. 1972. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, *Wiley*, New York.

Ascoli, G.1950, Comments on some stability issues 1 (İtalyanca), *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei*, 9 129–34.

Blythe, S., Mao, X., Liao, X. 2001. Stability of stochastic delay neural networks, *Journal of the Fraklin Institute*, 338, 48–495.

Burton, T.A., 1985, Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering, 178. *Academic Press*, Inc., Orlando, FL.

Cao, J.D. 1998, Stability of delayed cellular neural network (Çince), *Information and Control* (in press).

Cao, J., Zhou, D. 1998. Stability analysis of delayed cellular neural Networks, *Neural Networks*, 11, 1601–1605.

Cao, J.D., Wan, SH.D. 1997. The global asymptotic stability of Hopfield neural network with delays (Çince), *Journal of Biomathematics*, 12 (1), 60–63.

Chua, L.O., Yang, L. 1988a. Cellular neural networks: theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35 (10), 1257–1272.

Chua, L.O., Yang, L. 1988b. Cellular neural networks: applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35 (10), 1273–1290.

Civalleri, P.P., Gilli, M. 1993. On stability of cellular neural Networks with delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 40 (3), 157–165.

Coben, M.A., Crosshery S. 1983. Absolute stability and global pattern formation and patrolled memory storage by competitive neural networks, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 13 815–826.

Friedman, A., 1976, Stochastic Differential Equations and Applications, *Academic Press*, New York.

Has'minskii, R.Z. 1981, Stochastic Stability of Differential Equations, *Sijthoffand Noordhoff*, Alphen.

Haykin, S. 1994, Neural Networks, *Prentice-Hall*, NJ.

Hopfield, J.J. 1982. Neural networks and physical systems with emergent collect computational abilities, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, USA 79 2554–2558.

Hopfield, J.J. 1984. Neurons with grade dresponse have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, USA 81 3088–3092.

Hopfield, J.J., Tank D.W. 1986 Computing with neural circuits: a Model, *Science*, 233 3088–3092.

Kolmanovskii, V.B., Myshkis A. 1992, Applied Theory of Functional Differential Equations, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

Le Cun Y., Galland C.C., Hinton G.E. 1989. GEMINI: gradient estimation through matrixin version after noise injection, in: D.S. Touretzky (Ed.), *Advances in Neural Information Processing Systems*, Vol. I, Morgan Kaufmann, San Mateo, pp. 141–148.

Liao, X.X., 1993, AbsoluteStability of Nonlinear Control Systems, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

Liao, X.X. 1994. Mathematical theory (II) of cellular neural networks (Çince). *Science. İn China (Series A)*, 24 (10), 1037–1046.

Liao, X.X., Mao, X., 1996a. Exponential stability and instability of stochastic neural networks, *Stochastic Analysis and Applications*, 14 (2) 165–185.

Liao, X.X., Mao, X., 1996b. Stability of stochastic neural networks, *Neural, Parallel & Scientific Computations*, 4 (2) 205–224.

Liptser, R.Sh., Shiryayev A.N. 1986, Theory of Martingales, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

Lu, H.T., He, Zh.Y. 1997. Unconditioned stability of cellular neural Networks with delay (Çince), *Acta Electronica Sinica*, 25 (1), 1–4.

Lyapunov, A.M. 1949, General problem of movement stability (Rusça), *Annals of Mathematics Studies* 17, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

Malkin, I.G. 1952, Theory of stability motion, *Translated by Atomic Energy Commission, AEC—TR—3352, Moscow*.

Malkin, I.G. 1966, Theory of stability motion (Rusça), *United States Atomic Energy Commission, Tech. Report ABC–TR–3352, Nauka, Moscow*.

Mao, X. 1994, Exponential Stability of Stochastic Differential Equations, *Marcel Dekker*, New York.

Mao, X. 1997, Stochastic Differential Equations and Applications, *Horwood Publishing*.

Marcus, C.M., Westervelt, R.M. 1989. Stability of analog network with delay, *Physical Review A*, 39 (1) 347–359.

Mohammed, S.-E.A. 1986, Stochastic Functional Differential Equations, *Longman,* New York.

Presidskii, K.P. 1933. On Stability of Motion in First Approximation, *Matematicheskii Sbornik*, 49, 284–93.

Roska, T., Chua, L.O. 1992. Cellular neural Networks with non linear and delay-type template, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 20, 469–481.

Sinha, A.S.C., 1973. On stability of solutions of some third and fourth order delay differential equations, *Information and Control*, 23, 165–172.

Quezz, A., Protoposecu, V., Barben, J. 1983. On the stability storage capacityan ddesign of non linear continuous neural networks, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18 80–87.

Yoshizawa, T., 1966, Stability Theory by Liapunov's Second Method. *The Mathematical Society of Japan*, Tokyo.

Yunfeng, Z., 1992. On stability, boundedness and existence of periodic solution of a kind of third order nonlinear delay differential system. *Annals of Differential Equations*, 8 (2): 249-259.

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	V	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	V	
Denklem yazımları uygun mu?	V	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	V	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	V	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	V	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	V	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	V	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	V	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	V	
+Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	V	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

	Unvanı Adı SOYADI	İmza
Öğrenci :	Öğr. Gör. Şakir ÇETİN	....
Danışman :	Doç. Dr. Erdal KORKMAZ	....

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum /vermiyorum**.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı
Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI	Tarih	İmza
Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖNLÜ	12.07.2019	....

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

AdıSoyadı	**:**	Şakir ÇETİN
Uyruğu	**:**	T.C.
DoğumYeriveTarihi	**:**	Muş-01/07/1982
Telefon	**:**	532 238 2427
Faks	**:**	
e-mail	**:**	sakircetin49@hotmail.com, s.cetin@alparslan.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**BitirmeYılı**
Lise	:	Muş Lisesi, Muş	1999
Üniversite	:	Yüzüncü Yıl Üniversitesi	2004
YüksekLisans	:	Muş Alparslan Üniversitesi	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2004-2009	**Muş Uğur Dershanesi**	**Yönetici**
2009-……	Muş Alparslan Üniversitesi	Öğretim Görevlisi

YABANCI DİLLER

İngilizce,