T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN FARK DİZİLERİNİN β. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Eren GÜLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2019
MUŞ

T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN FARK DİZİLERİNİN β. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Eren GÜLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

Haziran-2019
MUŞ

TEZ KABUL VE ONAYI

Eren GÜLER tarafından hazırlanan "Kesirli Mertebeden Fark Dizilerinin β. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı " adlı tez çalışması 18/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Prof Dr. Sadulla JAFAROV
Muş Alparslan Üniversitesi,
Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi ....

Danışman
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR
Muş Alparslan Üniversitesi,
Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi ....

Üye
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ
Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü ....

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 21/06/2019 Tarih ve 17/15 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Eren GÜLER

Tarih: 25/06/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ MERTEBEDEN FARK DİZİLERİNİN β. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Eren GÜLER

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

2019, 45 Sayfa

Jüri
Prof Dr. Sadulla JAFAROV
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

Bu tez çalışmasında; kesirli fark operatörleri yardımıyla tanımlanan bazı dizi uzayları ele alındı. Birinci bölümde; giriş bölümü verildi. İkinci bölümde; konu hakkında kaynak araştırması yapıldı. Üçüncü bölümde; çalışmada kullanılacak temel kavramlar, istatistiksel yakınsaklık ile ilgili tanım özellikler ve fark dizilerini ilgili tanım ve teoremler verildi. Dördüncü bölümün ilk kısmında kesirli mertebeden fark dizilerinin β. dereceden istatistiksel yakınsaklığın tanımı ve β' nın durumuna göre kapsama bağıntıları incelendi. İkinci kısımda ise kesirli mertebeden fark dizilerinin β. Dereceden ÷- istatistiksel yakınsaklığın tanımı verildi ve yine kapsama bağıntıları icelendi. Son bölümde ise sonuç ve öneriler verildi.

Anahtar Kelimeler: Cesàro toplanabilme, İstatistiksel yakınsaklık, Kesirli fark operatörü.

ABSTRACT

MS THESIS

STATİSTİCAL CONVERGENCE OF ORDER β. OF FRACTIONAL DIFFERENCE SEQUENCES

Eren GÜLER

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS SCIENCE

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed ÇINAR

2019, 45 Pages

Jury
Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Assoc. Prof. Dr. Muhammed ÇINAR
Assoc. Prof. Dr. Murat KARAKAŞ

In this thesis; some array spaces identified with the help of fractional difference operators. In the first chapter; the introduction was given. In the second section; source research on the subject was done. In the third chapter; the basic concepts to be used in the study, the definition and theorems about statistical convergence and the related definitions and theorems were given. In the first part of the fourth chapter, the definition of statistical convergence of order β and the relation of inclusion according to the status of β were examined. In the second part of forth chapter the definition of ÷-statistical convergence of order β was given and the relations of inclusion were examined.. In the last section, results and suggestions were given.

Keywords: Cesàro Summability, Fractional difference operator, Statistical convergence.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca her türlü bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, desteğini her zaman yanımda hissettiğim, mesleki açıdan her zaman benim için bir ufuk çizgisi olan ve özellikle bu süreçte bana büyük sabır gösteren çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Muhammed ÇINAR'a teşekkür eder, saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca bu tez çalışmamda bir an olsun desteğini esirgemeyen eşime ve oğluma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Eren GÜLER
MUŞ-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET……………………………………………………………………………...iv

ABSTRACT……………………………………………………………………….v

ÖNSÖZ…………………………………………………………………………....vi

İÇİNDEKİLER…………………………………………………………………..vii

SİMGELER VE KISALTMALAR……………………………………..……...viii

1.GİRİŞ……………………………………………………………………..……...1

2.KAYNAK ARAŞTIRMASI……………………………………………………….2

3.MATERYAL VE YÖNTEM……………………………………………………...4

3.1. Temel Tanım ve Teoremler…………………………………….……...………...…..4

3.2. İstatistiksel Yakınsaklık….……………..………………...……..……………..……..……7

3.3. Kesirli Fark Operatörü……………..…………………………………….…….…..……….12

3.4. Kesirli Mertebeden Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı…………………..……..19

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA…………………...…….……..24

4.1. Kesirli Mertebeden Fark Dizilerinin β. Derecaden İstatistiksel Yakınsaklığı……….…..24

4.2. Kesirli Mertebeden Fark Dizilerinin β. Dereceden λ-İstatistiksel Yakınsaklığı …..……27

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER……………….………...……...…………..……….32

5.1. Sonuçlar………………...……….…...…………………………..……………...….…32

5.2. Öneriler………………………………..……...……………..………………….…..32

6. KAYNAKÇA…………………………………………………………….……....

ÖZGEÇMİŞ………………..…….………………..……………………….……....

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	:Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	:Kompleks sayılar cümlesi
l_∞	:Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	:Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	:Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
Γ	:Gama Fonksiyonu
$\delta(K)$	:K'nın doğal yoğunluğu
$\delta_\alpha(K)$	:K'nın α - yoğunluğu
S	:İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
S_0	:İstatistiksel sıfır diziler uzayı
S^α	:α. dereceden istatistiksel yakınsak diziler uzayı
S_0^α	:α. dereceden sıfıra istatistiksel yakınsak diziler uzayı
w	:Bütün reel ve kompleks terimli diziler uzayı
w_p	:Kuvvetli *p*-Cesàro toplanabilir diziler uzayı
w_p^α	:α. dereceden kuvvetli *p*-Cesàro toplanabilir diziler uzayı
w_{0p}^α	:Sıfıra yakınsak α. dereceden kuvvetli *p*-Cesàro toplanabilir diziler uzayı
$h.h.k$	:Hemen hemen her k
$h.h.k\ (\alpha)$	:α'ya göre hemen hemen her k
$[C, 1]$	:Cesàro yakınsak diziler kümesi
$[C, 1, p, \alpha]$	:α dereceden p kuvetli Cesàro yakınsak diziler uzayı
$[V, \lambda]$	:De la Vallĕe toplanabilir yakınsak diziler kümesi
$[V, \lambda, p, \alpha]$	:α dereceden p kuvetli de la Vallĕe yakınsak diziler uzayı

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk kez Steinhaus (1949) tarafından 1949 yılında bir konferansta verilmiştir. Daha sonra Fast (1951) tarafından ele alınan ve yoğunluk kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilgili pek çok alanda çalışmalar yapıldı. İstatistiksel yakınsak, istatistiksel Cauchy ve Cesàro toplanabilme kavramları arasındaki ilişki Schoenberg (1959), Salàt (1980), Connor (1988), Fridy (1985), Fridy ve Orhan (1993), Rath ve Tripathy (1994), Nuray (2010), Savaş (2000) tarafından ve daha pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

⋋−istatistiksel yakınsaklık kavramı Mursaleen (2000) tarafından tanımlandı.

Fark dizi uzayı kavramı ilk olarak Kızmaz (1981) tarafından ortaya atıldı. Daha sonra Et ve Çolak (1995) tarafından genelleştirildi.

Baliarsingh (2013) tarafından kesirli fark operatörünü tanımlandı. Kesirli fark operatörünü kullanarak Baliarsingh ve Dutta (2015, 2016) yeni dizi uzayları tanımladılar ve bu uzayların duallerini hesapladılar. Daha sonra kesirli fark operatörleri Baliarsingh (2016), Kadak ve Baliarsingh (2015), Furkan (2017), Baliarsingh ve Kadak (2018) tarafından çalışıldı.

Beş bölümde oluşan tezimizin birinci bölümü giriş bölümü olarak düzenlenmiştir. İkinci bölümde literatürde var olan kaynaklar araştırılmış ve çalışmalardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümünde, matematik alanında önemli ve bu çalışma için gerekli olan temel tanım, teorem, özellikleri ve kesirli mertebeden fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise kesirli mertebeden fark dizilerinin β. dereceden istatistiksel yakınsaklığı ve β. dereceden ⋋-istatistiksel yakınsaklığı ile ilgili tanım, teorem, özellikler ve detaylı bir şekilde ele alınarak incelenmiştir.

Beşinci bölüm olan son bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve ilerideki çalışmalara kaynak teşkil edebilecek öneriler verilmiştir.

2.KAYNAK ARAŞTIRMASI

Doğal yoğunluk kavramı doğal sayılarda düşünülmüş ve Niven ve ark. (1980) tarafından

$$\delta(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n\, ; k \in T\}| \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlandı.

Doğal yoğunluk kavramına bağlı olarak istatistiksel yakınsaklık kavramı Fridy (1985) tarafından için $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel yakınsaklığı $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n\, ; |x_k - \ell| \ge \varepsilon\}| = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlandı.

Connor (1988) tarafından Cesàro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelendi.

Leindler (1965) tarafından De la Vallĕe-Poussin ortalamasını, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in l_n} x_k \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlandı. Buna bağlı olarak λ-istatistiksel yakınsaklık kavramı Mursaleen (2000) tarafından,

$\forall\, \varepsilon > 0$ için $x = (x_k)$ dizisi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \le n : |x_k - \gamma| \ge \varepsilon\}| = 0 \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlandı.

Dereceli istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Çolak (2010) tarafından çalışılmış ve $x = (x_k)$ dizisinin α. dereceden istatistiksel yakınsaklığı,

$\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} |\{k \leq n : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlandı.

α. dereceden ⋋-istatistiksel yakınsaklık kavramı Çolak ve Bektaş (2011) tarafından çalışıldı. α. dereceden ⋋-istatistiksel yakınsaklık $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} |\{k \leq n : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{2.6}$$

şeklinde tanımladı.

Fark dizileri ilk olarak Kızmaz (1981) tarafından $\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$ şeklinde tanımlandı. $l_\infty(\Delta), c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları ve bu uzayların dualleri ve matris dönüşümleri çalışıldı.

Daha sonra Et ve Çolak (1995) fark dizisi kavramını genelleştirdi. Et ve Çolak genelleştirilmiş fark operatörünü,

$$\Delta^s x_i = \Delta(\Delta^{s-1} x_i - \Delta^{s-1} x_{i+1}) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımladı. $l_\infty(\Delta^s), c(\Delta^s)$ ve $c_0(\Delta^s)$ uzaylarını, bu uzayların duallerini ve matris dönüşümlerini çalıştılar.

Kesirli fark operatörü ise Baliarsing (2013) tarafından,

$$\Delta^{\alpha} x_i = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\,\Gamma(\alpha-k+1)} x_{i+k} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlandı. $l_\infty(\Delta^\alpha), c(\Delta^\alpha)$ ve $c_0(\Delta^\alpha)$ uzayları tanımlanıp bu uzayların dualleri incelendi.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1. $X \neq \emptyset$ ve S reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X \text{ ve } . : S \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine S cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir.

$\forall\, x, y \; ve \; z \in X$ ve $\forall\, \lambda\, ,\, \mu \in S$ için

L1. $x + y = y + x$

L2. $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3. $x + 0 = x$ olacak şekilde $0 \in X$ vardır.

L4. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = 0$ olacak şekilde $(-x) \in X$ vardır.

L5. $1. x = x$

L6. $\lambda\, (x + y) = \lambda\, x + \lambda\, y$

L7. $(\lambda + \mu)x = \lambda\, x + \mu x$

L8. $\lambda\, (\mu x) = (\lambda\, \mu)x$ (Maddox , 1970**)**

Tanım 3.2. K bir cisim, X; K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve V; X üzerinde reel değerli

$$\text{V}: X \to IR$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa V fonksiyonuna X üzerinde bir norm $(X$, V) ikilisine K cismi üzerinde normlu uzay denir.

$\forall\, x, y \in X$ ve $\forall\, \alpha \epsilon K$ için;

N1. $\text{V}(x) \geq 0 \;\; (x \in X)$

N2. $\text{V}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0\, (x \in X)$

N3. $\text{V}(\alpha x) = |\alpha| \text{V}(x)\; \alpha \in \text{K}$

N4. $\text{V}(x + y) \leq \text{V}(x) + \text{V}(y)$ **(**Jain, 1993)

Bu çalışma boyunca V normu yerine $\|.\|$ ve $(X$, V) normlu uzay ifadesi yerine $(X, \|.\|)$ ifadesini kullanacağız.

Tanım 3.3. $(X\; ,\; \|\,.\,\|)$ bir normlu uzay olsun, X in elemanlarının bir (x_n) dizisine $\varepsilon > 0$ için pozitif N tamsayısı vardır öyle ki her $n, m \geq N$ için $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ oluyorsa bir Cauchy dizisi denir. Diğer bir ifadeyle (x_n) bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ $n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ dır. **(**Jain, 1993)

Tanım 3.4. (X , ‖ . ‖) bir normlu uzay olsun, X in elemanlarının bir (x_n) dizisine eğer $\varepsilon > 0$ için pozitif N tamsayısı vardır öyleki her $n \geq N$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisi yakınsaktır denir. Diğer bir ifadeyle (x_n) dizisi $x \in X$'e yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $n \to \infty$ iken $\|x_n - x\| \to 0$ dır. (Jain, 1993)

Teorem 3.5. Bir X Banach uzayının bir Z $a$lt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart; Z uzayının X uzayında kapalı olmasıdır. (Kreyszig, 1978)

Tanım 3.6. Bir normlu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya Banach uzayı denir. (Kreyszig, 1978)

Tanım 3.7. $X \neq \emptyset$ ve $d: X \times X \to R$ fonksiyonu, aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X de metrik veya uzaklık fonksiyonu (X, d) çiftine ise metrik uzay denir.

i. $\forall\, x.y \in X$ için, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii. $\forall\, x.y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

iii. $\forall\, x.y \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Tanım 3.8. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n), X de yakınsak ve x de dizinin limiti denir. (x_n), X de yakınsak ve limiti x ise bu,

$$\lim_n x_n = x \quad \text{veya} \quad n \to \infty \text{ için } x_n \to x$$

sembollerinden biri ile ifade edilir. (x_n) yakınsak değilse ıraksaktır.

Teorem 3.9. (X, d) bir metrik uzay, $M \subset X$ve $\overline{M}, M$'nin kapanışını göstersin. Bu durumda $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \to x$ olacak şekilde M'de bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır. (Kreyszig, 1978)

Tanım 3.10. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun.
$\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.(Jain ve Ahmad, 1993)

Bu çalışmada kompleks terimli tüm $x = (x_i)$ $(i = 1, 2, 3, . . .)$ dizilerinin cümlesini w ile göstereceğiz.
w; $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ ve α bir skaler olmak üzere,

$$x + y = (x_i + y_i) \text{ ve } \alpha x = \alpha(x_i)$$

şeklinde tanımlanan işlemler ile bir lineer uzaydır.

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız,

$$l_\infty = \{x = (x_i); sup_i x_i < \infty\}$$

sınırlı diziler uzayı,

$$c = \{x = (x_i); \lim_i x_i \ \text{mevcut}\}$$

yakınsak diziler uzayı ve

$$c_0 = \{x = (x_i); \lim_i x_i = 0\}$$

sıfır diziler uzayı,

$$\|x\| = \sup_i |x_i|$$

normu ile birer Banach uzayıdır**. (**Maddox, 1970**)**

Fark dizileri ilk olarak Kızmaz (1981) tarafından çalışılmıştır. l_∞ sınırlı dizi uzayı, c yakınsak dizi uzayı, c_0 sıfıra yakınsak dizi uzayı ve $\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$ olmak üzere,

$$l_\infty(\Delta) = \{x = (x_i); \Delta x \in l_\infty\}$$
$$c(\Delta) = \{x = (x_i); \ \Delta x \in c\}$$
$$c_0(\Delta) = \{x = (x_i); \ \Delta x \in c_0\}$$

uzayları Kızmaz (1981) tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 3.11. $s \in N, \ x = (x_i)$ reel ve kompleks terimli herhangi bir dizi, $\Delta^0 x_i = x_i, \ \Delta x_i = x_i - x_{i+1}, \ \Delta^s x_i = \Delta(\Delta^{s-1} x_i),$ ve $\Delta^s x = (\Delta^s x_i)$ olmak üzere

i. $\Delta^s(l_\infty) = \{x = (x_i); \ \Delta^s x = (\Delta^s x_i) \in l_\infty\}$

ii. $\Delta^s(c) = \{x = (x_i); \ \Delta^s x = (\Delta^s x_i) \in c\}$

iii. $\Delta^s(c_0) = \{x = (x_i); \ \Delta^s x = (\Delta^s x_i) \in c_0\}$

uzaylarını tanımlayalım ve s herhangi pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\Delta^s x_i = \sum_{r=0}^{s} (-1)^r \binom{s}{r} x_{i+r}$$

dir. $\Delta^s(l_\infty), \Delta^s(c)$ ve $\Delta^s(c_0)$ dizi uzayları aşikar olarak birer lineer uzaydır. (Et, 1995)

Teorem 3.12. $\Delta^s(l_\infty), \Delta^s(c)$ ve $\Delta^s(c_0)$ dizi uzayları,

$$\|x\|_\Delta = \sum_{k=0}^{s} |x_k| + \|\Delta^s x\|_\infty$$

normu ile birer normlu uzaydır. (Et, 1995)

Teorem 3.13. $(\Delta^s(l_\infty), \|.\|_\Delta)$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 3.14. $(\Delta^s(c), \|.\|_\Delta)$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 3.15. $(\Delta^s(c_0), \|.\|_\Delta)$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.16. $\alpha \in R$ ve n=0, 1, 2, . . . için,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha).(\alpha-1).(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$$

şeklinde tanımlanan sayılara binom katsayıları denir.

Eğer a ve b birer doğal sayı ise,

$$b \leq a$$

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!\,b!}$$

ve $b > a$

$$\binom{a}{b} = 0$$

3.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık, Cesàro yakınsaklık ve özellikleri incelenecektir.

$T \subset N$ kümesi alındığında, T kümesinin eleman sayısı $|T|$ şeklinde gösterilir ve

$$T(n) = |\{k \leq n; k \in T\}|$$

dir. Buna göre T kümesinin sırasıyla alt ve üst asimptotik yoğunluğu;

$$\underline{\delta}(T) = \lim_{n\to\infty} inf \frac{T(n)}{n}, \qquad \bar{\delta}(T) = \lim_{n\to\infty} sup \frac{T(n)}{n}$$

olarak verilir. $\frac{T(n)}{n}$ dizisinin limitinin var olması durumunda , bu limite T kümesinin doğal yoğunluğu denir ve $\delta(T)$ ile gösterilir. Yani,

$$\delta(T) = \bar{\delta}(T) = \underline{\delta}(T)$$

eşitliğinin sağlanması halinde $T \subset N$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n\,; k \in T\}|$$

dir.(Niven vd., 1980)

T indeks kümesini $t_1 < t_2 < t_3 \ldots$ artan dizi için düzenlersek,

$$\underline{\delta}(T) = \lim_{n\to\infty} inf \frac{T(n)}{n}, \qquad \bar{\delta}(T) = \lim_{n\to\infty} sup \frac{T(n)}{n}$$

dir ve $\underline{\delta}(T) = \underline{\delta}(t_n)$ ve $\bar{\delta}(T) = \bar{\delta}(t_n)$ olduğu görülür. Burada alınan x_{t_n} dizisi $n = 1,2,3, \ldots$ için reel sayıların sonsuz dizisidir.

Tanım 3.17. $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n\,; |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani h.h.k (hemen her k) için $|x_k - \ell| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. $\ell = 0$ olması halinde S_0 yani sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir.

$x = (x_k)$ dizisinin ℓ 'ye istatistiksel yakınsak olması halinde $S - \lim_k x_k = \ell$ veya $x_k \to \ell(S)$ ile gösterilir. (Fridy, 1985)

Yakınsak her dizi açıkça görüleceği gibi istatistiksel yakınsaktır. Bunu göstermek için $(x_k) \to x$ alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ iken $|x_k - x| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in N$ vardır. Demek ki ancak $k \leq k_0$ için $|x_k - x| \geq \varepsilon$ olur. Halbuki

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n\,; |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| \leq lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} k_0 = 0$$

dir.

Fakat bunun tersi doğru değildir. Bunun için $n = 1,2,3 \ldots$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 1 \quad , & k = n^2 \\ 0 \quad , & k \neq n^2 \end{cases} \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n\,; |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n\,; |x_k| \neq \varepsilon\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n\,; x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - lim_k\, x = 0$ olması demektir.

Tanım 3.18. $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun, Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n\,; |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.19. $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \ell$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına Cesàro yakınsaktır denir. $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına Cesàro yakınsak ise $(C,1) - \lim x = \ell$ veya $x_k \to \ell\big((C,1)\big)$ şeklinde yazılır. Cesàro yakınsak dizilerin uzayı

$$(C,1) = \{\, x = (x_k)\,;\ \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - \ell| = 0 \ en\ az\ bir\ \ell\ için\,\}$$

ile gösterilir.

Teorem 3.20. $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına Cesàro yakınsaktır.

Teoremin tersi doğru değildir. Gerçekten $(x_n) = (1 + (-1)^n)$ dizisi Cesàro yakınsaktır, fakat yakınsak değildir.

Teorem 3.21. $p \in R$, $0 < p < \infty$ ve $x = (x_k) \in w$ kompleks terimli bir dizi olsun. (w kompleks terimli dizi uzayları)

i. $x_k \to \ell(w_p)$ ise $x_k \to \ell(S)'$ dir.

ii. $x \in l_\infty$ ve $x_k \to \ell(S)$ ise $x_k \to \ell(w_p)'$ dir.

İspat i. $x \in w$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Buna göre,

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - \ell|^p = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ |x_k - \ell| \le \varepsilon}} |x_k - \ell|^p + \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ |x_k - \ell| \ge \varepsilon}} |x_k - \ell|^p \ge \varepsilon^p |\{k \le n \,; |x_k - x_N| \ge \varepsilon\}|$$

elde edilir. Bu $S - lim_k\, x_k = \ell$'dir.

ii. Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına istatistiksel yakınsak olsun ve $K = \|x\|_\infty + M$ diyelim, $\varepsilon \ge 0$verilsin. $\forall\, n \ge N_\varepsilon$ için $N_\varepsilon{}'$u

$$\frac{1}{n}\{k \le n\,;\, |x_k - \ell| \ge \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\} < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \{k \le n\,;\, |x_k - \ell| \ge \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\}$$

diyelim. Bu taktirde $n \ge N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - \ell|^p = \frac{1}{n}\left(\sum_{k \in L_n} |x_k - \ell|^p + \sum_{k \notin L_n} |x_k - \ell|^p\right) < \frac{1}{n}\left(\frac{n\varepsilon}{2K^p} K^p + n\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Burada $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına kuvvetli p −Cesàro yakınsaktır.

Tanım 3.22. $\lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların azalmayan , sonsuza giden ve $\lambda_{n+1} \le \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ şartına sahip bir dizi olsun. Bu şekilde tanımlanan tüm $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesi Λ ile gösterilecektir.

$K \subset N$ olsun. K'nın λ −yoğunluğu, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\delta_\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : k \in K\}|$$

olarak tanımlanır. $\delta_\lambda(K)$, $\lambda_n = n$ durumunda $\delta(K)$ doğal yoğunluğuna indirgenir. (Mursaleen, 2000)

Leindler (1965) tarafından genelleştirilmiş De la Vallĕe-Poussin ortalaması, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere,

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bir $x = (x_k)$ dizisi, $n \to \infty$ iken $t_n(x) \to \ell$ ise ℓ sayısına $(V,\lambda)-$ toplanabilirdir denir. Her $n \in N$ için $\lambda_n = n$ ise $(V,\lambda)-$ toplanabilirlik $(C,1)-$ toplanabilirliğe indirgenir. Sırasıyla ℓ ye kuvvetli Cesàro toplanabilir ve kuvvetli $(V,\lambda)-$ toplanabilir, yani $x_k \to \ell[C,1]$ ve $x_k \to \ell[V,\lambda]$ olan $x = (x_k)$ dizilerinin kümesi için

$$[C,1] = \{x = (x_k) : \ lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} |x_k - \ell| = 0, \ \ en\ az\ bir\ \ell\ için\}$$

$$[V,\lambda] = \{x = (x_k) : \ lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{\lambda_n} \textstyle\sum_{k \in I_n} |x_k - \ell| = 0, \ \ en\ az\ bir\ \ell\ için\}$$

yazılır.

Tanım 3.23. $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık kavramı Mursaleen (2000) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi ℓ'ye $\lambda-$istatistiksel yakınsaktır denir. Tüm $\lambda-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_λ ile gösterilir. $\lambda_n = n$ durumunda S_λ'nın S denk olduğu açıktır.(Mursaleen, 2000)

Tanım 3.24. $S \subset N$ olmak üzere bir S kümesinin α. dereceden yoğunluğu, $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere

$$\delta_\alpha(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in S\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in S\}|$ ifadesi S kümesinin n'den büyük olmayan elemanlarının sayısını gösterir.(Çolak, 2010)

Eğer $\delta(S) = 0$ ise S kümesine sıfır $\alpha-$yoğunluklu küme denir.

Tanım 3.25. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için

$$lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir ve $st^\alpha - \lim x = \ell$ şeklinde gösterilir.(Çolak, 2010)

α. Dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini S^α ile göstereceğiz. $\ell = 0$ olması halinda bu kümeyi S_0^α ile göstereceğiz.

$x = (x_k)$, α ya göre sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k lar için bir $P(k)$ özelliği sağlıyorsa, o zaman bu dizi α ya göre h.h k için P özelliğini sağlıyor denir ve $\mathrm{h.h.k}(\alpha)$ şeklinde gösterilir.

N nin sonlu her alt kümesinin $\alpha-$yoğunluğu sıfırdır ve $\delta_\alpha(E^c) = 1 - \delta_\alpha(E)$ eşitliği $0 < \alpha < 1$ için genelde doğru değildir. Bu eşitlik sadece $\alpha = 1$ için sağlanır. (Mursaleen, 2000)

Tanım 3.26. $0 < \alpha \leq 1$ ve $p \in R^+$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k - \ell|^p = 0$$

olacak şekilde bir ℓ kompleks sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi $\alpha.$ dereceden $p-$ kuvvetli Cesàro yakınsaktır denir. $\alpha.$ dereceden $p-$ kuvvetli Cesàro yakınsak dizilerin kümesi $[C, 1, p, \alpha]$ ile gösterilir. Yani;

$$[C, 1, p, \alpha] = \{x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n^\alpha} \textstyle\sum_{k=1}^{n} |x_k - \ell|^p = 0, \ \ en\ az\ bir\ \ell\ için\}$$

dir. (Mursaleen, 2000)

Tanım 3.27. $\lambda \in \Lambda$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ ve λ_n^α, λ_n nin $\alpha.$ kuvveti yani , $\lambda^\alpha = (\lambda_n^\alpha) = (\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha, \lambda_3^\alpha, \lambda_4^\alpha, \dots, \lambda_n^\alpha, \dots)$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi ℓ'ye $\alpha.$ dereceden $\lambda-$istatistiksel yakınsaktır veya ℓ'ye st_λ^α yakınsaktır denir. $\alpha.$ dereceden $\lambda-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini S_λ^α ile göstereceğiz.(Çolak ve Bektaş, 2011)

Bu durumda $st_\lambda^\alpha - \lim x = \ell$ veya $x_k \to \ell(st_\lambda^\alpha)$ yazılır. $\lambda_n = n$ özel halinde S_λ^α ile S^α uzayları birbirine denk olur.

Teorem 3.28. $0 < \alpha \leq 1$ ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ birer kompleks sayı dizileri olsunlar.

i. $st_\lambda^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $c \in C$ ise $st_\lambda^\alpha - \lim c x_k = c x_0$,

ii. $st_\lambda^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $st_\lambda^\alpha - \lim y_k = y_0$ ise $st_\lambda^\alpha - \lim(x_k + y_k) = x_0 + y_0$

dır.(Çolak ve Bektaş, 2011)

Tanım 3.29. $\alpha > 0$ ve $p \in R^+$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k\in I_n} |x_k - \ell|^p = 0$$

olacak şekilde bir ℓ kompleks sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi $\alpha.$ dereceden $p-$ kuvvetli (V, λ) yakınsaktır denir. $\alpha.$ dereceden $p-$ kuvvetli (V, λ) yakınsak dizilerin kümesini $[V, \lambda, p, \alpha]$ ile gösterilir. yani;

$$[V, \curlywedge, p, \alpha] = \{x = (x_k) : \ lim_{n\to\infty} \frac{1}{\curlywedge_n^\alpha} \sum_{k\in I_n} |x_k - \ell|^p = 0, \text{en az bir } \ell \text{ için}\} \quad \text{dir.}$$

(Çolak ve Bektaş, 2011)

3.3. Kesirli Fark Operatörü

$\Gamma(p)$ gamma fonksiyonu ve $p \notin \{0, -1, -2, -3, . \ . \ .\}$ olmak üzere,

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \tag{3.1}$$

fonksiyonuna gamma fonksiyonu denir.

Eşitlik (3.1)'den

i. p doğal sayı ise $\Gamma(p+1) = p!$

ii. p herhangi bir reel sayı ve $p \notin \{0, -1, -2, . \ . \ .\}$ ise $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

iii. Özel olarak $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,\ \Gamma(3) = 2!\,,\ \Gamma(4) = 3!\,.\ .\ .\ '\mathrm{dir}.$

w reel değerli dizilerin uzayı olsun, α bir reel sayı, $x \in w$ için $\Delta^\alpha, \Delta^{(\alpha)}, \Delta^{-\alpha}$ ve $\Delta^{(-\alpha)}$ fark operatörleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

1. $$(\Delta^\alpha x_i) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\,\Gamma(\alpha-k+1)} x_{i+k} \tag{3.2}$$

2. $$\left(\Delta^{(\alpha)} x_i\right) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\,\Gamma(\alpha-k+1)} x_{i-k} \tag{3.3}$$

3. $$(\Delta^{-\alpha} x_i) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma(-\alpha+1)}{k!\,\Gamma(-\alpha-k+1)} x_{i+k} \tag{3.4}$$

4. $$\left(\Delta^{(-\alpha)} x_i\right) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma(-\alpha+1)}{k!\,\Gamma(-\alpha-k+1)} x_{i-k} \tag{3.5}$$

$(3.2 - 3.5)$'te tanımlanan toplamların $x\epsilon w$ için yakınsak olduğu farz edeceğiz. Özellikle $\alpha = \frac{1}{2}$ için,

$$(\Delta^{\frac{1}{2}} x_i) = x_i - \frac{1}{2} x_{i+1} - \frac{1}{8} x_{i+2} - \frac{1}{16} x_{i+3} - \frac{5}{128} x_{i+4} - \cdots$$

$$(\Delta^{(\frac{1}{2})} x_i) = x_i - \frac{1}{2} x_{i-1} - \frac{1}{8} x_{i-2} - \frac{1}{16} x_{i-3} - \frac{5}{128} x_{i-4} - \cdots$$

$$(\Delta^{-\frac{1}{2}}x_i) = x_i + \frac{1}{2}x_{i+1} + \frac{3}{8}x_{i+2} + \frac{5}{16}x_{i+3} + \frac{35}{128}x_{i+4} + \cdots$$

$$(\Delta^{(-\frac{1}{2})}x_i) = x_i + \frac{1}{2}x_{i-1} + \frac{3}{8}x_{i-2} + \frac{5}{16}x_{i-3} + \frac{35}{128}x_{i-4} - \cdots$$

elde ederiz.(Baliarsingh ve Dutta, 2015)

$\Delta^{\alpha},\ \Delta^{(\alpha)}\ ,\ \Delta^{-\alpha}\ ve\ \Delta^{(-\alpha)}$ operatörleri aşağıdaki üçgensel matrislerle gösterilebilir.

$$\Delta^{\alpha}_{ni} = \begin{cases} (-1)^{i-n}\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(i-n)!\ \Gamma(\alpha+n-i+1)} & 0 \le n \le i \\ 0 & n > i \end{cases}$$

$$\Delta^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} & \dfrac{-\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} & \cdots \\ 0 & 1 & -\alpha & \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{(\alpha)}_{ni} = \begin{cases} (-1)^{n-i}\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(n-i)!\ \Gamma(\alpha+i-n+1)} & 0 \le i \le n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

$$\Delta^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} & -\alpha & 1 & 0 & \cdots \\ \dfrac{-\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} & \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} & -\alpha & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{-\alpha}_{ni} = \begin{cases} (-1)^{i-n}\dfrac{\Gamma(-\alpha+1)}{(i-n)!\ \Gamma(-\alpha+n-i+1)} & 0 \le n \le i \\ 0 & n > i \end{cases}$$

$$\Delta^{-\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2!} & \dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!} & \cdots \\ 0 & 1 & \alpha & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{(-\alpha)}_{ni} = \begin{cases} (-1)^{n-i}\dfrac{\Gamma(-\alpha+1)}{(n-i)!\ \Gamma(-\alpha-n+i+1)} & 0 \le i \le n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

$$\Delta^{(-\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} & \alpha & 1 & 0 & \dots \\ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} & \alpha & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Δ^{α} ve $\Delta^{(\alpha)}$ operatörlerinin genelleştirilmesinde aşağıdaki özel durumların içerildiğini gözlemleyebiliriz.

i. $\alpha = 1$ ise Δ^{α} operatörü Kızmaz (1981) tarafından tanımlanan $(\Delta_x)_i = x_i - x_{i+1}$ operatörlerine indirgenir.

ii. $\alpha = m$ ise Δ^{α} operatörü Et veya Çolak (1995) tarafından tanımlanan $(\Delta_x^m)_i = \sum_{k=0}^{m}(-1)^m \binom{m}{k} x_{i+k}$ operatörüne indirgenir.

iii. $\alpha = 1$ ise $\Delta^{(\alpha)}$ operatörü Malkowsky ve Parashar (1997) tarafından tanımlanan $(\Delta_x^{(1)})_i = x_i - x_{i-1}$ operatörüne indirgenir.

iv. $\alpha = m$ ise $\Delta^{(\alpha)}$ operatörü Malkowsky (1997) ve Et (2000) tarafından çalışılan $(\Delta_x^{(m)})_i = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k} x_{i-k}$ operatörüne indirgenir.

Teorem 3.30. $x \in \left\{\Delta^{\alpha}, \Delta^{(\alpha)}, \Delta^{-\alpha} \; ve \; \Delta^{(-\alpha)}\right\}$ için $x : w \to w$ operatörleri p üzerinde lineerdir. (Baliarsingh ve Dutta, 2015)

İspat. İspat açıktır.

Teorem 3.31. α *ve* β iki reel sayı ise;

i. $\Delta^{\alpha} \circ \Delta^{\beta} = \Delta^{\beta} \circ \Delta^{\alpha} = \Delta^{\alpha+\beta}$

ii. $\Delta^{(\alpha)} \circ \Delta^{(\beta)} = \Delta^{(\beta)} \circ \Delta^{(\alpha)} = \Delta^{(\alpha+\beta)}$

İspat. i. $\alpha, \beta > 0$ için ve Teorem 3.3.1 ile,

$$\Delta^{\alpha}\left(x_k - \beta x_{k+1} + \frac{\beta(\beta-1)}{2!}x_{k+2} - \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{3!}x_{k+3} + \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}{4!}x_{k+4} - \cdots\right)$$

$$= x_k - \alpha x_{k+1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k+2} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k+3}$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x_{k+4} - \cdots - \beta x_{k+1} + \beta\alpha x_{k+2}$$
$$+ \beta\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k+3} - \beta\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k+4}$$
$$+ \beta\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x_{k+5} + \cdots$$
$$+ \frac{\beta(\beta-1)}{2!}\left(x_{k+2} - \alpha x_{k+3} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k+4} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k+5}\right.$$
$$\left.+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x_{k+6} + \cdots\right)$$
$$- \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{3!}\left(x_{k+3} - \alpha x_{k+4} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k+5}\right.$$
$$\left.- \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k+6} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x_{k+7} + \cdots\right)$$
$$= x_k - (\alpha+\beta)x_{k+1} + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2!}x_{k+2}$$
$$- \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{3!}x_{k+3} + \cdots$$
$$= \Delta^{\alpha+\beta}x_k$$

olur.

$\Delta^{\beta}\, o\Delta^{\alpha}$ aynı yolla bulunur.

ii. $\Delta^{(\alpha)}\ o\ \Delta^{(\beta)} = \Delta^{(\beta)}\ o\ \Delta^{(\alpha)} = \Delta^{(\alpha+\beta)}$

$$\Delta^{(\alpha)}\left(x_k - \beta x_{k-1} + \frac{\beta(\beta-1)}{2!}x_{k-2} - \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{3!}x_{k-3}\right.$$
$$\left.+ \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}{4!}x_{k-4} - \cdots\right)$$

$$= x_k - \alpha x_{k-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k-2} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k-3}$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x_{k-4} - \cdots - \beta x_{k-1} + \beta\alpha x_{k-2}$$
$$+ \beta\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k-3} - \beta\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k-4}$$
$$+ \beta\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x_{k-5} + \cdots$$
$$+ \frac{\beta(\beta-1)}{2!}\left(x_{k-2} - \alpha x_{k-3} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k-4} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k-5}\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x_{k-6} + \cdots\right)$$
$$- \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{3!}\left(x_{k-3} - \alpha x_{k-4} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k-5}\right.$$
$$\left. - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k-6} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x_{k-7} + \cdots\right)$$

$$= x_k - (\alpha+\beta)x_{k-1} + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2!}x_{k-2}$$
$$- \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{3!}x_{k-3} + \cdots$$
$$= \Delta^{(\alpha+\beta)}$$

olur. $\Delta^{(\beta)}$ o $\Delta^{(\alpha)}$ aynı yolla bulunur.

Teorem 3.32. α bir reel sayı ise Id w'da birim operatör olmak üzere

i. Δ^{α} o $\Delta^{-\alpha} = \Delta^{-\alpha}$ o $\Delta^{\alpha} = Id$

ii. $\Delta^{(\alpha)}$o $\Delta^{(-\alpha)} = \Delta^{(-\alpha)}$ o $\Delta^{(\alpha)} = Id$ (Baliarsingh ve Dutta, 2015)

İspat. (i) $\alpha > 0$ için ve Teorem 3.30'dan

$$\Delta^{\alpha}\left(x_k + \alpha x_{k+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x_{k+2} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}x_{k+3}\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{4!}x_{k+4}\right)$$

$$= x_k - \alpha x_{k+1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k+2} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k+3} + \cdots$$
$$+ \alpha\left(x_{k+1} - \alpha x_{k+2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k+3} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k+4} + \cdots\right)$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\left(x_{k+2} - \alpha x_{k+3} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k+4} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k+5}\right.$$
$$\left. + \cdots\right) + \cdots = x_k$$

olur.

$\Delta^{-\alpha}$ o Δ^{α} aynı yolla bulunur.

ii. $\Delta^{(\alpha)}\ o\ \Delta^{(-\alpha)} = \Delta^{(-\alpha)}\ o\ \Delta^{(\alpha)} = Id$

Teorem 3.33. α pozitif tam sayı, $\alpha\ ve\ x \in w$ için

i. $(\Delta^{\alpha}x)_k = (-1)^{\alpha}(\Delta^{(\alpha)}x)_{k+\alpha}$

ii. $(\Delta^{(\alpha)}x)_k = (-1)^{\alpha}(\Delta^{\alpha}x)_{k-\alpha}$

‘dır. (Baliarsingh ve Dutta, 2015)

İspat. (i) Tümevarım prensibi ile teoremi ispatlayalım.

$\alpha = 1\ ve\ x \in w\ için,$

$$(\Delta x)_k = x_k - x_{k+1} = (-1)(x_{k+1} - x_k) = (\Delta^{(1)}x)_{k+1}$$

elde ederiz. Bu temel adımı tamamlıyor.

Farz edelim r doğal sayısı için teorem doğru olsun. Yani;

$$(\Delta^r x)_k = (-1)^r(\Delta^{(r)}x)_{k+r}$$

Şimdi ifademiz *r+1* için doğru olduğunu gösterelim

$$(\Delta^{r+1}x)_k = \Delta(\Delta^{(r)}x)_k$$
$$= \Delta((-1)^r(\Delta^{(r)}x))_{k+r}$$
$$= (-1)^r(\Delta^{(r)}x)_{k+r} - (-1)^r(\Delta^{(r)}x)_{k+r+1}$$
$$= (-1)^{r+1}\left[(\Delta^{(r)}x)_{k+r+1} - (\Delta^{(r)}x)_{k+r}\right]$$
$$= (-1)^{r+1}(\Delta^{(r+1)}x)_{k+r+1}$$

elde ederiz.

Teorem 3.34. α herhangi bir reel sayı *ve* $x \in w$ için

$$(\alpha^+)_{i-1} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+i-1)$$

ve

$$(\alpha^-)_{i-1} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-i-1)$$

olmak üzere,

$$((\Delta^{\alpha}+\Delta^{-\alpha})x)_k = 2x_k + \sum_{1}^{\infty} \frac{(\alpha^+)_{i-1} + (-1)^i(\alpha^-)_{i-1}}{i} x_{k+i}$$

elde ederiz. (Baliarsingh ve Dutta, 2015)

İspat. İspat tanımdan elde edilir.

$x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$, w da iki dizi olsun. x ve y'nin çarpımını $xy = (x_k y_k)$ gibi tanımlayalım. Şimdi xy'nin ileri ve geri farkını sırasıyla $\Delta(xy) = (x_k y_k - x_{k+1}y_{k+1})$ ve $\Delta^{(1)}(xy) = (x_k y_k - x_{k-1}y_{k-1})$ şeklinde tanımlayalım. Bu kısmın temel amacı α pozitif tamsayı olmak üzere xy çarpım dizisinin α'ıncı farkını bulmaktır. Bu yüzden aşağıdaki teoremleri ifade edelim.

Teorem 3.35. $\alpha = n$ bir pozitif tamsayı ve $x, y \in w$ olsun. O zaman

$$\big((\Delta^n)xy\big)_k = x_k\Delta^n y_k + n\Delta x_k\Delta^{n-1}y_{k+1} + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 x_k\Delta^{n-2}y_{k+2} + \cdots + \Delta^n x_k y_{k+n}$$

olur. (. (Baliarsingh ve Dutta, 2015))

İspat. n doğal sayılar üzerinde tümevarım kullanacağız. $n = 0$ için sonuç açıktır ve $n = 1$ için çarpımların farkı iyi bilinen kurala indirgenir. Farz edelim ki $n = 1$ ve $x, y \in w\ olsun.$

$$\begin{aligned} x_k\Delta y_k + \Delta x_k y_{k+1} &= x_k(y_k - y_{k+1}) + (x_k - x_{k+1})y_{k+1} = x_k y_k - x_{k+1}y_{k+1} \\ &= \big(\Delta(xy)\big)_k \end{aligned}$$

elde ederiz. Farz edelim ki teorem, $n = r$ için

$$\big(\Delta^{(r)}(xy)_k\big) = \binom{r}{0}x_k\Delta^r y_k + \binom{r}{1}\Delta x_k\Delta^{r-1}y_{k+1} + \binom{r}{2}\Delta^2 x_k\Delta^{r-2}y_{k+2} + \cdots + \binom{r}{r}\Delta^r x_k y_{k+r}$$

olur. Şimdi, $n = r + 1$ için

$$\begin{aligned} \big((\Delta^{r+1})xy\big)_k &= \binom{r}{0}\Delta(x_k\Delta^r y_k) + \binom{r}{1}\Delta(\Delta x_k\Delta^{r-1}y_{k+1}) \\ &+ \binom{r}{2}\Delta(\Delta^2 x_k\Delta^{r-2}y_{k+2}) + \cdots + \binom{r}{r}\Delta(\Delta^r x_k y_{k+r}) \\ &= \binom{r}{0}x_k\Delta^{r+1}y_k + \left[\binom{r}{0} + \binom{r}{1}\right]\Delta x_k\Delta^r y_k \\ &+ \left[\binom{r}{0} + \binom{r}{1}\right]\Delta^2 x_k\Delta^{r-1}y_{k+2} + \cdots + \left[\binom{r}{r-1} + \binom{r}{r}\right]\Delta^r x_k\Delta y_{k+r} + \binom{r}{r}\Delta^{r+1}x_k y_{k+r+1} \\ &= \binom{r+1}{0}x_k\Delta^{r+1}y_k + \binom{r+1}{1}\Delta x_k\Delta^r y_{k+1} + \binom{r+1}{2}\Delta^2 x_k\Delta^{r-1}y_{k+2} + \cdots \\ &+ \binom{r+1}{r}\Delta^r x_k\Delta y_{k+r} + \binom{r+1}{r+1}\Delta^{r+1}x_k y_{k+r+1} \end{aligned}$$

dır. Bu da ispatı tamamlar.

3.4. Kesirli Mertebeden Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde α kesirli mertebeden Δ^{α} −istatistiksel yakınsaklığın tanımını vereceğiz. Özellikle Δ^{α} −istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığın pek çok özel durumunu içerir. Yani $\alpha = m \in N$ olması durumunda Δ^{α} −istatistiksel yakınsaklık Et ve Nuray (2001) tarafından tanımlanan Δ^{m} −istatistiksel yakınsaklığa indirgenir. $\alpha = 0$ durumunda ise istatistiksel yakınsaklık elde edilir. Bu tez boyunca tüm istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile göstereceğiz.

Tanım 3.36. $x = (x_k)$ bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$K(\varepsilon) = \{k \leq n: |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sıfır asimptotik yoğunluğa sahip ise yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi ℓ'ye Δ^{α} −istatistiksel yakınsaklıktır denir. Bu durumu $x_k \to \ell\big(\Delta^{\alpha}(S)\big)$ ile göstereceğiz.(Baliarsingh ve ark., 2018)

Tüm Δ^{α} −istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $\Delta^{\alpha}(S)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.37. $x = (x_k) \in$ w ve p pozitif bir reel sayı ve α uygun kesri verilsin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^{\alpha} x_k - \ell|^p = 0$$

olacak şekilde bir ℓ kompleks sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine kuvvetli Δ_p^{α}-Cesàro toplanabilirdir denir. Bu dizilerin uzayı $w_p(\Delta^{\alpha})$ ile gösterilir. Buna göre

$$w_p(\Delta^{\alpha}) = \{x = (x_k) : \ lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} |\Delta^{\alpha} x_k - \ell|^p = 0, \ \ en\ az\ bir\ \ell\ için\}$$

dir. $x = (x_k) \in w_p(\Delta^{\alpha})$ ile gösterilir. .(Baliarsingh ve ark., 2018)

Δ^{α} −istatistiksel yakınsak dizilere ilişkin bazı örnekler verelim.

Örnek 3.38. $x_k = \begin{cases} 1 & k = n^3 \\ 0 & (aksi\ durumlar) \end{cases} \quad n = 1,2,3,4 \ldots$

şeklinde tanımlanan diziyi göz önüne alalım. Açıkça (x_k) yakınsak değildir. Fakat sıfıra istatistiksel yakınsaktır. Şimdi pozitif uygun bir α kesrini için

$$\Delta^{\alpha}(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n^3} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(n^3 - k)!\,\Gamma(\alpha - n^3 + k + 1)} x_{n^3} \tag{3.6}$$

elde ederiz.

(3.6)'in terimleri asimtotik yakınsak olmasına rağmen seri ıraksaktır. $\Delta^{\alpha}(x_k)$ istatistiksel yakınsak değildir.

Örnek 3.39. $x = (x_k)$ bir dizi olsun

$$y_k = \begin{cases} 1 & k = n^2 \\ \frac{1}{k} & (aksi\ durumlar) \end{cases} \qquad n = 1,2,3,4 \ldots$$

ile tanımlanan $y = (y_k) = \Delta^{\alpha}(x_k)$ dizisini göz önüne alalım. $y = (y_k)$ yakınsak değil fakat istatistiksel yakınsaktır. Aslında istatistiksel limiti sıfırdır. (Baliarsingh ve ark., 2018)

Örnek 3.40. $x = (x_k)$ bir dizi olsun.

$x = (x_k) = \{\frac{[1+(-1)^k]}{2}\}$, (x_k) dizisi sınırlıdır, yakınsakta değildir, aynı zamanda istatistiksel yakınsak değildir. α uygun kesri için

$$\Delta^{\alpha}(x_k) = \begin{cases} 2^{\alpha-1} & (k\ , çift) \\ -2^{\alpha-1} & (k, tek) \end{cases}$$

$\Delta^{\alpha}(x_k)$ dizisini elde ederiz. (Baliarsingh ve ark., 2018)

Açıkça $\Delta^{\alpha}(x_k)$ dizisi sınırlıdır, ne yakınsak nede istatistiksel yakınsak değildir.

Örnek 3.41. $x = (x_k)$ bir dizi olsun.

$$y_k = \begin{cases} \sqrt{k} & k = n^2 \\ 0 & (aksi\ durumlar) \end{cases}, \qquad n = 0,1,2,3, \ldots$$

şeklinde tanımlanan $y = (y_k) = \Delta^{\alpha}x$ dizisini göz önüne alalım. $y \epsilon S$ ve $x \epsilon \Delta^{\alpha}(S)$ fakat $x \notin \Delta^{\alpha}(l_{\infty})$ dır. (Baliarsingh ve ark., 2018)

Uyarı. α uygun bir kesir ve $m \in N$ olsun.

- **i.** S ve $\Delta^{\alpha}(S)$ birbirini içermezler. (Örnek: 3.38'e bakınız)
- **ii.** $\Delta^{\alpha}(l_{\infty})$ ve $\Delta^{\alpha}(S)$ birbirlerini içermezler. (Örnek: 3.41'e bakınız)
- **iii.** $\Delta^{\alpha}(c) \subset \Delta^{\alpha}(S)$ ve bu kapsama kesindir. (Örnek: 3.45'e bakınız)

Teorem 3.42. $0 < p < \infty$ ve α uygun bir kesir olsun.

$x_k \to \ell\left(\Delta^{\alpha}(w_p)\right)$ ise $x_k \to \ell(\Delta^{\alpha}(S))$ 'dir. .(Baliarsingh ve ark., 2018)

İspat. $x = (x_k) \in \ell\left(\Delta^{\alpha}(w_p)\right)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta^{\alpha}x_k - \ell|^p \geq n\varepsilon^p \geq |\{k \leq n : |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| \geq \varepsilon\}|\varepsilon^p \tag{3.7}$$

elde ederiz.

(3.7) eşitsizliğinde $n \to \infty$ limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n: |\Delta^\alpha(x_k) - \ell| \ge \varepsilon\}| \varepsilon^p \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^\alpha x_k - \ell|^p = 0$$

buradan $x_k \to \ell(\Delta^\alpha(S))$ olduğu görülür.

Teorem 3.43. $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer $(x_k) \in \Delta^\alpha(l_\infty)$ ve $(x_k) \to \ell(\Delta^\alpha(S))$ ise o zaman $x_k \to \ell\left(\Delta^\alpha\left(w_p\right)\right)$'dir .(Baliarsingh ve ark., 2018)

İspat. Farz edelim ki $x \in \Delta^\alpha(l_\infty)$ ve $x_k \to \ell(\Delta^\alpha(S))$ olsun.

O zaman $\Delta^\alpha(x_k) \in l_\infty$ ve $n \to \infty$ iken $\frac{1}{n}|\{k \le n: |\Delta^\alpha(x_k) - \ell| \ge \varepsilon\}| \to 0$ olduğu açıktır. ε > 0 olsun $n_0 \in N$ vardır. Öyleki $\forall n \ge n_0$ için $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \ell$ olmak üzere

$$\frac{\left|\{k \le n: |\Delta^\alpha(x_k) - \ell| \ge \left({}^{\varepsilon}/_{2}\right)^{\frac{1}{p}}\}\right|}{n} \le \frac{\varepsilon}{2(\|\Delta^\alpha x\|_\infty + \ell)^P}$$

dır. Dahası;

$$|\Delta^\alpha(x_k) - \ell| \le \||\Delta^\alpha(x_k) - \ell|\|_{\Delta^\alpha} \le \ell + \|\Delta^\alpha x\|_\infty = \|x\|_{\Delta^\alpha}$$

ve

$$L_{n=}\{k \le n: |\Delta^\alpha(x_k) - \ell| \ge \left({}^{\varepsilon}/_{2}\right)^{\frac{1}{p}}\}$$

olmak üzere; $\forall n > n_0$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\Delta^\alpha x_k - \ell|^p = \frac{1}{n}\left(\sum_{k\in L_n} |\Delta^\alpha x_k - \ell|^p + \sum_{k\notin L_n} |\Delta^\alpha x_k - \ell|^p\right) < \frac{1}{n}\left(n\frac{\varepsilon}{n} + n\frac{\varepsilon\|x\|_{\Delta^\alpha}^p}{2\|x\|_{\Delta^\alpha}^p}\right)$$

$$= \varepsilon$$

böylece $x_k \to \ell\left(\Delta^\alpha\left(w_p\right)\right)$'dir.

Tanım 3.44. $x = (x_k)$ bir dizi olsun. ε > 0 ve $\forall\, n \ge N$ için

$$\frac{1}{n}|\{k \le n: |\Delta^\alpha(x_k) - \Delta^\alpha(x_N)| \ge \varepsilon\}| \to 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ varsa $x = (x_k)$ dizisi Δ^α −istatistiksel Cauchy dizisidir. .(Baliarsingh ve ark., 2018)

Örnek 3.45. $x = (x_k)$ bir dizi olsun ve

$$\Delta^\alpha(x_k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & k = n^2 \\ 0 & aksi\ durumlar \end{cases}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^\alpha(x_k)$ dizisini ele alalım.

$$\Delta^\alpha(x_k) = (1,0,0,1/4,0,\ldots,1/n^2 \ldots) \to 0$$

açıktır.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\Delta^{\alpha}x_k|^p \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\,, \qquad (0 < p \leq 1) \tag{3.8}$$

eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\Delta^{\alpha}x_k|^p \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

elde ederiz.

Böylece $x \in \Delta^{\alpha}(w_p)$dir. Dahası $x \in \Delta^{\alpha}(S)$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\Delta^{\alpha}x_k|^p \geq \frac{1}{n}|\{k \leq n\colon |\Delta^{\alpha}(x_k)| \geq \varepsilon\}| \tag{3.9}$$

(3.7) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsak $x \in \Delta^{\alpha}(S)$ dır. Dahası örnek 3.4.10'daki aynı diziyi alırsak $(\Delta^{\alpha}x_k) \in l_{\infty}$ ve $x \in \Delta^{\alpha}(S)$ olduğu açıktır. Böylece $(0 < p \leq 1)$ için $x \in \Delta^{\alpha}(w_p)$ dir.

Teorem 3.46. $x = (x_k)$ dizisi Δ^{α} −istatistiksel yakınsak bir dizi ise Δ^{α} −istatistiksel Cauchy dizisidir. .(Baliarsingh ve ark., 2018)

İspat. Farz edelim ki $\varepsilon > 0$ ve $x_k \to \ell(\Delta^{\alpha}(S))$ olsun. Hemen her k için (h.h. k)

$$|\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve N seçilirse o zaman

$$|\Delta^{\alpha}(x_N) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Şimdi h.h.k için

$$|\Delta^{\alpha}(x_k) - \Delta^{\alpha}(x_N)| < |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| + |\Delta^{\alpha}(x_N) - \ell| < \varepsilon$$

elde ederiz. Böylece $x = (x_k)$ dizisi Δ^{α} −istatistiksel Cauchy dizisidir.

Tanım 3.47. $p = (p_k)$ reel sayıların sınırlı kesin pozitif bir dizisi ve

$$0 < h = inf p_k \leq p_k \leq sup p_k = H < \infty$$

olsun. Tüm Δ_p^{α} − Cesàro yakınsak dizilerin kümesini

$$\Delta^{\alpha}(w;p) = \{x = (x_k) : \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell|^{p_k} = 0, \text{ en az bir } \ell \text{ için}\}$$

ile tanımlayacağız. $\Delta_p^\alpha -$ Cesàro yakınsak dizilerin kümesini $\Delta^\alpha(w;p)$ ile göstereceğiz. (Baliarsingh ve ark., 2018)

Teorem 3.48. α uygun kesri için $\Delta^\alpha(w;p) \subset \Delta^\alpha(S)$ bağıntısı sağlanır.(Baliarsingh ve ark., 2018)

İspat. $x = (x_k) \in \Delta^\alpha(w;p)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun

$\sum_{\#}|\Delta^\alpha(x_k) - \ell|$ olacak şekilde $k \leq n$ üzerinde toplamı göstersin. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\Delta^\alpha(x_k) - \ell|^{p_k} &\geq \frac{1}{n}\sum_{\#}|\Delta^\alpha(x_k) - \ell|^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{\#}\varepsilon^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{\#}\varepsilon^{h} \\ &\geq \frac{1}{n}|\{k \leq n: |\Delta^\alpha(x_k) - \ell| \geq \varepsilon\}|\varepsilon^h\end{aligned}$$

elde ederiz. $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k \leq n: |\Delta^\alpha(x_k) - \ell| \geq \varepsilon\}|\varepsilon^h \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\Delta^\alpha(x_k) - \ell|^{p_k} = 0$$

elde ederiz. Böylece $x \subset \Delta^\alpha(S)$ ve $\Delta^\alpha(w;p) \subset \Delta^\alpha(S)$ elde edilir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

4.1. Kesirli Mertebeden Fark Dizilerinin $\boldsymbol{\beta}$. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde kesirli mertebeden genelleştirilmiş fark dizilerinin β. dereceden $\Delta^{\alpha} -$ istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir. Tüm β. dereceden istatistiksel yakınsak, α mertebeden kesirli fark dizilerinin uzayı $S^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.1. $x = (x_k) \in w$ ve $0 < \beta \leq 1$ ve α uygun kesri verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} |\{k \leq n: |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{4.1}$$

olacak şekilde böyle bir ℓ kompleks sayısı varsa, o zaman (x_k) dizisi ℓ'ye β. dereceden Δ^{α} −istatistiksel yakınsaktır denir. (x_k) dizisinin ℓ'ye β. dereceden Δ^{α} −istatistiksel yakınsak olması halinde bunu $S^{\beta}(\Delta^{\alpha}) - lim x_k = \ell$ ile göstereceğiz. β. dereceden Δ^{α} −istatistiksel yakınsak bütün dizilerin kümesi $S^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ ile gösterilecektir.

$S_0^{\beta}(\Delta^{\alpha})$, β. dereceden sıfıra Δ^{α} −istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini gösterecektir.

Teorem 4.2. $0 < \beta \leq 1$ ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ birer kompleks sayı dizileri ve α uygun kesri verilsin.

i. Eğer $S^{\beta}(\Delta^{\alpha}) - lim x_k = x_0$ ve $c \in C$ ise o zaman $S^{\beta}(\Delta^{\alpha}) - lim c x_k = c x_0$ dır.

ii. Eğer $S^{\beta}(\Delta^{\alpha}) - lim x_k = x_0$ ve Eğer $S^{\beta}(\Delta^{\alpha}) - lim y_k = y_0$ ise o zaman $S^{\beta}(\Delta^{\alpha}) - lim(x_k + y_k) = x_0 + y_0$

İspat. i. $c = 0$ için ispat açıktır. $c \neq 0$ olsun. O zaman

$$\frac{1}{n^{\beta}} |\{k \leq n: |c\Delta^{\alpha} x_k - c x_0| \geq \varepsilon\}| = \frac{1}{n^{\beta}} \left|\left\{k \leq n: |\Delta^{\alpha} x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|$$

eşitsizliğinden i′yi elde ederiz.

ii. $\frac{1}{n^{\beta}} |\{k \leq n: |\Delta^{\alpha}(x_k + y_k) - (x_0 + y_0)| \geq \varepsilon\}| \leq$

$$\frac{1}{n^{\beta}} \left|\left\{k \leq n: |\Delta^{\alpha}(x_k) - (x_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{1}{n^{\beta}} \left|\left\{k \leq n: |\Delta^{\alpha}(y_k) - (y_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

eşitsizliğinden ii′ yi elde ederiz.

Yakınsak her dizinin $\beta.$ dereceden Δ^{α} $-$istatistiksel yakınsak olduğu görmek kolaydır. Yani $0 < \beta \leq 1$ için $c \subset S^{\beta}(\Delta^{\alpha})'$ dır.

Tanım 4.3. $0 < \beta \leq 1$ ve $p \in R^{+}$ olsun ve α uygun kesri verilsin. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^{\alpha} x_k - \ell|^p = 0 \tag{4.2}$$

böyle bir ℓ kompleks sayısı varsa, o zaman $x = (x_k)$ dizisi $\beta.$ dereceden kuvvetli Δ_p^{α} $-$Cesàro toplanabilirdir denir. $\beta.$ dereceden kuvvetli Δ_p^{α} $-$Cesàro toplanabilirlik, $\beta = 1$ için, kuvvetli Δ_p^{α} $-$Cesàro toplanabilirliğe indirgenir. $\beta.$ dereceden kuvvetli Δ_p^{α} $-$Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı $w_p^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ ile gösterilir, yani $w_p^{\beta}(\Delta^{\alpha}) = \{ x = (x_k) \, ; \, lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^{\alpha} x_k - \ell|^p = 0,$ en az bir ℓ için$\}$ dir. Sıfıra $\beta.$ dereceden kuvvetli Δ_p^{α} $-$Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı ise $w_{0p}^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.4. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun. Bu durumda $S^{\beta}(\Delta^{\alpha}) \subseteq S^{\gamma}(\Delta^{\alpha})$ ve bazı $\beta < \gamma'$lar için bu kapsam kesindir.

İspat. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $x \in S^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\gamma}} |\{k \leq n : |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} |\{k \leq n : |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| \geq \varepsilon\}|$$

olur. Bu ise $S^{\beta}(\Delta^{\alpha}) \subseteq S^{\gamma}(\Delta^{\alpha})$ olduğunu verir. Bu kapsamın kesin olduğunu görmek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 4.5. $x = (x_k)$ bir dizi olsun

$$\Delta^{\alpha}(x_k) = \begin{cases} 1 & k = n^2 \\ 0 & k \neq n^2 \end{cases} \qquad n = 1,2,3,4 \ldots$$

dizisini göz önüne alalım $1/2 < \gamma \leq 1$ için $x \in S^{\gamma}(\Delta^{\alpha})$ fakat $0 < \beta \leq 1/2$ için $x \notin S^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ 'dır.

Sonuç 4.6. Eğer $0 < \beta \leq 1$ için bir dizi ℓ sayısına $\beta.$ dereceden Δ^{α} $-$istatistiksel yakınsak ise, o zaman bu dizi ℓ'ye Δ^{α} $-$istatistiksel yakınsaktır. Yani $S^{\beta}(\Delta^{\alpha}) \subseteq S(\Delta^{\alpha})'$dir.

Sonuç 4.7.

i. $S^{\beta}(\Delta^{\alpha}) = S^{\gamma}(\Delta^{\alpha})$ olması için $\Leftrightarrow \beta = \gamma$ olmasıdır.

ii. $S^{\beta}(\Delta^{\alpha}) \subseteq S(\Delta^{\alpha})$ olması için $\Leftrightarrow \beta = 1$ olmasıdır

Aşağıdaki teoremin ispatı tanımdan açıktır.

Teorem 4.8. $0 < \beta < 1$ ve $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına β. dereceden Δ^α −istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda $lim\Delta^\alpha y_k = \ell$ olacak şekilde $x = (x_k)$ dizisinin bir (y_k) alt dizisi vardır.

Teorem 4.9. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $p \in R^+$ olsun. Bu durumda $w_p^\beta(\Delta^\alpha) \subseteq w_p^\gamma(\Delta^\alpha)'$dir ve bazı $\beta < \gamma'$lar için bu kapsam kesindir.

İspat. $x = (x_k) \in w_p^\beta(\Delta^\alpha)$ olsun ve $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ verilsin. $p \in R^+$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\gamma} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^\alpha x_k - \ell|^p \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^\alpha x_k - \ell|^p$$

yazabiliriz. Bu da $w_p^\beta(\Delta^\alpha) \subseteq w_p^\gamma(\Delta^\alpha)$ olduğu verir. Bu kapsamın kesin olduğunu görmek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 4.10. $x = (x_k)$ bir dizi olsun

$$\Delta^\alpha(x_k) = \begin{cases} 1 & k = m^2 \\ 0 & k \neq m^2 \end{cases} \qquad m = 1,2,3 \ldots$$

dizisini göz önüne alalım. $1/2 < \beta \leq 1$ ve $p = 1$ için $x \in w_p^\beta(\Delta^\alpha)$ fakat $0 < \beta \leq$ ½ için $x \notin w_p^\beta(\Delta^\alpha)'$dir.

Aşağıdaki sonuç teorem 4.10'un bir sonucudur.

Sonuç 4.11. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $p \in R^+$ ve α uygun kesri verilsin. Bu durumda

i. $w_p^\beta(\Delta^\alpha) = w_p^\gamma(\Delta^\alpha)$ olması için $\Leftrightarrow \beta = \gamma$ olmasıdır.

ii. $\forall\, \beta \in (0,1]$ ve $0 < p < \infty$ için $w_p^\beta(\Delta^\alpha) \subseteq w_p(\Delta^\alpha)$'dir.

Teorem 4.12. $0 < \beta \leq 1$ ve $0 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $w_q^\beta(\Delta^\alpha) \subseteq w_p^\beta(\Delta^\alpha)$ olur. Teorem 4.12'de $\beta = 1$ alınırsa $0 < p < q < \infty$ için $w_q(\Delta^\alpha) \subseteq w_p(\Delta^\alpha)$

Teorem 4.13. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir dizi ℓ sayısına β. dereceden kuvvetli Δ_p^α −Cesàro toplanabilir ise bu durumda ℓ'ye γ. dereceden Δ^α −istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta^\alpha x_k - \ell|^p \geq |\{k \leq n: |\Delta^\alpha x_k - \ell|^p \geq \varepsilon\}|\varepsilon^p$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^\alpha x_k - \ell|^p &\geq \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n: |\Delta^\alpha x_k - \ell|^p \geq \varepsilon\}|\varepsilon^p \\ &\geq \frac{1}{n^\gamma} |\{k \leq n: |\Delta^\alpha x_k - \ell|^p \geq \varepsilon\}|\varepsilon^p \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Eğer Teorem 4.13 $\beta = \gamma$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.14. $0 < \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Bir dizi ℓ'ye $\beta.$ dereceden kuvvetli $\Delta_p^\alpha -$ Cesàro toplanabilir ise bu durumda ℓ'ye $\beta.$ dereceden $\Delta^\alpha -$istatistiksel yakınsaktır.

Bu sonuçta $\beta = 1$ alınırsa bilinen ℓ'ye kuvvetli $\Delta_p^\alpha -$Cesàro toplanabilir olan bir dizi ℓ'ye $\Delta^\alpha -$istatistiksel yakınsaktır sonucu elde edilir. Ayrıca biliyoruz ki ℓ'ye $\Delta^\alpha -$istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi ℓ'ye kuvvetli $\Delta_p^\alpha -$Cesàro toplanabilirdir.

Sonuç 4.15. $0 < \beta \leq 1$ ve $p \in R^+$ olsun. Bu burumda $w_p^\beta(\Delta^\alpha) \subset S(\Delta^\alpha)$'dir. Eğer $0 < \beta < 1$ ise kapsam kesindir.

İspat. Sonuç 4.14 ve 4.6'dan $w_p^\beta(\Delta^\alpha) \subset S(\Delta^\alpha)$ olduğunu biliyoruz.

Örnek 4.16. $x = (x_k)$ bir dizi olsun

$$\Delta^\alpha(x_k) = \begin{cases} 1 & k = m^3 \\ \frac{1}{\sqrt{k}} & k \neq m^3 \end{cases} \qquad m = 1,2,3 \ldots$$

dizisini göz önüne alalım. $0 < \beta \leq$ ½ ve $p = 1$ için $x \notin w_p^\beta(\Delta^\alpha)$ iken $1/3 < \beta \leq$ ½ ve $p = 1$ için $x \in S_p^\beta(\Delta^\alpha) - w_p^\beta(\Delta^\alpha)$'dır.

4.2. Kesirli Mertebeden Fark Dizilerinin β. Dereceden λ-İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 4.17. $\lambda=(\lambda_n) \in \Lambda$ reel sayıların bir dizisi ve $\beta \in (0,1]$ olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ ve λ_n^β, λ_n in β. kuvveti yani $\lambda^\beta = \left(\lambda_n^\beta\right) = \left(\lambda_1^\beta, \lambda_2^\beta, \lambda_3^\beta, \lambda_4^\beta, \ldots\right)$, α uygun bir kesir olmak üzere;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\beta} |\{k \in I_n : |\Delta^\alpha x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{4.3}$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine $\beta.$ dereceden $\Delta_\lambda^\alpha -$istatistiksel yakınsak denir. Bu yakınsaklığı $S_\lambda^\beta - lim\Delta^\alpha x_k = \ell$ ile göstereceğiz.

Bütün $\beta.$ dereceden Δ^α $\lambda-$istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini $S_\lambda^\beta(\Delta^\alpha)$ ile $\beta.$ dereceden sıfıra Δ^α $\lambda-$istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini de $S_{\lambda,0}^\beta(\Delta^\alpha)$ ile göstereceğiz.

Her $\beta \in (0,1]$ için $S_{\lambda,0}^{\beta}(\Delta^{\alpha}) \subset S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ olacağı açıktır. $\beta = 1$ için $S_{\lambda}(\Delta^{\alpha})$ elde edilir.

β. dereceden Δ^{α} $\lambda-$istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi $0 < \beta \leq 1$ için iyi tanımlıdır. Fakat genelde $\beta > 1$ için iyi tanımlı değildir.

Örnek 4.18. $(\Delta^{\alpha} x_k)$ dizisini

$$\Delta^{\alpha} x_k = \begin{cases} 1 & k = 2n \\ 0 & k \neq 2n \end{cases} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

şeklinde tanımlayalım.

$\beta > 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} |\{k \in I_n : |\Delta^{\alpha} x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{[\lambda_n] + 1}{2\lambda_n^{\beta}} = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} |\{k \in I_n : |\Delta^{\alpha} x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{[\lambda_n] + 1}{2\lambda_n^{\beta}} = 0$$

olup

$S_{\lambda}^{\beta} - \lim \Delta^{\alpha} x_k = 1$ ve $S_{\lambda}^{\beta} - \lim \Delta^{\alpha} x_k = 0$ olur. Bu durumda $(\Delta^{\alpha} x_k)$ dizisi hem 1'e hem de 0'a β. dereceden istatistiksel yakınsak olur ki bu da mümkün değildir.

Teorem 4.19. $\beta \in (0,1]$ ve $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ kompleks sayıların dizileri ve α uygun bir kesir olsun.

i. $S_{\lambda}^{\beta} - \lim \Delta^{\alpha} x_k = x_0$, $c \in R$ ise $S_{\lambda}^{\beta} - \lim \Delta^{\alpha} c x_k = c x_0$ dır.

ii. $S_{\lambda}^{\beta} - \lim \Delta^{\alpha} x_k = x_0$, $S_{\lambda}^{\beta} - \lim \Delta^{\alpha} y_k = y_0$ ise $S_{\lambda}^{\beta} - \lim \Delta^{\alpha}(x_k + y_k) = x_0 + y_0$ dır.

İspat. i. c=0 için durum açıktır. $c \neq 0$ olsun

$$\frac{1}{\lambda_n^{\beta}} |\{k \in I_n : |\Delta^{\alpha}(c x_k) - c x_0| \geq \varepsilon\}| = \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \left|\{k \in I_n : |\Delta^{\alpha}(x_k) - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\}\right|$$

eşitsizliğinin her iki yanının $n \to \infty$ için limiti alınırsa i'nin ispatı elde edilir.

ii. $\frac{1}{\lambda_n^{\beta}} |\{k \in I_n : |\Delta^{\alpha}(x_k + y_k) - (x_0 + y_0)| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \big|\{k \in I_n : |\Delta^{\alpha}(x_k) - x_0| \geq$

ε2+ 1⋋nβk∈In:Δαyk−y0≥ε2

eşitsizliğinin her iki yanının $n \to \infty$ limiti alınırsa (ii)' nin ispatı elde edilir.

Bu teoremden $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha})'$nın bir lineer uzay olduğu görülür.

Lemma 4.20. K⊆ N olsun $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ ve $0 < \beta \leq \varphi \leq 1$ için $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha}) \subseteq S_{\lambda}^{\varphi}(\Delta^{\alpha})$ ve bu kapsama en az bir $\beta < \varphi$ için kesindir.

İspat. $0 < \beta \le \varphi \le 1$ olsun. $\lambda_n^{\beta} \le \lambda_n^{\varphi}$ olduğundan $\frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \ge \frac{1}{\lambda_n^{\varphi}}$ olur. Buradan,

$$\frac{1}{\lambda_n^{\varphi}}\ |\{k \in I_n : |\Delta^{\alpha} x_k - \ell| \ge \varepsilon\}| \le \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} |\{k \in I_n : |\Delta^{\alpha} x_k - \ell| \ge \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Böylece $S_{\lambda}^{\varphi}(\Delta^{\alpha}) \subseteq S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ elde ederiz.

$$\Delta^{\alpha} x_k = \begin{cases} n & n - \sqrt{\lambda_n} + 1 \le k \le n \\ 0 & diğer\ durumda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dizisini göz önüne alalım.

$\frac{1}{2} < \varphi \le 1$ için $S_{\lambda}^{\varphi} - lim\Delta^{\alpha} x_k = 0$ yani $x \in S_{\lambda}^{\varphi}(\Delta^{\alpha})'$dır. Fakat $0 < \beta \le \frac{1}{2}$ için $x \notin S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha})'$dır.

Sonuç 4.21. $x = (x_k)$ kompleks sayıların dizisi, $\beta \in (0,1]$ ve α uygun kesir olsun. (x_k) dizisi ℓ'ye β. dereceden λ −istatistiksel yakınsak ise o zaman ℓ'ye λ −istatistiksel yakınsaktır yani her bir $\beta \in (0,1]$ için $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha}) \subseteq S_{\lambda}(\Delta^{\alpha})$ ve bu kapsama kesindir.

Sonuç 4.22.

i. $S_{\lambda}^{\varphi}(\Delta^{\alpha}) = S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ ise $\Leftrightarrow \beta = \varphi$ dir.

ii. $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha}) = S_{\lambda}(\Delta^{\alpha})$ ise $\Leftrightarrow \beta = 1$ dir.

Teorem 4.22. $S(\Delta^{\alpha}) \subseteq S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{\beta}}{n} > 0 \tag{4.5}$$

olmasıdır.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. Buradan

$$\{k \le n : |\Delta^{\alpha} x_k - \ell| \ge \varepsilon\} \supset \{k \in I_n : |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| \ge \varepsilon$$

yazabiliriz. Bu nedenle

$$\frac{1}{n}|\{k \le n : |\Delta^{\alpha} x_k - \ell| \ge \varepsilon\}| \ge \frac{1}{n}|\{k \in I_n : |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| \ge \varepsilon|$$

$$= \frac{\lambda_n^{\beta}}{n} \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} |\{k \in I_n : |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| \ge \varepsilon|$$

yazabiliriz. (4.5) i kullanarak her iki yanın $n \to \infty$ için limiti alırsak

$$x_k \to \ell\big(S(\Delta^{\alpha})\big) \Longrightarrow x_k \to \ell\big(\ S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha})\ \big)$$

elde ederiz. Tersine farz edelim ki $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n^{\alpha}}{n} = 0$ olsun $\frac{\lambda_{n(j)}^{\alpha}}{n(j)} < \frac{1}{j}$ olacak şekilde bir $\left(n(j)\right)_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi seçelim.

$$\Delta^{\alpha} x_i = \begin{cases} 1 & i \in I_{n(j)} \\ 0 & diğer\ durumlar \end{cases} \qquad j = 1,2,3, \dots$$

dizisini tanımlayalım. $x \in \Delta^{\alpha}(S)$ dir. Fakat $x \notin S_{\lambda}(\Delta^{\alpha})$ dir. Sonuç 4.21'den $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha}) \subseteq S_{\lambda}(\Delta^{\alpha})$ olduğundan $x \notin S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ elde ederiz. Bu nedenle (4.5) gereklidir.

Tanım 4.23. $\lambda=(\lambda_n) \in \Lambda$ reel sayıların bir dizisi , $\beta \in (0,1]$ ve α uygun kesri verilsin. *p* pozitif bir reel sayı olmak üzere.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \sum_{k\in I_n} |\Delta^{\alpha} x_k - \ell|^p = 0 \qquad (4.4)$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine β. dereceden kuvvetli $(V,\lambda)(\Delta^{\alpha})$ toplanabilir denir ve kuvvetli $(V,\lambda)(\Delta^{\alpha})$ dizilerin cümlesini $[w_p^{\beta}](\Delta^{\alpha})$ ile göstereceğiz. Buna göre

$$\left[w_p^{\beta}\right](\Delta^{\alpha}) = \{\, x = (x_k) : \exists \ell \in R,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \sum_{k\in I_n} |\Delta^{\alpha} x_k - \ell|^p = 0\}$$

şeklinde tanımlayacağız. ℓ =0 olması durumunda bu uzayı $[w_{0p}^{\beta}](\Delta^{\alpha})$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.24. $0 < \beta \leq \varphi \leq 1$ ve *p* pozitif bir reel sayısı için

$$\left[w_p^{\beta}(\Delta^{\alpha})\right] \subseteq \left[w_p^{\varphi}(\Delta^{\alpha})\right]$$

olup en az bir α ve β için bu kapsama kesindir.

İspat. $x = (x_k) \in \left[w_p^{\beta}(\Delta^{\alpha})\right]$ olsun. $0 < \beta \leq \varphi \leq 1$ ve *p* pozitif bir reel sayısı için

$$\frac{1}{\lambda_n^{\varphi}} \sum_{k\in I_n} |\Delta^{\alpha} x_k - \ell|^p = 0\} \leq \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \sum_{k\in I_n} |\Delta^{\alpha} x_k - \ell|^p = 0\}$$

yazabiliriz. Buradan $\left[w_p^{\beta}(\Delta^{\alpha})\right] \subseteq \left[w_p^{\varphi}(\Delta^{\alpha})\right]$ elde ederiz. Bu kapsamanın kesin olduğunu göstermek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

$$\Delta^{\alpha} x_k = \begin{cases} k & n - \sqrt{\lambda_n} + 1 \leq k \leq n \\ 0 & diğer\ durumda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım.

$\forall \varepsilon > 0$, $\frac{1}{2} < \varphi < 1$, $n \to \infty$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^{\varphi}}\sum_{k\in I_n}|\Delta^{\alpha}x_k-\ell|^p=0\}\leq\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n^{\varphi}}=\frac{1}{\lambda_n^{\varphi-1/2}}\to 0$$

elde edilir. Yani $x_k\to 0\left[w_p^{\varphi}(\Delta^{\alpha})\right]$ dır.

Diğer taraftan $0<\beta<\frac{1}{2}$ için,

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}-1}{\lambda_n^{\beta}}\leq\frac{1}{\lambda_n^{\beta}}\sum_{k\in I_n}|\Delta^{\alpha}x_k-0|^p\to\infty$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 4.25. $0<\beta\leq\varphi\leq 1$ ve p pozitif bir reel sayı olsun.

i. $\left[w_p^{\beta}(\Delta^{\alpha})\right]=\left[w_p^{\varphi}(\Delta^{\alpha})\right]$ olması için $\Leftrightarrow\beta=\varphi$ olmasıdır.

ii. Her $\beta\in(0,1]$ ve $0<p<\infty$ için $\left[w_p^{\beta}(\Delta^{\alpha})\right]\subseteq\left[w_p(\Delta^{\alpha})\right]$ dir.

Teorem 4.26. β ve φ, $0<\beta\leq\varphi\leq 1$ olacak şekilde sabit reel sayılar ve $0<p<\infty$ olsun. $x=(x_k)$ dizisi β. dereceden kuvvetli $(V,\lambda)(\Delta^{\alpha})$ toplanabilir ise ℓ'ye φ. dereceden Δ^{α}, $\lambda-$ istatistiksel yakınsaktır. Yani $\left[w_p^{\beta}(\Delta^{\alpha})\right]\subseteq S_{\lambda}^{\varphi}(\Delta^{\alpha})$ dir.

İspat. Herhangi bir $x=(x_k)$ dizisi ve $\varepsilon>0$ için

$$\sum_{k\in I_n}|\Delta^{\alpha}x_k-\ell|^p=\sum_{\substack{k\in I_n\\|\Delta^{\alpha}x_k-\ell|\geq\varepsilon}}|\Delta^{\alpha}x_k-\ell|^p+\sum_{\substack{k\in I_n\\|\Delta^{\alpha}x_k-\ell|<\varepsilon}}|\Delta^{\alpha}x_k-\ell|^p$$

$$\geq\sum_{\substack{k\in I_n\\|\Delta^{\alpha}x_k-\ell|\geq\varepsilon}}|\Delta^{\alpha}x_k-\ell|^p\geq|\{k\in I_n:|\Delta^{\alpha}(x_k)-\ell|\geq\varepsilon\}|\varepsilon^p$$

ve buradan

$$\frac{1}{\lambda_n^{\beta}}\sum_{k\in I_n}|\Delta^{\alpha}x_k-\ell|^p\geq\frac{1}{\lambda_n^{\beta}}|\{k\in I_n:|\Delta^{\alpha}(x_k)-\ell|\geq\varepsilon\}|\varepsilon^p$$

$$\geq\frac{1}{\lambda_n^{\varphi}}|\{k\in I_n:|\Delta^{\alpha}(x_k)-\ell|\geq\varepsilon\}|\varepsilon^p$$

elde ederiz.

$\alpha=\beta$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.27. $0<\beta\leq 1$ sabit bir reel sayı ve $0<p<\infty$ olsun.
$x=(x_k)$ dizisi β. dereceden kuvvetli $(V,\lambda)(\Delta^{\alpha})$ toplanabilir ise β. dereceden $(\Delta_{\lambda}^{\alpha})-$ istatistiksel yakınsaktır. Yani $\left[w_p^{\beta}(\Delta^{\alpha})\right]\subseteq S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{\alpha})$ dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER:

5.1. Sonuçlar

P. Baliarsingh (2013) tarafından geliştirilen kesirli fark operatörü kompleks terimli dizilerin β. dereceden istatistiksel yakınsaklığı $x = (x_k) \in w$ ve α uygun kesir olmak üzere her ε > 0 için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

şeklinde tanımlandı. Bu tez çalışmasında bu tanımdan yaralanarak kompleks terimli kesirli fark dizilerinin β. dereceden istatistiksel yakınsaklığı $x = (x_k) \in w$, $0 < \beta \leq 1$ ve α uygun kesir olmak üzere her ε > 0 için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} |\{k \leq n: |\Delta^{\alpha}(x_k) - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

şeklinde tanımlandı. Burada $\alpha\ ve\ \beta$ nın durumlarına göre kapsama bağıntılarını incelendi. Kesirli fark opretörü yardımıyla tanımlanan dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ile Cesàro toplanabilmesi arasındaki bağıntılar ele alındı.

Çolak (2011) tarafından verilen β. dereceden ⋋- istatistiksel yakınsaklık tanımı kullanılarak kompleks terimli kesirli fark dizilerinin β. dereceden istatistiksel yakınsaklığı $x = (x_k) \in w$, $0 < \beta \leq 1$ ve α uygun kesri olmak üzere her ε>0 için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} |\{k \in I_n: |\Delta^{\alpha} x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlandı. Tanımlanan istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli (V,⋋)(Δ^{α}) toplanabilme arasındaki ilişki incelendi.

5.2. Öneriler

Kesirli fark operatörü yardımıyla tanımlanan çift indisli dizilerin istatistiksel yakınsaklığı incelenebilir. Ayrıca kesirli fark dizilerinin farklı yakınsaklık çeşitleri araştırılabilir.

6. KAYNAKÇA

Baliarsingh, P., 2013, Some new difference sequence spaces of fractional order and their dual spaces, *Applied Mathematics and Computation*, 219 (18), 9737-9742.

Baliarsingh, P. and Dutta, S., 2015, A unifying approach to the difference operators and their applications, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 33 (1), 49-56.

Baliarsingh, P., 2016, On difference double sequence spaces of fractional order, *Indian J. Math*, 58, 287-310.

Baliarsingh, P., and Dutta, S., 2016, On certain paranormed difference sequence spaces derived from generalized weighted mean. J. *Indian Math. Soc* (N.S) 83(1-2): 13-25

Baliarsingh, P., Kadak, U. and Mursaleen, M., 2018, On statistical convergence of difference sequences of fractional order and related Korovkin type approximation theorems, *Quaestiones Mathematicae*, 41 (8), 1117-1133.

Connor, J., 1988, The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, *Analysis*, 8 (1-2), 47-64.

Çolak, R., 2010, Statistical convergence of order α, Modern Methods via Analysis and Its Applications, Anamaya Pub., *New Delhi, India*, 121-129

Çolak, R. and Bektaş, Ç. A., 2011, ⋋- statistical convergence, of order α, *Acta Math. Sci. Ser.* B (Engl. Ed.)., 31(3): 953-959.

Et, M., 2000, On some topolpgical properties of generalized difference sequences spaces. Int. J. Math. Sci., 24(11), 785-791

Et, M. and Nuray, F., 2001, Δ^m statistical convergence, Indian J. Pure Appl. Math., 32(6), 961-969

Et, M. and Çolak, R., 1995, On some generalized difference sequence spaces, *Soochow J. Math*, 21 (4), 376-387.

Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique. In *Colloquium Mathematicae,* Vol. 2, No. 3-4, 241-244.

Fridy, J., 1985, On statistical convergence. *Analysis*, 5: 301-313

Fridy, J. and Orhan C., 1993, Lacunary statistical convergence. *Pacific J Math*, 160: 43-51

Furkan, H., 2017, On some ÷ differrence sequence spaces of fractional order. *Journal of Mathematical Egyptian Mathematical Society.* 25,37-42

Jain, P.K. and Ahmad, K., 1993, Metric Spaces, Narosa Publishing Hause, New Dehli, INDIA.

Kızmaz, H., 1981, On certain sequence spaces. *Mathematica Slovaca*. 24(2), 169- 176

Kreyszig, E., 1978, Introductory Functional Analysis with Application, john Wiley and Sons, New York.

Leindler, L., 1965, Über die de la Vallee-Pousinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen. *Acta Math. Acad. Sci Hungar.*, 16:375-387

Kadak, U. and Baliarsingh, P., 2015, On certain Euler difference sequence spaces of fractional order and related dual properties. *J. Nonlinear Sci. Appl*. 8 (6), 997-1004

Maddox, I. J., 1970, Elements of Fuctional Analysis, Cambirdge University Press, Cambridge, Second Etition

Malkowsky, E. and S. D., 1997, Parashar, Matrix transformation in space of bounded and convergent defference sequence of order m, *Analysis*, 17 : 87-97.

Mursaleen, M., 2000, λ - statistical convergence. *Mathematica Slovaca* 50: 111-115

Móricz, F., 2003, Statistical convergence of multiple sequences. *Arch Math*., 81: 82-89

Niven, I. and Zuckerman, H. S., 1980, The Theory of Numbers, 4-th Ed., New York, John Wiley and Sons.

Nuray, F., 2010, λ-strongly summable and λ- statistically convergent functions, Iran. J. Sci. Technol. *Trans. A Sci*., 34(4), 335-338

Rath, D. and Tripathy, B. C., 1994, On statistically convergent and statistically Cauchy sequences, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 25, 381-381

Salat, T., 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca*, 30 (2), 139-150.

Savaş, E., 2000, Strong almost convergence and almost λ-statistical convergence, *Hokkaido Mathematical Journal*, 29 (3), 531-536.

Schoenberg I J., 1959 The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer Math Monthly*, 66; 361-375

.

Steinhaus, H., 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, In *Colloq. Math*2, No. 1, 73-74.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Eren GÜLER
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Muş-01.04.1984
Telefon	**:**	536 890 8454
Faks	**:**	
e-mail	**:**	ist_mat@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Bursa Cumhuriyet Anadolu Lisesi, Bursa	2002
Üniversite	:	İstanbul Üniversitesi	2009
Yüksek Lisans	:	Muş Alparslan Üniversitesi	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2012-2019	Muş Valiliği SYDV	Sosyal Yardım ve İnceleme Görevlisi

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	✓	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	✓	
Denklem yazımları uygun mu?	✓	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	✓	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	✓	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	✓	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	✓	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	✓	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	✓	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	✓	
+Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	✓	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

	Unvanı Adı SOYADI	İmza
Öğrenci :	Emre GÜLER	
Danışman :	Doç. Dr. Muhammed Ciner	

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum /vermiyorum**.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı
Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI	Tarih	İmza
Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖNLÜ	26.06.2019	

*Seminer, Yüksek Lisans ve doktora tezleri FBE tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmalıdır. Tezler FBE'ne teslim edilmeden önce yukarıdaki kontrol listesi öğrenci ve danışman tarafından imzalanmalıdır. Bu sayfa tez teslimi esnasında en üst sayfa olarak verilmelidir.

*Tez ilk savunmaya sunulacağında spiral cilt veya clip dosya formunda FBE teslim edilmelidir.