



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SVD (SINGULAR VALUE DECOMPOSITION) YÖNTEMİ İLE İTERNAL  
BREMSTRAHLUNG SPEKTRUMLARININ DETEKTÖR CEVAP  
FONKSİYONLARININ İNCELENMESİ**

**Ahmet AKYOL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Fizik Anabilim Dalı**

**Haziran-2019**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**





**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SVD (SINGULAR VALUE DECOMPOSITION) YÖNTEMİ İLE İNTERNAL  
BREMSTRAHLUNG SPEKTRUMLARININ DETEKTÖR CEVAP  
FONKSİYONLARININ İNCELENMESİ**

**Ahmet AKYOL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Fizik Anabilim Dalı**

**Danışman**  
**Doç. Dr. Ekrem ALMAZ**

**Haziran-2019**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Ahmet AKYOL tarafından hazırlanan “SVD (Singular Value Decomposition) Yöntemi İle Internal Bremstrahlung Spektrumlarının Detektör Cevap Fonksiyonlarının İncelenmesi” adlı tez çalışması 20.06.2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Dr. Öğr. Üyesi M. Fatih KULUÖZTÜRK  
Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü

#### Danışman

Doç. Dr. Ekrem ALMAZ  
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü


#### Üye

Doç. Dr. Selçuk SAĞIR  
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü

### İmza



Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu 21./06./2019 Tarih ve 17./XI/..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

  
Doç. Dr. Sedat BOZARI  
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Ahmet AKYOL  
20.06.2019

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

# SVD (SINGULAR VALUE DECOMPOSITION) YÖNTEMİ İLE INTERNAL BREMSTRAHLUNG SPEKTRUMLARININ DETEKTÖR CEVAP FONKSİYONLARININ İNCELENMESİ

Ahmet AKYOL

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ekrem ALMAZ

2019, 63 Sayfa

Danışman: Doç. Dr. Ekrem ALMAZ

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Selçuk SAĞIR

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi M. Fatih KULUÖZTÜRK

Bu çalışmada, seküler dengedeki  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  kaynağından beta parçacıkları ve nötrino ile birlikte eş zamanlı olarak yayınlanan internal bremsstrahlung fotonlarının spektrumunu elde etmeye çalıştık. Foton spektrumunun deneysel verileri  $2\times 2$ " NaI(Tl) dedektörü kullanılarak elde edildi. NaI (Tl) Detektörüne ait detektör parametreleri standart kalibrasyon kaynakları kullanılarak belirlendi. Detektör parametreleri ve Monte Carlo yöntemi kullanılarak tek enerjili bir gamma fotonu için detektör cevap fonksiyonu oluşturuldu ve deneysel değerlerle uyumu gözlemlendi. Aynı yöntemle belli enerji aralıklarında detektör cevap fonksiyonları (matrisi) oluşturuldu. Deneysel olarak alınan ve doğal fon çıkarılarak elde edilen ham spektrumu cevap fonksiyonu etkilerinden arındırmak için Singular Value Decomposition (SVD) matematiksel metodu kullanıldı. Bu metot ve oluşturulan detektör cevap matrisi birlikte kullanılarak deneysel verilere soyma işlemi uygulandı. Bu şekilde deneysel veriler detektör cevap fonksiyonu etkilerinden soyularak  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  kaynağına ait internal bremsstrahlung spektrumu elde edildi. Deneysel veriler Knipp, Uhlenbeck and Bloch (KUB) teorisi ve yapılan diğer çalışmalarla karşılaştırıldı ve deneysel ve teorik bulgular arasında diğer deneysel verilere göre çok daha güzel bir uyum gözlemlendi.

**Anahtar Kelimeler:** SVD, Detektör Cevap Matrisi, Internal Bremsstrahlung, NaI(Tl) detektörleri, Monte Carlo

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**INVESTIGATION OF DETECTOR RESPONSE FUNCTIONS OF INTERNAL  
BREMSSTRAHLUNG SPECTRUMS WITH SVD (SINGULAR VALUE  
DECOMPOSITION) METHOD**

**Ahmet AKYOL**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PHYSICS SCIENCE**

**Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ekrem ALMAZ**

**2019, 63 Pages**

**Jury**

**Advisor: Assoc. Dr. Ekrem ALMAZ**

**Jury Member: Assoc. Dr. Selçuk SAĞIR**

**Jury Member: Dr. Lecturer M. Fatih KULUÖZTÜRK**

In this study, we tried to obtain the spectrum of Internal Bremsstrahlung photons which were released simultaneously with beta particles and neutrino from the  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  source in secular equilibrium. The experimental data of the photon spectrum were acquired using 2x2" NaI (Tl) detector. Detector parameters of the detector were determined using standard calibration sources. A detector response function was generated for a single-energy gamma photon using detector parameters and Monte Carlo method and its compatibility with experimental values was observed. In the same way, a detector response function (matrix) was created in certain energy ranges. The Singular Value Decomposition (SVD) mathematical method was used to unfold the detector response function effects from the raw spectrum obtained after extraction of natural background from experimental data. Using this method and the generated detector response matrix together, the experimental data were unfolded from the effects of the detector response function and the internal bremsstrahlung spectrum of the  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  source was obtained. Experimental data were compared with KUB theory and other studies, and there was a much better agreement between experimental and theoretical findings than other experimental data.

**Key words:** SVD, Detector Response Matrix, Internal Bremsstrahlung, NaI (Tl) detectors, Monte Carlo.

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca her türlü bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, desteğini ve hoşgörüsünü bir an bile benden esirgemeyen, mesleki açıdan her zaman benim için bir ufuk çizgisi olan, ve özellikle bu süreçte bana büyük sabır gösteren çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Ekrem ALMAZ'a teşekkür eder, saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca bu tez çalışmamda bir an olsun desteğini esirgemeyen sevgili eşime ve aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ahmet AKYOL  
MUŞ-2019





# İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ.....	ii
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	iv
ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER .....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ .....	xi
ŞEKİL LİSTESİ .....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEORİ .....	4
2.1. Beta Parçalanmasında Internal (İç) Bremsstrahlung (IB) .....	4
2.2. Detektör Cevap Fonksiyonu .....	6
2.3. Gamma Işınlarnın Madde ile Etkileşmesi .....	7
2.3.1. Fotoelektrik olay .....	9
2.3.2. Compton saçılması (inkoherent saçılma) .....	10
2.3.3. Çift oluşumu.....	13
2.3.4. Rayleigh saçılması (koherent saçılma) .....	15
2.4. Detektör Özellikleri.....	15
2.4.1. Detektör duyarlılığı .....	15
2.4.2. Cevap zamanı.....	16
2.4.3. Ölü zaman .....	16
2.4.4. Detektör ayırma gücü .....	17
2.4.5. Detektör verimi .....	18
2.5. NaI(Tl) Sintilasyon Detektörlerinde Cevap Fonksiyonunun Oluşumu.....	21
3. YÖNTEM.....	30
3.1. Internal Bremsstrahlung Spektrumlarının Deneysel Olarak Elde Edilmesi .....	30
3.1.1. IB spektrumunun 2x2" NaI(Tl) detektörü ile elde edilmesi .....	30
3.2. Spektrum Analizi .....	35
3.2.1. Soyma işlemi.....	35
3.2.2. Cevap fonksiyonunun compton bölgesi için dikdörtgensel yaklaşım .....	39
3.2.3. 2x2" ve 3x3" NaI(Tl) detektörleri cevap fonksiyonlarının yaklaşık olarak elde edilmesi .....	40
3.2.4. Cevap matrisinin elde edilmesi .....	47
3.3. Spektrum Soyma Yöntemleri .....	47
3.4. Singular Value Decomposition (SVD) Yöntemi .....	49
3.4.1. Teorem: Singular value decomposition .....	50

<b>4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA.....</b>	<b>57</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>60</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>64</b>



## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

A	: Kütle numarası
$B_i$	: Atomik kabuğa bağlanma enerjisi
d	: Kaynak-detektör arası uzaklık
$d\Omega$	: Birim katı açısı
e	: Elektron yükü
E	: Gelen foton enerjisi
$E'$	: Saçılan foton enerjisi
$E_c$	: Compton sınırı
$E_e$	: Saçılan elektron enerjisi
$E_j$	: Her bir enerji aralığının orta noktaları
$E_p$	: Saçılan puls enerjileri
i	: Ölçülen spektrumun indisi
h	: Plank sabiti ( $6.62 \cdot 10^{-34}$ J.s)
j	: Kaynak spektrumun indisi
k	: $mc^2$ biriminde gelen foton enerjisi
$k'$	: $mc^2$ biriminde saçılan foton enerjisi
$mc^2$	: Elektronun durgun kütle enerjisi
$m_N$	: Çekirdek kütlesi
M	: Ölçülen spektrum
$M_i$	: Her bir kanaldaki ölçülen sayma
$M(E')$	: Detektörde gözlenen spektrum
n	: Kaynak enerjisinin bölündüğü aralık
$N(E_p)$	: Detektörde sayılan puls yükseklikleri
$N_0$	: Avagadro sayısı
$N_C$	: Compton bölgesindeki foton sayısı
$N_g$	: Detektöre giren foton sayısı
$N_G$	: Gauss Dağılımı
$N_p$	: Tüm enerji pikteki foton sayısı
$N_s$	: Detektörde sayılan foton sayısı
$N_y$	: Kaynaktan yayınlanan foton sayısı
$N(W)dW$	: Beta parçacıklarının enerji dağılımı
$NaI(Tl)$	: Sodyum iyodür talyum kristali
p	: Beta parçacığının E enerjili bir foton yayınlanmadan önceki momentumu
P/T	: Pik/toplam oranı
q	: (0-1) arasında değişen rastgele sayılar
$p_f$	: Beta parçacığının E enerjili bir foton yayınlandıktan sonraki momentumu
P	: Geçiş matrisi
R	: Detektör ayırma gücü, cevap matrisi
$R_{ij}$	: $E_j$ enerjisi ile detektöre giren fotonların i-inci kanalda sayılma olasılığı
$R(E, E')$	: Cevap fonksiyonu
RaE	: Bizmut-210
$r_d$	: Detektör yarıçapı
$r_e$	: Elektronun klasik yarıçapı
$r_g$	: Giydirilmiş spektrum

$S$	: Kaynak spektrumu
$S_j$	: Kaynaktan $E_j$ enerjisi ile yayınlanan fotonların sayıları
$S(E)$	: Detektöre gelen gamma ışınlarının spektrumu
$S(E)dE$	: <i>KUB</i> teorisinde beta parçacığı ile birlikte ortaya çıkan fotonun $E$ ile $E+dE$ arasında yayınlanma olasılığı ifadesi
$T$	: Fotoelektronların atomdan yayınlanma enerjisi
$U$	: $m \times m$ boyutlu ortogonal matris
$V$	: $n \times n$ boyutlu ortogonal matrisi
$W$	: Beta parçacığının enerjisi
$W_0$	: $mc^2$ biriminde toplam parçalanma enerjisi
$Z$	: Atom numarası
$\alpha$	: İnce yapı sabiti
$\beta^-$	: Çekirdekten yayınlanan (-) yüklü elektron
$\beta^+$	: Çekirdekten yayınlanan (+) yüklü elektron
$\delta$	: Dirac-delta fonksiyonu
$\Delta E$	: Yarı maksimumdaki tam genişlik
$\Delta E_k$	: Cevap fonksiyonu, kanal genişliği
$\epsilon_{\text{geom}}$	: Geometrik verim
$\epsilon_{\text{int}}$	: Öz verim
$\epsilon_p$	: Tüm enerji pik verimi
$\epsilon_T$	: Mutlak verim
$\epsilon_{PT}$	: Compton düzlüğünde sayılan foton sayısı
$\theta$	: Fotonun saçılma açısı
$\mu$	: Toplam lineer zayıflama katsayısı, durulma zamanı
$\nu$	: Frekans değeri
$\rho$	: Yoğunluk
$\sigma$	: Tesir kesiti, standart sapma
$\Sigma$	: $m \times n$ boyutlu negatif olmayan diyagonal matrisi
$\Phi$	: Azimut açısı
$\Phi(W, E)$	: Çekirdekte $W$ enerjili bir elektron oluşurken aynı anda $E$ enerjili bir foton yayınlanma olasılığı

## Kısaltmalar

Am	: Americium
Ce	: Seryum
Co	: Kobalt
Cs	: Sezyum
Cr	: Kromyum
eV	: Elektron volt
EB	: External bremsstrahlung
FWHM	: Yarı maksimum tam genişlik
HPGe	: Yüksek saflıkta germanyum detektörü
IB	: İnternal bremsstrahlung
keV	: Kilo elektron volt
KUB	: Knipp, Uhlenbeck and Bloch
MCA	: Multi-channel analyzer
MeV	: Milyon elektron volt
Nb	: Niobyum
Sc	: Skandiyum
Sr	: Strondiyum
SVD	: Singular Value Decomposition
Y	: Yttrium

## ÇİZELGE LİSTESİ

- Çizelge 2.1.** Radyasyonu oluşturan parçacıkların şematik gösterimi..... 6
- Çizelge 3.1.** Soyma işlemi için gerekli parametreleri elde etmek amacıyla, kullanılan standart nokta kaynaklar ve bu kaynaklara ait yayınlanma enerjileri ve olasılıkları.....34
- Çizelge 3.2.** Detektörün enerji ayırma gücü, tüm enerji pik ve toplam verim ve pik/toplam oranı değerlerine fit edilen fonksiyonlar ve bu fonksiyonların parametreleri.....34



## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1.	Fotonların madde ile yaptığı etkileşme tipleri ve bu etkileşmelerin baskın olduğu bölgeler .....	9
Şekil 2.2.	Fotoelektrik olay .....	9
Şekil 2.3.	Compton saçılmasının geometrisi.....	11
Şekil 2.4.	Çift oluşum geometrisi .....	14
Şekil 2.5.	76 mm NaI(Tl) ortamı için baskın etkileşme olasılıklarının enerjiye bağlı değişimi .....	17
Şekil 2.6.	Detektör kaynak geometrisi.....	19
Şekil 2.7.	Fotopikin altında kalan net sayma sayısı (NP)'nin detektördeki toplam saymaya (NS) oranının (Peak-toplam oranı) puls-yükseklik spektrumu üzerinden anlatımı.....	21
Şekil 2.8.	NaI(Tl) sintilasyon detektöründe puls oluşum sisteminin blok yapısı .....	22
Şekil 2.9.	Bir NaI(Tl) sintilasyon detektörünün genel yapısının ve radyasyonun fiziksel etkileşmelerinin çizimsel olarak gösterimi .....	23
Şekil 2.10.	Tek enerjili bir kaynağın ideal spektrumu (kaynak spektrum).....	24
Şekil 2.11.	Kaynak spektrumundan elde edilen ideal (mükemmel ayırma gücü için) puls-yükseklik spektrumu .....	24
Şekil 2.12.	NaI(Tl) detektörde gözlenen cevap fonksiyonu .....	25
Şekil 3.1.	Deneyde kullanılan gamma spektrometresinin gösterimi .....	30
Şekil 3.2.	IB spektrumunun ölçülmesinde detektör-kaynak geometrisi .....	31
Şekil 3.3.	90Sr-90Y izotopunun parçalanma şeması.....	31
Şekil 3.4.	90Sr-90Y kaynağından yayınlanan fotonların NaI(Tl) detektöründen tabi fon düzeltilmesi yapılarak alınmış spektrumu.....	32
Şekil 3.5.	90Sr-90Y izotopunun, kanal genişliği 38 keV alınarak tabi fon çıkartılarak alınmış spektrumu .....	33
Şekil 3.6.	Standart nokta kaynaklar kullanılarak 2x2" NaI(Tl) detektörü için elde edilen kalibrasyon grafiği.....	33
Şekil 3.7.	Detektörde ölçülen spektrumun her bir kanalındaki saymaların gösterimi	36
Şekil 3.8.	Detektörlerde görülen genel foton spektrumu ve dikdörtgensel yaklaşım..	40
Şekil 3.9.	2x2" NaI(Tl) detektöründen elde edilen, 137Cs (E=661.6 keV) için, gamma ışını cevap fonksiyonu .....	43
Şekil 3.10.	2x2" NaI(Tl) detektöründen elde edilen, 60Co (E1=1173, E2=1332 keV) için, gamma ışını cevap fonksiyonu .....	43
Şekil 3.11.	3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen, 47Sc (E=153 keV) için, gamma ışını cevap fonksiyonu .....	44
Şekil 3.12.	3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen, 51Cr (E=323 keV) için, gamma ışını cevap fonksiyonu .....	44
Şekil 3.13.	3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen, 85Sr (E=515 keV) için, gamma ışını cevap fonksiyonu .....	45
Şekil 3.14.	3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen, 95Nb (E=766 keV) için, gamma ışını cevap fonksiyonu .....	45
Şekil 3.15.	3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen, 137Cs (E=662 keV) için, gamma ışını cevap fonksiyonu .....	46
Şekil 3.16.	3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen, 60Co (E1=1173, E2=1332 keV) için, gamma ışını cevap fonksiyonu .....	46
Şekil 3.17.	A'nın küresel ( $\mathbb{R}^3$ ) boyuttan karesel boyuta ( $\mathbb{R}^2$ ) dönüşümü.....	51

<b>Şekil 3.18.</b> Detektör cevap matrisinin çözümlenişi.....	54
<b>Şekil 3.19.</b> Cevap matrisinin direkt olarak tersi alınarak elde edilen negatif değerlerin olduğu sonuç spektrum .....	56
<b>Şekil 4.1.</b> 90S-90Y için 2x2" NaI(Tl) detektöründen arka fon düzeltmesi yapılarak elde edilmiş deneysel spektrum.....	57
<b>Şekil 4.2.</b> Deneysel spektruma SVD soyuma işlemi uygulanarak elde edilmiş spektrumun KUB teorisi ve Gold iterasyon metodu (Almaz ve ark., 2007) sonuçları ile karşılaştırılması.....	57





## 1. GİRİŞ

Nükleer ve parçacık fiziğindeki temel parçacıkların tarihsel olarak gözlenmesi sürecinde birçok farklı detektör tipi geliştirilmiştir. Tüm bu detektörler aslında aynı temel prensiplere dayanmaktadırlar. Gelen parçacıkların sahip oldukları enerjinin bir kısmını veya tümünü detektör ortamına aktarıp bu enerjiyi algılanabilir hale getirebilmektir. Yüklü parçacıklar atomik elektronlarla direkt etkileşerek ortama enerjilerini aktarırlar. Bu şekilde atomların uyarılmasına veya iyonlaşmasına yol açarlar. Bununla birlikte, Nötr radyasyonlar, detektör içinde çeşitli etkileşmeler yapmalı ve bu etkileşmeler sonucunda detektörün atomlarını iyonlaştıran ve uyarabilen yüklü parçacıklar oluşturabilmelidir. Bu şekilde dönüştürülmüş enerjinin alacağı form detektöre ve detektör dizaynına bağlıdır. Örnek olarak gaz detektörlerini ele aldığımızda, bir akım sinyali oluşturmak için direkt olarak iyonlaşmış elektronları toplama prensibi geçerlidir. Diğer taraftan sintilasyon detektörlerinde, uyarılma ve iyonlaşma moleküler geçişlere neden olmakta bunun sonucunda ışık yayınlanmaktadır. Benzer biçimde, fotoğrafik emülsiyonda, iyonlaşma kimyasal reaksiyonlara neden olmakta bu olay sonucunda da iz görünümü elde edilmektedir.

Bugün modern detektörler temelde, elektriksel puls üretimi tekniğine dayanmaktadır yani, detektörden alınan bilgi, elektronik devreler yardımıyla işlenebilen elektriksel pulslara dönüştürülür. Bu da elbette, elektronik ve bilgisayar alanındaki büyük ve hızlı gelişmelere, paralel olarak, detektörden alınan bilginin daha sağlıklı ve daha hızlı bir şekilde işlenmesine imkân sağlamaktadır.

Gamma ışını spektrumunun temel özellikleri, gamma ışınlarının madde ile etkileşme özelliklerine bağlıdır. Tüm enerji tepesi (full energy peak), fotoelektrik etki ve gamma ışınlarının ardışık etkileşmeleri (saçılmalar ve çift oluşumu) ile gamma ışınlarının tüm enerjilerini kaybetmesi sonucu oluşur ve şekli Gauss dağılımına çok yakındır. Bununla birlikte, tüm enerjisini değil, gamma ışınının enerjisine bağlı olarak, enerjisinin belli bir kısmının kaybına yol açan etkileşmeler, çok daha sık olmaktadır. Bu yüzden farklı bileşenler; Compton sınırı, Compton bölgesi, geri saçılma tepesi, kaçma ve yok olma tepeleri, deneysel spektrumda görünmektedir. Bu bileşenler çok sıkı bir şekilde pikin toplam saymaya oranına ve gamma ışını detektörünün tüm enerji pik verimine bağlıdır. Cevap fonksiyonu tüm bu bileşenleri ve bunların enerji bağımlılıklarını yansıtmalıdır.

Gamma ışınları için detektörden elde edilen spektrumların doğru bir biçimde elde edilmesi ve analizi oldukça büyük önem taşımaktadır. Eğer gamma spektrumunu elde etmede bizim çalışmamızda olduğu gibi basit sintilasyon spektrometreleri kullanılmışsa, karmaşık veri işleme tekniklerini kullanmak kaçınılmaz olacaktır. Özellikle günümüzde gelişen güçlü ve modern kişisel bilgisayarlar ile detektörde gözlenen gamma ışını spektrumlarının detektör cevap etkilerini soymak ve gelen gamma ışını spektrumunu elde etmek daha hızlı ve kolay hale gelmiştir.

Bir radyasyonun herhangi bir detektörde elde edilen puls-enerji spektrumu ile radyasyonun detektöre girmeden önceki enerji spektrumu birbirinden farklıdır. Çünkü detektör cevap fonksiyonu deneysel spektrumla iç içe girer. Kullanılan detektör ne kadar iyi olursa olsun, direkt olarak ölçülmüş spektrumdan, gelen radyasyonun enerji spektrumunu (gerçek veya kaynak spektrum) elde etmek oldukça zordur. Bununla birlikte, radyasyonun gerçek enerji spektrumunun elde edilmesi, dozimetri çalışma alanında ve radyasyon miktarı ölçümlerinde büyük önem taşımaktadır. Gerçek enerji spektrumu  $X$ - ve  $\gamma$ -ışınlarının havadaki doz oranları, kütle-enerji soğurulma katsayıları,  $\gamma$ -ışınlarının durdurma gücü,  $X$ -ışınlarının elektron enerji kaybı mekanizmalarını belirlemek için kullanılan fiziksel sabitlerin elde edilmesinde temel rol oynamaktadır. Bu fiziksel sabitler deneysel olarak doğrudan ölçülemezler. Fakat detektör sisteminin ve detektör materyalinin tüm karakteristik özelliklerini mümkün olduğunca yansıtan bilgisayar benzetişim yöntemleri kullanarak, teorik hesaplamalarla direkt olarak bu parametreler belirlenebilir.

Sürekli enerjili gamma ışınları (internal bremsstrahlung (*IB*), external bremsstrahlung (*EB*) veya bir ortamdan saçılmış gamma ışınları)'nın, detektör katkılarından arındırılmış gerçek spektrumu elde etmek çok daha karmaşık bir işlemdir. İlke olarak, detektör cevap fonksiyonu, bazı özel enerji değerleri için Monte Carlo hesaplamalarıyla elde edilebilmektedir.

NaI(Tl) detektörlerinin cevap fonksiyonlarının belirlenmesinde kullanılan yaklaşım detektör verimi, pik/toplam oranı ve ayırma gücüne dayanır. Detektör verimi ve pik/toplam oranı ile cevap fonksiyonunun fotopik ve Compton bölgesindeki sayma sayıları belirlenmiştir. Compton bölgesine dikdörtgensel (düzgün) dağılım yaklaşımı yapılabilir. Compton bölgesinde her bir enerji aralığındaki sayılar ve fotopikteki sayılar detektör ayırma gücü kullanılarak Gauss dağılımına dağıtılarak elde edilir.

Bu tez çalışmasında teori kısmında Internal Bremsstrahlung konusunu, gamma ışınlarının madde ile etkileşmesini detektör cevap fonksiyonunun oluşumunu ve detektör özelliklerini ele aldık. Yöntem kısmında 2x2" NaI (Tl) detektörü ile Internal Bremsstrahlung spektrumunun deneysel olarak elde etme detaylarını ve elde edilen deneysel spektrumun nasıl ve hangi yöntemlerle analiz edileceğini tartıştık. Yine deneysel spektrumun detektör cevap etkilerinden nasıl soyulacağına dair teknikleri ve yöntemleri sunduk ve bu çalışmada kullandığımız Singular Value Decomposition (SVD) yöntemini ayrıntılı olarak inceledik ve bizim problemimize nasıl uyguladığımızı anlattık. Araştırma sonuçları ve tartışma kısmında ise elde ettiğimiz deneysel spektrum analizi sonuçlarını teorik ve daha önce yapılmış deneysel çalışmalarla karşılatırdık ve sonuçları yorumladık.

Günümüze kadar farklı radyoizotoplara ait Internal Bremsstrahlung spektrum çalışmaları pek çok defa yapılmıştır. Biz bu çalışmada mühendislik ve uygulamalı bilimlerde sıkça kullanılan SVD yöntemini, literatürde ilk olarak bu çalışmada incelediğimiz  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  radyoizotopuna ait IB spektrumunun dedektör cevap etkilerini soymada kullandık. Elde ettiğimiz sonuçların daha önce yapılan deneysel çalışmalardan teorik değerlerle karşılaştırıldığında daha iyi bir uyum gösterdiğini gözledik. Bu da farklı radyoaktif izotoplarla bu yöntemi kullanarak yeni çalışmalar yapılabileceğini göstermekte ve ileri çalışmalar için önümüze bir ufuk açmaktadır.

## 2. TEORİ

### 2.1. Beta Parçalanmasında Internal (İç) Bremsstrahlung (IB)

Üç tür olay, beta parçalanması olarak adlandırılmaktadır:

1. Çekirdeğin elektron yayınlamak bozunması:  $\beta^-$  parçalanması.
2. Çekirdeğin pozitron yayınlamak bozunması:  $\beta^+$  parçalanması.
3. Çekirdeğin çevresindeki elektronlardan birini yakalaması: Elektron Yakalanması.

Bu üç etkileşmeye paralel olarak çekirdeğin Beta parçalanması ile birlikte oluşan zayıf sürekli foton spektrumunun varlığını, ilk olarak Aston, (1927) RaE ( $^{210}\text{Bi}$ ) izotopu ile yaptığı ölçümlerde deneysel olarak keşfetti. Takip eden yıllarda, çeşitli radyoaktif elementlerle bu olay pek çok araştırmacı tarafından gözlenmiştir. Düşük şiddetli ve sürekli olan bu ışımının teorisi, Knipp, Uhlenbeck (1936) ve bağımsız olarak Bloch (1936) tarafından verildi. Teoride; kuantum mekaniksel olarak, sürekli bir ışımının, parçalanma başına yaklaşık olarak alfa ince yapı sabiti ( $\alpha=1/137$ ) kadar bir olasılıkla, beta parçacığının çekirdekte oluşup, çekirdekte ayrılırken nükleer yükteki ani değişim ile oluştuğu ortaya konmuştur. Coulomb etkilerinin ele alınmadığı bu teori, KUB teorisi olarak adlandırılır. Bu ışım; klasik olarak, çekirdeğin Coulomb alanı etkisiyle ivmelenen bir elektronun oluşturduğu sürekli elektromanyetik radyasyon; external bremsstrahlung (EB), spektrumundan farklı olarak, internal bremsstrahlung (IB) şeklinde adlandırılmaktadır.

$W$  enerjili bir beta parçacığının,  $E$  enerjili bir foton ve  $W_0 - E/mc^2 - W$  enerjili bir nötrino ile birlikte yayınlanma olasılığı,

$$N(W, E) = \frac{2\pi}{\hbar} \rho_e \rho_\nu \rho_k |P|^2 \quad (2.1)$$

ile verilir. Buradaki  $\rho_e, \rho_\nu, \rho_k$  sırasıyla elektron, foton ve nötrino için son durum yoğunlukları,  $P$ , geçiş matrisi,  $W_0, mc^2$  biriminde toplam parçalanma enerjisi,  $W$  ise  $mc^2$  biriminde beta parçacığının parçalanma sonrası aldığı enerjidir.  $\beta^-$  parçalanmasında temel özellikler bakımından bazı farklılıklar bulunmaktadır. Denk. (2.1)'de görülen geçiş matrisinin karesi,  $|P|^2$  ne kadar küçükse göz önüne alınan geçiş o kadar

imkansızdır, yasaklanmıştır. Bu tür geçişlere, yasak geçişler denir.  $|P|^2$  ne kadar büyükse geçiş o kadar mümkündür, izinlidir. Bu tür geçişlere de izinli geçişler denir. *KUB* teorisinde beta parçacığı ile birlikte ortaya çıkan fotonun  $E$  ile  $E+dE$  arasında yayınlanma olasılığı ifadesi,

$$S(E) dE = \int_{1+k}^{W_0} N(W) dW \Phi(W, E) dE \quad (2.2)$$

olarak verilmiştir. Burada,  $k = E/mc^2$ ,  $mc^2$  biriminde yayınlanan fotonun enerjisidir. Bu ifade izinli geçişler için geçerli bir ifadedir. Bu ifadenin elde edilmesinde, Denk. (2.2)'deki  $\Phi(W, E)$ , çekirdekte  $W$  enerjili bir elektron oluşurken aynı anda  $E$  enerjili bir foton yayınlanma olasılığı ve  $N(W)dW$ , beta parçacıklarının enerji dağılımıdır.  $\Phi(W, E)$  fonksiyonu analitik olarak,

$$\Phi(W, E) = \frac{\alpha p_f}{\pi p k} \left\{ \frac{W^2 + W_f^2}{W p_f} \ln(W_f + p_f) - 2 \right\} \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilmiştir (Cengiz ve Almaz 2004). Burada,  $W$  ve  $W_f = W - k$  sırasıyla beta parçacığının  $E$  enerjili bir foton yayınlanmadan önce ve yayınlandıktan sonra enerji değerleridir.  $p$  ve  $p_f$ ,  $mc$  biriminde, beta parçacığının  $E$  enerjili bir foton yayınlanmadan önce ve yayınlandıktan sonraki momentumları olup,

$$p = \sqrt{W^2 - 1} \quad (2.4)$$

$$p_f = \sqrt{(W - k)^2 - 1} \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeler Denk. (2.3)'de yerine yazılırsa,

$$\Phi(W, E) = \frac{\alpha \sqrt{(W - k)^2 - 1}}{\pi \sqrt{W^2 - 1} k} \left\{ \frac{W^2 + (W - k)^2}{W \sqrt{(W - k)^2 - 1}} \times \ln \left[ (W - k) + \sqrt{(W - k)^2 - 1} \right] - 2 \right\} \quad (2.6)$$

olarak elde edilir (Cengiz ve Almaz 2004).  $\beta^-$  parçacıklarının enerji dağılımında  $W$  enerjili bir elektronun,  $E$  enerjili bir fotonla birlikte yayınlama olasılığı, Denk. (2.6), Denk. (2.2) ile verilen integral ifadede yerine yazılarak,  $\beta^-$  parçalanması sırasında, enerjisi  $E$  ile  $E+dE$  arasında değer alan  $IB$  fotonlarının sayısı,

$$S(k) = C \int_{1+w}^{w_0} \frac{\sqrt{(W-k)^2 - 1}}{\sqrt{W^2 - 1}} (W_0 - W)^2 W^2 \times \left[ \frac{W^2 + (W-k)^2}{W \sqrt{(W-k)^2 - 1}} \ln \left( (W-k) + \sqrt{(W-k)^2 - 1} \right) - 2 \right] \quad (2.7)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada,

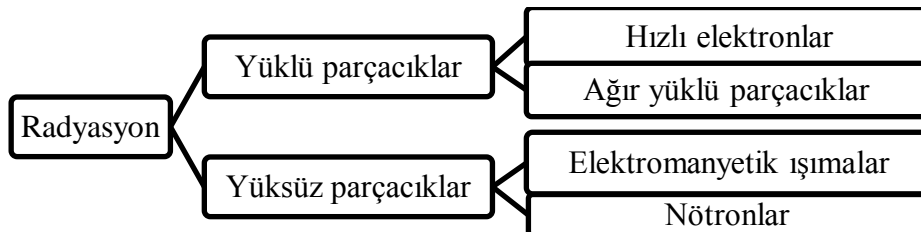
$$C = \frac{|P|^2}{\tau_0} 2\alpha^2 Z = \text{sabit} \quad (2.8)$$

'dir. Bu şekilde sürekli enerji spektrumuna sahip fotonların enerji dağılımı yani  $IB$  enerji spektrumu, KUB teorisi ile elde edilmiştir. Çeşitli  $\beta^-$  parçacığı yayınlayan kaynakların  $IB$  spektrumu KUB Teorisi ve Monte Carlo yöntemi ile elde edilmiş ve birbirleri ile karşılaştırılmıştır (Cengiz ve Almaz, 2004).

## 2.2. Detektör Cevap Fonksiyonu

Nükleer fizikte radyasyon; yüklü parçacıklar ve yüksüz parçacıklar olmak üzere iki alt kategoride tanımlanabilir. Çizelge 2.1'de görüldüğü gibi hızlı elektronlar ve ağır yüklü parçacıklar, yüklü parçacıkları; elektromanyetik ışımlar ve nötronlar ise yüksüz parçacıkları oluşturur (Knoll, 2000).

Çizelge 2.1. Radyasyonu oluşturan parçacıkların şematik gösterimi



$E$  enerjili radyasyon detektör ortamına girdiğinde, ortamla çeşitli etkileşmeler yapar ve ortam elektronlarına, yaptığı etkileşmeye ve radyasyon tipine göre enerjisinin bir kısmını veya tamamını ortama aktarır. Atomik elektronlarla etkileşen yüklü parçacıklar enerjilerini detektör ortamına aktarırlar. Böylece atomlar uyarılmış veya iyonlaşmış olurlar. Ayrıca, yüksüz radyasyonlar, detektör içinde çeşitli etkileşmeler yapmakta ve bu etkileşmeler sonucunda detektörün atomlarını iyonlaştıran ve uyarabilen yüklü parçacıklar oluşturmaktadırlar.

Detektöre gelen radyasyon tarafından üretilen iyonizasyon sayısı, radyasyonun detektörün duyarlı hacminde kaybettiği enerjiyle orantılıdır. Detektörlerin bu özelliği ile gelen radyasyonun enerjisi hakkında bilgi elde edilebilmektedir. Burada biz, adı geçen özelliği kullanarak NaI(Tl) detektörünün gamma kaynaklarına verdiği cevap fonksiyonunu ele alacağız.

Gelen radyasyonun oluşturacağı iyonizasyon ve eksitasyon sayısı ve bunlara bağlı olarak gelişen etkileşmeler farklılık gösterir. Bu sebeple aynı enerjili fotonların detektöre aktardıkları enerjiler farklı olacaktır. Fakat detektöre aktarılan enerji aynı olsa bile detektör elektroniği aynı büyüklükte puls üretmeyecektir ve böylece  $E$  enerjisi ile gelen fotonların oluşturacağı pulsun boyları eşit olmayacak, belirli bir değer etrafında dalgalanma gösterecektir. Bu dalgalanma, detektörün ayırma gücünü oluşturmaktadır. Detektörün iki farklı enerjide gelen fotonları birbirinden ayırma gücü dalgalanma miktarı ile ters orantılı olarak gelişmektedir (Almaz, 2007).

Buradan yola çıkarak, detektöre giren gamma ışınları, aynı enerjili olsalar dahi detektörde oluşturdukları etkileşmelere bağlı olarak, aynı büyüklükte pulslar oluşturamazlar ve detektör ayırma gücü nedeniyle oluşan pulslarda farklılık gösterirler. Bu şekilde ortaya çıkan puls yüksekliği dağılımına detektör cevap fonksiyonu denir.

Detektör cevap fonksiyonun belirlenebilmesi için fotonların madde ile yaptığı etkileşmeler ve detektör karakteristikleri bilinmelidir.

### **2.3. Gamma Işınlarının Madde ile Etkileşmesi**

Etkileşme ve enerji durumlarına göre parçacık ve dalga özelliklerinin ikisini de gösterebilen  $X$ -ışını ve  $\gamma$ -ışını gibi elektromanyetik radyasyonlar ikili yapıya sahiptirler. Elektromanyetik radyasyonlar, ışık hızıyla hareket ederler. Enerji ve momentum taşıyan bu parçacıkların durgun kütleleri sıfırdır. Parçacık özelliğinden dolayı foton da denilen

bu parçacıkların enerjisi;  $\nu$  frekans ve  $h$  Plank sabiti olmak üzere,  $E=h\nu$  olarak ifade edilir.

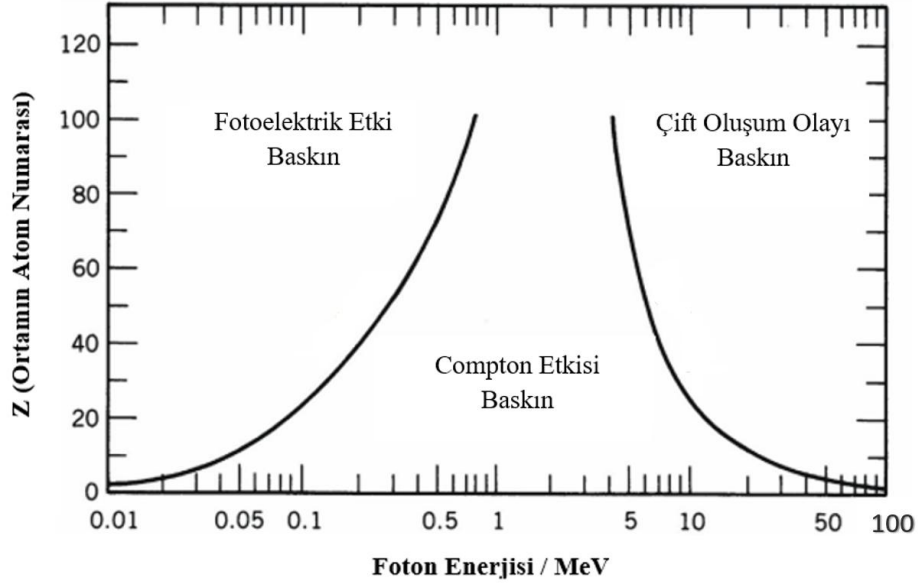
$X^-$  ve  $\gamma$ -ışınları arasında özellik bakımından hiçbir fark yoktur. Bu radyasyonları, oluşma biçimlerine göre sınıflandırdığımızda:  $\gamma$ -ışınları, nükleer geçişlere eşlik eden elektromanyetik fotonlar, sürekli  $X^-$ -ışınları elektronların veya diğer yüklü parçacıkların ivmeli hareketi sonucu oluşan fotonlardır. Karakteristik  $X^-$ -ışınları ise atomik elektronların  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ... kabukları arasındaki geçişleri sırasında yayınlanan fotonlardır. Oluşumları farklı olmakla beraber tüm fotonlar, aynı özelliklere sahiptir ve enerjilerine göre madde ile aynı etkileşmeleri yapabilirler. Bundan sonra foton veya  $\gamma$ -ışını deyimini ile tüm elektromanyetik dalgaları kastedeceğiz.

Çekirdekten yayınlanan  $\gamma$ -ışınları dört temel etkileşme yapabilirler.

- i) Fotoelektrik Olay
- ii) Compton Saçılması (İnkoherent Saçılma)
- iii) Çift Oluşum
- iv) Rayleigh Saçılması (Koherent Saçılma)

Temel etkileşmeler, kendi aralarında saçılma (Compton ve Rayleigh) ve soğurulma (Fotoelektrik Etki ve Çift Oluşum) olarak gruplandırılabilir. Saçılma etkileşmeleri koherent ve inkoherent olarak ikiye ayrılır. Enerji değişimi olmadan oluşan saçılma etkileşmeleri koherent (Rayleigh), gelen ve saçılan foton arasında enerji değişimi olan saçılmalar ise inkoherent (Compton) saçılma olarak adlandırılır. Başka bir deyişle gelen fotonla saçılan fotonun dalga boyları birbirinden farklı ise yani diğer bir deyişle, gelen fotonla, saçılan foton arasında, saçılma açısına bağlı olarak bir enerji farkı meydana geliyorsa bu tip saçılmalara İnkoherent saçılma denir. İlk üç temel etkileşmenin baskın olduğu bölgeler Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Bu olayların gerçekleşme ihtimali, atom numarasına ( $Z$ ) ve gamma enerjisine ( $E$ ) göre değişkenlik arz etmektedir. Ayrıca Rayleigh saçılması düşük enerji sınırında bahsi geçen diğer üç etkileşme kadar baskın olmayan koherent bir saçılmadır.

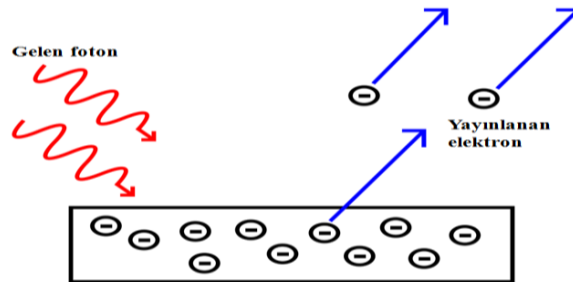




Şekil 2.1. Fotonların madde ile yaptığı etkileşme tipleri ve bu etkileşmelerin baskın olduğu bölgeler (URL-1, 2017)

### 2.3.1. Fotoelektrik olay

Düşük enerjili bir fotonun atomik elektron ile etkileşmesi ve bu elektronu yörüngesinden koparması Fotoelektrik olay olarak adlandırılır. Burada yayınlanan elektrona fotoelektron denir. Fotoelektronun atomdan yayınlanma enerjisi,  $T=E-B_i$ 'dir. Burada  $T$  fotoelektronun enerjisi,  $E$  gelen fotonun enerjisi ve  $B_i$  i-inci kabukta bulunan elektronların bağlanma enerjisidir. Buradan da anlaşılacağı üzere bu olayın gerçekleşebilmesi için gelen foton enerjisinin elektronun bağlanma enerjisinden büyük olması gerekir. Fotoelektrik soğurma, detektör kristalin ilk elektronları ile gelen gama ışınlarının etkileşmesi sonucu olur. Bu etkileşim sırasında gama ışınının bütün enerjisi kaybolur fakat bu enerji tamamen elektronlara kinetik enerji olarak aktarılmaz. Bir kısmı elektronu uyarmak için kullanılır (Akkoyun, 2006).



Şekil 2.2. Fotoelektrik olay (URL-2, 2019)

Bu olay momentum korunumu sebebiyle serbest elektronlar için imkansızdır ve sıkı bağlı elektronlarla, özellikle de *K*-kabuğu elektronlarıyla olma olasılığı oldukça yüksektir. *E* enerjili bir fotonun *K*-kabuğundaki elektronlar tarafından fotoelektrik olay tesir kesiti, diğer kabuklara göre çok büyüktür (toplam tesir kesitinin yaklaşık % 80'i).

İç dönüşüm, elektron yakalanması ve fotoelektrik olay veya diğer bazı geçişlerde, olaydan sonra oluşan boşluk doldurulurken atom, uyarılmış iç yörünge enerjisini *X*-ışını yayınlamak yerine, düşük enerjili kabuktaki elektrona vermek suretiyle de bu enerjiden kurtulabilir. İç yörüngelerden uyarılan bir atomda meydana gelen bir boşluk üst tabakalardan elektron geçişi ile doldurulur ve atom daha düşük enerji seviyesine geçer. Bu sırada ortaya çıkan enerji, bir dış yörüngedeki elektronu sökmek için kullanılırsa, ışınasız bir geçiş yapar ve fazla enerjisini dışarı atar. Bu olaya Auger olayı, sökülen elektrona da olayın kâşifi Pierre Auger' e atfen Auger elektronları denilir. Auger olayı, elektronları daha gevşek bağlı ve karakteristik fotonların daha kolay soğurulduğu atom numarası düşük olan elementlerde daha yaygın görülür. Bu nedenden dolayı bu olay *L* kabuğu için *K* kabuğundan, *M* kabuğu için de *L* kabuğundan daha baskındır.

Auger elektronları, *X*-ışınlarına alternatif bir olaydır, aksine bir iç fotoelektrik olay değildir. Tabaka boşluğu başına yayınlanan *X*-ışını sayısına Flüoresan verim denir. Söz gelişi, *K*-kabuğunun *K*-flüoresan verimi,  $Y_K = KX\text{-ışını sayısı}/K\text{-kabuğu boşluk sayısı}$  şeklinde tanımlanır.

Fotoelektrik olay tesir kesiti  $\sigma_p$ , düşük enerjiler için  $Z^4$  ve yüksek enerjiler için  $Z^5$  ile orantılıdır.

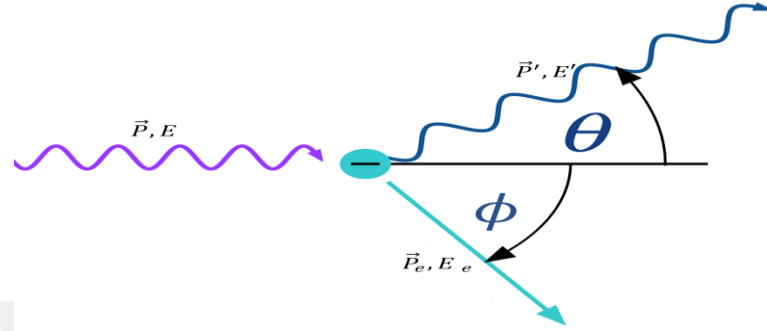
$$\sigma_p = C \frac{Z^n}{E_\gamma^{3,5}} \quad (2.9)$$

Burada *C* bir sabit ve *n* katsayısı ilgili  $\gamma$ -ışını enerji bölgesine göre 4 ile 5 arasında değişen bir sayıdır (Knoll, 2000).

### 2.3.2. Compton saçılması (inkoherent saçılma)

Fotonlar, zayıf bağlı atomik elektronlardan enerji kaybederek saçılabilirler. Bu saçılmaya, Compton Saçılması (inelastik saçılma) denir. Saçılmada  $E > 100 \text{ keV}$  enerji

bölgesinde, atomik elektronların, kinetik enerjilerinin ve bağlanma enerjilerinin etkileri ihmal edilebilir.  $E$  enerjisi ile gelen foton,  $m$  kütleli durgun ve serbest bir elektrona çarptığında, Şekil 2.3'de görüldüğü gibi, etkileşme sonucunda foton ve elektron sırasıyla,  $E'$  ( $<E$ ) ve  $E_e$  enerjisiyle, geliş doğrultusu ile  $\theta$  ve  $\phi$  açısı yaparak saçılırlar:



Şekil 2.3. Compton saçılmasının geometrisi (URL-3, 2017)

Momentum ve enerji korunumundan,

$$\text{Momentum Korunumu: } \vec{P} = \vec{P}' + \vec{P}_e$$

$$\text{Enerji Korunumu: } E = E' + E_e$$

$$E' = \frac{E}{1 + k(1 - \cos\theta)} \Rightarrow k' = \frac{k}{1 + k(1 - \cos\theta)} \quad (2.10)$$

olarak elde edilir. Burada  $k = \frac{E}{mc^2}$ ,  $k' = \frac{E'}{mc^2}$  dir.  $k_e = \frac{E_e}{mc^2}$  olmak üzere,  $E_e = E - E'$  ifadesi ve Denk. (2.10) kullanılarak elektronun kinetik enerjisi,

$$E_e = E \left( \frac{(1 - \cos\theta)E/mc^2}{1 + E/mc^2(1 - \cos\theta)} \right) \quad (2.11)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemden elektronun çarpışmadan sonra alabileceği maksimum ve minimum enerji belirlenir. Saçılmış fotonun minimum enerjisi, saçılma açısı  $\theta = \pi$  olduğu ve elektronun maksimum enerji aldığı durumunda gerçekleşir.  $\theta = 0$  olduğunda ise foton enerji kaybetmez ve elektrona aktarılan enerji sıfırdır. Denk (2.9)'dan saçılmadan sonra, saçılan fotonun alabileceği minimum enerji,

$$E_g = \frac{E}{1 + 2E/mc^2} \quad (2.12)$$

ve elektrona aktarılan maksimum enerji ise Denk (2.10)'dan,

$$E_C = E \frac{2E/mc^2}{1 + 2E/mc^2} \quad (2.13)$$

şeklinde elde edilir. Böylece Compton saçılmasında geri tepen elektronların enerjileri 0 ile  $E_C$  arasında bir dağılım gösterir. Burada  $E_C$ 'ye Compton sınırı denir.

Kuantum mekaniksel hesaplamalarla bir  $\theta$  açısında Compton saçılma olasılığı bulunabilir. Klein ve Nishina polarize edilmemiş fotonların serbest elektronlardan yapacağı inkoherent saçılma için açısal diferansiyel tesir kesitini şu şekilde elde edilmiştir.

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \frac{1 + \cos^2\theta + \frac{k^2[1-\cos\theta]^2}{[1+k(1-\cos\theta)]}}{[1 + k(1 - \cos\theta)]^2} \quad (2.14)$$

Burada  $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$  birim katı açı olmak üzere Klein-Nishina diferansiyel tesir kesitinin tüm yönelişler üzerinden integrali,

$$\sigma_c^e = \int_0^\pi \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta \quad (2.15)$$

şeklinindedir ve bu ifade Compton saçılması için elektron başına toplam Klein-Nishina tesir kesitini verir. Bu integral,  $\cos\theta = u$  dönüşümü yapılmak suretiyle basitçe hesaplanabilir. Toplam Klein-Nishina tesir kesiti,

$$\sigma_c^e = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1+k}{k^2} \left[ \frac{2(1+k)}{1+2k} - \frac{\ln(1+2k)}{k} \right] + \frac{\ln(1+2k)}{2k} - \frac{1+3k}{(1+2k)^2} \right\} \left( \frac{cm^2}{elektron} \right) \quad (2.16)$$

şeklinde elde edilir. Atom başına toplam Klein-Nishina tesir kesiti ise,

$$\sigma = Z\sigma_c^e \quad (2.17)$$

ifadesi ile verilir. Doğal olarak Compton saçılması sadece elektronlarla değil, diğer parçacıklarla da olabilir. Bununla birlikte çekirdekten yayınlanan fotonların bir ortamda yaptığı etkileşmelerde atomik elektronlardan Compton saçılması söz konusudur.

$E$  enerjili bir gamma ışınının detektör ortamında tek bir Compton etkileşmesi yaptığını varsayalım. Etkileşme sonucu elektron başına diferansiyel Klein-Nishina enerji olasılığı için Denk. (2.14) ifadesi kullanılarak açışal diferansiyel tesir kesitinde,  $u = 1 - \cos\theta$  değişken değiştirmesi yapılırsa  $u$  ifadesi  $mc^2$  biriminde,

$$u = \frac{1}{k} \frac{k_e}{k - k_e} \quad ve \quad du = \frac{k_e}{(k - k_e)^2} dk_e \quad (2.18)$$

şeklinde elde edilir. Geri tepen elektronların  $k_e$  ile  $k_e + dk_e$  aralığından değer alanlarının sayısı, bu ifadelerin Klein-Nishina tesir kesitinde yerine yazılması ile

$$\frac{d\sigma}{dk_e} = \frac{\pi r_e^2}{k^2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{1}{k} \frac{k_e}{k - k_e} \right)^2 + \frac{k_e^2}{k(k - k_e)} \right] \quad (2.19)$$

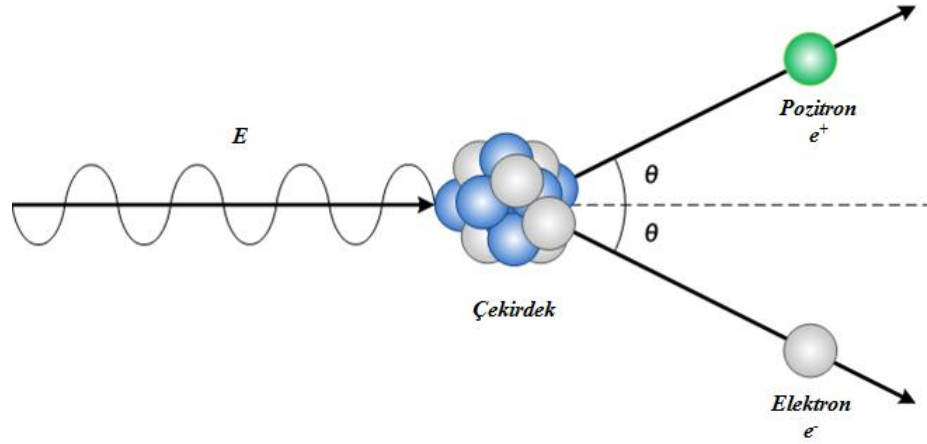
olarak elde edilmiştir (Gruppen, 1996; Almaz, 2007).

### 2.3.3. Çift oluşumu

Elektron-pozitron çifti oluşumu; bir çekirdeğin Coulomb alanına giren fotonun enerjisi, iki elektronun durgun kütle enerjisi olan 1,022 MeV' lik eşik enerjisini aştığında mümkün olur (Şekil 2.4). Bu eşik enerjisi iki elektronun durgun kütle enerjisine (0,511 MeV) ek olarak çekirdeğe transfer edilen geri tepme enerjisi ile verilir. Bu işlemde fotonun kendisi yok olur.

Bahsini ettiğimiz eşik enerjisi, enerji ve momentum korunumundan;

$$E \geq 2mc^2 + 2m^2c^2/m_N \quad (2.20)$$



Şekil 2.4. Çift oluşum geometrisi (URL-4, 2019)

olarak hesaplanabilir. Burada  $m_N$  çekirdeğin kütesidir ve  $m_N \gg m$  olduğundan etkin eşik enerjisi yaklaşık olarak;

$$E \geq 2mc^2 \quad (2.21)$$

şeklindedir. Bununla birlikte eğer elektron-pozitron çift oluşumu elektronun Coulomb alanında oluyorsa, eşik enerjisi;

$$E \geq 4mc^2 \quad (2.22)$$

olur. Bir çekirdeğin Coulomb alanında elektron-pozitron çifti oluşumu, elektronun Coulomb alanında elektron-pozitron çift oluşumuna göre daha baskındır. Bu sebeple elektron alanında elektron-pozitron çifti oluşumu genellikle dikkate alınmaz. Nükleer yükün atomik elektronlar tarafından perdelenmediği durumda  $\left[1 \ll k < \frac{1}{\alpha Z^{1/3}}\right]$  çift oluşum tesir kesiti,

$$\sigma_{PP} = 4\alpha r_e^2 Z^2 \left[ \frac{7}{9} \ln 2k - \left( \frac{109}{54} \right) \right] [cm^2/atom] \quad (2.23)$$

ile verilir. Burada  $\alpha = 1/137$  olmak üzere ince yapı sabitidir. Nükleer yükün tam perdelemesi  $\left[ k \gg \frac{1}{\alpha Z^{1/3}} \right]$  durumunda çift oluşum tesir kesiti,

$$\sigma_{PP} = 4\alpha r_e^2 Z^2 \left[ \frac{7}{9} \ln \left( \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} \right) - \left( \frac{1}{54} \right) \right] [cm^2/atom] \quad (2.24)$$

şeklinde olur (Grupen 1996, Almaz 2007).

### 2.3.4. Rayleigh saçılması (koherent saçılma)

Fotonlar, sıkı bağlı atomik elektronlardan enerji kaybetmeden (atomu uyardırmadan veya iyonlaştırmadan) saçılabilirler. Bu saçılmaya Rayleigh Saçılması (Koherent Saçılma) denir ve elastik saçılma olarak da adlandırılır. Işığın veya diğer elektromanyetik radyasyonun, ışığın dalga boyundan daha küçük tanecikler tarafından saçılımını ifade eder. Rayleigh Saçılması çoğunlukla düşük enerjilerde ve yüksek  $Z$ 'li ortamlarda meydana gelir. Rayleigh diferansiyel saçılma tesir kesiti;

$$\frac{d\sigma_R(\theta)}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} [1 + \cos^2(\theta)] [F(q, Z)]^2 \left[ \frac{cm^2/atom}{steradyan} \right] \quad (2.25)$$

ile verilir (Hubbell, 1969). Burada  $F(q, Z)$  atomik form faktörüdür. Buna göre gamanın yapacağı tüm etkileşmeler göz önüne alındığında toplam tesir kesiti ifadesi:  $\sigma = \sigma_P + \sigma_C + \sigma_R + \sigma_{PP}$  şeklindedir.

## 2.4. Detektör Özellikleri

### 2.4.1. Detektör duyarlılığı

Bir detektörün verilen bir radyasyon tipi ve enerjisi için kullanışlı sinyal üretme kapasitesine “duyarlılık” denir. Detektörler, verilen enerji bölgesinde belli radyasyon tiplerine duyarlı olabilecek şekilde tasarlanmaktadır. Çünkü farklı enerjilerdeki tüm radyasyon tiplerine duyarlı olabilecek detektör tasarımı mümkün görünmemektedir. Bu sınırın dışına çıkıldığında, ya sinyal kullanışsız olmakta veya aşırı derecede azalan verimle karşılaşılmaktadır. Bir radyasyonun tipini ve enerjisini parametre olarak alırsak, detektör duyarlılığı birkaç faktöre bağımlı olur (Leo, 1987):

- Detektör kütlesi
- Detektörde iyonlaşma reaksiyonları için tesir kesiti

- Detektörün doğasından kaynaklanan gürültü
- Detektörün duyarlı hacminin etrafını saran koruyucu materyal

Detektörlerde genellikle ayırma gücü ve sayma verimi birbiriyle ters orantılı olarak elde edilir. Örneğin; *HPGe* detektörleri yüksek ayırma gücüne ve düşük sayma verimine, *NaI(Tl)* detektörleri ise yüksek sayma verimine ve zayıf ayırma gücüne sahiptir. Bu çalışmada *NaI(Tl)* detektörü kullanıldığından, Şekil 2.5'te *NaI(Tl)* detektörünün aktif hacmi içerisinde olabilecek etkileşme olasılıkları (tesir kesitleri) ve bu olasılıkların toplamının enerjiye göre değişimi görülmektedir.

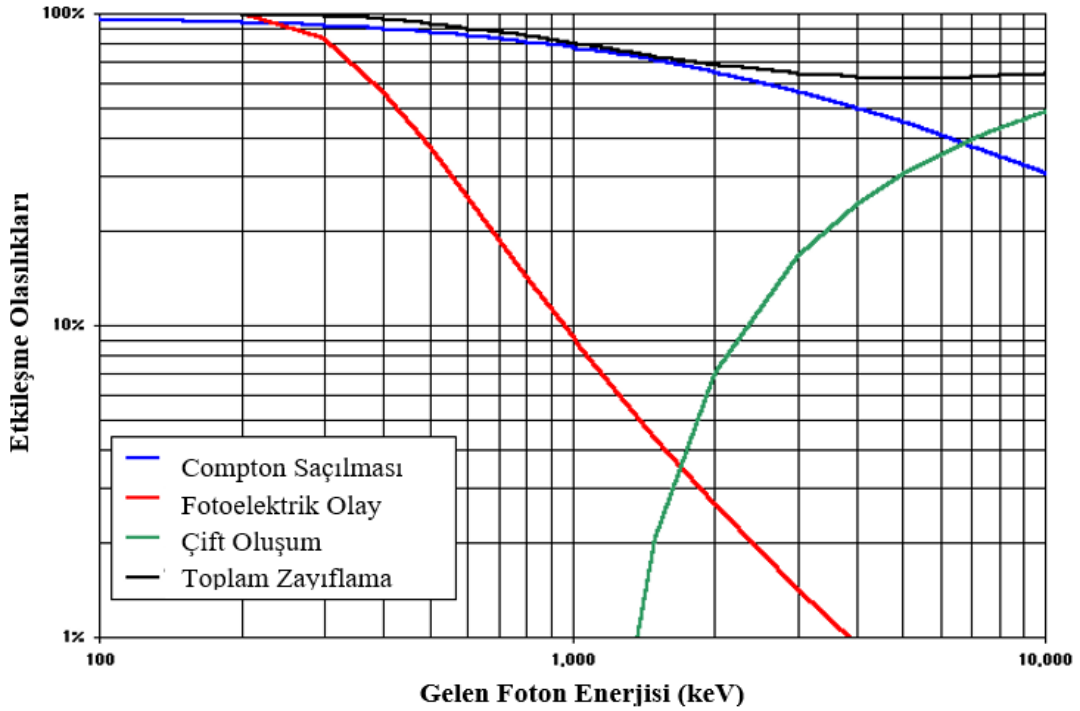
#### 2.4.2. Cevap zamanı

Radyasyonun detektöre ulaşmasından sonra sinyal şeklini alması için geçen zaman cevap zamanı olarak adlandırılmaktadır. Eğer sinyal hızlı bir şekilde yükselen bir kanat ile çok kısa bir zaman ölçeğinde oluşturulmuşsa, zaman içinde belli bir an sinyal tarafından işaretlenebilir. Örneğin sintilatörlerle uçuş süresi ölçümlerinde veya bir sürüklenme odası kullanarak sürüklenme süresi tayininde olduğu gibi zamanlama bilgisinin öne çıktığı durumlarda, cevap zamanı oldukça önemlidir.

#### 2.4.3. Ölü zaman

Bir olayın detektör tarafından işlenerek pulsun oluşturulması için gerekli olan zaman ölü zaman olarak tanımlanmaktadır. Detektör, cinsine bağlı olarak, bu zaman periyodu sırasında başka bir olaya duyarlı ya da duyarsız kalabilir. Detektörün duyarlı kaldığı durumda söz konusu periyot içinde detektöre ulaşan ilave olayların her biri ilkinin üzerine yığılarak, sinyalin bozulmasına neden olacaktır. Duyarsız kalma durumunda ise bu periyotta detektöre ulaşan ilave olayların her biri kaybolacak yani sayılmayacaktır. Sonuç olarak detektörün duyarlı ya da duyarsız kaldığı her iki zamanda da bilgi kaybı olacaktır. Bu kayıplar, gözlenen sayma hızını etkiler ve olayların geliştiği arasındaki zaman dağılımını bozar.





Şekil 2.5. 76 mm NaI(Tl) ortamı için baskın etkileşme olasılıklarının enerjiye bağlı değişimi (URL-5, 2017)

#### 2.4.4. Detektör ayırma gücü

Birbirine çok yakın iki enerjiyi ayırt edebilme kapasitesi olan detektörün ayırma gücü, bir radyasyonun enerjisini ölçmek amacıyla üretilmiş detektörler için en önemli faktördür. Ayırma gücü, genelde detektöre tek enerjili bir radyasyon gönderilip, spektrumun gözlenmesi ile ölçülür. İdeal olarak görülmesi gereken, keskin bir Dirac-delta fonksiyon tepesidir. Fakat gerçek durum asla böyle değildir. Tepe yapısı genelde Gaussiyen biçimli olan sonlu bir genişliğe sahip olmakla beraber bu genişlik üretilen uyarılmış ve iyonlaşmış atom sayısındaki dalgalanmaya bağlıdır.

Her bir detektörün kendisine ait özellikleri, elektronik gürültü gibi faktörler dedektörün ayırma gücünü veya gaussiyen tepenin yarı maksimum tam genişliği (FWHM) olarak tanımlanan pik genişliğini etkiler.

Aynı enerjili gamma ışınlarından detektöre girenlerin yaptığı etkileşmeler ve bu etkileşmeler sonucunda oluşan ikincil radyasyonların da yaptığı etkileşmeler ve bu etkileşmelerin yerleri ve sayıları farklılık göstermektedir. Bu sebeple detektöre aktarılan enerji ve buna bağlı olarak oluşan sintilasyon (parıldama) şiddeti aynı olmayacak ve bir dağılım gösterecektir. Detektör kristalinin etrafındaki yansıtıcılarla fotokatoda düşürülen ışık şiddetinin oluşturduğu fotoelektronların sayıları da farklılık gösterecektir. Fotoçoğaltıcı tüpe gönderilen fotoelektronların dynodlar aracılığıyla çoğalttıkları

elektronların sayıları ve dolayısıyla oluşan puls yükseklikleri de farklılık gösterir. Bütün etkilerin üst üste binmesi sonucu aynı enerjili gamma ışınlarının puls yükseklikleri her zaman aynı olmayacak ve yaklaşık Gaussiyen bir dağılım gösterecektir.

Gaussiyen tepenin yarı maksimum tam genişliği (FWHM), enerji sınırından daha yakın enerjilerdeki durumlarda ayırt edilemez kabul edilmektedir. Bu genişliğe  $\Delta E$  dersek;  $E$  enerjisindeki bağıl ayırma gücü,

$$R = \Delta E/E \quad (2.26)$$

şeklinde elde edilebilmektedir. (2.26) eşitliği genel olarak yüzde şeklinde verilir. Bir NaI(Tl) detektörü 1 MeV enerjili bir  $\gamma$ -ışını için yaklaşık olarak % 8-9 ayırma gücüne sahiptir.

#### 2.4.5. Detektör verimi

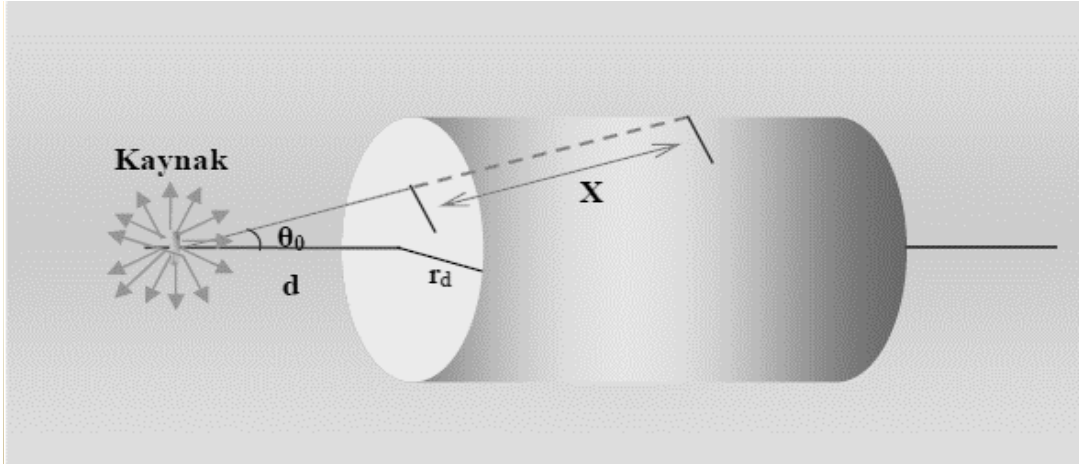
Detektörde sayılabilir büyüklükte puls üreten fotonların sayısının, detektöre gelen fotonların sayısına oranı veya detektörde sayılabilir büyüklükte puls üreten fotonların yüzdesi detektör verimi olarak adlandırılır. Detektör verimi genelde, mutlak verim ve öz (intrinsic) verim olmak üzere iki kısma ayrılır. Mutlak veya toplam verim, detektörde sayılan foton sayısının ( $N_s$ ) kaynaktan yayınlanan foton sayısına ( $N_y$ ) oranı olarak tanımlanır:

$$\varepsilon_t = \frac{N_s}{N_y} \quad (2.27)$$

Mutlak verim, detektör içinde sayılma olasılığıdır ve detektör geometrisinin bir fonksiyonu ile elde edilir. Silindirik bir detektörün, eksenine  $d$  kadar uzaklıkta bulunan izotropik bir nokta kaynaktan,  $\theta$  açısında parçacık yayınlanma olasılığı,

$$P(\theta)d\Omega = d\Omega/4\pi \quad (2.28)$$

olarak ifade edilir (Şekil 2.6).



Şekil 2.6. Detektör kaynak geometrisi (Almaz, 2007)

Bir parçacığın detektöre çarpıp detektörde etkileşme olasılığı,

$$P_{etk}(x) = 1 - e^{-\mu x} \quad (2.29)$$

şeklindedir. Burada  $\mu = N\sigma$  ( $N = \frac{\rho N_0}{A} \text{ cm}^3$ , deki atom sayısı,  $\rho$ : ortamın yoğunluğu,  $N_0$ : Avogadro sayısı ve  $A$ : ortamın kütle numarası) fotonun birim uzunluktaki etkileşme sayısıdır. 2.28 ve 2.29 eşitlikleri kullanılarak,

$$d\varepsilon_t = (1 - e^{-\mu x}) \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (2.30)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $x$  detektör içindeki yol uzunluğudur. Toplam verim 2.29 eşitliğinin tüm hacim üzerinden integrali alınarak bulunabilir.  $x$  değeri, çoğu durumda detektör için çok fazla değişiklik göstermez veya  $\mu$  değeri, üstel değer sıfıra gidecek biçimde, çok büyük olabilir. Böylece toplam verim iki çarpan şeklinde ayrılabilir: öz verim ( $\varepsilon_{int}$ ) ve geometrik veya akseptans verim ( $\varepsilon_{geom}$ ). Toplam veya mutlak verim,

$$\varepsilon_t \cong \varepsilon_{int} \varepsilon_{geom} \quad (2.31)$$

çarpanıyla tanımlanabilir.  $\varepsilon_{geom}$ , fotonların detektörün ön yüzüne yönelme olasılığıdır ve geometrik çarpan olarak da adlandırılır. Şekil 2.6'da görülen nokta kaynak-silindirik detektör geometri için  $\varepsilon_{geom}$ ,

$$\varepsilon_{geom} = \frac{\int_0^{\theta_0} d\Omega}{\int_0^{\pi} d\Omega} \quad (2.32)$$

'dir. Burada  $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$  birim katı açısı olarak yerine yazıldığında,

$$\varepsilon_{geom} = \frac{\int_0^{\theta_0} 2\pi \sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi} 2\pi \sin\theta d\theta} = \frac{2\pi(1 - \cos\theta_0)}{4\pi} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) \quad (2.33)$$

olarak elde edilir. Böylece, detektöre giren fotonların sayısı,  $N_g = \varepsilon_{geom} N_y$  şeklinde yazılabilir.

Detektörde sayılan fotonların ( $N_s$ ) detektöre giren fotonlara ( $N_g$ ) oranı; öz (intrinsic) verim olarak tanımlanır:

$$\varepsilon_{int} = \frac{N_s}{N_g} \quad (2.34)$$

Bu olasılık, gelen radyasyonun detektör ortamındaki etkileşme tesir kesitine bağlıdır. Öz verim radyasyon tipinin, enerjisinin ve detektör materyalinin bir fonksiyonudur. Bir yüklü parçacık için detektör içinde iyonlaşma üretmemesi gibi bir durum çok seyrek olduğundan, yüklü parçacıklar için, öz verimin kullanılması pek çok detektör için daha kullanışlıdır. NaI(Tl) detektörü ile yapılan spektrum analizlerinde sıkça kullanılan bir diğer verim tanımı ise tüm enerji pik verimidir ve tüm enerji pikte sayılan fotonların ( $N_p$ ) yayınlanan fotonlara oranı şeklinde tanımlanır:

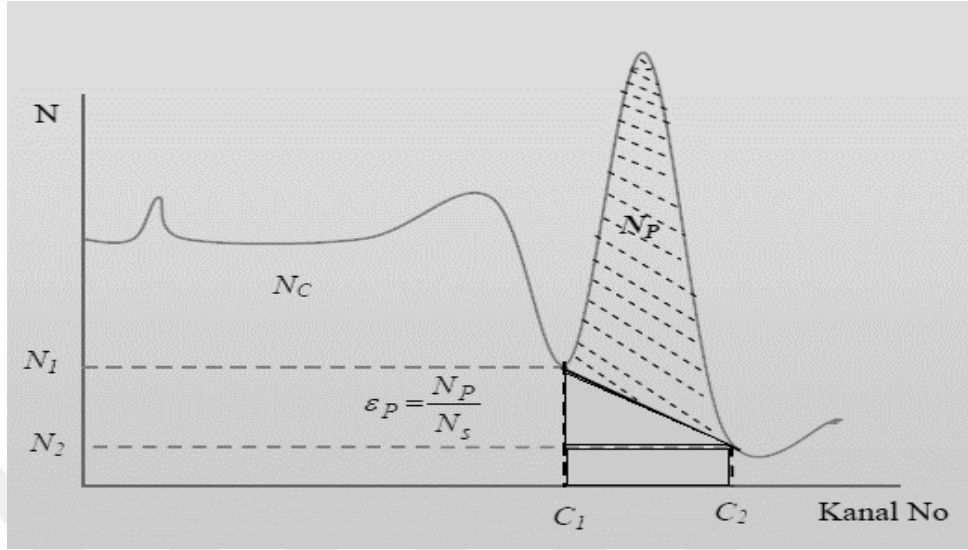
$$\varepsilon_p = \frac{N_p}{N_y} \quad (2.35)$$

Tüm enerji pikte sayılan fotonların sayısı, Şekil 2.7'de görüldüğü gibi, fotopik altında kalan net alana eşittir.

Tüm enerji pikte sayılan fotonların toplam sayılarına oranı pik/toplam oranı olarak tanımlanmaktadır:

$$\varepsilon_{PT} = \frac{N_p}{N_s} \quad (2.36)$$

burada Compton bölgesinde sayılanlar  $N_C$  olmak üzere,  $N_s=N_C+N_P$ 'dir.

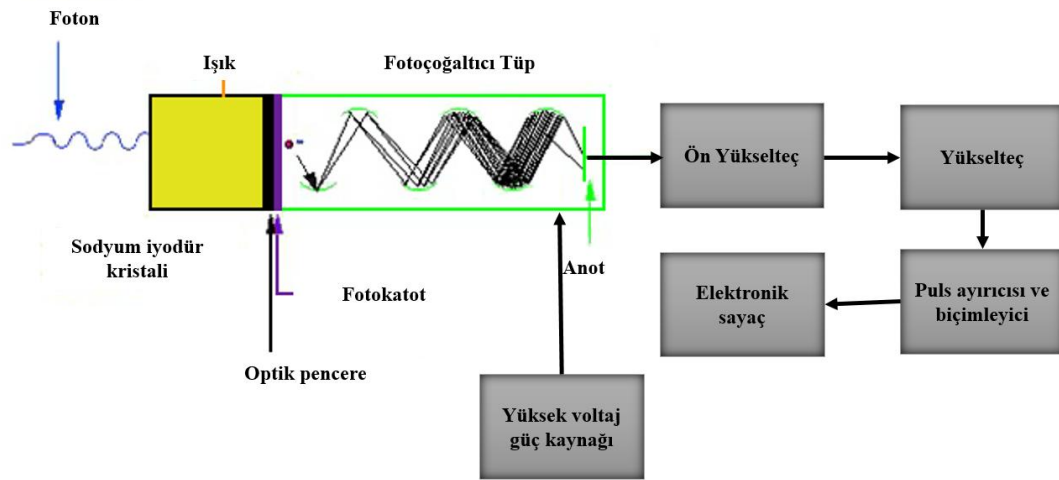


**Şekil 2.7.** Fotopik altında kalan net sayma sayısı ( $N_P$ )nin detektördeki toplam saymaya ( $N_S$ ) oranının (Peak-toplam oranı) puls-yükseklik spektrumu üzerinden anlatımı. Net fotopik sayma, fotopik altında kalan yamuğun çıkarılması ile elde edilmektedir (Almaz, 2007)

Pik/toplam oranı detektör cevap fonksiyonunun biçimini belirleyen en önemli deneysel parametredir (Almaz, 2007).

## 2.5. NaI(Tl) Sintilasyon Detektörlerinde Cevap Fonksiyonunun Oluşumu

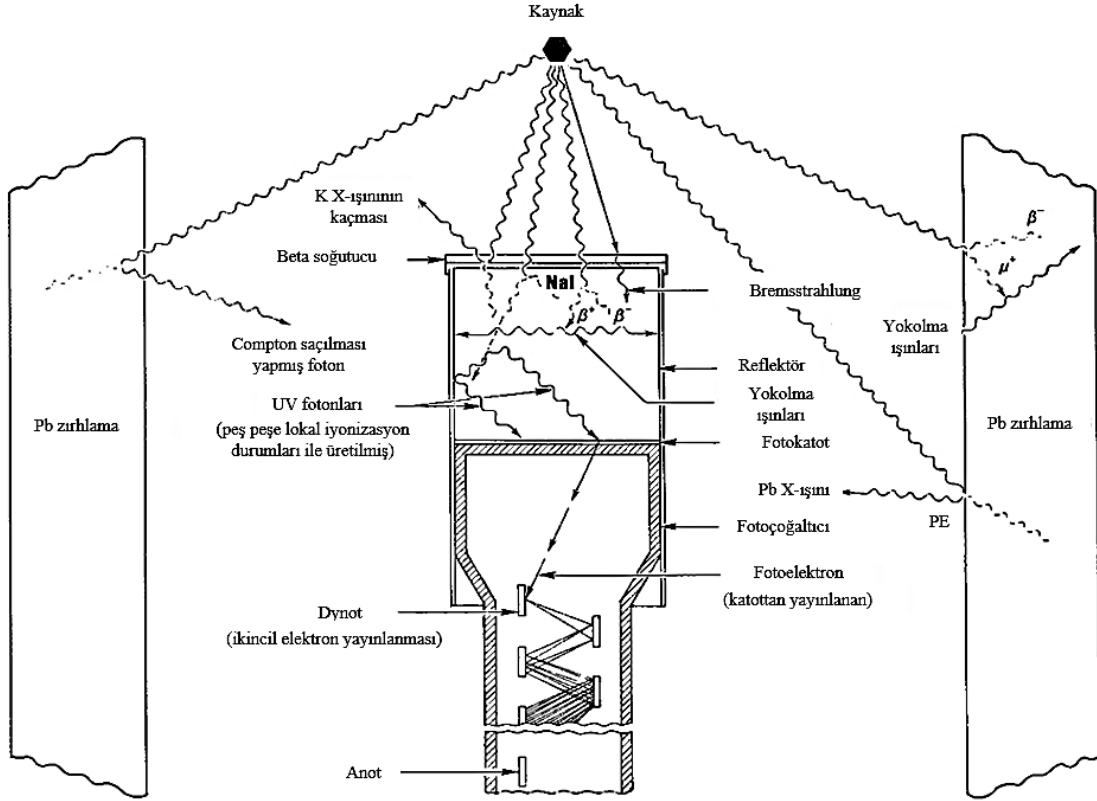
Sintilasyon detektörleri bugünün fiziğinde şüphesiz en sık ve büyük çapta kullanılan nükleer deteksiyon cihazlarının içinde yer alır. Bazı materyallere nükleer parçacık veya radyasyon vurduğunda küçük ışıdamalar yani, sintilasyon oluşturması bu detektörlerin kullanılmasını sağlamıştır. Genel olarak sintilasyon sistemi, direkt veya ışık kılavuzu ile bir fotoçoğaltıcıya optik olarak bağlanmış sintilasyon materyalinden oluşur. Sintilatörden radyasyon geçerken, atomları ve molekülleri uyarır ve sintilatörde görünür bölgede ışık yayınlanmasına neden olur. Bu ışıklar fotoelektronlardan oluşan zayıf bir akım pulsuna dönüştürülmek üzere fotoçoğaltıcıya taşınır. Daha sonra elektron-çoğaltıcı sistemlerde yükseltilir. Sonuçtaki akım sinyali çok kanallı analizör tarafından analiz edilir yani, puls yüksekliklerine göre ilgili kanallara kaydedilir (Şekil 2.8).



Şekil 2.8. NaI(Tl) sintilasyon detektöründe puls oluşum sisteminin blok yapısı (URL-6, 2017)

Sintilatör materyalleri lüminesans özelliği göstermektedir. Lüminesant materyaller ışık, ısı, radyasyon, vb. belli enerji formları uygulandığında bu enerjileri soğurup sonra görünür bölgede ışık yayma özelliğine sahiptirler. Eğer tekrar yayınlanma soğurulmadan hemen sonra gerçekleşirse veya daha kesin olarak  $10^{-8}$  s civarında ise ( $10^{-8}$  s kabaca atomik geçişler için alınan zamandır) bu işlem genelde floresans olarak adlandırılır. Bununla birlikte uyarılmış seviye yarı kararlı ise tekrar yayınlanma gecikecektir. Bu işlem fosforesans veya afterglow olarak adlandırılmaktadır. Gecikme zamanı kullanılan materyale bağlı olarak birkaç mikrosaniyeden saatlere kadar değişebilir.

Günümüzde kullanılmakta olan altı tip sintilatör materyal vardır: organik kristaller, organik sıvılar, plastikler, inorganik kristaller, gazlar ve camlar. Bir NaI(Tl) sintilasyon detektörünün iç yapısı ve detektörde olan temel etkileşimler Şekil 2.9'da verilmiştir.



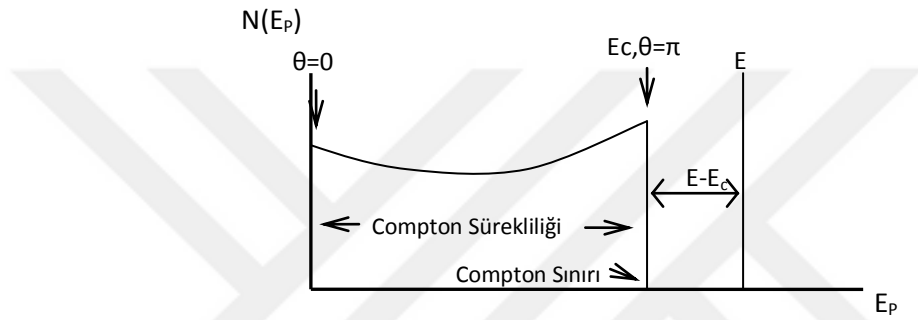
Şekil 2.9. Bir NaI(Tl) Sintilasyon detektörünün genel yapısının ve radyasyonun fiziksel etkileşimlerinin çizimsel olarak gösterimi (URL-7, 2017)

Detektörde bir anlığına sonlu kalınlık ihmal edildiğinde (detektör boyutları sonsuz kabul edildiğinde),  $E$  enerjili bir foton için çıkış sinyali, ideal ayırma gücünde, Dirac-deltası şeklinde sabit tek bir genliğe sahip olacaktır. Cevap lineer ise, detektörden ölçülen puls yükseklik spektrumu gelen radyasyonun enerji spektrumuyla doğrudan bağlantılı olacaktır (Şekil 2.10). Pratikte durum farklıdır. Detektörün aktif hacmi sınırlı olduğundan gelen gamma ışınının tamamını durduramayacak, gamma ışını bir şekilde detektörden kaçabilecektir. Sınırlı hacimden dolayı detektörde Compton bölgesi oluşmaktadır. Sınırlı hacme sahip detektörün ayırma gücünün ideal olduğu durumda elde edilecek cevap spektrum Şekil 2.11'de görülmektedir.

Ayırma gücüne bağlı olarak  $E$  enerjili fotonun cevap spektrumunda oluşturacağı pulsun bir ortalama değer etrafında gösterdiği dalgalanma normal dağılım veya Gauss dağılım şeklinde oluşmaktadır.



Şekil 2.10. Tek enerjili bir kaynağın ideal spektrumu (kaynak spektrum) (Almaz, 2007)



Şekil 2.11. Kaynak spektrumundan elde edilen ideal (mükemmel ayırma gücü için) puls-yükseklik spektrumu (Almaz, 2007)

Gauss dağılımı sürekli, simetrik bir dağılımdır. Fotonun detektöre bıraktığı enerji  $E_e$  olmak üzere, ayırma gücü nedeniyle oluşturduğu puls yüksekliği dağılımını veren Gauss dağılımı,

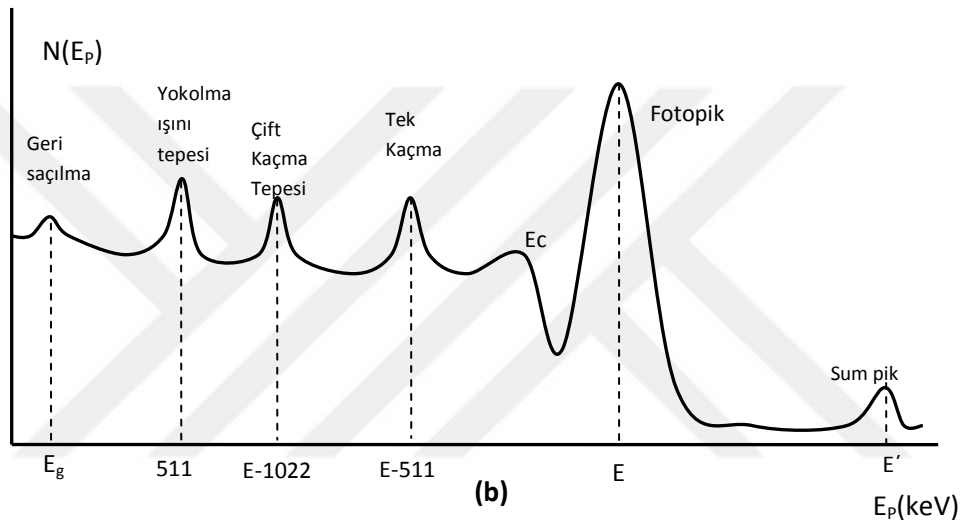
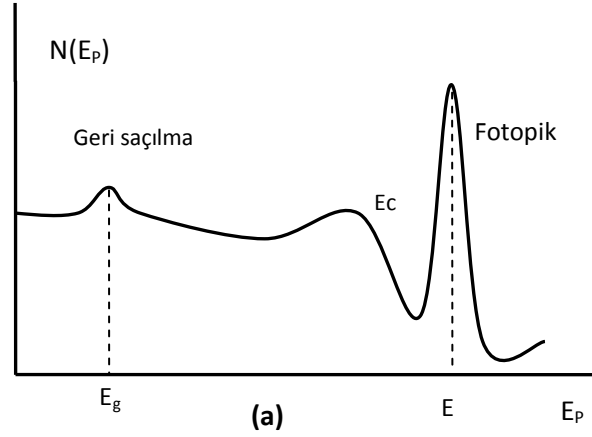
$$N_G(E_P) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(E_P - E_e)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.37)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki  $\sigma$ , dağılımın standart sapması ve  $E_P$ , oluşan puls yüksekliğidir. Standart sapma ayırma gücüne bağlı olarak

$$\sigma = E_e \frac{R}{2,35482} \quad (2.38)$$

şeklinde ifade edilebilir. Detektör ayırma gücünden dolayı, Şekil 2.11'deki gibi beklenen cevap fonksiyonu, Şekil 2.12'deki gibi gözlenir.





Şekil 2.12. NaI(Tl) detektörde gözlenen cevap fonksiyonu: (a)  $E < 1.4$  MeV, (b)  $E > 1.4$  MeV (Almaz, 2007)

$E$  enerjili bir foton, sintilatörün aktif hacmine girdiğinde belli bir serbest yol gider. Bu serbest yol, detektöre giriş doğrultusunda gördüğü giriş uzunluğundan küçükse, detektör içinde kalır ve temel etkileşmelerden birini yapar, aksi halde detektörden kaçar.

Etkileşme fotoelektrik olay ise, foton, tüm enerjisini elektrona aktarır. Elektron, aldığı enerji ile, belli bir serbest yol gittikten sonra, detektör içinde kalırsa, detektörde, elastik saçılma, inelastik saçılma ve bremsstrahlung etkileşmelerinden birini yapabilir. Etkileşme elastik saçılma ise elektron, enerji kaybetmeksizin geliş enerjisi ile saçılır. Etkileşme inelastik saçılma ise, gelen elektron, enerjisinin bir kısmını atomik elektronlardan birine aktararak saçılır. Etkileşme bremsstrahlung olayı ise, elektronun enerjisinden daha küçük enerjili bir foton yayınlanır ve bu foton yine gelen gamma ışını gibi yukarda bahsedilen etkileşmeleri yapabilir. Elektronların, menzilleri birkaç *mm*

basamağındadır. Elektronların, menzilleri detektör boyutlarına göre çok küçük olduğundan elastik ve inelastik saçılmalar sonucunda oluşan birincil ve ikincil elektronların, hemen hemen tamamı detektörde kalır, çok az bir kısmı detektörden kaçabilir. Fotonların serbest yolları elektronlara göre çok daha büyüktür ve detektör boyutlarını aşabilir. Dolayısıyla bremsstrahlung fotonları detektörden kaçabilir. Böylece oluşan bremsstrahlung olaylarına bağlı olarak detektöre aktarılan enerjide bir azalma olur. Bu azalma ayırma gücünü etkiler.

Etkileşme Rayleigh saçılması ise, gelen foton enerji kaybetmeksizin saçılır ve saçılan foton belli bir serbest yol gittikten sonra yukarıda bahsedilen etkileşmeleri yapabilir. Bu etkileşmede detektöre enerji aktarımı yoktur. Ancak, bu olay sonucunda gelen foton detektörün başka bir bölgesine taşınmış olur. Bu da, bundan sonra olabilecek olaylara bağlı olarak detektöre aktarılan enerjii etkiler.

Etkileşme Compton saçılması ise, gelen foton enerjisinin bir kısmını atomik elektrona aktararak daha düşük enerji ile saçılır. Atomik elektronun yapacağı etkileşmeler yukarıda anlatıldığı gibidir.

Saçılan fotonun belli bir serbest yol gittikten sonra yaptığı etkileşme fotoelektrik olay ise, foton geri kalan enerjisini atomik elektrona aktarır. Böylece bu iki olay sonucunda ortama aktarılan toplam enerji, gelen fotonun enerjisine eşittir. Fotonlar ışık hızı ile hareket ettikleri için, bu ardışık iki olay sonucunda detektöre aktarılan enerji, detektörün cevap zamanı içerisinde olduğundan, tek bir puls oluşturur, ayrı ayrı iki puls oluşturmaz. Dolayısıyla Compton saçılmasından sonra fotoelektrik olay olmuşsa, bu foton, tüm enerjisini detektöre aktarmıştır ve fotopik bölgesinde sayılır.

Saçılan fotonun belli bir serbest yol gittikten sonra yaptığı etkileşme Compton saçılması ise, foton enerjisinin bir kısmını atomik elektrona aktararak daha düşük enerji ile saçılır. Saçılan foton detektörden kaçarsa, detektöre aktarılan toplam enerji bu iki ardışık Compton saçılması sonucunda elektronlara aktarılan enerjilerin toplamıdır. Fotonlar ışık hızı ile hareket ettikleri için, bu ardışık iki olay sonucunda detektöre aktarılan enerji, tek bir puls oluşturur, ayrı ayrı iki puls oluşturmaz. Detektöre aktarılan enerjinin büyüklüğüne bağlı olarak, bu foton Compton bölgesinde, Compton sınırı ile fotopik arasındaki bölgede sayılabilir. İkinci Compton saçılmasından sonra saçılan foton, belli bir serbest yol gittikten sonra detektörde kalmışsa, tekrar Compton saçılması veya diğer etkileşmeleri yapabilir ve böylece devam eder. Ardışık çoklu saçılmalar (Compton, Rayleigh)'dan sonra son etkileşme fotoelektrik olay ise ya da son saçılan fotonun enerjisi belli bir değerin altına düşmüşse ( $10 \text{ keV}$ ) başlangıçta gelen foton, tüm

enerjisini detektöre aktarmıştır ve fotopik bölgesinde sayılır.  $10 \text{ keV}$ 'in altında enerjiye sahip fotonların NaI(Tl) detektörü içinde soğurulduğu kabul edilir. Ardışık çoklu saçılmalar (Compton, Rayleigh)'dan sonra detektöre aktarılan toplam enerji, bu ardışık saçılmaların sonucunda elektronlara aktarılan enerjilerin toplamıdır. Bu ardışık saçılmalar sonucunda detektöre aktarılan enerji, tek bir puls oluşturur, ayrı ayrı pulsler oluşturmaz. Detektöre aktarılan enerjinin büyüklüğüne bağlı olarak, bu foton Compton bölgesinde, Compton sınırı ile fotopik arasındaki bölgede ya da fotopikin sol ucunda sayılabilir.

$E > 1.022 \text{ MeV}$  ise, çift oluşum olayı sonucu elektron-pozitron çifti oluşur. Enerjinin  $1.022 \text{ MeV}$ 'lik kısmı elektron-pozitron çiftinin oluşumuna harcanır. Geri kalan enerji elektron ve pozitron arasında gelişigüzel şekilde paylaşılır. Elektron ve pozitron etkileşmeleri yukarıda anlatılan elektron etkileşmeleri gibidir. Pozitronların etkileşme tesir kesitlerinin elektronlarınkinden farkı çok fazla değildir. Pozitronlar etkileşmeler sonucunda enerjilerini kaybettiklerinden ortamda serbest olarak bulunamazlar ve çevrede mevcut bir elektronla birleşerek yok olurlar. Bu yokolma olayı sonucunda momentum korunumundan dolayı zıt doğrultularda her biri elektronların durgun kütle enerjisi olan  $0.511 \text{ MeV}$  enerjili iki tane foton yayınlanır. Yokolma (annihilation) olayı detektörde meydana gelmişse oluşan iki tane foton yukarıda anlatıldığı şekilde etkileşmeler yapar. Yokolma fotonlarının her ikisi de detektörde tüm enerjisini bırakmışsa, gelen foton fotopikte sayılır. Fotonlardan biri detektörden kaçmış, diğeri tüm enerjisini detektörde bırakmışsa, detektöre aktarılan enerji  $E - 0.511 \text{ MeV}$ 'dir ve bu enerjinin oluşturduğu pulsa karşılık gelen kanalda sayılır (tek kaçma piki). Fotonlardan her ikisi de detektörden kaçmışsa, detektöre aktarılan enerji  $E - 1.022 \text{ MeV}$ 'dir ve bu enerjinin oluşturduğu pulsa karşılık gelen kanalda sayılır (çift kaçma piki). Böylece cevap fonksiyonunun üzerinde tek kaçma piki ve çift kaçma piki oluşur (Şekil 2.12.(b)). Yokolma fotonları ardışık saçılmalar yaptığında da detektöre aktarılan enerjiye bağlı olarak ilgili kanalda sayılırlar. Çift oluşumu olayı sonucu sanki cevap fonksiyonu üzerine,  $E - 0.511 \text{ MeV}$  ve  $E - 1.022 \text{ MeV}$  enerjilerde fotonlara karşılık gelen küçük şiddette iki tane cevap fonksiyonu biner.

Compton saçılması, detektör yüzeyine yakın bir noktada, kaynağın kendi içinde, detektör dışında bulunan çevredeki materyallerde veya detektörü çevreleyen zırhlarda da meydana gelebilir. Ancak bu saçılan gamma ışınlarından, kaynaktan detektöre zıt doğrultuda yayınlanan gamma ışınlarının  $180^\circ$  geriye saçılarak detektöre Girme ihtimali en yüksektir. Diğer çevreden saçılarak detektöre giren gamma ışınlarının cevap

fonksiyonu üzerinde bir etkisi yoktur.  $180^\circ$  geriye saçılarak detektöre giren gamma ışınlarının enerjisi  $E_g$ , Denk. (2.12) ile verilmiştir. Bu durumda sanki detektöre  $E_g$  enerjili ikinci bir kaynaktan yayınlanan gamma ışınları girmektedir. Böylece, detektör cevap fonksiyonu üzerine  $E_g$  enerjili gamma ışınlarının oluşturduğu cevap fonksiyonu biner. Bu cevap fonksiyonunun fotopiki cevap fonksiyonu üzerinde Şekil 2.12'de görüldüğü gibi küçük bir pik olarak görünür.

Denk. (2.12) eşitliğinde, gelen gamma enerjisinin yüksek enerjili olduğu ( $h\nu \gg m_0c^2/2$ ) sınırda eşitlik  $E_g \approx m_0c^2/2$  'ye indirgenir. Böylece, geri saçılma piki her zaman  $250 \text{ keV}$  veya daha aşağı enerji değerlerinde oluşur.

$\beta^-$  yayımlandıktan sonra gamma yayınlayan kaynaklardan çıkan pozitronlar kaynak kılıfında veya çevredeki herhangi bir ortamda yokolma olayı sonucu zıt yönlerde iki tane gamma ışını yayınlamaktadır. Dolayısıyla bu kaynak sanki  $0.511 \text{ MeV}$  enerjili ikinci bir gamma ışını yayınlamaktadır. Böylece, detektör cevap fonksiyonu üzerine  $0.511 \text{ MeV}$  enerjili yokolma ışınlarının oluşturduğu cevap fonksiyonu biner. Bu cevap fonksiyonunun fotopiki, cevap fonksiyonu üzerinde Şekil 2.12'de görüldüğü gibi belirgin bir pik olarak görünür. Buna yokolma piki denir.

Compton saçılmasına ek olarak, gelen gamma ışınlarının yaptığı diğer etkileşmeler de cevap spektrumu üzerinde fark edilebilir pikler oluştururlar. Detektörün aktif hacminin dışında detektörü çevreleyen materyallerde fotoelektrik olay meydana gelmişse atomik geçişler sonucu X-ışınları meydana gelir. Ortama salınan bu ışınlar detektörde sayılırsa cevap spektrumu üzerine binen karakteristik X-ışını pikleri görülür. Gelen foton yüksek enerjili ise çevreleyen materyallerle çift oluşum olayı olasılığı yüksektir. Daha önce anlatıldığı gibi, bu olay sonucu zıt yönde oluşan  $511 \text{ keV}$  lik fotonlardan birinin detektöre girip sayılma ihtimali yüksek olduğundan  $511 \text{ keV}$ 'de bir pik gözlenir. Bu pikin, pozitron yayınlayıcı kaynaklardan yayınlanan yokolma ışınları ile karıştırılmamasına dikkat edilmesi gerekmektedir.

Cevap spektrumunda fotopikin sağında oluşan ufak uydu pikler toplam (sum) pik olarak adlandırılır. Detektörün bir fotonu sayarken sayma zamanı içerisinde detektöre giren diğer fotonlar ölü zamandan dolayı sayılmazlar. Detektör, bu zaman içinde gelen fotonlara sağır kalmaktadır. Sayma zamanı içinde ardışık gelen iki foton tek foton olarak algılanır. Bu iki foton detektörde tüm enerjilerini bırakmışlarsa, fotopikin sağında bu iki fotonun enerjisinin toplamı kadar olan bölgede bir toplam (sum) pik oluşur. Fotonlardan her ikisi de detektörde belli bir enerji bırakıp detektörden

kaçmışsa yine bırakılan toplam enerjiye karşılık gelen yerde (fotopik ile toplam pik arası bölgede) saymalar oluşur (Almaz, 2007).

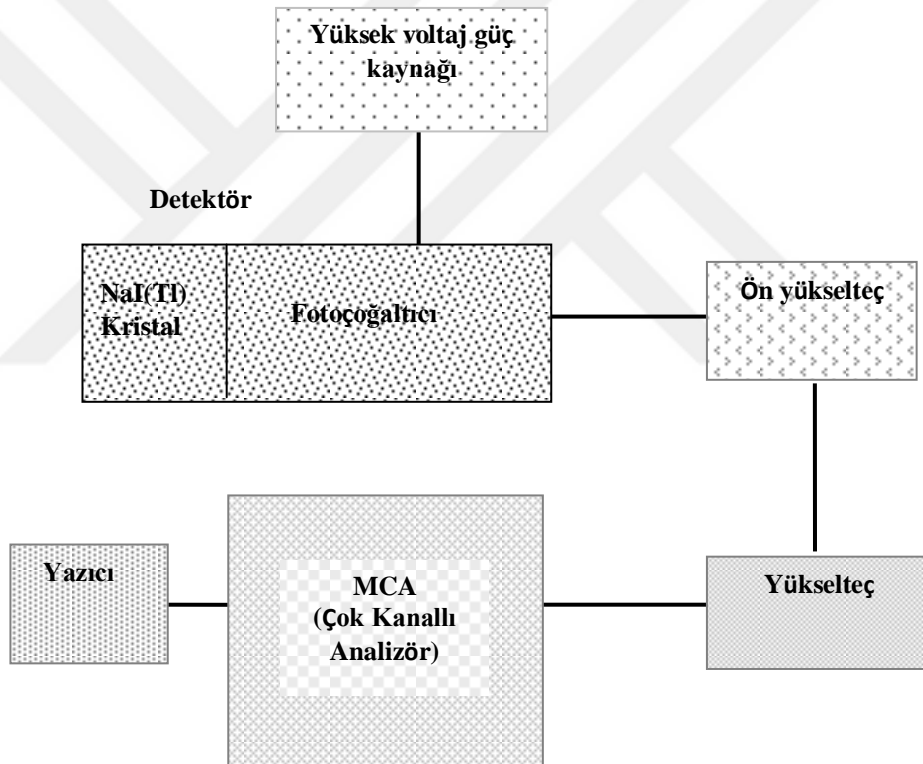


### 3. YÖNTEM

#### 3.1. Internal Bremsstrahlung Spektrumlarının Deneysel Olarak Elde Edilmesi

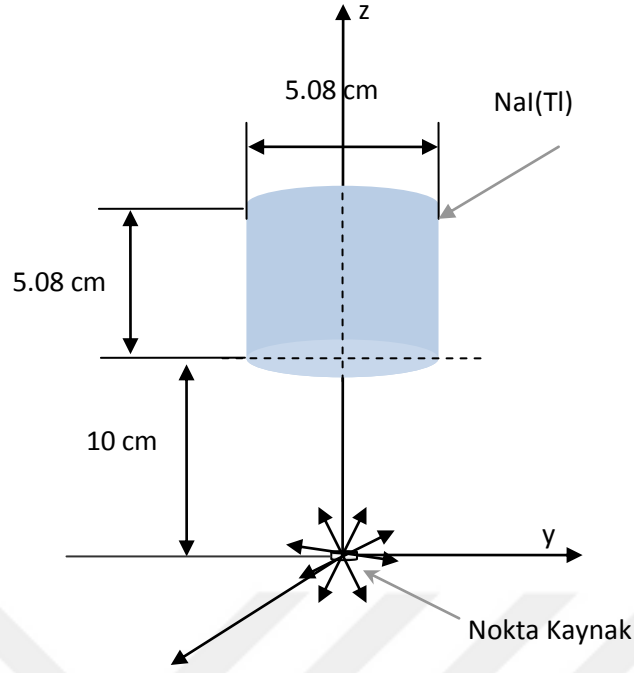
##### 3.1.1. IB spektrumunun 2x2" NaI(Tl) detektörü ile elde edilmesi

Kullanılan Radyoaktif kaynağa ait Internal Bremsstrahlung foton spektrumunun deneysel ölçümleri Uludağ Üniversitesi Nükleer Fizik laboratuvarında 2x2" NaI(Tl) detektörü kullanılarak yapılmıştır. Gamma spektrometresinin kurulum ayarı Canberra 40 MCA ile birlikte Şekil 3.1' de verilmiştir.



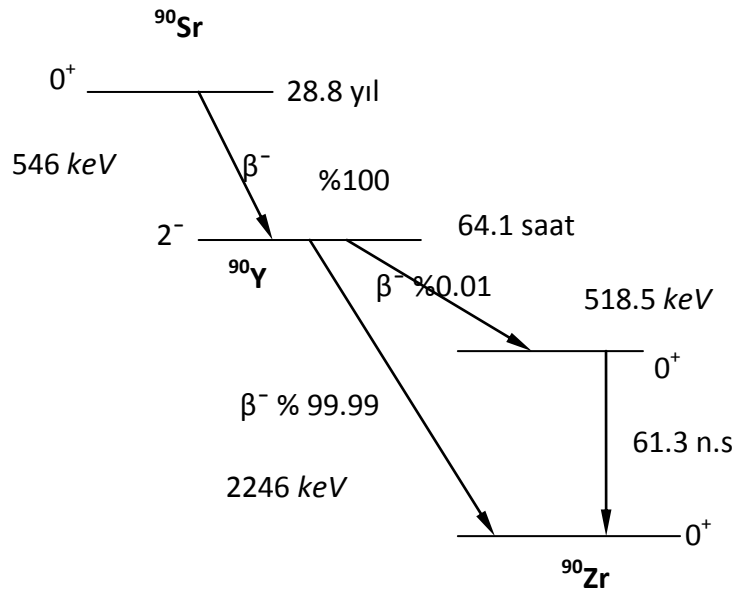
Şekil 3.1. Deneysel gamma spektrometresinin gösterimi (Almaz, 2007)

Deneyde  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  kaynağı kullanılmıştır. 2x2" 'lık silindirik NaI(Tl) detektörün ön yüzünden 10 cm uzaklığa  $\beta^-$  kaynağı şekil 3.2'de görüldüğü gibi yerleştirilmiştir. EB katkılarını en aza indirmek için detektör çevresine zırhlama materyali kullanılmamış, ayrıca detektör kaynak geometrisi, geri saçılmaları önlemek için kaynağın detektörü görmeyen yüzü boşluğa gelecek şekilde kurulmuştur.



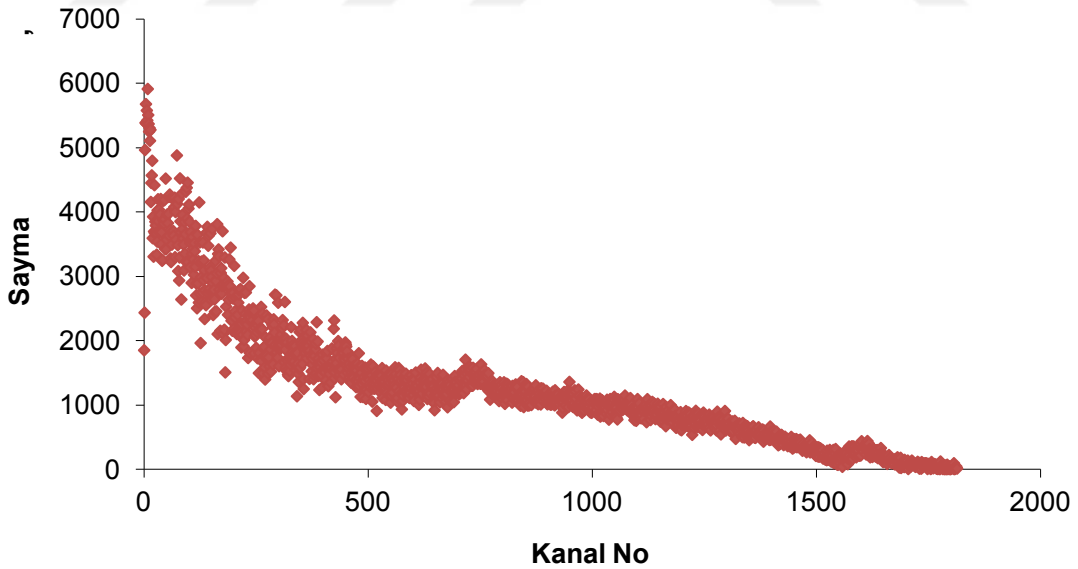
Şekil 3.2. IB spektrumunun ölçülmesinde detektör-kaynak geometrisi (Almaz, 2007)

$^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  radyoizotopunun parçalanma şeması Şekil 3.3’ te verilmiştir.  $^{90}\text{Sr}$  ana kaynağı  $^{90}\text{Y}$  ile seküler dengededir. 28.8 yıl yarı ömürlü  $^{90}\text{Sr}$  546 keV, 64 saat yarı ömürlü  $^{90}\text{Y}$  2246 keV son nokta enerjisine sahip beta parçacıkları yayımlarlar. Parçalanma birinci tek yasaklı  $0^+$  taban durumdan  $^{90}\text{Y}$ ,  $2^-$  durumuna, buradan %99.99 yayımlanma oranı ile  $0^+$   $^{90}\text{Zr}$  taban durumuna gerçekleşmektedir.



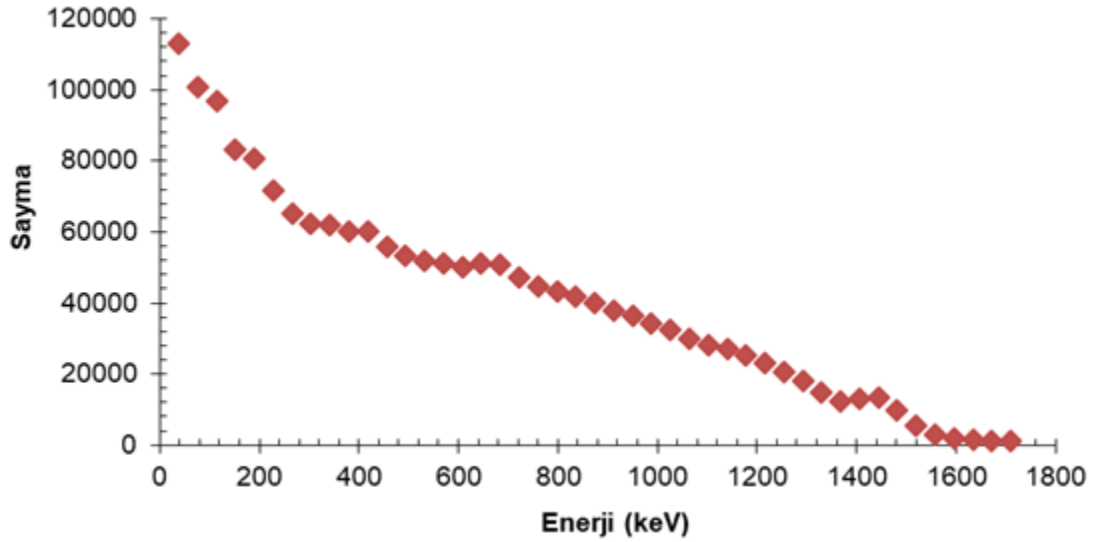
Şekil 3.3.  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  izotopunun parçalanma şeması (Almaz, 2007)

Bu radyoizotopa ait *IB* fotonlarına ait soyulmamış ham spektrum, Şekil 3.1’de verilen deney düzeneği ve Şekil 3.2’deki geometri kullanılarak ölçülmüştür. Bu detektör için tipik ayırma gücü değeri, FWHM’de, 661,6 keV’lik  $^{137}\text{Cs}$ ’nin gamma fotonu için %7-8 civarındadır. Detektörden alınan veriler uygun elektronik yükseltmelerle Canberra 40 serisi MCA’da kaydedilmiştir. Tam olarak 70 saatlik bir süre ile sayma, 2047 kanala sahip spektrometreden alınmıştır. Sayımın daha fazla uzatılması istatistiksel olarak spektrumu iyileştirmediğinden 70 saatlik süre yeterli görülmüştür. Tabii fon sayımı aynı sürede alınarak kaba spektrumdan çıkarılmıştır. Elde edilen deneysel spektrum Şekil 3.4’te verilmiştir. Uç nokta enerjisi 2246 keV olan  $\beta^-$  parçacıklarının *IB* fotonlarının spektrometreden alınan maksimum enerjisi Şekil 3.4’de görüldüğü gibi, 1800-üncü kanala yani, 1710 keV’e kadar ölçülebilmektedir. Dolayısıyla bu enerjiden daha büyük enerjide yayınlanan *IB* fotonları ihmal edilmiştir. Şekil 3.4’te görüldüğü gibi istatistik dalgalanmalar fazla olduğundan spektrumu yumuşatmak ve spektrum soyma işlemini kolaylaştırmak için, kanal sayısı 45 seçilerek, kanal genişliği 1710 keV/45=38 keV olarak artırılmıştır. Bu spektrum 38 keV’lik kanal genişliği ile Şekil 3.5’de yeniden çizilmiştir.



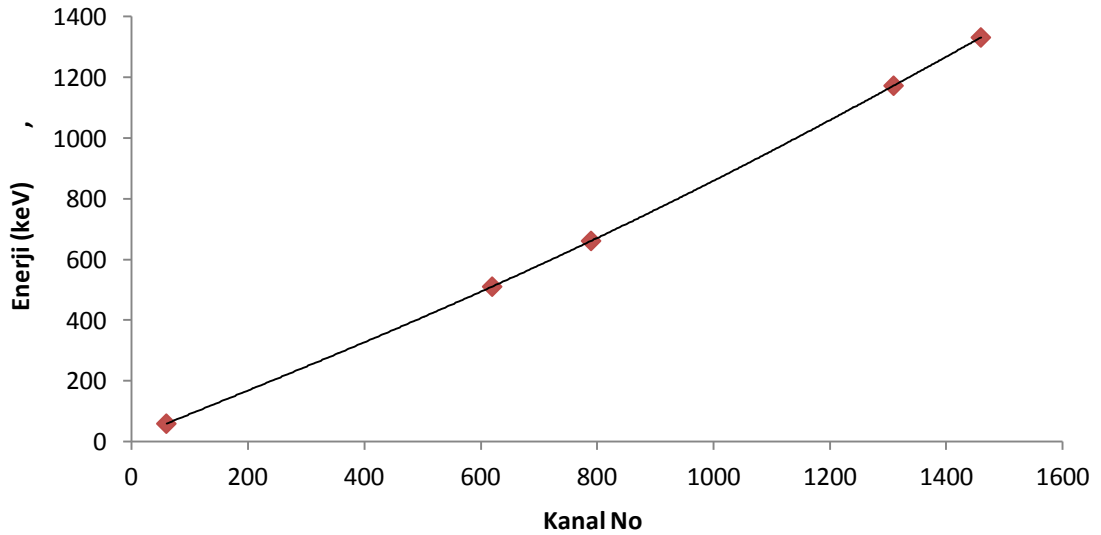
**Şekil 3.4.**  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  kaynağından yayınlanan fotonların NaI(Tl) detektöründen tabii fon düzeltilmesi yapılarak alınmış spektrumu (Almaz, 2007)





Şekil 3.5.  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  izotopunun, kanal genişliği  $38\text{ keV}$  alınarak tabi fon çıkartılarak alınmış spektrumu (Almaz, 2007)

Elde edilen spektrumun soyma işlemi için gerekli parametreleri elde etmek amacıyla, standart nokta kaynaklar,  $^{241}\text{Am}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{22}\text{Na}$  ve  $^{60}\text{Co}$  detektörün ön yüzünden  $10\text{ cm}$  uzaklığa detektör eksenine üzerine yerleştirilerek, detektör cevap fonksiyonları ölçülmüştür. Bu izotoplara ait enerji değerleri ve yayınlanma olasılıkları Çizelge 3.1’de verilmiştir. Bu cevap fonksiyonlarından, standart gamma kaynaklarından yayınlanan bu  $\gamma$ -ışınlarının, enerjileri kullanılarak spektrometrenin enerji kalibrasyonu yapılmıştır. Enerji kalibrasyon eğrisi Şekil 3.6’da verilmiştir (Almaz, 2007).



Şekil 3.6. Standart nokta kaynaklar kullanılarak  $2\times 2''\text{ NaI(Tl)}$  detektörü için elde edilen kalibrasyon grafiği (Almaz, 2007)

Cevap fonksiyonlarının her bir fotopikine uygun bir Gauss dağılımı fit edilerek Gauss dağılımlarının standart sapmaları, dolayısıyla enerji ayırma güçleri elde edilmiştir. Elde edilen ayırma gücü değerlerine uygun bir eğri fit edilmiştir. Cevap fonksiyonları kullanılarak, nokta kaynak-detektör geometrisinin tüm enerji pik ve toplam verimleri ve pik/toplam oranları ( $P/T$ ) elde edilmiştir. Enerjiye bağlı olarak elde edilen bu değerlere en uygun fonksiyonlar fit edilmiştir. Fit edilen fonksiyonlar ve bu fonksiyonların parametreleri Çizelge 3.2’de verilmiştir. Burada gamma ışınlarının enerjileri,  $[E] = keV$  birimindedir (Almaz, 2007).

**Çizelge 3.1.** Soyma işlemi için gerekli parametreleri elde etmek amacıyla, kullanılan standart nokta kaynaklar ve bu kaynaklara ait yayınlanma enerjileri ve olasılıkları (Almaz, 2007)

Radyoaktif Kaynak	E(keV)	Yayınlanma Olasılığı
Am-241	59.5	0.36
Cs-137	661.6	0.85
Co-60	1173	0.9998
	1332	1.00
Na-22	511	1.8
	1274	1.00

**Çizelge 3.2.** Detektörün enerji ayırma gücü, tüm enerji pik ve toplam verim ve pik/toplam oranı değerlerine fit edilen fonksiyonlar ve bu fonksiyonların parametreleri (Almaz, 2007)

Fonksiyonun Adı ve İfadesi	Parametre				
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
<b>Enerji Ayırma gücü (%):</b> $R = \frac{\Delta E}{E} = (p_1 e^{-p_2 E} + p_3 E^{p_4})$	<b>264.36</b>	<b>-0.063791</b>	<b>102.65</b>	<b>-0.4089</b>	<b>---</b>
<b>Tüm Enerji Pik Verimi (%)*:</b> $\varepsilon_P = p_1 e^{-\frac{(x-p_2)^2}{2p_3^2}} + p_4 + p_5 x$	<b>54.4431</b>	<b>-0.6122</b>	<b>6.3579</b>	<b>-59.5702</b>	<b>4.7409</b>
<b>Toplam Verim (%)*:</b> $\varepsilon_t = p_1 e^{-\frac{(x-p_2)^2}{2p_3^2}} + p_4 + p_5 x$	<b>125.1604</b>	<b>-2.9050</b>	<b>8.9923</b>	<b>-124.2825</b>	<b>8.1094</b>
<b>Pik/Toplam Oranı (P/T)*:</b> $\varepsilon_{PT} = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4$	<b>0.083399</b>	<b>-0.028217</b>	<b>7.4·10<sup>-4</sup></b>	<b>-6.9·10<sup>-5</sup></b>	<b>---</b>

\*:  $x = \ln E$

Elde edilen fit fonksiyonları  $10 \text{ keV} \leq E \leq 1400 \text{ keV}$  enerji bölgesinde geçerlidir.  $60 \text{ keV}$ 'den küçük enerji bölgesinde, tüm enerji pik ve toplam verim değerlerinde deneysel sapmalar yüksek olduğundan, fit edilen fonksiyonlardaki sapmalar da bu bölgede yüksektir ve fonksiyonlar arasında  $\varepsilon_P > \varepsilon_I$  olması gibi bir uyumsuzluk gözlenmektedir.  $2 \times 2$ " NaI(Tl) detektörü ile yapılan deneyde tüm enerji pik verimi,  $\varepsilon_P$  fonksiyonu kullanılmış toplam verim,  $\varepsilon_I$  fonksiyonu kullanılmamıştır.  $E < 24 \text{ keV}$  enerji bölgesinde,  $P/T$  oranları 1 olarak alınmış, bu bölgede  $\varepsilon_{PT}$  fit fonksiyonu 1'den büyük değer aldığı için kullanılmamıştır (Almaz, 2007).

### 3.2. Spektrum Analizi

Gamma ışını spektrumları için, genel soyma işlemlerinin kullanımı ilke olarak mümkün ise de, spektrumun tam olarak soyulabilmesi nadiren gerçekleştirilebilir. Bunun nedeni, sintilatörlerin veya germanyum detektörlerin cevap fonksiyonlarının çok fazla karmaşık olması ve belirsizliklerin tüm spektruma yayılmasıdır. Çok sayıda radyoizotoptan oluşan gamma ışını veya çok sayıda gamma ışını yayınlayan radyoaktif kaynakların spektrumları neredeyse sürekli, belli sayıda kesikli gamma ışını enerjilerinden oluşur ve ilgili gamma ışınlarının cevap fonksiyonları yayınlanma olasılıklarına ve enerjilerine bağlı olarak pikler gösterir. Bu spektrumda detektör ayırma gücünde seçilen gelen radyasyonun her bir kesikli enerji değeri için ilgili pik tahmin edilebilir. Spektrum analizi basit olarak bu piklerin yerinin ve değerinin tahmin edilmesi ile yapılabilir. Gamma ışını spektrumu,  $IB$  veya  $EB$ , belli ortamlardan saçılmış gamma ışınlarının veya belli kalınlığı geçmiş gamma ışınlarının enerji spektrumları gibi sürekli ise, çözüm çok daha karmaşık bir hal alır. Çünkü sürekli spektrum aralığında bulunan her bir gamma ışınının cevap fonksiyonları üst üste biner (giydirilir) ve bunlara ait pikler ölçülmüş spektrumda görülmez. Burada tüm spektrumun tam olarak soyulması (ayrıştırılması) gereklidir (Almaz, 2007).

#### 3.2.1. Soyma işlemi

Detektörde gözlenen spektrum  $M(E')$  olmak üzere, matematiksel olarak;

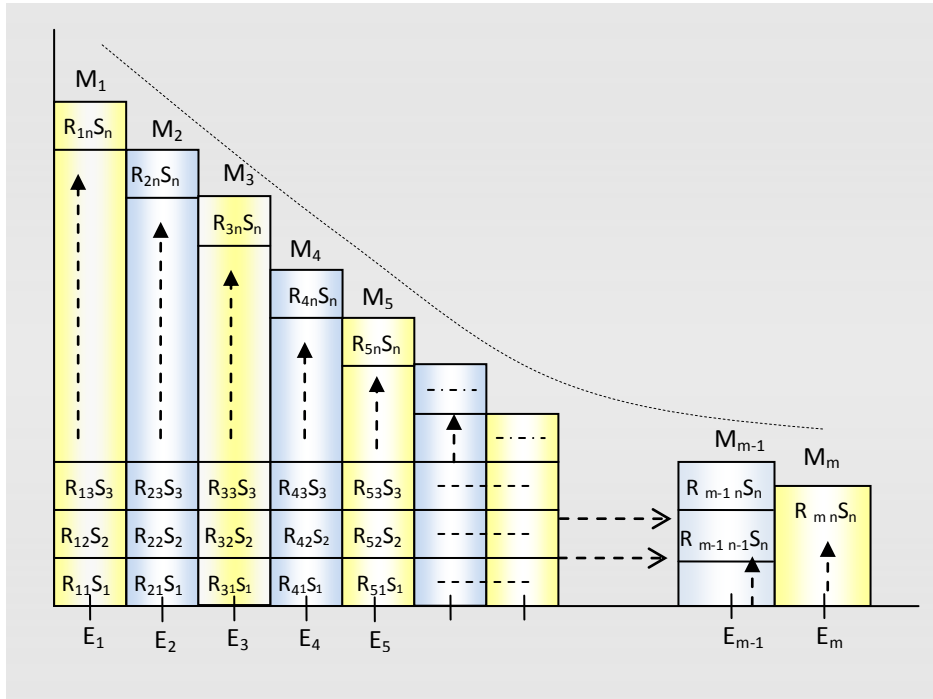
$$M(E') = \int_0^{\infty} R(E', E) S(E) dE \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $S(E)$  detektöre gelen gamma ışınlarının spektrumu veya bulmak istediğimiz spektrumdur.  $R(E', E)$ , detektör cevap fonksiyonudur. Bu integral birinci tip Fredholm integralidir (Blöbel 1996). Bu integrale deneysel fizikte ve kimyada çok sık karşılaşılmaktadır. Denk. (3.1) çok önemli aynı zamanda çok zor bir problemi temsil etmektedir. Genelde bu tip problemler ill-posed (pozlaşamama) yapıdadır.  $dE$  üzerindeki çok küçük değişiklikler  $S(E)$  üzerinde çok büyük dalgalanmalara neden olmaktadır. Cevap fonksiyonu  $R(E', E)$ , detektörün verimini, duyarlılığını ve ayırma gücünü içermektedir. İntegrali oluşturan elemanlar açık olarak şöyle ifade edilebilir:

Kaynak spektrumu,  $S(E)dE$ : Enerjileri  $E$  ile  $E + dE$  aralığında, kaynaktan yayınlanan foton sayısı

Ölçülen spektrum,  $M(E')dE'$ : Enerjileri  $E'$  ile  $E'+dE'$  aralığında, deneysel olarak ölçülmüş foton sayısı

Detektörün cevabı,  $R(E', E)dE'$ : Kaynaktan  $E$  enerjisi ile çıkan parçacığın enerjisinin detektörde  $E'$  ile  $E'+dE'$  enerji aralığında sayılma olasılığıdır.



Şekil 3.7. Detektörde ölçülen spektrumun her bir kanalındaki saymaların gösterimi (Almaz, 2007)

0 ile  $E$  aralığında değerler alan sürekli bir gamma spektrumu  $n$ -tane enerji aralığına ayırılım. Her bir enerji aralığının orta noktaları  $E_j$  ( $j=1,2,\dots, n$ ) olmak üzere detektörde bu enerjilerdeki  $n$ -tane cevap fonksiyonu üst üste biner yani ölçülen spektrum bu cevap fonksiyonlarının toplamıdır. Bu cevap fonksiyonları detektörde  $i=1,2,3,\dots, m$  kanalda sayılır.  $R_{ij}$ ,  $E_j$  enerjisi ile detektöre giren fotonların  $i$ -inci kanalda sayılma olasılığı ( $j$ -inci cevap fonksiyonunun  $i$ -inci kanalda toplam sayma 1 olacak şekilde normalize edilmiş değeri) ve kaynaktan  $E_j$  ( $j=1,2,\dots, n$ ) enerjisi ile yayınlanan fotonların sayıları  $S_j$  ( $j=1,2,\dots, n$ ) olmak üzere, kaynak spektrumunun her bir kanalında ölçülen  $M_i$  ( $i=1,2,3,\dots, m$ ) toplam saymaları, Şekil 3.7’de gösterilmiştir. Bu şekilden,

$$\begin{aligned}
 M_1 &= R_{11}S_1 + R_{12}S_2 + \dots + R_{1n}S_n \\
 M_2 &= R_{21}S_1 + R_{22}S_2 + \dots + R_{2n}S_n \\
 M_3 &= R_{31}S_1 + R_{32}S_2 + \dots + R_{3n}S_n \\
 &\dots \\
 M_m &= R_{m1}S_1 + R_{m2}S_2 + \dots + R_{mn}S_n
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

olduğu açıkça görülmektedir. Bu denklemler matris formatında,

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \dots & R_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} \Rightarrow M = R S \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $M$  ve  $S$  sırasıyla ölçülen ve kaynaktan yayınlanan foton sayılarını veren sütun vektörleri ve  $R = (R_{ij})_{mn}$  cevap matrisidir. Bu matrisin her bir sütunu,  $n$ -tane kesikli enerji değerlerine sahip fotonların cevap fonksiyonudur. Burada detektör ayırma gücünden dolayı  $E_n$  enerjisi ile detektöre giren fotonlar, bu enerjiden daha büyük enerjiye karşılık gelen kanallarda sayılabilir. Dolayısıyla  $m > n$ 'dir. Bu denklem sisteminde  $n$  tane bilinmeyen  $m$  tane de denklem vardır. Denklem sayısı fazla olduğuna göre bu matris denkleminde, cevap matrisi,  $n \times n$  boyutlu karesel matris alınabilir. Ancak yaptığımız deneyde, yüksek enerjili fotonların şiddetleri çok küçük olduğundan ölçülen spektrumda gözlenememiştir. Ölçülen spektrumda kanal sayısı  $n=45$  ve kanal genişliği  $38 \text{ keV}$  alınmıştır. Böylece Denk. (3.3)'deki matris denklemi

$R = (R_{ij})_{nn}$  şeklinde karesel matris alınarak çözülebilir. Her bir kanaldaki ölçülen sayma;

$$M_i = \sum_{j=1}^n R_{ij} S_j \quad (3.4)$$

'dir. Denk. (3.4), sürekli halde Denk. (3.1)'e dönüşür.

Cevap matrisi bilindiğinde,  $m \geq n$  şartında, tüm  $S_j$  elemanları için bu eşitlikleri teorik olarak çözmek mümkündür. Bu işlem genel olarak spektrum soyulması (unfolding) veya spektrum açılması (deconvolution, decomposition veya unsmearing) olarak adlandırılır. Bizim problemimizde cevap matrisi  $R = (R_{ij})_{nn}$  şeklinde karesel matris olduğundan Denk. (3.3)'den

$$S = R^{-1} M \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilerek kaynaktan yayınlanan foton sayıları hesaplanabilir. Burada  $R^{-1}$ ,  $R$  matrisinin tersidir. Cevap matrisi oluşturulurken yapılan yaklaşımlar ve istatistik sapmalar sonucu  $R^{-1}$  matrisinin bulunması neredeyse imkânsız hale gelir (Almaz, 2007).

Soyma işlemlerinde iki tip problem ön plana çıkar. İlki, ilgilenilen tüm enerji bölgelerinde cevap fonksiyonlarının deneysel olarak elde edilememesinden kaynaklanan belirsizliktir. Bu belirsizlik detektör çalışma şartları, ölçüm basamakları ve kalibrasyona bağlı olarak değişiklik göstererek cevap fonksiyonunda değişikliklere sebep olur. İkincisi, kaydedilen verilerin istatistiksel yapısıdır. Her bir kanalda sayılan saymalar bir istatistiksel sapma gösterir. Bu istatistiksel belirsizlikler soyma işlemi sonucu elde edilen spektrumda keskin dalgalanmalar olarak kendini gösterir. Ölçülen spektrumda büyük sayıda saymalar (her bir kanalda yeterli seviyede sayma), elde edilmedikçe, istatistiksel belirsizlikler elde edilen soyulmuş spektrumda çok geniş dalgalanmalar oluşturacaktır.

Bu tür kusurlardan dolayı,  $S_j$  değerlerinin kesin sonuçları direkt olarak lineer denklem çözümlerinden elde edilememektedir. Bunun yerine, gelen enerji spektrumunu en iyi tahmin etmeye yönelik yaklaşık çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu amaç için pek çok bilgisayar programı geliştirilmiştir. İstatistiksel belirsizliklerin etkilerini en aza indirmek için, her bir kanalda var olan saymalar, komşu kanalların ağırlıklı

ortalamalarıyla değiştirilerek elde edilen, veri yumuşatma formlarını da içeren pek çok soyma işlemi kodu yazılmıştır (Matzke, 2002; Cowan, 1998; Press ve Ark., 1992; Meng ve Ramsden, 2000; Weese, 1992).

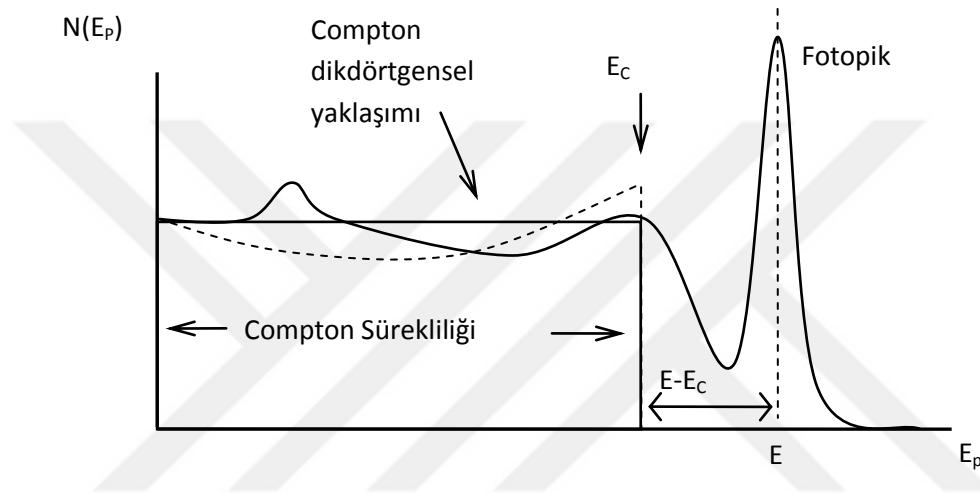
Denk (3.3) bağımsız cevap fonksiyonlarının lineer olarak üst üste binmiş hallerini temsil eder. Pek çok detektörde, pile up (yığılma) etkileri veya birbirinden ayrı enerjiler arasında gerçekleşebilecek iç içe girme gibi karmaşık etkiler olmadığı zaman, bu varsayım geçerlidir. Bu etkiler yüksek sayma hızlarında çok daha artacağından, soyma yöntemleri düşük sayma hızlarında daha iyi sonuçlar verecek, fakat yüksek sayma hızlarında sayılmış spektrumlarda yetersiz sonuçlar alınacaktır. Her ne kadar soyma yöntemleri tüm radyasyon detektörlerinin çıkış spektrumlarına uygulanabilse de, bu yöntemlerin eksiksiz olarak geliştirildiği iki büyük uygulama alanı bulunmaktadır. Bunlardan biri, hızlı nötronlar için kullanılan proton geri saçılma detektörleri, ikincisi sintilasyon veya germanyum gibi gamma ışını spektrometreleridir (Knoll, 2000).

### 3.2.2. Cevap fonksiyonunun compton bölgesi için dikdörtgensel yaklaşım

$IB$  fotonlarının detektörden alınan spektrumunun soyulabilmesi için,  $E_j$  enerjilerine karşılık gelen cevap fonksiyonlarının bilinmesi gerekmektedir. Bu enerjilerde foton yayınlayan radyoaktif kaynak bulunmadığından bu cevap fonksiyonlarının deneysel olarak belirlenmesi mümkün değildir.  $E_j$  enerji değerlerinin bazılarında karşılık gelen radyoaktif kaynaklar bulunabilir ancak bize tümü gereklidir. Bu çalışmada, cevap fonksiyonları, NaI(Tl) detektörlerinin, deneysel tüm enerji pik verimi,  $P/T$  oranları ve enerji ayırma gücü kullanılarak yaklaşık olarak elde edilmiştir.

Compton ve Rayleigh etkileşmeleri sonucu saçılmış foton detektörden kaçır veya detektör ortamında çoklu saçılmalar (Compton, Rayleigh) sonrası fotoelektrik soğurulma ile veya tek bir fotoelektrik soğurulma ile detektöre tüm enerjisini aktarır. Bu şekilde tüm enerjisini detektöre bırakan fotonlar toplanarak tüm enerji tepesini oluştururlar. Compton saçılması sonrası, yüksek  $E'$  enerjisiyle saçılmış (elektrona aktardığı  $E_e$  enerjisi düşük) olan fotonlar büyük olasılıkla yeniden etkileşecek (Compton veya fotoelektrik) ve bu fotonlar Compton bölgesinin ortalarında veya Compton bölgesi ile fotopik arasında kalan aralıkta veya fotopikte sayılacaklardır. Compton etkileşmesi sonrası düşük  $E'$  enerjisi (yüksek  $E_e$ ) ile saçılmış fotonlar, büyük ihtimalle fotoelektrik etkileşme yaparak fotopik bölgesinde sayılırlar. Düşük enerjilerde, Compton bölgesinin keskin sol (0 enerjeye yakın) ve sağ ( $E_C$ 'ye yakın) uçları, fotonların detektörde çoklu

etkileşmeleri sonucu yumuşar. Orta enerjilerde ( $E \approx 1.2 \text{ MeV}$ ) Compton sınırı, fotonların detektörde çoklu etkileşmeleri sonucu yumuşar. Bu yüzden Compton bölgesinin şekli yaklaşık bir dikdörtgen haline dönüşür. Yüksek enerjili fotonlar için, Compton saçılması sonrası fotonlar detektörden kaçabildiği için Compton sınırı hafifçe sivri kalır. Bu yüzden cevap fonksiyonunda 0 ile  $E_C$  arasında tanımlanan Compton düzlüğü enerjisi  $1.4 \text{ MeV}$ 'e kadar olan fotonlar için Şekil 3.8'de görüldüğü gibi dikdörtgen biçiminde alınmıştır (Almaz, 2007).



Şekil 3.8. Detektörlerde görülen genel foton spektrumu ve dikdörtgensel yaklaşım (Almaz, 2007)

### 3.2.3. 2x2" ve 3x3" NaI(Tl) detektörleri cevap fonksiyonlarının yaklaşık olarak elde edilmesi

$E$  enerjisi ile kaynaktan yayınlanan,  $N_y = 10^7$  tane foton dikkate alınmıştır. Cevap fonksiyonunun fotopik bölgesinde sayılanları, 2x2" için, Denk. (2.35) ve Çizelge 3.2'de verilen tüm enerji pik verimi kullanılarak,

$$N_p = \varepsilon_p N_y \quad (3.6)$$

ifadesinden hesaplanmıştır. 3x3" için, toplam verim, Denk. (2.27) ve  $P/T$  oranı, Denk. (2.36) kullanılarak fotopikte sayılan foton sayısı,

$$N_p = \varepsilon_{PT} \varepsilon_t N_y \quad (3.7)$$



ifadesinden hesaplanmıştır. Fotopikte sayılan foton sayısı, 2x2" için Denk. (3.6) ve 3x3" için Denk. (3.7)'den elde edilmiştir. 2x2" ve 3x3" detektörlerin her ikisi için de Compton bölgesinde sayılan foton sayısı Denk. (2.36) kullanılarak elde edilen,

$$N_C = N_P \left( \frac{1}{\varepsilon_{PT}} - 1 \right) \quad (3.8)$$

ifadesinden elde edilmiştir.  $N_P$  ve  $N_C$  değerleri belirlenerek elde edilen cevap fonksiyonları, kaynaktan yayınlanan foton sayısı  $N_y=10^7$ 'ye bölünerek 1'e normalize edilmiştir. Böylece elde edilen cevap fonksiyonlarındaki sayılar kaynaktan yayınlanan bir fotonun ilgili kanalda sayılma olasılığını verir. 2x2" ve 3x3" NaI(Tl) detektörlerinin cevap matrisleri bu şekilde elde edilmiştir.

Cevap fonksiyonu, kanal genişliği, 2x2" için  $\Delta E_k = 38 \text{ keV}$ , 3x3" için  $\Delta E_k = 10 \text{ keV}$  olan enerji aralıklarına ayrılmıştır.  $E$  enerjisine karşılık gelen Compton sınırı Denk. (2.13)'ten elde edilmiştir. Compton bölgesine düşen  $N_C$  tane foton  $\Delta E_k$  aralıklı kanallara eşit olarak paylaştırılmıştır. Fotopike düşen foton sayısı  $N_P$  ve Compton bölgesindeki kanallara düşen fotonlar, standart sapması  $\sigma_j$  olan Gaussiyen fonksiyona Gauss dağılımı örnekleme ile dağıtılmıştır (Almaz ve Cengiz 2002, Almaz ve ark. 2005). Burada standart sapma, ayırma gücü fonksiyonları, 2x2" için, Çizelge 3.2 ve 3x3" için,  $\frac{\Delta E}{E} = (c_1 + c_2 E^{c_3} + c_4 E^{c_5})/100$  eşitliği kullanılarak, Denk. (2.38) ifadesinden hesaplanmıştır.

Gauss dağılımının Monte Carlo Yöntemi ile yapılan örneklemeinde Reddetme Yöntemi kullanılmıştır. Gauss Dağılımlarının her biri  $-3\sigma$  ile  $+3\sigma$  aralığında örnekleştirilmiştir. Bunun için, dikdörtgensel reddetme fonksiyonu (düzgün dağılım)'na temel Monte Carlo İlkesi,

$$q = \frac{\int_{E_{\min}}^E dE}{\int_{-3\sigma}^{3\sigma} dE} = \frac{E - E_{\min}}{E_{\max} - E_{\min}} = \frac{E - E_{\min}}{6\sigma} \quad (3.9)$$

uygulanarak

$$E = E_{\min} + q \cdot 6\sigma \quad (3.10)$$

ifadesi elde edilmiştir. Burada  $q$ , 0-1 aralığında düzgün dağılımlı gelişigüzel sayı,  $E_{\min} = E_i - 3\sigma$ , ve  $E_{\max} = E_i + 3\sigma$  ( $i=1,2,3, \dots, n, n+1$ )'dir. Burada  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ ,  $n$ -tane enerji bölgesine ayrılan Compton bölgesinin enerji değerleri ve  $E_{n+1} = E$  kaynaktan yayınlanan gammanın (fotopikin) enerji değeridir. Her bir enerji bölgesi 2 tane alt enerji bölgesine ayrılmıştır. Denk. (3.10)'dan bir gelişigüzel sayı  $q$  türetilerek bir  $E_p$  değeri elde edilmiştir. İkinci bir gelişigüzel sayı  $q$  türetilerek,

$$q < e^{-(E_p - E_i)^2 / 2\sigma^2} \quad (3.11)$$

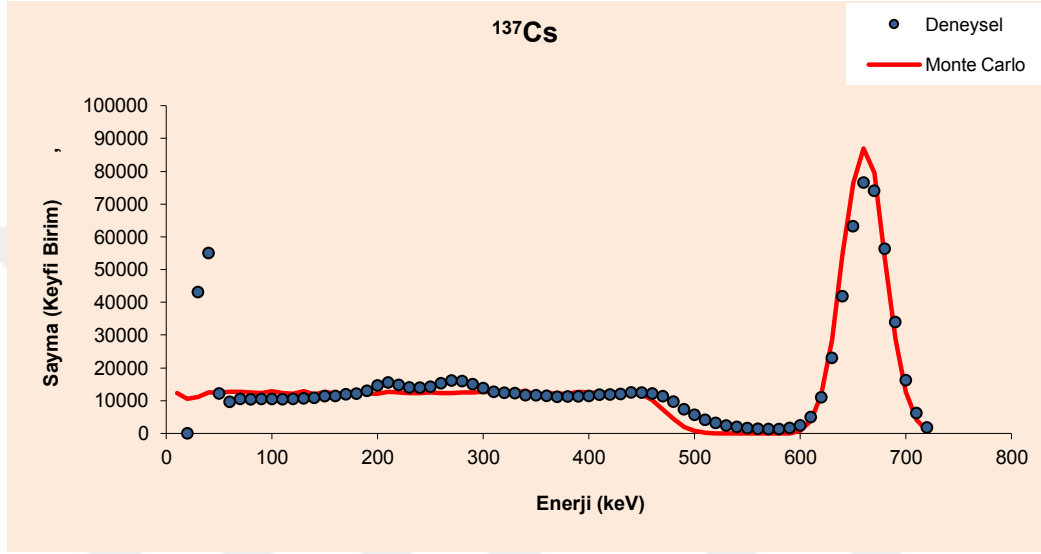
şartına bakılmıştır. Şart sağlanırsa Bu  $E_p$  değeri ilgili alt enerji bölgesinde saydırılmış, şart sağlanmazsa işlem tekrarlanmıştır. Böylece  $E$  enerjili bir gamma kaynağının cevap fonksiyonu elde edilmiştir.

$E$  enerjili bir gamma kaynağının, 2x2" ve 3x3" NaI(Tl) detektörü için cevap fonksiyonu çeşitli nokta kaynaklar için elde edilmiştir. Çalışmada  $^{47}\text{Sc}$  ( $E_0=153 \text{ keV}$ ),  $^{51}\text{Cr}$  ( $E_0=323 \text{ keV}$ ),  $^{85}\text{Sr}$  ( $E_0=515 \text{ keV}$ ),  $^{95}\text{Nb}$  ( $E_0=766 \text{ keV}$ ),  $^{137}\text{Cs}$  ( $E_0=662 \text{ keV}$ ),  $^{60}\text{Co}$  ( $E_1=1173, E_2=1332 \text{ keV}$ ) radyoizotoplarının gamma ışını cevap fonksiyonları sunulan yöntemle elde edilmiş ve elde edilen cevap fonksiyonları Şekil. 3.9-3.16'da, 2x2" için gamma spektrometresinden elde ettiğimiz deneysel değerlerle ve 3x3" için literatürden (Heath 1964) aldığımız deneysel değerlerle karşılaştırılmıştır.

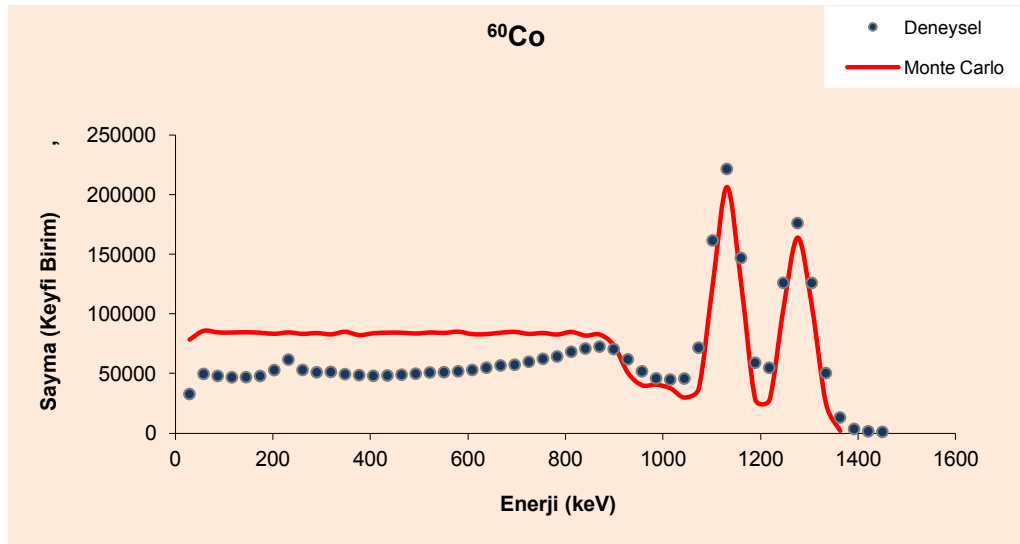
İki çeşit gamma yayınlayan  $^{60}\text{Co}$  kaynağının Cevap Fonksiyonu'nun elde edilmesinde,  $E_1=1173 \text{ keV}$  enerjili gamma ışınları (yayınlanma olasılığı % 99.8) ve  $E_2=1332 \text{ keV}$  enerjili gamma ışınları (yayınlanma olasılığı %100) (Firestone ve Shirley, 1996) da yayınlanma olasılıkları oranında etkili olup bu oranlar Cevap Fonksiyonu'na yansıtılmıştır. Elde edilen sonuçlar deneysel değerlerle tek enerjili gamma kaynakları için çok iyi bir şekilde uyumaktadır. İki enerjili gamma kaynağı ( $^{60}\text{Co}$ ) için deneysel 2x2" ve literatür değerlerinden 3x3" NaI(Tl) detektörlerinden elde edilen Cevap Fonksiyonu ile deneysel değerler arasındaki farklılığın, detektöre art arda giren iki ayrı gamma ışınının oluşturduğu pulsların, ilki henüz sayılmadan iki pulsun birlikte detektörde tek bir puls olarak sayılmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. İki veya daha fazla çeşit gamma ışını yayınlayan kaynakların cevap fonksiyonlarında bu etki toplam (sum) pik olarak ortaya çıkmaktadır. Compton sınırı ile fotopik arasındaki bölgede üst üste saymalardan ve çoklu saçılmalardan dolayı deneysel değerler

hesapladığımız değerlerden biraz yüksektir. Yüksek enerjili fotonlar için, Compton saçılması sonrası fotonlar detektörden kaçabildiği için Compton sınırı hafifçe sivri kalır. Bu sivrilik 1  $MeV$ 'den sonra belirgin hale gelmektedir.  $^{60}Co$  kaynağı için deneysel değerler bu bölgede hesaplanan değerlerden biraz yüksektir.

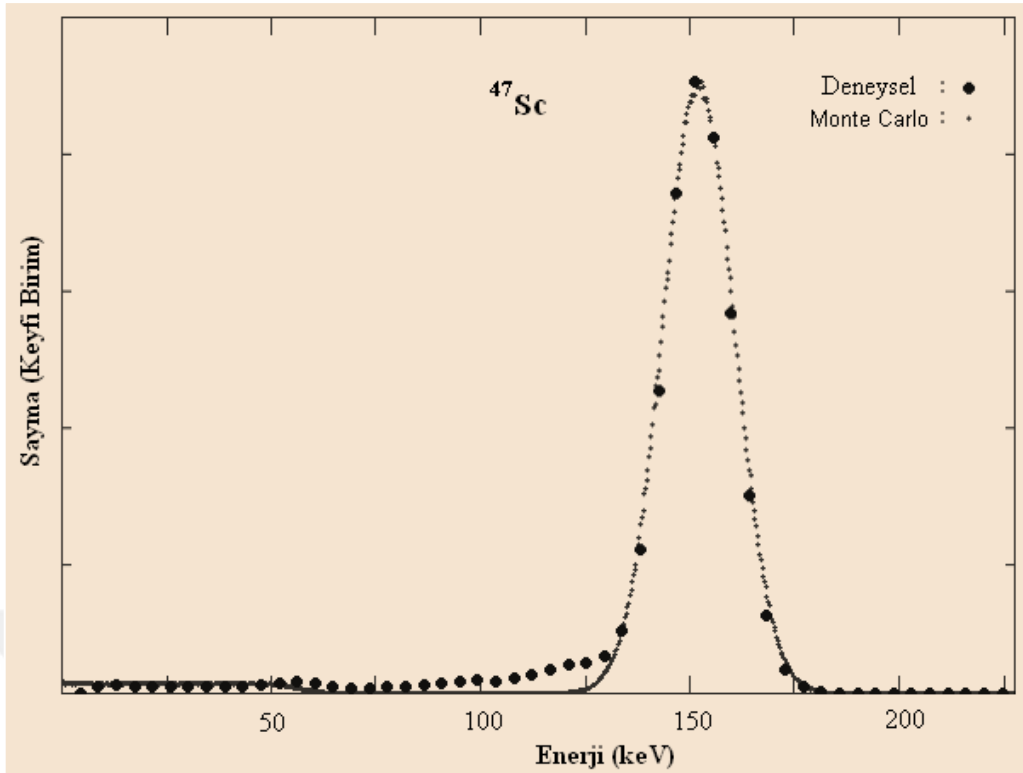
Böylece  $IB$  spektrumunun elde edilmesinde, bu basit Monte Carlo yöntemi ile cevap fonksiyonları elde edilerek cevap matrisi oluşturulmuştur.



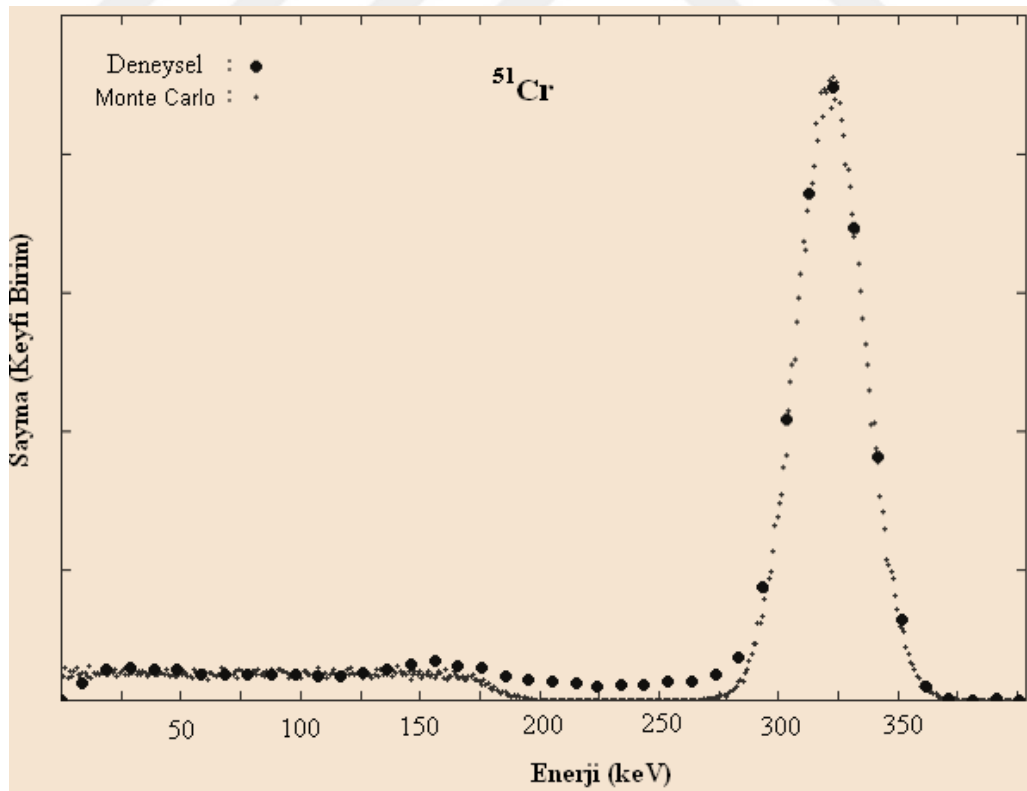
Şekil 3.9. 2x2" NaI(Tl) detektöründen elde edilen,  $^{137}Cs$  ( $E=661.6$  keV) için, gamma ışını cevap fonksiyonu (Almaz, 2007)



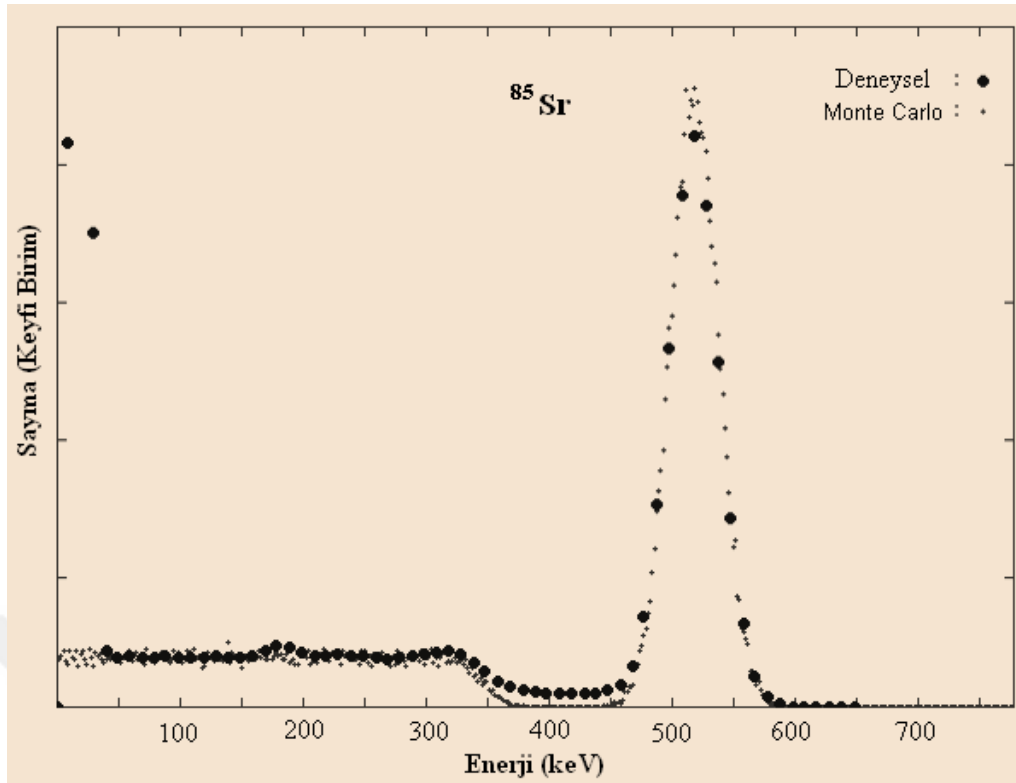
Şekil 3.10. 2x2" NaI(Tl) detektöründen elde edilen,  $^{60}Co$  ( $E_1=1173$ ,  $E_2=1332$  keV) için, gamma ışını cevap fonksiyonu (Almaz, 2007)



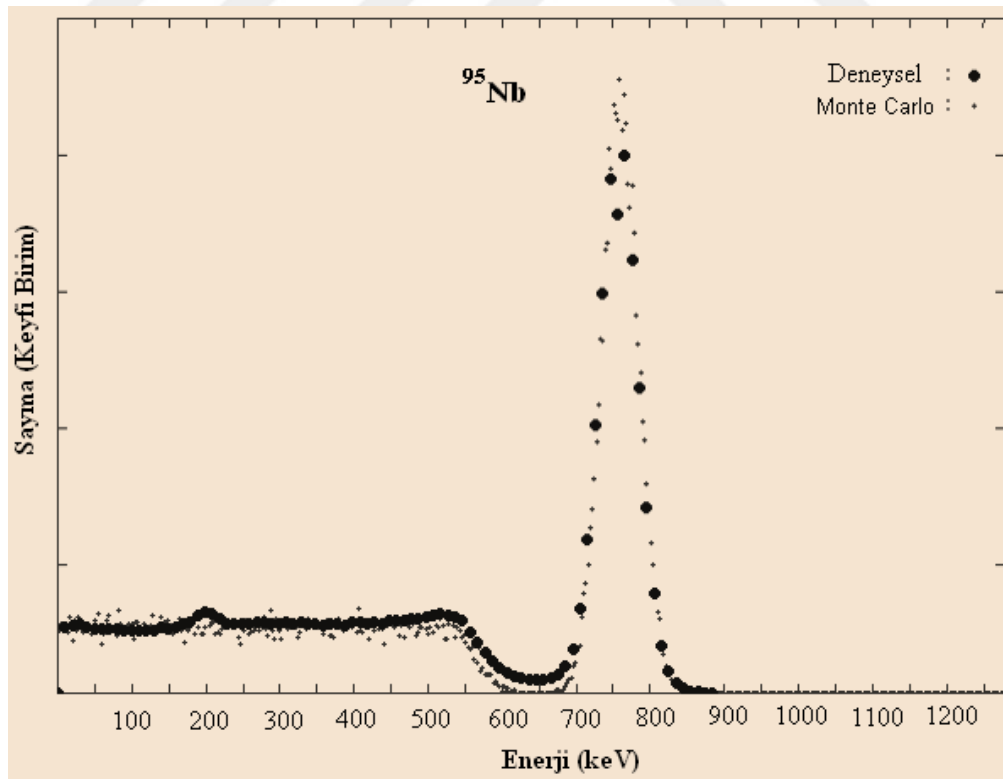
Şekil 3.11. 3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen,  $^{47}\text{Sc}$  ( $E=153\text{ keV}$ ) için, gamma ışını cevap fonksiyonu (Almaz, 2007)



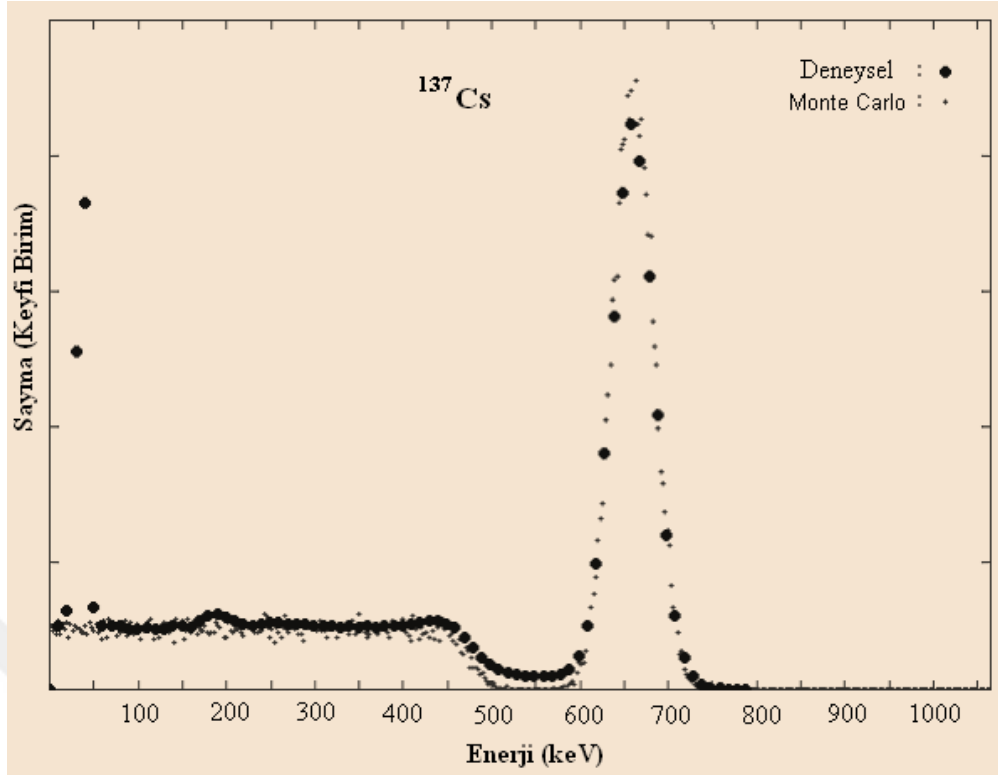
Şekil 3.12. 3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen,  $^{51}\text{Cr}$  ( $E=323\text{ keV}$ ) için, gamma ışını cevap fonksiyonu (Almaz, 2007)



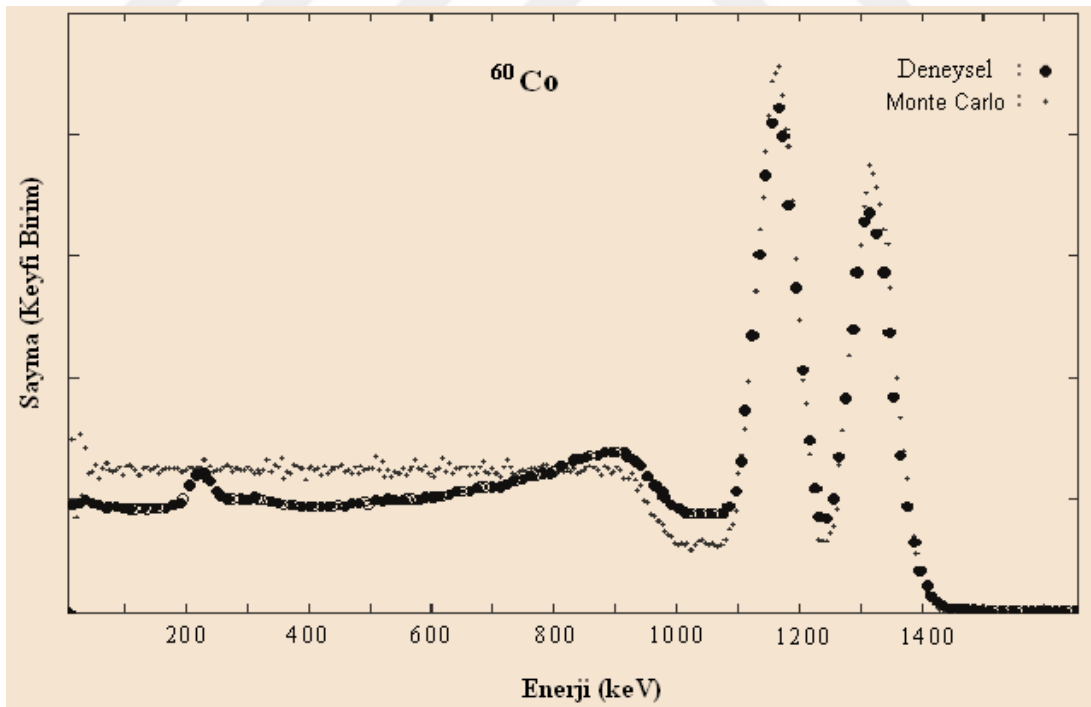
Şekil 3.13. 3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen,  $^{85}\text{Sr}$  ( $E=515\text{ keV}$ ) için, gamma ışını cevap fonksiyonu (Almaz, 2007)



Şekil 3.14. 3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen,  $^{95}\text{Nb}$  ( $E=766\text{ keV}$ ) için, gamma ışını cevap fonksiyonu (Almaz, 2007)



Şekil 3.15. 3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen,  $^{137}\text{Cs}$  ( $E=662\text{ keV}$ ) için, gamma ışını cevap fonksiyonu (Almaz, 2007)



Şekil 3.16. 3x3" NaI(Tl) detektöründen elde edilen,  $^{60}\text{Co}$  ( $E_1=1173$ ,  $E_2=1332\text{ keV}$ ) için, gamma ışını cevap fonksiyonu (Almaz, 2007)

### 3.2.4. Cevap matrisinin elde edilmesi

Nokta kaynaktan  $E_j$  enerjisi ile yayınlanan  $N_y=10^7$  tane foton dikkate alınmıştır. 2x2" NaI(Tl) detektörü için, Çizelge 3.2'de verilen tüm enerji pik verim fonksiyonu kullanılarak detektörde fotopik altında sayılan foton sayısı ve  $\varepsilon_{PT}$  fonksiyonu kullanılarak da Compton düzlüğünde sayılan foton sayısı tespit edilmiştir. Compton düzlüğündeki fotonlar 0 ile Compton sınırı,  $E_C$  arasındaki enerji bölgesine eşit olarak paylaştırılmıştır. Her bir enerji aralığına düşen foton sayısı, Monte Carlo Yöntemi kullanılarak standart sapması  $\sigma_j$  olan Gaussiyen fonksiyona yukarıda anlatıldığı gibi dağıtılmıştır. Her bir enerji aralığına düşen foton sayısı  $N_y$  değerine bölünerek cevap fonksiyonu 1'e normalize edilmiştir. Böylece cevap matrisi  $R=[R_{ij}]_{m,n}$  oluşturulmuştur. Burada  $R_{ij}$ ,  $E_j$  enerjisi ile detektöre giren  $\gamma$ -ışınının  $i$ -inci kanalda sayılma olasılığıdır.  $n$ . kanalda sayılması gereken  $E_n$  enerjisinin, detektör ayırma gücünden dolayı  $n$ 'den daha büyük kanallarda da sayılabileceği için  $m>n$ 'dir. Denklem sayısı  $m$ , bilinmeyen sayısı  $n$ 'den fazla olduğundan cevap matrisi,  $R=[R_{ij}]_{m,n}$  şeklinde  $n$  boyutlu karesel matris olarak alınabilir. Fakat bizim SVD probleminde cevap matrisinin karesel olması zorunlu değildir. Bu yüzden Matlab programına  $R$  matrisinin dataları  $m \times n$  boyutlu olarak girilmiştir.  $\gamma$ -ışınlarının,  $IB$  fotonlarının gerçek dağılımı  $S$  ve detektörden alınan sayımlar  $M$  sütun matrisi olmak üzere,  $M=RS$  şeklinde bir matris denklemi yazabiliriz. Bu denklemden  $S$  değerleri, bilinen yöntemlerden Singular Value Decomposition (SVD) yöntemi ile elde edilmiştir. Ayrıca Gold iterasyon yöntemi ve KUB teorisi ile de karşılaştırılmıştır (Almaz, 2007).

### 3.3. Spektrum Soyuma Yöntemleri

Spektrumların soyulması işlemi deneysel çalışmalarda çok geniş bir şekilde ele alınmaktadır. Özellikle gamma ışını spektroskopisinde, nötron spektrumlarında, kütle ve beta spektrum çalışmalarında, tesir kesiti ölçümlerinde, yokolma radyasyonunun enerji dağılım probleminde ve mikro-araştırmalarda karşılaşılan bir problemdir (Helene ve ark., 2001). Gamma ışını spektral ölçümlerinde çok fazla ilerleme kaydedilmesine rağmen, basit bir sintilasyon spektrometresi kullanılarak alınan ölçümlerin doğruluğunu gelişmiş veri-işleme yöntemleriyle artırmak mümkün olmaktadır. Özellikle, modern kişisel bilgisayarların kalitesi ve hızı arttıkça gelen gamma ışını spektrumunun,

gözlenen gamma ışını spektrumlarından tahmin edilmesi, gerçek verilere yakın ve güvenilir olmaktadır.

Daha öncede belirttiğimiz gibi soyma işlemlerinin temel amacı istatistiksel dalgalanmalar ile etkilenmiş ve detektör sisteminin cevap fonksiyonu ile iç içe girmiş yani bulanık hale gelmiş asıl (intrinsic) spektrumu elde etmektir. Soyma işleminde pek çok problem, orijinal verilerde meydana gelen küçük istatistiksel dalgalanmaların aşırı şekilde, soyulmuş spektruma yansımaları sonucu ortaya çıkar. Bu yüzden elde edilen spektrumlarda çok aşırı dalgalanmalar, aynı zamanda fiziksel anlam taşımayan sonuçlar elde edilir. Literatürde pek çok soyma tekniği sunulmuştur. İnverse matris metodu (Starfelt ve Koch 1956, Fisher ve Engle 1964) çok sık kullanılan fakat cevap matrisinin çok sağlıklı kurulması ile uygulanabilen bir metottur. Stripping Metodu (Radford ve ark., 1987, Trautmann ve ark. 1982, Love ve Nelson 1989, Waddington 1989) Germanyum detektörlerde daha sık kullanılan bir metottur ve yüksek enerjili kanallardan düşük enerjiye doğru Compton arka alanının ardı ardına çıkarılması ile uygulanır. Giydirme iterasyonu Metodu (Scofield 1960, Mollenauer 1961-1962, O'Connell 1973, Sam ve ark. 1968) üst üste cevap fonksiyonu giydirilerek en uygun giydirme bulunarak sonuca gidilen bir uygulamadır.

Son zamanlarda ortaya çıkan Neural Network metodu (Kooghi-Fayegh ve ark. 1993), Ayrıca bizim bu çalışmada kullandığımız Singular value decomposition(SVD) soyma tekniği (Höcker ve Kartvelishvili 1996, Press ve ark. 1992) temel bilimler, mühendislik ve uygulamalı matematik gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. Sık kullanılmakla birlikte çok fazla iterasyona gerek duyulan Lineer Regülerizasyon (LR) tekniği (Phillips 1962), medikal görüntüleme uygulamalarında düşük sinyal-gürültü oranlı verilerde, özellikle tomografide görüntülerin yeniden elde edilmesin kullanılan ML-EM; Maksimum olabilirlik metodu (Shepp ve Vardi 1982) ve astrofizikte çok sık kullanılan Maksimum entropi metodu (MEM) (Bouchet 1995, Jaynes 1957) spektrum soyma işlemlerinde kullanılan diğer yöntemlerdir. Singular Value Decomposition (SVD) yöntemini Matlab<sup>R</sup> programı içinde SVD alt yordamını kullanarak yaptığımız program ile *IB* fotonlarının dedektör cevap fonksiyonu etkilerinden soyup gerçek spektrumunu elde etmeye çalıştık.



### 3.4. Singular Value Decomposition (SVD) Yöntemi

A gerçek ve  $m \times n$  boyutlu bir matris olmak üzere Singular Value Decomposition (SVD), Türkçe karşılığı olarak tekil değer ayrışımı, bu matris formunun çarpanlara;

$$A = U\Sigma V^T \quad (3.12)$$

şeklinde ayrılmasıdır. Burada  $U$ ,  $m \times m$  boyutlu ortogonal matris ( $UU^T = U^TU = I$ ),  $V$  ise  $n \times n$  boyutlu ortogonal matrisi ( $VV^T = V^TV = I$ ) ve  $\Sigma$  ise  $m \times n$  boyutlu negatif olmayan diyagonal matrisi temsil etmektedir.  $\Sigma_{ij}$  elemanları,

$$i \neq j \text{ için } \Sigma_{ij} = 0 \text{ ve } \Sigma_{ii} \equiv \sigma_i \geq 0 \quad (3.13)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada  $\sigma_i$  sayıları  $A$  matrisinin singular (tekil) değerleri olarak adlandırılmaktadır. Tekil değerler matrisin özellikleri hakkında çok değerli bilgiler içermektedir. Örneğin,  $A$ 'nın kendisi ortogonal ise, tüm  $\sigma_i$  tekil değerleri 1'e eşit olur, eğer  $A$  dejenere olmuşsa, en az bir  $\sigma_i$  tekil değeri sıfıra eşit olmuş olur.

Aslında, bir matrisin rankı, sıfır olmayan tekil değerlerin sayısıdır. Doğrusal bir sistemin matrisi ve/veya eşitliğinin sağ tarafı belli bir belirsizlik seviyesi ile biliniyorsa ve matrisin bazı tekil değerlerinin diğerlerinden önemli ölçüde daha küçük olması durumunda, matris tam olarak sıralansa bile sistemin çözülmesi zor olabilir. Birçok yönden bu tip matrisler dejenere olanlar gibi davranır ve SVD küçük ve tamamen sıfır tekil değerler için ortak olan bu tür problemleri çözmek için bir yöntem önerir.  $\sigma_i$  tekil değerlerin artan olmayan bir sıklık sırası oluşturduğunu varsayacağız.

Bir  $A$  matrisinin ayrışımı  $m \times n$  boyutlu diyagonal  $\Sigma$  matrisini içerir ve

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow m-r \text{ satır} \\ \uparrow n-r \text{ sütun} \end{matrix} \quad (3.14)$$

şeklinde bir matris formunda yazılabilir. Buradaki  $D$ ,  $m$  ve  $n$ 'nin küçük olanlarını geçmeyen  $r$ 'ler için diyagonal  $r \times r$  boyutlu bir matristir (eğer  $r$ ,  $m$  veya  $n$  veya her ikisine de eşitse, sıfır matrislerin bir kısmı veya tamamı görünmez) (Lay, 2011).

### 3.4.1. Teorem: Singular value decomposition

$A$ ,  $m \times n$  boyutlu rankı  $r$  olan bir matris olsun. Böylece,  $D$ 'deki diyagonal elemanların  $A$ 'nın  $r$  boyutlu  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > 0$ , ilk tekil değerleri olduğu Denk. (3.14)'teki gibi bir  $\Sigma$   $m \times n$  matrisi vardır ve aynı zamanda bir  $m \times m$  boyutlu ortogonal  $U$  matrisi ve bir  $n \times n$  boyutlu ortogonal  $V$  matrisi vardır. Buna binaen  $A$  matrisi Denk. (3.12)'de verildiği gibi  $A = U\Sigma V^T$  matrisinin,  $U$  ve  $V$  ortogonal, denklemdeki  $\sigma$  ve  $D$ 'deki pozitif diyagonal elemanlarla herhangi bir çarpımına,  $A$ 'nın tekil değer ayrışması (veya SVD) denir.  $U$  ve  $V$  matrisleri  $A$  tarafından benzersiz şekilde belirlenmemiştir, ancak  $\Sigma$ 'nın köşegen girişleri mutlaka  $A$ 'nın tekil değerleridir. Böyle bir ayrıştırmadaki  $U$  sütunları  $A$ 'nın sol tekil vektörleri ve  $V$  sütunları  $A$ 'nın sağ tekil vektörleri olarak adlandırılır.

İspat:  $\lambda$  ve  $v_i$ , ortogonal olsun, böylece  $\{Av_1, \dots, Av_r\}$ ,  $A$  sütunları için ortogonal bir baz oluşturur. Ortonormal bir  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  baz elde etmek için, her bir  $Av_i$ 'yi normalize edersek;

$$u_i = \frac{1}{\|Av_i\|} Av_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i \quad (3.15)$$

ve

$$Av_i = \sigma_i u_i \quad (1 \leq i \leq r) \quad (3.16)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  elemanlarını ortonormal temele yerleştirdiğimizde  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \mathbb{R}^m$  halini alır ve

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r] \text{ ve } V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_r] \quad (3.17)$$

biçiminde olursa,  $U$  ve  $V$  matrisleri ortogonal olarak oluşturulur. (3.16) eşitliğinden,

$$AV = [Av_1 \ \dots \ Av_r \ 0 \ \dots \ 0] = [\sigma_1 u_1 \ \dots \ \sigma_r u_r \ 0 \ \dots \ 0] \quad (3.18)$$

sonucu elde edilir.  $D$ , diyagonal değer girişli  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ , diyagonal bir matris olsun ve  $\Sigma$  yukarıdaki (3.14) denklemdeki gibi olsun. Böylece;

$$\begin{aligned}
 U\Sigma &= [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m] \left[ \begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_m \\ \hline & & & 0 \end{array} \right] \\
 &= [\sigma_1 u_1 \ \dots \ \sigma_r u_r \ 0 \ \dots \ 0] \\
 &= AV
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

ifadeleri elde edilir.  $V$  ortogonal matris olduğundan  $U\Sigma V^T = AVV^T = A$  eşitliği yazılabilir.

Aşağıda tekil değer ayrışımı örneklendirmektedir. Burada verimli ve kararlı bir sayısal algoritma elde edebilmek için farklı bir yaklaşım kullanılır.

**Örnek:** Bir tekil değer ayrışımı oluşturmak için aşağıdaki matrisi kullanalım.

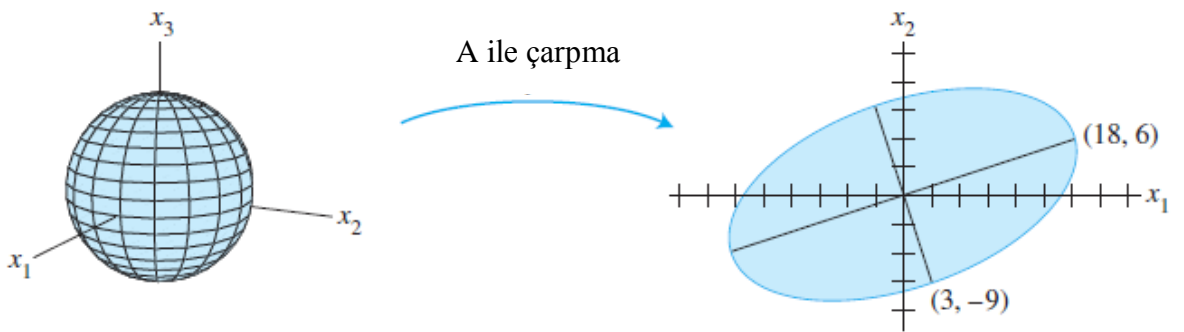
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

### Çözüm:

Bu örneğin çözümü üç adıma ayrılabilir.

**1. Adım:  $A^T A$ 'nın ortogonal köşegenleştirmesini bulalım.** Yani,  $A^T A$ 'nın özdeğerlerini ve buna karşılık gelen bir ortonormal özvektör kümesini bulalım. Eğer  $A$ 'nın sadece iki sütunu olsaydı, hesaplamalar elle yapılabilirdi. Büyük matrislerin çözümü genellikle bir matris programı gerektirir. Ancak,  $A$  matrisi için,  $A^T A$ 'nın öz verileri, örnekte verilmiştir.

**2. Adım:  $\Sigma$  ve  $V$ 'yi tanımlayalım.**



**Şekil 3.17.**  $A$ 'nın küresel ( $\mathbb{R}^3$ ) boyuttan karesel boyuta ( $\mathbb{R}^2$ ) dönüşümü (Lay, 2011)

$A^T A$ 'nın öz değerlerini azalan düzende sıralayalım. Bu örnekteki  $A$  matrisi için;

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 7 \\ 14 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{bmatrix}$$

$A^T A$ 'nın özdeğerleri  $\lambda_1=360$ ,  $\lambda_2=90$  ve  $\lambda_3=0$ . Bunlara karşılık gelen birim özvektörler ise sırasıyla;

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

şeklinde.  $x$ ,  $v_1$ 'in birim vektörü olduğunda,  $\|Ax\|^2$  değerinin maksimum değeri 360 olarak elde edilir.  $Av_1$  vektörü, elipsin başlangıç noktasından en uzakta bulunan noktadır.

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\|Ax\|$ 'in  $\|x\| = 1$  için maksimum değeri  $\|Av_1\| = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$  şeklindedir.

Yaptığımız bu işlemler,  $A$ 'nın  $\mathbb{R}^3$ 'deki birim küre üzerindeki etkisinin, ikinci dereceden  $x^T(A^T A)x$  formuyla ilişkili olduğunu göstermektedir. Görüldüğü üzere aslında,  $x \mapsto Ax$  dönüşümünün tüm geometrik davranışı bu ikinci dereceden dönüşüm biçimiyle anlaşılabilir.

Yukarıda görüldüğü üzere özdeğerler; 360, 90, 0 şeklinde azalan biçimde sıralanabilir. Söz konusu  $v_1$ ,  $v_2$ , ve  $v_3$  birim özvektörleri  $A$ 'nın sağ tekil vektörleridir.  $v_1$ ,  $v_2$ , ve  $v_3$  kullanılarak;

$$V = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

biçiminde  $V$  matrisi oluşturulabilir.

Özdeğerlerin karekökleri tekil değerlerdir:

$$\sigma_1 = 6\sqrt{10}, \quad \sigma_2 = 3\sqrt{10}, \quad \sigma_3 = 0$$

Sıfır olmayan tekil değerler  $D$ 'nin diyagonal elemanlarıdır.  $\Sigma$ ,  $A$  matrisi ile aynı boyuttadır.  $D$  elemanları  $\sigma$ 'nın sol üst köşesinde bulunur ve diğer yerlerdeki elemanları tamamen sıfır değerlidir.

$$D = \begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = [D \ 0] = \begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

**3. Adım:  $U$ ' nun Düzenlenmesi.**  $A$ 'nın rankı  $r$  olduğunda,  $U$ ' nun ilk  $r$  sütunları  $A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_r$ 'den elde edilen normalize edilmiş vektörlerdir. Bu örnekte,  $A$ , sıfır olmayan iki tekil değere sahiptir, bu nedenle  $\text{rank } A = 2$  olur.  $\|A\mathbf{v}_1\| = \sigma_1$  ve  $\|A\mathbf{v}_2\| = \sigma_2$  olduğundan, böylece;

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{6\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 'nin zaten  $\mathbb{R}^2$  için bir temel olduğunu unutmayalım. Dolayısıyla  $U$  ve  $U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2]$  için ekstra vektörlere gerek yoktur.  $A$ 'nın tekil değer ayrışımı;

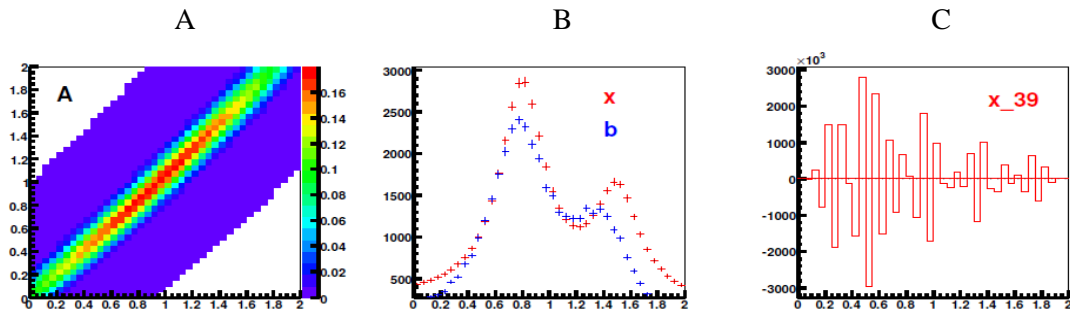
$$A = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ U & \Sigma & V^T \end{array}$$

şeklinde elde edilecektir.

Ayrıca  $m \geq n$  durumunu ele alacağız ki bu durum, ölçülen histogram b'deki kutu sayısının, soyulmuş (unfolded) yani istenen histogram  $X'$  deki kutu sayısından daha küçük olmaması gerektiği anlamına gelir. Gerekli görülürse, başlangıç matrisine yalnızca sıfır satır eklenebilir.  $U$  matrisine ait satırların yerini değiştirerek (ve benzer şekilde  $V$  içinde geçerli)  $\sigma_i$  değerlerini, en büyüğünden en küçüğüne doğru sıralayabiliriz. SVD' nin kapsamlı teknik açıklamaları ve birçok teknik detay ve örneği literatürde bulunabilir (Lawson ve Hanson, 1974; Forsythe, Malcolm ve Moler, 1977; Lay, 2011). Gerçekten bu işlemin en çekici özelliklerinden biri, SVD' yi elle hesaplamak zorunda kalınmamasıdır. CERN program kütüphanesinde çok etkili ve saydam bir FORTRAN alt yordamı bulunmaktadır. Daha önceki bazı uygulamalar referanslarda bulunabilir (Forsythe, Malcolm ve Moler, 1977). Ayrıca biz bu tez çalışmasında MATLAB paket programı altında var olan SVD alt yordamını kullandık. Buna göre deneysel olarak elde ettiğimiz değerleri sütun matris formunda, Monte Carlo yöntemi ve dedektör parametrelerini kullanarak oluşturduğumuz detektör cevap matrisini  $m \times n$  boyutunda matris formunda Matlab programına txt –ascii kod olarak giriş yapılarak SVD yöntemi uygulanmıştır. Matris,  $A=U\Sigma V^T$  formuna ayrıştırıldığında, özellikleri kolayca analiz edilebilir ve manipüle edilmesi çok kolay hale gelir. Bu tür bir analiz, neredeyse (veya hatta tam olarak) dejenere matrisleri olan kötü tanımlanmış lineer sistemler için son derece kullanışlıdır, çünkü yalnızca zorluğu tespit etmez, aynı zamanda üstesinden gelmenin yollarını da önerebilir.  $U$  ve  $V$  matrisleri kendi aralarında uygun ortonormal baz tanımlarlar.

SVD ile lineer sistem  $Ax = b$  rotasyona uğramış vektörler  $z$  ve  $d$  tanımlanarak kolayca köşegenleştirilebilir ve aynı zamanda tam çözümü bulmak şaşırtıcı derecede basit görünür:



**Şekil 3.18.** Detektör cevap matrisinin çözümü (Kartvelishvili, 2011): Soldaki şekil A cevap matrisinin görünümünü, ortadaki şekil ölçülen spektrum (b) ve gerçek (x) spektrumu ve sağdaki şekil ise  $x$ 'in  $Ax=b$  eşitliğinin çözümünden rastgele istatistiksel dalgalanmaları içeren sonuçları ( $x_{39}$ ) göstermektedir.

Şimdi bazı tanımlamalar yapalım;

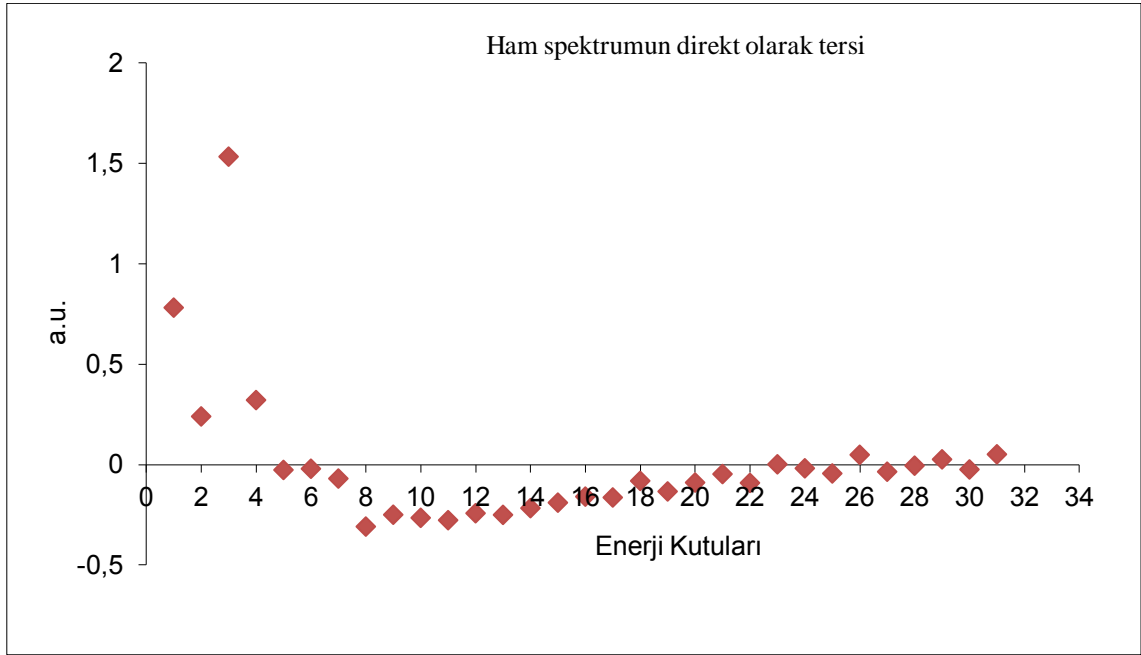
$$U\Sigma V^T x = b \Rightarrow z = V^T x \quad (3.20)$$

$$d = U^T b \quad (3.21)$$

$$\sigma_i z_i = d_i \Rightarrow z_i = \frac{d_i}{\sigma_i} \Rightarrow x = Vz \quad (3.22)$$

Burada görüldüğü gibi  $z_i$  'ler kolayca bulunabiliyor. Ancak,  $z_i$ 'nin bu şekilde kolaylıkla belirlenebilmesinde bizi yanlış sonuca götürebilecek en az iki neden vardır: ilk olarak,  $b$  ölçülen değerlerdeki hatalardan (errors) dolayı, bazı  $d_i$ 'ler çok az biliniyor olabilir veya hiç önemli olmayabilir. İkincisi, bazı  $\sigma_i$  tekil değerler küçük olabilir (hatta sıfır olabilir), bu nedenle az bilinen katsayıların katkılarını aşırı şekilde gösteriyor olabilir. Bu durum Şekil 3.18' de (Hoecker ve Kartvelishvili, 1996; Blobel, 1984) ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. Denk. (3.20) eşitliğinin sağ tarafındaki  $b$  rastgele dalgalanmalar içeriyorsa (Şekil-3.18-B),  $x$ 'in kesin çözümünün tam olarak işe yaramayacağı açıktır, çünkü ölçülen değer  $b$ 'deki bu dalgalanmalar küçük tekil değerler tarafından büyük ölçüde büyütülür. Bu nedenle, ortogonal matrisler  $U$  ve  $V$  tamamen zararsız olduklarından, yani sonucu etkilemediklerinden, SVD probleminin  $\sigma_i$  ve/veya  $d_i$  değerlerine daralmasına izin verir. Bu çalışmada elde ettiğimiz cevap matrisinin direkt olarak tersine çözümü yani  $S=R^{-1}M$  şeklindeki tersine çözümü Şekil 3.18-C' deki gibi  $S$  çözüm vektöründe istenmeyen negatif çözümler getirmiştir. Şekil 3.19'da bu durum açıkça görülmektedir. Bu durumun sebebinin cevap matrisindeki küçük istatistik sapmaların yüksek enerji bölgesinde sonuca çok büyük yansımından kaynaklandığı düşünülmektedir. Literatürde öngörüldüğü gibi (Cowan, 1998), belli bir enerjiden sonra negatif değerler elde edilmiştir. Detektör cevap matrisi yüksek boyutlu olduğundan ve  $IB$  foton enerjisi belli enerji aralıklarına (kanallara) bölündüğünden komşu kanallar arasında olan istatistik dalgalanmalar nedeniyle tersine çözümden fiziksel anlamı olmayan negatif sonuçlar bulunmaktadır. Kurduğunuz cevap matrisi ne kadar iyi olursa olsun kanallar arasındaki çok küçük bir dalgalanma bile sonuçta elde ettiğiniz soyulmuş spektruma büyük bir şekilde yansımaktadır.

SVD yöntemi ile daha önce uygulanan yöntemlere göre (Almaz, 2007) yaptığımız bu çalışmada kullandığımız  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  izotopu için  $IB$  kaynak spektrumunu elde etmede daha uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

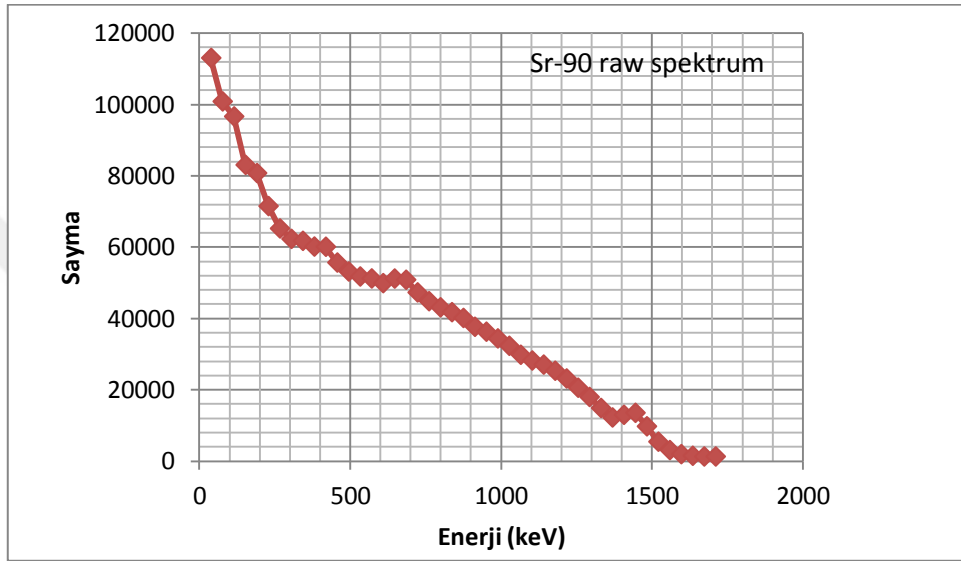


Şekil 3.19. Cevap matrisinin direkt olarak tersi alınarak elde edilen negatif değerlerin olduğu sonuç spektrum (Almaz, 2007)

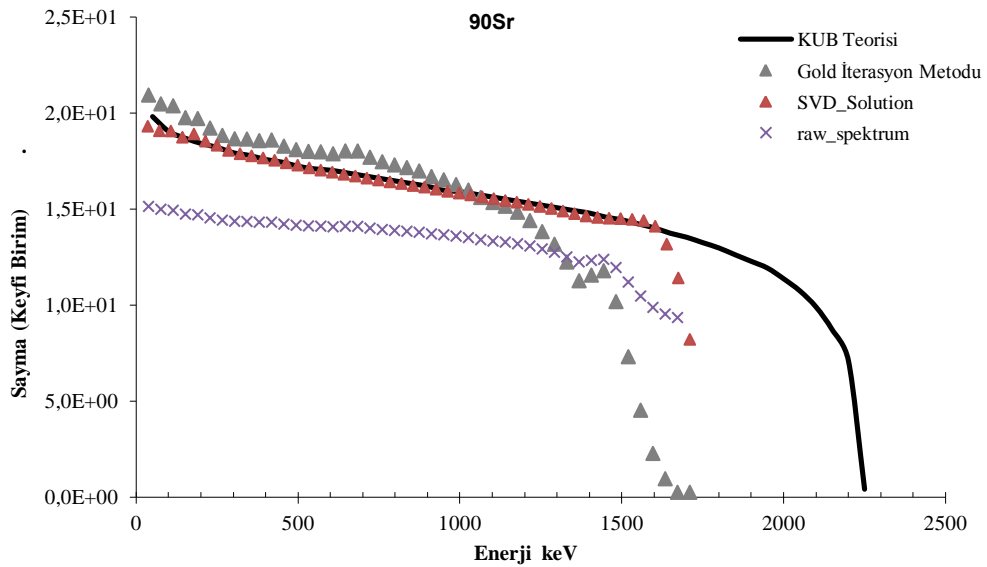


#### 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

$^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  nokta kaynağından çıkan beta parçacıkları kaynağın plastik kılıfının betaları durdurma özelliği ve kullanılan saptırıcı mıknatıslar ile betaların manyetik alanda saptırılarak detektöre yönelmesi engellendiğinden betaların yapacağı external bremsstrahlung etkileşmelerinin deneysel spektruma katkısı ihmal edilmiştir. Şekil 4.1'de daha önce verdiğimiz tabii fon düzeltmesi yapılmış ham spektrum görülmektedir.



Şekil 4.1.  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  için 2x2" NaI(Tl) detektöründen arka fon düzeltmesi yapılarak elde edilmiş deneysel spektrum (Almaz, 2007)



Şekil 4.2. Deneysel spektruma SVD soyma işlemi uygulanarak elde edilmiş spektrumun KUB teorisi ve Gold iterasyon metodu (Almaz ve ark., 2007) sonuçları ile karşılaştırılması

Şekil 4.2'de  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  kaynağından  $\beta^-$  ve nötrino ile birlikte yayınlanan, sürekli enerji spektrumuna sahip  $IB$  fotonları için SVD yöntemi ile elde edilen soyulmuş spektrum verilmiştir. Elde edilen bu spektrum KUB teorisi (Cengiz ve Almaz 2004) ve Gold iterasyon metodu (Almaz 2007a, Almaz 2007b) ile karşılaştırılmıştır.

$IB$  fotonları, beta parçalanması sonrası ortaya çıkan enerjinin tümünü alma olasılığı olmasına rağmen bu olasılık çok düşük olduğundan  $IB$  spektrumunu son nokta enerjiye kadar gözlemlemek teorik olarak mümkün olsa bile deneysel olarak zordur. Bu yüzden deneysel veriler  $1710\text{ keV}$ 'de kesilirken, teorik veri olan KUB değerleri betanın son nokta enerjisi olan  $2246\text{ keV}$ 'e kadar uzatılmıştır.

Literatürde, özellikle yasak enerjili beta yayıncılarından elde edilen  $IB$  spektrumlarında teori ile deney arasında büyük farklılıklar gözlenmiştir. Bu özelliğe sahip bazı ilginç beta bozunumları sırayla,  $^{195}\text{W}$  (Babu ve ark. 1976, Narayana ve ark. 1976),  $^{169}\text{Er}$  (Babu ve ark. 1976),  $^{90}\text{Y}$  (Narayana ve ark. 1977),  $^{91}\text{Y}$  (Narayana ve ark. 1977),  $^{143}\text{Pr}$  (Venkataramaiah ve Sanjeevaiah 1977),  $^{36}\text{Cl}$  (Babu ve ark. 1976),  $^{137}\text{Cs}$  (Venkataramaiah ve Sanjeevaiah 1977) ve  $^{141}\text{Ce}$  (Gundu Rao ve Sanjeeviah 1982) şeklinde verilmiştir.  $IB$  çalışmalarında spektrum soyma işlemi genellikle Liden ve Starfelt (1953, 1955) in spektral düzeltme tekniği ile yapılıyordu. Bu çalışmada  $IB$  spektrumunun elde edilmesinde ilk defa uygulanan (Almaz, 2015) SVD yöntemi ile soyma tekniği kullanılmıştır. Yöntemin avantajı gelişen teknoloji ile beraber yüksek bilgisayar hızı ve hafızası gerektiren bizim ilgilendiğimiz soyma problemlerinde olduğu gibi, rahatlıkla çok boyutlu matrislere uygulayabilme kolaylığıdır.

Deneysel olarak elde edilen soyulmuş spektrumdaki yukarı doğru eğilim yapılan birçok deneylerde gözlenmiştir. Bunun en önemli sebebinin literatür incelendiğinde istatistiksel dalgalanmalar olduğu, bu konuda yapılan çalışmalar göstermiştir. Ayrıca KUB teorisinde eksik olan Coulomb perdeleme etkisi ve detour katkıları  $IB$  spektrumunun nihai dağılımını etkilemektedir. Bundan dolayı deneysel ve teorik sonuçlar arasında özellikle yüksek enerji bölgesinde genellikle bir uyumsuzluk görülmektedir. Buna rağmen Şekil 4.2 incelendiğinde, SVD deney sonuçlarının, KUB teorisi ile  $50\text{ keV}$  ve  $1700\text{ keV}$  aralığında çok güzel bir uyum gösterdiği görülmektedir. Bu sonucun Almaz' (2007a) 'ın, aynı radyoizotop ile Gold iterasyon yöntemini kullanarak yaptığı çalışmadan daha iyi olarak teorik verilerle uyduğu rahatlıkla görülmektedir. Buradan şu sonucu çıkarmak mümkün: Gold iterasyon yöntemi istatistiksel dalgalanmalardan SVD yöntemine göre çok daha fazla etkilenmekte, bu da

soyulmuş spektrumda şekil 4.2’de görüldüğü gibi teorik değerlerden sapmalara karşılık gelmektedir. SVD yönteminde ise istatistik sapmalar çok daha az gözlenmiş, bu da yöntemin her enerji değerinde daha kararlı olması anlamına gelmektedir. Ayrıca cevap matrisinin detektör parametrelerinin çok iyi tespit edildiğinin ve Monte Carlo yöntemi ile elde edilen gammanın her enerji değeri için oluşturulan detektör cevap fonksiyonunun çok iyi bir benzetişimle uygulandığı sonucunu doğrulamaktadır.



## KAYNAKLAR

- Akkoyun, S., 2006, Uzayda gama ışını ölçümleri-bir geant simülasyonu. *Ankara Üniversitesi*, Ankara, 12-19.
- Almaz, E., 2007,  $\beta$  parçacıklarının internal bremsstrahlung spektrumlarının analizi, *Uludağ Üniversitesi*, Bursa, 1-60.
- Almaz, E. ve ark., 2005, Belli kalınlığı geçen gamma ışınlarının enerji dağılımlarının deneysel olarak elde edilmesi, *IX. Ulusal Nükleer Bilimler ve Teknolojileri Kongresi*, İzmir, 182-186.
- Almaz, E. ve Cengiz, A., 2002, 3"X3" NaI(Tl) Detektörü gamma ışını cevap fonksiyonu için bir yaklaşım, *TFD 21. Fizik Kongresi*, Isparta, 93-96.
- Almaz, E. ve Cengiz, A., 2007, Deconvolution of continuous internal bremsstrahlung spectra of  $^{32}\text{P}$ ,  $^{85}\text{Kr}$  and  $^{143}\text{Pr}$ , *X-Ray Spectrometry*, Bursa, 36, 419-423.
- Almaz, E., Cengiz, A., ve Tartar, A., 2007, Unfolding continuous internal photon spectrum emitted from  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  in equilibrium, *International Journal of Modern Physics E*, Bursa, 16 (6), 1733-1740.
- Blobel, V., 1984, Unfolding methods in high-energy physics experiments, *DESY*, Hamburg, 88-127.
- BLOBEL, V., 1996, The RUN manual: regularized unfolding for high-energy physics experiments, *OPAL Technical Note TN361*, Hamburg, 1-22.
- BOUCHET, L., 1995, A comparative study of deconvolution methods for gamma-ray spectra, *Astronomy & Astrophysics Supplement Series*, 113, 167-183.
- Cengiz, A. ve ALMAZ, E., 2004, Internal bremsstrahlung spectra of po particle emitters using the Monte Carlo method, *Radiation Physics and Chemistry*, Bursa, 70, 661-668
- Cowan, G., 1998, Statistical Data Analysis, *Oxford University*, Oxford, 153-184.
- Forsythe, G.E., Malcolm, M.A., ve Moler, C.B., 1977, Computer methods for mathematical computations, *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs-New Jersey, XI, 259.
- Gruppen, C., 1996, Particle detectors, *Cambridge University*, USA, 1, 30-33.
- Helene, O. ve ark. 2001. Variances and covariance's in deconvolution of multichannel spectra: 34s ( $\gamma = xn$ ) cross section, *Brazilian Journal of Physics*, Brezilya, 31, 8-14.
- Hocker, A. ve Kartvelishvili, V., 1996, SVD approach to data unfolding, *Nuclear Instruments and Methods A*, 372, 469-481.
- Hubbel, J. H., 1969, Photon cross sections, attenuation coefficients and energy absorption coefficients from 10 keV to 100 GeV, National Standard Reference Data Series (NSRDS)-NBS(U-S), 29-34
- Kartvelishvili, V., 2011, Unfolding with singular value decomposition, *Lancaster University*, United Kingdom, 264-270.
- KNOLL, GF., 2000, Radiation detection and measurement, *John Wiley & Sons*, 1-59, 288-289, 672-678.
- Koohi-Fayegh, R. ve ark., 1993, Neural network unfolding of photon and neutron spectra using an NE-213 scintillation detector, *Nuclear Instruments and Methods A*, 329, 269-276.
- Lawson, C.E. ve Hanson, R.J., 1974, Solving least square problems, *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs-New Jersey, XII, 337.
- Lay, D.C., 2011, Linear algebra and its applications, *University of Maryland*, Maryland, 409-419

- Leo, R.W., 1987, Techniques for nuclear and particle physics experiments, *Springer-Verlag*, Berlin, 107-108.
- Love, D.J.G. ve Nelson, A.H., 1989, Unfolding the response function of high-quality germanium detectors, *Nuclear Instruments and Methods A*, 274, 541-546.
- Matzke, M., 2002 Propagation of uncertainties in unfolding procedures, *Nuclear Instruments and Methods A*, 476, 230-241.
- Meng, L.J. ve Ramsden, D., 2000, An inter-comparison of three spectral deconvolution algorithms for gamma-ray spectroscopy, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 47, 1329-1336.
- Mollenauer, J.F., Gamma-Ray emission from compound nucleus reactions of helium and carbon ions, 1962, *Physical Review*, ABD, 127, 867-879.
- O'Connell, W.J., 1973, *Lawrence Livermore Laboratory Report, UCID*, ABD, 30079, 73-85.
- Phillips, D.L., 1962, A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, *Journal of Associate Computing*, New York 9, 84-97.
- Press, W.H., ve ark. 1992, Numerical Recipes in C, *Cambridge University*, New York. 59-70
- Radford, D.C. ve ark., 1987, A prescription for the removal of Compton-scattered gamma rays from gamma-ray spectra, *Nuclear Instruments and Methods A*, 258, 111-118
- Sam, D. ve ark., 1968, Gamma-ray pulse-height spectra: Formation of a response matrix for iterative unfolding, *Nuclear Instruments and Methods*, 64, 148-156.
- Scofield, N.E., 1960, A Technique for unfolding  $\gamma$ -ray scintillation spectrometer pulse-height distributions, *U.S. Radiological Laboratory Report, USNRDL-TR*, 447, 169-170
- Shepp, L.A. ve Vardi, Y., 1982, Maximum likelihood reconstruction for emission tomography, *IEEE*, 1 (2), 113-122
- Firestone R.B. ve Shirley, V.S., 1996. Table of Isotopes, *John Wiley & Sons*, New York, 1422-1425.
- Trautmann, J.F. ve ark. 1982, Measurement of the linear polarization of continuum gamma rays from  $(^{32}\text{S}, xn)$  reactions to prolate and oblate rare-earth nuclei, *Nuclear Instruments and Methods A*, 378, 141-158.
- Waddington, J.C., 1989, Comment on "unfolding the response function of high-quality germanium detectors" by Love and Nelson, *Nuclear Instruments and Methods A*, 63 (274), p. 608-609
- Weese, J., 1992, A reliable and fast method for the solution of Fredholm integral equations of the first kind based on Tikhonov regularization, *Computer Physics Communications*, 69, 99-111.
- Jaynes, E.T., 1957, How the brain do plausible reasoning?, in maximum-entropy and bayesian methods, Edited by G.J. Erickson and C. R. Smith, *Kluwer Academic*, 106, 620-630.
- URL-1: <http://www.agialpress.com/journals/oajost/2014/101142/floats/F26>, [Erişim Tarihi: 14 Aralık 2017]
- URL-2: [https://en.wikipedia.org/wiki/Photoelectric\\_effect](https://en.wikipedia.org/wiki/Photoelectric_effect), [Erişim Tarihi: 20 Mart 2019]
- URL-3: <http://physicsopenlab.org/2016/02/04/compton-scattering-2>, [Erişim Tarihi: 14 Aralık 2017]
- URL-4: <http://electrons.wikidot.com/pair-production-and-annihilation>, [Erişim Tarihi: 20 Mart 2019]

- URL-5: <http://www.ndtnet.com/m/amptek/gammax.html>, [Erişim Tarihi: 15 Aralık 2017]
- URL-6: <http://www.equipcoservices.com/support/tutorials/introduction-to-radiation-monitors>, [Erişim Tarihi: 16 Aralık 2017]
- URL-7: <http://physicsopenlab.org/2017/10/01/photonuclear-compton-scattering-cross-section-ratio>, [Erişim Tarihi: 16 Aralık 2017]



Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	✓	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	✓	
Denklem yazımları uygun mu?	✓	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirim, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	✓	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	✓	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	✓	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	✓	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	✓	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	✓	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	✓	
*Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	✓	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

Unvanı Adı SOYADI  
**Öğrenci** : Ahmet AKYOL  
**Danışman** : Doç. Dr. Ekrem ALMAZ

İmza

.....  
  
.....  


Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına izin veriyorum/vermiyorum.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI

Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖZÜ

Tarih

20.06.2019

İmza

.....  


## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Ahmet AKYOL  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Muş-01.07.1986  
**Telefon** : 555 748 5033  
**Faks** :  
**e-mail** : samyeli.86@hotmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Muş Lisesi, Merkez, Muş	2003
Üniversite	: Dumlupınar Üniversitesi, Merkez, Kütahya	2009
Yüksek Lisans	: Muş Alparslan Üniversitesi, Merkez, Muş	
Doktora	:	

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2013-2013	Muş Bulanık SYDV	Sosyal Yardım ve İnceleme Görevlisi
2013-2018	Muş Valiliği	VHKİ
2018-Halen	Muş Devlet Hastanesi	Hemşire