



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**1-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN PERTÜRBE EDİLMİŞ SİSTEMLER  
İÇİN ÜRETİLEN PARÇALAMA (SPLITTING) METODU İLE SAYISAL  
ÇÖZÜMLERİ**

**Gülşen BAYAR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Haziran - 2019**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**1-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN PERTÜRBE EDİLMİŞ SİSTEMLER  
İÇİN ÜRETİLEN PARÇALAMA (SPLITTING) METODU İLE SAYISAL  
ÇÖZÜMLERİ**

**Gülşen BAYAR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**DANIŞMAN**

**Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU**

**Haziran - 2019**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Gülşen BAYAR tarafından hazırlanan "1-Boyutlu Burgers Denkleminin Pertürbe Edilmiş Sistemler İçin Üretilen Parçalama (Splitting) Metodu İle Sayısal Çözümleri" adlı tez çalışması 18/ 06/ 2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik

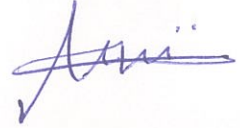
İmza



#### Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik



#### Üye

Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN

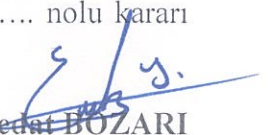
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğiti Fakültesi, MFBE, Matematik Eğitimi



Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu 21.06.2019 Tarih ve ...17.../...X... nolu kararı  
ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI

FBE Müdürü



## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

B. Güls.  
İmza

Gülşen BAYAR

18/06/2019

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

# 1-BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN PERTÜRBE EDİLMİŞ SİSTEMLER İÇİN ÜRETİLEN PARÇALAMA (SPLITTING) METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Gülşen BAYAR

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

2019, 42 sayfa

Jüri

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Bu tezde, 1- boyutlu Burgers denkleminin pertürbe edilmiş sistemler için üretilmiş parçalama (splitting) metodu ile sonlu fark yaklaşımları birleştirilerek elde edilen algoritma ile yaklaşık çözümleri dört bölüm halinde incelenmiştir.

İlk bölüm de 1- boyutlu Burgers denkleminin literatürde var olan çalışmalarının kısa bir derlenmesi verilmiştir.

İkinci bölümde bazı temel kavramlar, klasik sonlu fark yöntemleri ve sabit nokta iterasyonu hakkında bilgi sunulmuştur.

Tezin üçüncü bölümünde Burgers denklemi tanıtıldı ve iki farklı başlangıç ve sınır koşulu için lineerleştirilmiş Burgers denkleminin Fourier seri çözümleri verildi. Pertürbe edilmiş sistemler için üretilmiş parçalama (splitting) metodları tanıtılmıştır. Ek olarak filtreleme tekniğiyle kapalı sonlu fark şemasına dayalı parçalama (splitting) metodunun uygulaması verilmiştir.

Son bölümde ise Burgers denkleminin kapalı sonlu farklar şemasına bağlı pertürbe edilmiş sistemler için üretilen parçalama (splitting) metodu ile elde edilen sayısal sonuçları verilmiştir. Elde edilen çözümler, analitik ve literatürde var olan çözümler ile karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Burgers denklemi, Parçalama(splitting) metotları, Sabit nokta iterasyonu, Sonlu fark yöntemleri.

## ABSTRACT

### MS THESIS

# NUMERICAL SOLUTION OF THE 1-DIMENSIONAL BURGERS EQUATION WITH SPLITTING METHOD DERIVED FOR PERTURBED SYSTEMS

Gülşen BAYAR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ  
ALPARSLAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
MATHEMATICS SCIENCE

Advisor: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

2019, 42 Pages

#### Jury

Advisor : Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Jury Member : Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN

Jury Member : Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

In this thesis, the numerical solutions of the 1-dimensional Burgers equation obtained by splitting method based on implicit finite difference scheme have been analyzed in four chapter.

In the first chapter, a brief review of the literature about 1-dimensional Burgers equation has been given.

In the second chapter, some fundamental concepts, information about classical finite difference methods and fixed point iteration have been presented.

In the third chapter, Burgers equation has been introduced and the Fourier series solutions of the linearized Burgers equation for two different initial and boundary conditions have been given. Splitting methods obtained for perturbed system have been introduced. Additionally, the application of splitting method based on implicit finite difference scheme with filtering technique has been given.

In the fourth chapter, the numerical solutions of Burgers equation with splitting method derived for perturbed system based on implicit finite difference scheme have been obtained. These solutions have been compared with their analytical solutions and some existing results in literature.

**Keywords:** Burgers Equation, Splitting Methods, Fixed Point Iteration, Finite Difference Methods

## ÖNSÖZ

Değişen günlük olaylar, teknolojiyle birlikte bilimsel çalışmalarda yeni bir dönem başlatmaktadır. Bu bilimsel çalışmalarda en çok etkilenen alanlardan biride şüphesiz matematik bilimi olmaktadır. Özellikle matematikte gelişen bilgisayar programları, daha önceden hesaplaması güç ve büyük maliyetlere sebep olan problemlerin, daha az maliyet ile kısa bir zamanda çözülmesi avantajını sağlamaktadır. Bu gelişmeler bilim insanlarının da bu alandaki çalışmalarda daha başarılı sonuçlar veren nümerik hesaplama matematiğini geliştirmelerini sağlamaktadır. Bu hesaplama teknikleri teknoloji geliştikçe gelişme göstermeye devam etmektedir. Bu nedenlerle gün geçtikçe yapılan çalışmalarda artmaktadır. Benim de bu alandaki çalışmam da bana verdiği desteği ve bilgileriyle değerli Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi. Muaz Seydaoğlu'na ve bugüne kadar her türlü desteğini esirgemeyen, bu günlere gelmeme vesile olan değerli abim M. Emin Bayar'a teşekkürlerimi sunarım.

Gülşen BAYAR  
MUŞ-2019

## İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ .....	iii
ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	viii
TABLolar LİSTESİ .....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	x
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....</b>	<b>3</b>
2.1. Temel Tanım ve Kavramlar .....	3
2.1.1. Fourier seri ( Von Neumann ) yöntemi .....	3
2.1.2. Sabit nokta iterasyonu .....	5
2.1.3. Yakınsama mertebesi.....	8
2.2. SONLU FARK YÖNTEMİ.....	9
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM.....</b>	<b>13</b>
3.1. Burgers Denklemi .....	13
3.1.1. Hopf-Cole dönüşümü .....	14
3.2. BCH Formülü .....	16
3.3. Pertürbe Edilmiş Sistemler İçin Parçalama (Splitting) Metotları .....	17
3.4. Burgers Denklemi İçin Parçalama (Splitting) Yöntemi.....	19
3.5. Parçalanmış Burgers Denklemine Sonlu Farklar Yönteminin Uygulanması .....	20
3.5.1. Kapalı sonlu fark yöntemi .....	20
3.5.2. Filtreleme tekniği .....	21
3.5.3. Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi .....	22
3.5.4. Kararlılık analizi.....	24
<b>4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....</b>	<b>29</b>
4.1. Nümerik Sonuçlar .....	29
<b>5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....</b>	<b>38</b>
<b>KAYNAKÇA.....</b>	<b>39</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>43</b>



## ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 2. 1.** Ortalama değer teoreminin gösterimi (Çağal, 1989).....6
- Şekil 2. 2.** Düğüm noktalarının gösterimi [Smith, 1985].....9
- Şekil 4.1.**  $v = 0.1, \Delta t = 0.0001, \Delta x = 0.0125$  değerleri için problem 4.1 'in KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi.....35
- Şekil 4.2.**  $v = 0.01, \Delta t = 0.0001, \Delta x = 0.0042$  değerleri ile problem 4.1'in KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi.....35
- Şekil 4.3.**  $v = 0.01, \Delta t = 0.01, \Delta x = 0.0031$  değerleri ile problem 4.1'in KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi.....36
- Şekil 4.4.**  $v = 0.1, \Delta t = 0.0001, \Delta x = 0.0125$  değerleri ile problem 4.1'in KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi.....36
- Şekil 4.5.**  $v = 0.01, \Delta t = 0.0001, \Delta x = 0.0063$  değerleri ile problem 4.1'in KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi.....37
- Şekil 4.6.**  $v = 1, \Delta t = 0.0001, \Delta x = 0.0125$  değerleri ile problem 4.2'nin KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi.....37

## TABLULAR LİSTESİ

<b>Tablo 4.1.</b> Mertebesi (10,2) olan parçalama (splitting) metodun ABA kalıbının katsayıları (Mclachlan, 1995).....	29
<b>Tablo 4.2.</b> Problem 4.1 için $\nu=0.01$ , $\Delta t=0.001$ , $t=0.1$ değerleri için KMc(10,2) yöntemi ile yapılan nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması .....	31
<b>Tablo 4.3.</b> Problem 4.2 için $\nu=0.01$ , $\Delta t=0.001$ , $t=0.1$ değerleri için KMc(10,2) yöntemi ile yapılan nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması .....	31
<b>Tablo 4.4.</b> KMc(10,2) için Problem 4.1'in nümerik ve analitik çözümlerinin farklı zamanlarda ve $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t=0.0001$ değerler için karşılaştırılması.....	32
<b>Tablo 4.5.</b> KMc(10,2) için Problem 4.2'nin nümerik ve analitik çözümlerinin farklı zamanlarda ve $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t=0.0001$ değerler için karşılaştırılması.....	32
<b>Tablo4.6.</b> Problem 4.1'in $\nu=0.01$ , $\Delta t=0.001$ , $t=0.1$ , $\Delta x=0.0125$ değerleri için kapalı sonlu fark yöntemine bağlı Lie -Trotter AB ve BA kalıpları ve Strang ABA ve BAB kalıpları ile elde edilen nümerik çözümlerin var olan analitik çözümler ile karşılaştırılması .....	33
<b>Tablo 4.7.</b> Problem 4.2'nin $\nu=0.01$ , $\Delta t=0.001$ , $t=0.1$ , $\Delta x=0.0125$ değerleri için kapalı sonlu fark yöntemine bağlı Lie -Trotter AB ve BA kalıpları ve Strang ABA ve BAB kalıpları ile elde edilen nümerik çözümlerin var olan analitik çözümler ile karşılaştırılması .....	33
<b>Tablo 4.8.</b> Problem 4.1 için nümerik ve analitik çözümleri farklı zamanda ve $\nu=0.01$ , $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t=0.01$ değerleri için karşılaştırılması.....	34
<b>Tablo 4.9.</b> Problem 4.2 için nümerik ve analitik çözümlerinin farklı zamanda ve $\nu=0.01$ , $\Delta x=0.0125$ $\Delta t=0.01$ değerleri için karşılaştırılması.....	34

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

- $K(i\Delta x, j\Delta t)$  : Düğüm noktası  
[.,.] : Komütatör  
 $\Delta t$  :  $t$  zaman yönündeki adım uzunluğu  
 $\Delta x$  :  $x$  konum adım uzunluğu

### Kısaltmalar

- BCH : Baker- Campbell- Hausdorff  
Mc(10,2) : Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin mertebesi  
KMc(10,2) : Kapalı sonlu fark yönteminin mertebesi  
KdV : Korteweg-De Vries  
Re : Reynold sayısı

## 1. GİRİŞ

Diferansiyel denklem, fonksiyon ve bu fonksiyonların türevlerini içeren denklemlerdir. Diferansiyel denklemler fonksiyonların türevlerini içermesi nedeniyle uygulamada cebirsel farklılıklar gösterir. Günlük hayatta özellikle mühendislik ve fizik bilimleri alanında karşılaştığımız birçok olayların çeşitli basitleştirici kabuller altında modellenmesi genellikle diferansiyel denklemler ile gerçekleştirilir. Ayrıca biyoloji, tıp, sosyal bilimler gibi alanlarda da çok sayıda olayın matematiksel denklemler şeklinde ifade edilmesi, yeni çözülmesi gereken diferansiyel denklemleri ortaya çıkarır (Pala, 2006). Örneğin ısı akışı, dalga hareketi, katıların titreşimi, moleküllerin yapısı, foton ve elektronların ilişkisi, elektromanyetik dalgaların radyasyonu, akışkan akıları ve trafik modellerinde karşılaşılan pek çok fiziksel sistemin ve ekolojideki pek çok olayın matematiksel modellenmesinde kısmi diferansiyel denklemler kullanılır. Bunlar gibi temel olayları kavrayabilme ilgili kısmi diferansiyel denklemleri iyi analiz etmeyi gerektirmektedir. Bu kısmi diferansiyel denklemlerden biride Burgers denklemidir (Zeytinoğlu, 2010). Burgers denklemi ilk olarak Bateman (1915), tarafından incelenmiştir. Daha sonra Burgers tarafından türbülans problemi için matematiksel bir model olarak ele alınmış ve bu denklem Burgers denklemi olarak adlandırılmıştır. Burgers denklemi ısı iletimi, gaz dinamiği, esneklik, şok dalgaları, sayılar teorisi modellenmesi gibi birçok uygulama alanında kullanılmıştır. Burgers denkleminin seri çözümleri farklı başlangıç koşullar için Hopf-Cole dönüşümü yardımı ile elde edilmiştir (Cole, 1951; Hopf, 1950). Burgers denklemi, analitik çözümleri bilindiğinden birçok nümerik metodun test edilmesinde kullanılmıştır. Dolayısıyla Burgers denklemi üzerinde çalışmalar yapan birçok bilim insanı analitik çözümlere yakın sonuçlar veren, sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemleri gibi çeşitli nümerik metotları uygulamışlardır.

Parçalama (splitting) metotları, genellikle ele alınan denklemlerin çeşitli uygulama alanlarında sonlu fark ve sonlu eleman yöntemleri gibi yöntemler ile birlikte kullanılır. Problemlerin daha kolay çözülebilir alt denklemlere ayrılarak daha hassas çözümler elde edilmesi amaçlanmaktadır. Parçalama (splitting) metotlarının daha hassas sonuçlar vermesi ve denklemlere kolay uygulanabilir olmaları geniş bir alanda kullanılmasını sağlamaktadır. Parçalama (splitting) metodu problemin tam çözümlerinin niteliksel özelliklerini korumaktadır (Seydaoğlu, 2010).

Bu çalışmada Burgers denklemi pertürbe edilmiş sistemler için üretilmiş Parçalama (splitting) metodunu sabit nokta iterasyonu ile lineerleştirme yapılarak kapalı sonlu fark yöntem kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Bu algoritmalar örnek problemler için Matlab programlama dilinde kodlanarak Burgers denkleminin yaklaşık çözümleri farklı Reynolds sayıları ( $Re = 1/\nu$ ) ve farklı zaman değerleri için hesaplanmıştır. Bu sonuçlar analitik ve literatürde var olan yaklaşık çözümlerle karşılaştırılmıştır. Elde edilen çözümlerin bu sonuçlarla uyumlu olduğu gösterilmiştir.



## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

### 2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

**Tanım 2.1.**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X$  ve  $f(x)$ ,  $X$  ' te tanımlanan bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{veya} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ifadeleri bir limite sahip ise  $f(x)$ ,  $a$  noktasında türevlenebilirdir. Türevi simgelerken

genellikle  $f'(x)$  veya  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ifadeleri kullanılır.

**Tanım 2.2.**  $f$  fonksiyonu herhangi bir açık aralık üzerinde alınan  $a$  değeri için her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

serisine  $f$  fonksiyonun  $a$  noktasındaki Taylor serisi denir (Balcı, 2009).

**Tanım 2.3.**  $F_{i,j}(u) = 0$ , tam çözümü  $u$  olan bir kısmi diferansiyel denklemin  $(i, j)$ -inci düğüm noktasındaki fark denklemi olsun.  $u$ , fark denkleminin düğüm noktalarındaki kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü  $U$  ile yer değiştirilse,  $F_{i,j}(U)$  değeri  $(i, j)$ -inci düğüm noktasında  $T_{i,j}$  yerel kesme hatası olarak tanımlanır (Smith, 1985).

**Tanım 2.4.**  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  iken lokal kesme hatasının limit değeri sıfır oluyorsa fark denklemi tutarlıdır denir. Yani

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} T_{i,j} = 0$$

olmasıdır (Smith, 1985).

#### 2.1.1. Fourier seri ( Von Neumann ) yöntemi

$N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$   $T$  sonlu olmak üzere  $0 \leq t \leq T = N\Delta t$ ,  $T$  zaman aralığında  $U(x,t)$ 'nin lineer iki zaman seviyeli fark denkleminin kararlılığı ile ilgilendiğimizi varsayalım. Fourier serisi veya Von Neumann metodu ilk olarak (O'Brien ve ark., 1915) detaylı şekilde incelenmiştir. Bu çalışmada  $t = 0$  boyunca düğüm noktalarındaki başlangıç değerleri bir sonlu Fourier serisi cinsinden ifade edilir. Daha sonra "değişkenlere ayırma" metoduyla  $t = 0$  için bu seriye indirgenen bir fonksiyonun büyümesi ele alınır.

Fourier serileri sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinde formüle edilebilir, ancak üstel biçimde kullanılırsa cebirsel olarak kolaylık sağlar. Bu nedenle

$$\sum a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{veya} \quad \sum b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

ifadeleri yerine bu denklemlere eşdeğer olan

$$\sum A_n e^{\frac{i n \pi x}{l}}$$

üstel ifadesi yazılabilir. Burada  $i = \sqrt{-1}$  ve  $l$  fonksiyonun tanımlandığı  $x$  aralığıdır.

$U(p\Delta x, q\Delta t) = U_{p,q}$  şeklinde tanımlanırsa

$$A_n e^{\frac{i n \pi x}{l}} = A_n e^{\frac{i n \pi p \Delta x}{Nl}} = A_n e^{\frac{i \beta_n p \Delta x}{l}}$$

olur. Burada  $\beta_n = n\pi / N\Delta x$  ve  $N\Delta x = l$  olarak tanımlanmıştır.  $t = 0$  boyunca pivot noktalarının başlangıç değerleri  $U(p\Delta x, 0) = U_{p,0}$  ile gösterilsin.

$$U_{p,0} = \sum_{n=0}^N A_n e^{i\beta_n p \Delta x}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, N$$

olur. Denklemleri  $(N+1)$  tane bilinmeyen  $A_0, A_1, \dots, A_N$  sabitlerini tek türlü belirlemek için yeterlidir. Sadece lineer fark denklemleriyle ilgilenildiği için  $e^{i\beta p \Delta x}$  başlangıç değerinin yayılmasının araştırılması gerekmektedir.  $A_n$  katsayısı sabit olduğu için ihmal edilebilir. Bu terimin  $t$  arttıkça yayılımı

$$U_{p,q} = e^{i\beta x} e^{\alpha t} = e^{i\beta p \Delta x} e^{\alpha q \Delta t} = e^{i\beta p \Delta x} \xi^q$$

ifadesinden araştırılır. Burada  $\xi = e^{a\Delta t}$  ve  $a$  genellikle karmaşık bir sabittir.  $\xi$  ifadesi yükseltme faktörü olarak adlandırılır. Eğer  $|U_{p,q}|, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$  iken bütün  $q \leq N$  için sınırlı kalıyor ve tüm  $\beta$  değerleri başlangıç koşullarını sağlıyor ise Lax-Richtmyer

tanımına göre sonlu fark denklemleri kararlı olacaktır. Eğer fark denklemlerinin tam çözümü zamana göre üstel artmazsa kararlılık için gerek ve yeter koşul  $|\xi| \leq 1$  olmalıdır.

Yani;  $-1 \leq \xi \leq 1$  dir. Ancak  $|U_{p,q}|$  zamana bağlı olarak artıyorsa kararlılık için yeter ve gerek koşul

$$|\xi| \leq 1 + K\Delta t = 1 + O(\Delta t)$$

dir.  $K$  pozitif sayısı  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ ,  $\beta$  değerlerinden bağımsızdır (Smith, 1985).

**Tanım 2.5.**  $x$  ve  $t$  bağımsız değişkenlerine bağlı  $U$  fonksiyonu kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü ve  $u$  kısmi diferansiyel denklemin yaklaşımı için kullanılan fark denklemlerinin tam çözümü olsun. Eğer sabit noktada veya  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  iken sabit  $t$  seviyesinde  $u$  fonksiyonu,  $U$  fonksiyonuna yaklaşıyor ise fark denklemini yakınsaktır denir. Yani

$$\lim_{i,j \rightarrow 0} u_{i,j} = U_{i,j}$$

olmasıdır (Smith, 1985).

### 2.1.2. Sabit nokta iterasyonu

Bir fonksiyonun sabit noktasını bulma problemi matematiğin diferansiyel denklemler, optimizasyon teorisi gibi bir çok alanında sıklıkla karşılaşılmaktadır (Kincaid ve Cheney, 2012).

Lineer olmayan  $f(x) = 0$  denklemi

$$x = g(x) \tag{2.1}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.  $x = x_0$  başlangıç koşulu seçilerek

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.2}$$

formunda bir ardışık yenilenme bağlantısı ile  $f(x) = 0$  denklemini sağlayan  $\{x_n\}$  kökleri bulunur.

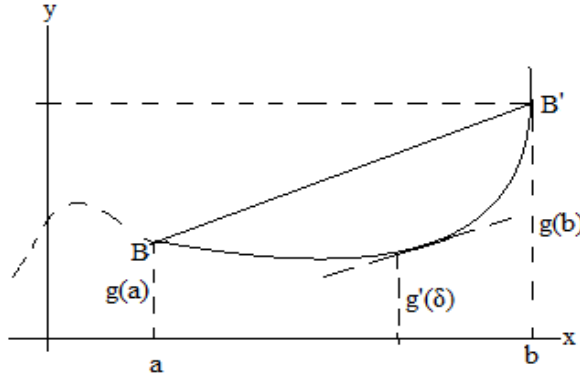
### Teorem 2.1. Ortalama değer teoremi



$[a, b]$  aralığında sürekli ve bu aralığın her noktasında türevi mevcut olan bir  $g(x)$  fonksiyonu için  $a < \delta < b$  olsun. O halde

$$g'(\delta) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir  $\delta$  değeri vardır.



Şekil 2. 1. Ortalama değer teoreminin gösterimi (Çağal, 1989)

Teoremin geometrik yorumu (Çağal, 1989) çalışmasında (şekil 2.1) deki gibi verilmiştir. Burada  $g(x)$  fonksiyonu  $x = a$ ,  $x = b$  noktaları arasında tanımlı bir fonksiyondur. Şekilde çizilen  $BB'$  kirişinin eğimi

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

formülü ile verilir.  $(a, b)$  aralığı içerisinde en az bir  $\delta$  nokta vardır ki bu noktadan eğriye çizilen teğet  $BB'$  kirişine paraleldir. Ortalama değer teoremini

$$g(b) - g(a) = g'(\delta)(b - a) \quad (2.3)$$

Şeklinde yeniden ele alalım. Bu teoreme ardışık iterasyon işlemi uygulanırsa;

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_i = g(x_{i-1}) \quad (2.4)$$

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

$$a = x_{i-1}, b = x_i$$

elde edilir. (2.4) ifadesi (2.3) denkleminde yerine yazılırsa;

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\delta_i)(x_i - x_{i-1})$$

olur ve burada  $x_{i-1} < \delta_i < x_i$  dir.

$$x_i = g(x_{i-1}), \quad x_{i+1} = g(x_i)$$

olduğundan

$$|x_{i+1} - x_i| = |g'(\delta_i)| |x_i - x_{i-1}|$$

ifadesi yazılır. (2.4)'teki her bir denkleme ayrı ayrı ortalama değer teoremini uygulayarak

$$|x_2 - x_1| = |g'(\delta_1)| |x_1 - x_0|$$

$$|x_3 - x_2| = |g'(\delta_2)| |x_2 - x_1|$$

.

.

.

$$|x_i - x_{i-1}| = |g'(\delta_{i-1})| |x_{i-1} - x_{i-2}|$$

$$|x_{i+1} - x_i| = |g'(\delta_i)| |x_i - x_{i-1}|$$

ifadeleri elde edilir. Burada  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i$  değerleri birbirinden farklıdır.  $g'(x)$  fonksiyonu sınırlı olduğunu varsayalım. O halde herhangi bir  $[x_i, x_{i+1}]$  aralığında

$$|g'(\delta_i)| < K$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$|x_2 - x_1| \leq K |x_1 - x_0|$$

$$|x_3 - x_2| \leq K |x_2 - x_1|$$

.

.

.

$$|x_i - x_{i-1}| \leq K |x_{i-1} - x_{i-2}|$$

$$|x_{i+1} - x_i| \leq K |x_i - x_{i-1}|$$

ifadeleri elde edilir. Bu eşitsizliklerden

$$|x_{i+1} - x_i| \leq K^i |x_1 - x_0|$$

yazılır. Yöntemin gerçek köke yakınsaması için  $i \rightarrow \infty$  iken

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$$

olması gereklidir. Yani  $K < 1$  olmalıdır. O halde sabit iterasyon yönteminin gerçek köke yakınsaması için yeterli koşul

$$|g'(\delta_i)| \leq K < 1$$

şeklinde verilir (Çağal, 1989).

### 2.1.3. Yakınsama mertebesi

Yenileme bağıntısındaki hata

$$e_i = x_i - \bar{x}$$

şeklinde tanımlansın. Öte yandan  $g(x_i)$  değeri

$$g(x_i) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + g''(\bar{x}) \frac{(x_i - \bar{x})^2}{2!} + \dots$$

ya da

$$g(x_i) - g(\bar{x}) = g'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + g''(\bar{x}) \frac{(x_i - \bar{x})^2}{2!} + \dots$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \bar{x} = g(\bar{x}) \quad \text{ve} \quad e_i = x_i - \bar{x}$$

olduğunda,

$$x_{i+1} - \bar{x} = g'(\bar{x})e_i + g''(\bar{x}) \frac{e_i^2}{2!} + g'''(\bar{x}) \frac{e_i^3}{3!} + \dots$$

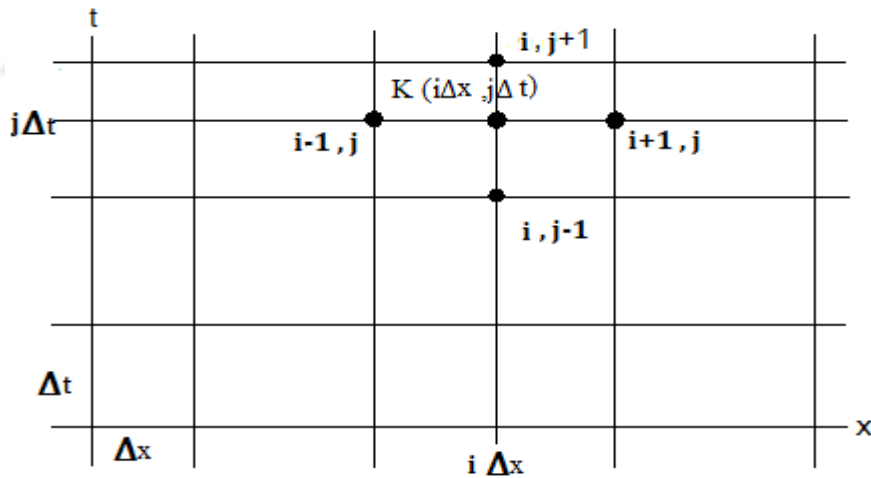
ifadesi yazılır. Sonuç olarak  $(i+1)$ . adımdaki hata

$$e_{i+1} = g'(\bar{x})e_i + g''(\bar{x})\frac{e_i^2}{2!} + g'''(\bar{x})\frac{e_i^3}{3!} + \dots$$

şeklinde  $i$ . adımdaki hata cinsinden elde edilir. Görüldüğü gibi  $\bar{x}$  çözümü için  $g(x)$  fonksiyonunun sıfır olmayan en küçük türevinin mertebesi yakınsama mertebesini verir (Çağal, 1989).

## 2.2. Sonlu Fark Yöntemi

Sonlu fark yöntemi, analitik çözümleri açıkça ifade edilemeyen problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için sıklıkla kullanılan sayısal bir yöntemdir. Sonlu fark yönteminde temel mantık, türevlerin ayrıklaştırılmış fonksiyon değerlerinin doğrusal kombinasyonlarıyla yer değiştirmesidir. Sonlu fark yöntemleri sade olduklarından uygulamalarda sıklıkla kullanılan yaklaşık metotlardandır. Sonlu fark yöntemlerinin amacı türevlerin düğüm noktasındaki fonksiyon değerlerinin doğrusal kombinasyonlarıyla hesaplanmasıdır.



Şekil 2. 2. Düğüm noktalarının gösterimi [Smith, 1985]

$U$ ,  $x$ ,  $t$  bağımsız değişkenine bağlı bir fonksiyon olsun. Sonlu fark yöntemlerinde,  $x_i = i\Delta x$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, M$  şeklinde tanımlı eşit aralıklı düğüm doğruları  $Oy$  – eksenine paralel ve  $t_j = j\Delta t$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N$  ile tanımlı eşit aralıklı düğüm noktaları ile  $Ox$  – eksenine paralel olacak şekilde  $x-t$  düzlemi kenarları  $\Delta x$  ve  $\Delta t$  olan eşit dikdörtgenler bölünür (şekil 2.2.1).  $U$  fonksiyonunun sembolik  $K(i\Delta x, j\Delta t)$  düğüm noktasındaki değeri

$$U_k = U(x, t) = U(i\Delta x, j\Delta t) = U_{i,j}$$

şeklinde tanımlanır (Smith, 1985).

### Birinci mertebeden türevlere sonlu fark yaklaşımları

$U(x + \Delta x, t)$  ve  $U(x - \Delta x, t)$  fonksiyonlarının  $x$  civarında Taylor seri açılımları

$$U(x + \Delta x, t) = U(x, t) + (\Delta x) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots$$

$$U(x - \Delta x, t) = U(x, t) - (\Delta x) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots$$

şeklinindedir. Yukarıdaki ifadelerden birinci türevler yalnız bırakılırsa

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x, t)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \dots \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x, t) - U(x - \Delta x, t)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \dots \quad (2.6)$$

olarak elde edilir. (2.5) ve (2.6) ifadesinden serinin kalan terimleri  $O(\Delta x)$  ile ifade edilirse birinci mertebeye türev değerleri

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{ileri fark yaklaşımı})$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x, t) - U(x - \Delta x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{geri fark yaklaşımı})$$

elde edilir. Burada “ $O$ ” ifadesi sonsuz sayıdaki terimleri ifade etmek için kullanılır.

Ayrıca (i) ve (ii) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa birinci mertebeden türev değeri

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{merkezi fark yaklaşımı})$$

şeklinde bulunur.

Benzer şekilde  $U(x, t + \Delta t)$  ve  $U(x, t - \Delta t)$  fonksiyonlarının  $t$  civarında Taylor seri açılımları

$$U(x, t + \Delta t) = U(x, t) + (\Delta t) \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \dots$$

$$U(x, t - \Delta t) = U(x, t) - (\Delta t) \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \dots$$

dır. Yukarıdaki işlemlere benzer olarak zamana göre birinci türevlerin değeri

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{ileri fark yaklaşımı})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x, t) - U(x, t - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{geri fark yaklaşımı})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (\text{merkezi fark yaklaşımı})$$

şeklinde ifade edilir.

### İkinci mertebeden türevlere sonlu fark yaklaşımları

$U$ 'nün  $x$ 'e göre ikinci mertebeden türevinin sırasıyla ileri, geri ve merkezi fark yaklaşımları yukarıdakilerine benzer şekilde Taylor seri açılımlarından

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x, t) - 2U(x + \Delta x, t) + U(x + 2\Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x - 2\Delta x, t) - 2U(x - \Delta x, t) + U(x, t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x - \Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

gibi bulunur.  $U(x, t)$  fonksiyonunun  $x_i = i\Delta x$  ve  $t_j = j\Delta x$  düğüm noktalarındaki değerleri göz önüne alınarak birinci ve ikinci mertebeye türevlerin sonlu fark formülleri

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i+1, j} - U_{i, j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i, j} - U_{i-1, j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i,j} - 2U_{i+1,j} - U_{i+2,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i-2,j} - 2U_{i-1,j} - U_{i,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} - U_{i+1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

elde edilir (Seydaoğlu, 2010).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu kısımda Burgers denklemi üzerinde bilim insanların geçmişten günümüze kadar yapılan çalışmalar ve sonlu farklar yönteminin Burgers denkleminde parçalayarak uygulanması üzerinde duruldu.

#### 3.1. Burgers Denklemi

1- Boyutlu Burgers denklemi,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty) \quad (3.1)$$

sınır şartları

$$\begin{aligned} U(a, t) &= g_1(t) \\ U(b, t) &= g_2(t) \end{aligned} \quad t > 0 \quad (3.2)$$

ve başlangıç koşuluyla

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.3)$$

ele alalım. Burada  $\nu$  kinematik viskozite parametresi,  $t$  zaman ve  $x$  konum değişkenlerini temsil eder. Ek olarak  $g_1$ ,  $g_2$  verilen fonksiyonlardır ve başlangıç değer fonksiyonu  $U_0$  yeterince düzgündür. Burgers denkleminin denge durum çözümleri ilk olarak Bateman (Bateman, 1915) tarafından sunulmuştur. Burgers (Burgers, 1948) çalışmasında bu denklemi türbülansın matematik modellenmesinde kullanmıştır. Burgers denklemi, lineer olmayan terim ve kinematik viskozite parametresi gibi Navier-Stokes denklemi ile birçok ortak özelliğe sahiptir. Dolayısıyla türbülans problemini çalışmak için Burgers denklemi basit bir test problemi olarak kullanılabilir. Burgers denklemi, gaz dinamiği, şok dalgalarının modellenmesin, trafik akışları ve ısı iletimi gibi uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik alanlarında kullanılmıştır. Verilen başlangıç koşulları için Burgers denkleminin sonsuz seri çözümleri Hopf-Cole dönüşümü yardımı ile elde edilmiştir (Cole, 1951; Hopf, 1950). Bu denklemin davranışı sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınırlı elemanlar, spektral metotlar, üstel metotlar, homotopi analiz metodu ve diferansiyel tümlenme metodu gibi birçok nümerik metot ile incelenmiştir (Caldwell ve Smith, 1982; Evans ve Abdullah, 1984; Mitta ve Singhal, 1993;



Kutluay ve ark., 1999; Kutluay ve Esen, 2004; Liao, 2008; Öziş ve Erdoğan, 2009; Acedo, 2006; Cordero ve ark., 2015; Jiwarı, 2015; Jiwarı ve ark., 2013; Rashidi ve Erfani, 2009).

Yazarlar (Jain ve Raja, 1979) çalışmasında Burgers denkleminin parçalanması sonucu elde edilen iki alt problemi sonlu farklar metodu ile çözmüşlerdir ve bu algoritmayı splitting-up tekniği olarak adlandırmışlar. Benzer düşünceyle kübik spline metodu kullanılarak Burgers denklemi nümerik çözümleri için iki-zaman-seviyeli (Jain ve Holla, 1978) ve üç-zaman-seviyeli (Jain ark., 1992) olarak adlandırılan parçalama (splitting) tekniği önerilmiştir. (Saka ve Dağ, 2008) çalışmasında Burgers ve modifiye edilmiş Burgers denklemlerinin nümerik çözümlerini, her bir alt denkleme kuintik B-spline kollakasyon metodunu uygulayarak sunmuşlardır.

### 3.1.1. Hopf-Cole dönüşümü

Hopf-Cole dönüşümü

$$U = -2v \frac{\phi_x}{\phi} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. (3.4) dönüşümü kullanılarak  $U_t$ ,  $UU_x$  ve  $U_{xx}$  terimleri

$$U_t = \frac{2v(\phi_t \phi_x - \phi \phi_{xt})}{\phi^2}$$

$$UU_x = \frac{4v^2 \phi_x (\phi \phi_{xx} - \phi_x^2)}{\phi^3}$$

$$vU_{xx} = \frac{2v^2 (2\phi_x^3 - 3\phi \phi_{xx} \phi_x + \phi^2 \phi_{xxx})}{\phi^3}$$

gibi elde edilir. Elde edilen bu sonuçları (3.1) denkleminde yerine yazılır

$$\frac{2v(-\phi \phi_{xt} + \phi_x (\phi_t - v \phi_{xx}) + v \phi \phi_{xxx})}{\phi^3} = 0 \Leftrightarrow -\phi \phi_{xt} + \phi_x (\phi_t - v \phi_{xx}) + v \phi \phi_{xxx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi_x (\phi_t - v \phi_{xx}) = \phi (\phi_{xt} - v \phi_{xxx}) = \phi (\phi_t - v \phi_{xx})_x.$$

Eğer  $\phi$ ,  $\phi_t - v\phi_{xx} = 0$ ,  $x \in R$  ısı denkleminin bir çözümü ise (3.4) dönüşümü ile verilen  $U(x,t)$  fonksiyonu (3.1) Burgers denkleminin bir çözümü olur. (3.4) ifadesi

$$U = -2v(\log \phi)_x$$

gibi yeniden yazılabilir. O halde

$$\phi(x,t) = e^{\left(-\int \frac{U(x,t)}{2v} dx\right)}$$

ya da

$$\phi(x,t) = e^{\left(-\int_0^x \frac{U(y,t)}{2v} dy\right)} \quad (3.5)$$

ifadeleri yazılabilir.

Burada (3.3) başlangıç koşul

$$\phi(x,0) = \phi_0(x) = \phi(x,t) = e^{\left(-\int_0^x \frac{U_0(y)}{2v} dy\right)}$$

olur.

Sonuç olarak (3.1) problemi

$$\begin{cases} \phi_t - v\phi_{xx} = 0 \\ \phi(x,0) = \phi_0(x) = \phi(x,t) = e^{\left(-\int_0^x \frac{U_0(y)}{2v} dy\right)}, \quad x \in R, t > 0, v > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

denkleme indirgenir.

**Isı denklemi:** Isı denklemi genel çözümü değişkenlerine ayrılabilir çözüm yöntemiyle elde edilebilmektedir. (3.6) denkleminin  $x$  değişkenine göre Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_t = \xi^2 v \tilde{\phi}; \\ \tilde{\phi}(\xi, 0) = \tilde{\phi}_0(\xi); \end{cases} \quad \xi \in R, t > 0, v > 0 \quad (3.7)$$

olur ve burada  $\tilde{\phi}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,t) e^{i\xi x} dx$  olur. Bu problemin çözümü;

$$\tilde{\phi}(\xi, t) = \tilde{\phi}_0(\xi) e^{\xi^2 vt}$$

şeklinde verilir.  $\phi(x,t)$  ifadesi ters  $F^{-1}$  Fourier dönüşünü kullanılarak

$$\phi(x,t) = F^{-1}[\tilde{\phi}(\xi,t)] = F^{-1}[\tilde{\phi}_0(\xi)e^{\xi^2 vt}] = \phi_0(x) * F^{-1}(e^{\xi^2 vt})$$

gibi elde edilir ve burada \* konvolüsyon çarpımıdır.

Öte yandan

$$F^{-1}(e^{\xi^2 vt}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi vt}} e^{-\frac{x^2}{4vt}}$$

dir ve (3.6) başlangıç değer probleminin analitik çözümü

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi vt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4vt}} d\xi$$

olur. (3.4) dönüşümünde (3.1) Burgers denkleminin problemin analitik çözümü

$$U(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\xi}{t} \phi_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4vt}} d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4vt}} d\xi} \quad (3.8)$$

formülü ile elde edilir (Landajuela, 2011).

### 3.2. BCH Formülü

Konuda kullanacağımız Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) metodunu ve komütatörün tanımlarına değinilmiştir.  $A$  ve  $B$  kare matrisi ve burada Komütatörü  $[.,.]$  şeklinde ya da  $A$  ve  $B$  operatörleri için  $[A,B] = AB - BA$  biçimde tanımlanır. BCH da

$$e^{(A+B)} \approx e^C$$

olarak alınır.

$$C = \log(bch(A, B)) = A + B + \sum_{k=2}^{\infty} C_k$$

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] - \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{12}[B,[A,B]] + \dots$$

$$C_1 = A + B$$

$$C_2 = \frac{1}{2}[A,B]$$

$$C_3 = -\frac{1}{12}[[A,B],A] + \frac{1}{12}[[A,B],B]$$

$$C_4 = \frac{1}{24} [[ [A, B], B ], A ]$$

Farklı  $k$  değerleri için  $C_k$  değerleri yazılabilir (Seydaoğlu, 2016).

### 3.3. Pertürbe Edilmiş Sistemler İçin Parçalama (Splitting) Metotları

Bir boyutlu Burgers denklemi küçük viskozite  $\nu$  parametresini içerir. Bu nedenle Burgers denkleminin hassas çözümleri pertürbe edilmiş sistemlere uygun olarak üretilmiş parçalama (splitting) metotları ile elde edilebilir. Lineer olmayan

$$\frac{du}{dt} = A(u(t)) + \varepsilon B(u(t)) \quad , \quad u(0) = u_0 \quad (3.9)$$

denklemini ele alalım. Burada  $\varepsilon$  küçük parametre olmak üzere  $A$ ,  $B$  ve  $A + \varepsilon B$  operatörleri  $t$  pozitif değeri için sonsuz ya da sonlu Banach uzayında  $C_0$  yarı-grubunu gerektirir. 1-Boyutlu Burgers denklemi (3.1) formuna bir örnek oluşturmaktadır. Kolaylık sağlaması için lineer olmayan denklemi, lineer formda (görünüşte) yazılabilir.

$$\frac{du}{dt} = L_{A(u(t))} u(t) + \varepsilon L_{B(u(t))} u(t) \quad (3.10)$$

Burada  $u(t)$  fonksiyonuna uygulanan Lie- operatörleri

$$L_{A(u(t))} = A(u(t)) \frac{\partial}{\partial u} \quad , \quad L_{B(u(t))} = B(u(t)) \frac{\partial}{\partial u} \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda (3.10)'nun formal çözümü  $u(t) = e^{t(L_{A(u(t))} + \varepsilon L_{B(u(t))})} u_0$  şeklindedir (Hairer ve ark., 2006).

Parçalama (splitting) metodu uygulanırken (3.10) denklemi aşağıdaki gibi iki ayrı alt probleme parçalanır.

$$\frac{du(t)}{dt} = A(u(t)) \quad \text{ve} \quad \frac{du(t)}{dt} = \varepsilon B(u(t)) \quad (3.12)$$

Parçalanmış bu denklemler ardışık olarak çözülerek (3.10) denklemini yaklaşık çözümleri elde edilir (Holden ve ark., 2013).

Bunun yanı sıra lineer olmayan durumlarda (3.10) denkleminin formal çözümü  $e^{t(L_{A+\varepsilon B})}$ , akış dönüşümü  $\phi^{t(L_{A+\varepsilon B})}$  ile yer değiştirilebilir. Ayrıca  $h$  zaman adımı yeterince

küçük olmak üzere (3.12)'deki her bir denklemin  $h$  akışları,  $\phi_h^{L_A}$ ,  $\phi_h^{\varepsilon L_B}$  olarak tanımlanır. Bu durumda birinci mertebe Lie- Trotter parçalama (splitting) metodu

$$T_h = \phi_h^{L_A} \circ \phi_h^{\varepsilon L_B} \quad \text{ya da} \quad T_h = \phi_h^{\varepsilon L_B} \circ \phi_h^{L_A} \quad (3.13)$$

şeklinindedir. Burada  $T_h = \phi_h^{(L_A + \varepsilon B)} + O(\varepsilon h^2)$  şeklinde denkleminin çözümü birinci mertebeden bir yaklaşım olduğu görülmektedir. İkinci dereceden zamana göre simetrik metotları Lie-Trotter metodunun ve eşleniğinin  $T_h^* = \phi_h^{\varepsilon L_B} \circ \phi_h^{L_A}$  yarı zaman adımında bileşkesi alınarak

$$S_h = \phi_{h/2}^{L_A} \circ \phi_h^{\varepsilon L_B} \circ \phi_{h/2}^{L_A} \quad \text{ya da} \quad S_h = \phi_{h/2}^{\varepsilon L_B} \circ \phi_h^{L_A} \circ \phi_{h/2}^{\varepsilon L_B} \quad (3.14)$$

biçiminde elde edilir ve Strang parçalama (splitting) metodu olarak adlandırılır (Hairer ve ark., 2006; Blanes ve Casas, 2016).

(3.14) formundaki Strang parçalama (splitting) metodu

$$e^{\frac{h}{2}L_A} \circ e^{h\varepsilon L_B} \circ e^{\frac{h}{2}L_A} = e^{h(L_A + \varepsilon B)} - \frac{1}{24}h^3[L_A[L_A, \varepsilon L_B]] + \frac{1}{12}h^3[\varepsilon L_B[L_A, \varepsilon L_B]] + \dots \quad (3.15)$$

üstel şekilde eşitliği yeniden yazılabilir. (3.15)'teki eşitliğin sol tarafına BCH formülünün uygulanması ile eşitliğin sağ tarafı elde edilir.

$h^3$ 'ün çarpanları  $\varepsilon[L_A, [L_A, L_B]]$  ve  $\varepsilon^2[L_B, [L_A, L_B]]$  göz önüne alınırsa (3.14) denkleminin lokal kesme hatasının  $O(\varepsilon h^3 + \varepsilon^2 h^3)$  mertebesinde olduğu görülür. Öte yandan herhangi mertebeden ABA kalıbında bir parçalama (splitting) metodu  $b_{p+1} = 0$  olmak üzere

$$\psi(h) = e^{ha_{p+1}L_A} e^{hb_p\varepsilon L_B} \dots e^{ha_2L_A} e^{hb_1\varepsilon L_B} e^{ha_1L_A} \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilebilir. Ya da  $a_{p+1} = 0$  olmak üzere BAB kalıbında bir parçalama (splitting) metodu

$$\psi(h) = e^{hb_{p+1}\varepsilon L_B} e^{ha_pL_A} \dots e^{hb_2\varepsilon L_B} e^{ha_1L_A} e^{hb_1\varepsilon L_B} \quad (3.17)$$

olarak ifade edilir (Creutz ve Gocksch, 1989; Suzuki, 1990; Yoshida, 1990). Bunun yanı sıra,  $h^{2l+1}$  ( $l = 0, 1, 2, 3, \dots, s$ ) mertebesinin terimleri sıfır olarak alınırsa efektif mertebesi  $(2s, 2)$  olan pozitif ve reel katsayılı ikinci mertebeden simetrik metotlar elde edilir. Bu simetrik metotlar Burgers denklemini gibi terslenemeyen sistemler için iyi

tanımlıdır ve hata  $O(\varepsilon h^{2s+1} + \varepsilon^2 h^3)$  mertebesindedir. Pozitif reel katsayılar için  $s \leq 5$  ile  $(2s, 2)$  mertebesinde simetrik metotlar sunulmuştur (Mclachlan, 1995). Strang parçalama (splitting) metodu ile bulunan sonuçların yaklaşık olarak üç kat daha fazla hassas olduğu görülmektedir. (Laskar ve Robutel, 2001)'deki çalışmalarında  $(2s, 2)$  metodunun sistematik bir analizini sunmuşlar ve  $s = 10$ 'a kadar pozitif katsayılar için yeni metotlar önermişler. Sunulan bu metotların ikinci mertebeden klasik simetrik metotlardan daha avantajlı olduğu görülmektedir.

### 3.4. Burgers Denklemi İçin Parçalama (Splitting) Yöntemi

1-boyutlu Burgers denklemi (3.1)

$$U_t = -UU_x \quad (3.18)$$

$$U_t = \nu U_{xx} \quad (3.19)$$

iki ayrı alt problem olarak parçalanır. Burgers denkleminin parçalama (splitting) metodu, ayrı alt problemlerin (kesin ya da nümerik) çözümlerini birleştirmede kullanılır. (3.18) ve (3.19) alt denklemlerinin kesin çözümlerini veren dönüşümleri (ya da yeterince hassas sayısal yaklaşımları)  $\phi_h^{L_A}$  ve  $\phi_h^{\varepsilon L_B}$  dir. Burada Burgers denkleminin yaklaşık çözümleri

$$U(x, h) = \psi_h u_0(x) \quad (3.20)$$

olarak elde edilir. Burada  $\psi_h$ , yeterince küçük  $h$  değerleri için (3.16) veya (3.17) denklem kalıplarından biridir.

Lineer denklemler için üstel parçalama (splitting) metotlarının yakınsaklık özellikleri (Hansen ve Ostermann, 2009) çalışmasında analiz edilmiştir. Üstel ifadeler uygun nonlinear akışlarla değiştirilerek Hansen (2009)'daki sonuçlar lineer olmayan denklemlere formal olarak genişletilebilir. (Holden ve ark., 1999) genelleştirilmiş Korteweg-De Vries (KdV) denklemi için Lie-Trotter ve Strang parçalama (splitting) metotlarının yakınsaklık analizini sunmuşlardır. (Holden ve ark., 2011) Kdv denklemi için Lie-Trotter ve Strang parçalama (splitting) metodunun mertebelerinin beklenen hassasiyette olduğunu göstermişlerdir. Ek olarak (Holden ve ark., 2013) makalesinde Burgers nonlineerliğe sahip bazı özel kısmi diferansiyel denklemler için Strang parça-

lama (splitting) metodunun yakınsaklığı sunulmuştur. Bu yüzden benzer yakınsaklık sonuçları (2s,2) mertebeden simetrik metotlar için de beklenebilir.

### 3.5. Parçalanmış Burgers Denklemine Sonlu Farklar Yönteminin Uygulanması

Bu kısımda Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemlerini kullanarak, sabit iterasyon yöntem ile (Ames, 1977) lineerleştirilmiş (3.18) ve lineer olan (3.19) denklemlerinin sayısal çözümleri incelenecektir. (3.18) denklemi için sabit nokta iterasyon yaklaşımı

$$u_i^{n+1} = -(uu_x)^n \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

şeklinde verilir. Burada  $u$  fonksiyonunun  $n$ 'inci adımdaki değeri  $u^{(n)}$  ve başlangıç değeri  $u^{(0)}$  olarak tanımlanmaktadır.  $\{u^{(n)}\}$  dizisinin içerdiği fonksiyonlar  $u$  için verilen sınır koşullarını sağlamaktadır. Sabit iterasyon yöntemiyle elde edilen  $\{u^{(n)}\}$  dizisi lineer olmayan problemin çözümüne doğrusal olarak yakınsamaktır (Ames, 1977).  $\{(x, t) : x \in [0, 1], t \in (0, \infty)\}$  çözüm bölgesi,  $\Delta x$ ;  $x$  yönünde konum adım uzunluğu,  $\Delta t$ ;  $t$  yönünde zaman adım uzunluğu olmak üzere  $(i \Delta x, j \Delta t)$  düğüm noktaları için ayrıklaştırılsın. Burada  $x_i = i \Delta x$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, M$ ,  $t_j = j \Delta t$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N$  dir.

#### 3.5.1. Kapalı sonlu fark yöntemi

Parçalanmış Burgers denkleminde elde edilen alt problemler için  $U_t$ ,  $U_{xx}$  ve  $UU_x$  terimleri yerine sonlu yaklaşımları

$$(U_t)_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} (U_{i,j+1} - U_{i,j}) + O(\Delta t^2) \quad (3.22)$$

$$(UU_x)_{i,j+1} = \frac{1}{2\Delta x} U_{i,j+1} (U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}) + O(\Delta x^2) \quad (3.23)$$

$$(U_{xx})_{i,j+1} = \frac{1}{(\Delta x^2)} (U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}) + O(\Delta x^2) \quad (3.24)$$

yazılsın. O halde (3.5.1) denklemini için kapalı sonlu fark yaklaşımı,

$$\frac{1}{\Delta t} (U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1}) = -\frac{1}{2\Delta x} U_{i,j+1}^n (U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j+1}^n) \quad (3.25)$$

şeklinde olur.

### 3.5.2. Filtreleme tekniği

Sonsuz serilerin yavaş yakınsamalarından dolayı Burgers denkleminin tam çözümleri  $\nu < 0.01$  değerleri için bozulmaktadır. Küçük viskozite değeri için genellikle salınımlar ve doğrusal olmayan kararsızlıklar ortaya çıkmaktadır. Uygun filtreleme tekniği kullanılarak ortaya çıkan bu tür durumları etkisi azaltılabilmektedir. Bu çalışmada, (Iskanda ve Müh.sen, 1992; Kaosla ve Rupin, 1979)'da sunulan filtreleme tekniğini kullanarak lineer olmayan terimde  $U_{i,j}$  değeri

$$U_{i,j} = \frac{U_{i-1,j} + \phi U_{i,j} + U_{i+1,j}}{2 + \phi} \quad \phi = \frac{4\nu - \Delta x}{\Delta x - 2\nu} \quad (3.26)$$

şeklinde alınır.

Yukarıdaki denklemin sağ tarafındaki  $U_{i,j}$  terimi yerine (3.26) filtreleme tekniği kullanılırsa

$$\frac{1}{\Delta t} (U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1}) = -\frac{1}{2\Delta x} \left( \frac{U_{i-1,j+1}^n + \phi U_{i,j+1}^n + U_{i+1,j+1}^n}{2 + \phi} \right) (U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j+1}^n)$$

$$U_{i,j+1}^{n+1} = U_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x(2 + \phi)} (U_{i-1,j+1}^n + \phi U_{i,j+1}^n + U_{i+1,j+1}^n) (U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j+1}^n)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $n_j$  terimi,

$$\max_i |U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n_j}| \leq 10^{-8} \quad , \quad 1 \leq i \leq M \quad (3.27)$$

koşulu dikkate alınarak  $U_{i,j}$  değerinin yaklaşımı için gereken son iterasyon sayısını temsil eder (Iskandar ve Mohsen, 1992).

Burgers denkleminin difüzyon kısmı için



$$(U_{i,j+1} - U_{i,j}) = \frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)} (U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}) \quad (3.28)$$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)} (U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1})$$

$$U_{i,j} = -\frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)} U_{i-1,j+1} + (1 + 2\frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)}) U_{i,j+1} - \frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)} U_{i+1,j+1}$$

olarak yazılır.

---

**Algoritma:** Kapalı sonlu fark metodu ve (3.16) parçalama metodu kullanılarak Burgers denkleminin yaklaşık çözüm algoritması.

---

1:  $i = 1$  den  $p + 1$  e

2:  $j = 0$  dan  $N$  e yap

3: Verilen başlangıç koşulları için (3.25) denklemini  $\Delta t = a_i \Delta t$  zaman adımı için çöz.

- Tüm  $i$  değeri için  $U_{i,j+1}^{n+1} = U_{i,j}^n$  olsun.
- (3.27) koşulu sağlandığında yap.
- (3.25) denkleminde  $U_{i,j+1}^{n+1}$  değerlerini hesapla.
- Tüm  $i$  değeri için  $U_{i,j+1}^n = U_{i,j+1}^{n+1}$  olsun.
- (3.25) 'den  $U_{i,j+1}^{n+1}$  gelişmiş değerleri hesapla.
- bitir;

4: Eğer  $b_i \neq 0$  ise

5: Hesaplanan  $U_{i,j+1}^{n+1}$  değerini (3.28) denklemini için başlangıç koşulu al ve bu denklemini

$U_{i,j+1}$  değerini bulmak için  $\Delta t = b_i \Delta t$  zaman adımında çöz.

6: bitir;

7: bitir;

8: bitir;

---

### 3.5.3. Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi

(3.18) ve (3.19) alt denklemlerinden yerine yazılabilecek sonlu fark yaklaşımı sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$(U_t)_{i,j+1}^{n+1} = -\frac{1}{2} \left( (UU_x)_{i,j+1}^n + (UU_x)_{i,j}^n \right) \quad (3.29)$$

$$(U_t)_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{2R} \left( (U_{xx})_{i,j+1}^n + (U_{xx})_{i,j}^n \right) \quad (3.30)$$

Buradan nonlinear kısım için Crank–Nicolson sonlu fark yöntemine uygulayalım.

$$\frac{1}{\Delta t}(U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1}) = -\frac{1}{4\Delta x} \left[ U_{i,j+1}^n (U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j+1}^n) + U_{i,j}^n (U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n) \right] \quad (3.31)$$

(3.26) filtreleme tekniği kullanılırsa

$$U_{i,j+1}^{n+1} = U_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ \frac{U_{i-1,j+1}^n + \phi U_{i,j+1}^n + U_{i+1,j+1}^n}{2 + \phi} (U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j+1}^n) + \frac{U_{i-1,j}^n + \phi U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{2 + \phi} (U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n) \right]$$

$$U_{i,j+1}^{n+1} = U_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left( \frac{U_{i-1,j+1}^n + \phi U_{i,j+1}^n + U_{i+1,j+1}^n}{2 + \phi} (U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j+1}^n) \right) - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left( \frac{U_{i-1,j}^n + \phi U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{2 + \phi} (U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n) \right)$$

$$U_{i,j+1}^{n+1} = U_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{4\Delta x(2 + \phi)} \left( U_{i-1,j+1}^n + \phi U_{i,j+1}^n + U_{i+1,j+1}^n (U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j+1}^n) \right) - \frac{\Delta t}{4\Delta x(2 + \phi)} \left( U_{i-1,j}^n + \phi U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n (U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n) \right)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde difüzyon kısmı için Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi

$$\frac{1}{\Delta t}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) = \frac{1}{2R(\Delta x^2)} \left[ (U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}) + (U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}) \right] \quad (3.32)$$

$$-\frac{\Delta t}{2R(\Delta x^2)} U_{i-1,j+1} + (1 - 2\frac{\Delta t}{2R(\Delta x^2)}) U_{i,j+1} - \frac{\Delta t}{2R(\Delta x^2)} U_{i+1,j+1} = \frac{\Delta t}{2R(\Delta x^2)} U_{i-1,j} + (1 - 2\frac{\Delta t}{2R(\Delta x^2)}) U_{i,j} + \frac{\Delta t}{2R(\Delta x^2)} U_{i+1,j}$$

olarak elde edilir.

Diğer taraftan Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin difüzyon kısmı yani (3.19) denklemini ele alırsak

$$aU_{i,j+1} - b(U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j+1}) = (a - 4b)U_{i,j} + b(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) \quad (3.33)$$

olarak yazılır. Burada  $a = \frac{1}{\Delta t} + v \frac{1}{\Delta x^2}$ ,  $b = v \frac{1}{2\Delta x^2}$  ve  $n_j$  terimi kapalı sonlu fark yöntemlerinde olduğu gibi (3.27) koşulu  $U_{i,j}$ 'nin yaklaşık değeri için gereken son iterasyon sayısını temsil eder (Iskandar ve Mohsen, 1992).

---

**Algoritma:** Crank-Nicolson sonlu fark metodu ve (3.16) parçalama metodu kullanılarak Burgers denkleminin yaklaşık çözüm algoritması (Seydaoğlu, 2018).

---

1:  $i = 1$  den  $p + 1$  e

2:  $j = 0$  dan  $N$  e yap

3: Verilen başlangıç koşulları için (3.31) denklemini  $\Delta t = a_i \Delta t$  zaman adımı olarak çöz.

- Tüm  $i$  değeri için  $U_{i,j+1}^{n+1} = U_{i,j}^n$  olsun.
- (3.27) koşulu sağlandığında yap.
- (3.31) denkleminde  $U_{i,j+1}^{n+1}$  değerlerini hesapla.
- Tüm  $i$  değeri için  $U_{i,j+1}^n = U_{i,j+1}^{n+1}$  olsun.
- (3.31) 'de  $U_{i,j+1}^{n+1}$  gelişmiş değerleri hesapla.
- bitir;

4: Eğer  $b_i \neq 0$  ise

5: Hesaplanan  $U_{i,j+1}^{n+1}$  değerini  $U_{i,j+1}^{n+1}$  değeri için (3.33) denklemi için başlangıç koşulu olarak al ve bu denklemi  $U_{i,j+1}$  değerini bulmak için  $\Delta t = b_i \Delta t$  zaman adımında çöz.

6: bitir;

7: bitir;

8: bitir;

---

### 3.5.4. Kararlılık analizi

i. (3.18) denklemini yani

$$U_t = -UU_x$$

denkleminin Kapalı sonlu fark yöntemin kararlılığı için, doğrusal olmayan (3.25) formunda Von-Neumann kararlılık analizini kullanılmaktadır. Kararlılık analizinde çözüm formu olarak  $U_{p,q} = \xi^q e^{i\beta p \Delta x}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  alınır.

$$\frac{1}{\Delta t} (U_{m,j+1} - U_{m,j}) = -\frac{1}{2\Delta x} U_{m,j+1} (U_{m+1,j+1} - U_{m-1,j+1})$$

kararlılık analizi için yukarıdaki denklemin yerine  $U_{p,q} = \xi^q e^{i\beta p \Delta x}$  yazılırsa;

$$\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} - \xi^j e^{i\beta m \Delta x} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (\xi^{j+1} e^{i\beta(m+1)\Delta x} - \xi^{j+1} e^{i\beta(m-1)\Delta x})$$

$$\frac{\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} - \xi^j e^{i\beta m \Delta x}}{\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x}} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \frac{\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (\xi^{j+1} e^{i\beta(m+1)\Delta x} - \xi^{j+1} e^{i\beta(m-1)\Delta x})}{\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x}} \right]$$

$$1 - \frac{1}{\xi} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x})$$

$$\frac{1}{\xi} = 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x})$$

$$\xi = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x})}$$

olur ve  $\sin(\beta \Delta x) = \frac{e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x}}{2i}$  ve  $\cos(\beta \Delta x) = \frac{e^{i\beta \Delta x} + e^{-i\beta \Delta x}}{2}$  olduğundan;

$$\xi = \frac{1}{1 + \frac{2i\Delta t}{2\Delta x} \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} \left(\frac{e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x}}{2i}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} iC \sin(\beta \Delta x)} \quad (3.34)$$

elde edilir. Burada  $\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x}$  ifadesi yerine C sabit sayısı alınmıştır.

ii. (3.19) ile verilen

$$U_t = vU_{xx}$$

denkleminin Kapalı sonlu fark yöntemin kararlılığı için, (3.28) lineer denklem formunun

$$(U_{m,j+1} - U_{m,j}) = \frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)} (U_{m-1,j+1} - 2U_{m,j+1} + U_{m+1,j+1})$$

kararlılık analizi için  $U_{p,q} = \xi^q e^{i\beta p \Delta x}$  olarak tanımlanırsa;

$$\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} - \xi^j e^{i\beta m \Delta x} = \frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)} (\xi^{j+1} e^{i\beta(m-1)\Delta x} - 2\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} + \xi^{j+1} e^{i\beta(m+1)\Delta x})$$

$$\frac{\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} - \xi^j e^{i\beta m \Delta x}}{\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x}} = \frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)} \left( \frac{\xi^{j+1} e^{i\beta(m-1)\Delta x} - 2\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} + \xi^{j+1} e^{i\beta(m+1)\Delta x}}{\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x}} \right)$$

$$1 - \frac{1}{\xi} = \frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)} (e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x}) \Rightarrow \xi = \frac{1}{1 - \frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)} (e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x})}$$

$e^{i\beta \Delta x} = \cos \beta \Delta x + i \sin \beta \Delta x$  ve  $\cos \beta \Delta x = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2}$  olduğunda

$$\xi = \frac{1}{1 - \frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)}(2 \cos \beta \Delta x - 2)} = \frac{1}{1 - \frac{v\Delta t}{(\Delta x^2)} \left[ 2(1 - 2 \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2}) - 2 \right]}$$

$$\xi = \frac{1}{1 + \frac{4v\Delta t}{(\Delta x^2)} \sin^2 \left( \frac{\beta \Delta x}{2} \right)} \quad (3.35)$$

olur. Yöntemin kararlı olması içinin yine gerek ve yeter koşul  $|\xi| \leq 1$  olmasıdır. Bu koşul her  $r > 0$  için sağlandığından kapalı sonlu fark yöntemi koşulsuz kararlıdır.

iii. (3.18) denklemini yani

$$U_t = -UU_x$$

denklemini için Crank-Nicolson sonlu fark yöntemin kararlılığı, doğrusal olmayan (3.31) formunun

$$\frac{1}{\Delta t}(U_{m,j+1} - U_{m,j}) = -\frac{1}{4\Delta x} \left[ U_{m,j+1}(U_{m+1,j+1} - U_{m-1,j+1}) + U_{m,j}(U_{m+1,j} - U_{m-1,j}) \right]$$

kararlılık analizi için  $U_{p,q} = \xi^q e^{i\beta p \Delta x}$  olarak tanımlanırsa;

$$\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} - \xi^j e^{i\beta m \Delta x} = -\frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (\xi^{j+1} e^{i\beta(m+1)\Delta x} - \xi^{j+1} e^{i\beta(m-1)\Delta x}) \right. \\ \left. + \xi^j e^{i\beta m \Delta x} (\xi^j e^{i\beta(m+1)\Delta x} - \xi^j e^{i\beta(m-1)\Delta x}) \right]$$

$$\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (\xi^{j+1} e^{i\beta(m+1)\Delta x} - \xi^{j+1} e^{i\beta(m-1)\Delta x}) \right]$$

$$= \xi^j e^{i\beta m \Delta x} - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ +\xi^j e^{i\beta m \Delta x} (\xi^j e^{i\beta(m+1)\Delta x} - \xi^j e^{i\beta(m-1)\Delta x}) \right]$$

$$\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x}) \right) = \xi^j e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \xi^j e^{i\beta m \Delta x} (e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x}) \right)$$

$$\frac{\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x}) \right)}{\xi^j e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x}) \right)} = \frac{\xi^j e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \xi^j e^{i\beta m \Delta x} (e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x}) \right)}{\xi^j e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x}) \right)}$$

$$\xi = \frac{\left( 1 - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \xi^j e^{i\beta m \Delta x} (e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x}) \right)}{\left( 1 + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} (e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x}) \right)}$$

$$\xi = \frac{1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} i C \sin(\beta \Delta x)}{1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} i C \sin(\beta \Delta x)} \quad (3.36)$$

olarak elde edilir. Burada (3.5.3.3) ifadesinin sağ tarafındakileri lineerleştirerek C sabiti olarak alınmıştır.

iv. (3.19) ile verilen

$$U_t = \nu U_{xx}$$

denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin

$$\frac{1}{\Delta t} (U_{m,j+1} - U_{m,j}) = \frac{\nu}{2(\Delta x)^2} \left[ (U_{m-1,j+1} - 2U_{m,j+1} + U_{m+1,j+1}) + (U_{m-1,j} - 2U_{m,j} + U_{m+1,j}) \right]$$

kararlılık analizi için  $U_{p,q} = \xi^q e^{i\beta p \Delta x}$  olarak tanımlanırsa;

$$\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} - \xi^j e^{i\beta m \Delta x} = \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \left[ \begin{aligned} &(\xi^{j+1} e^{i\beta(m-1)\Delta x} - 2\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} + \xi^{j+1} e^{i\beta(m+1)\Delta x}) \\ &(\xi^j e^{i\beta(m-1)\Delta x} - 2\xi^j e^{i\beta m \Delta x} + \xi^j e^{i\beta(m+1)\Delta x}) \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned} &\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (\xi^{j+1} e^{i\beta(m-1)\Delta x} - 2\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} + \xi^{j+1} e^{i\beta(m+1)\Delta x}) \\ &= \xi^j e^{i\beta m \Delta x} + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} [(\xi^j e^{i\beta(m-1)\Delta x} - 2\xi^j e^{i\beta m \Delta x} + \xi^j e^{i\beta(m+1)\Delta x})] \end{aligned}$$

$$\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x}) \right) = \xi^j e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} [(e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x})] \right)$$

$$\frac{\xi^{j+1} e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x}) \right)}{\xi^j e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x}) \right)} = \frac{\xi^j e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} [(e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x})] \right)}{\xi^j e^{i\beta m \Delta x} \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x}) \right)}$$

$$\xi = \frac{\left( 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} [(e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x})] \right)}{\left( 1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x}) \right)}$$

$e^{i\beta \Delta x} = \cos \beta \Delta x + i \sin \beta \Delta x$  ve  $\cos \beta \Delta x = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2}$  olduğunda

$$\xi = \frac{\left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} [2 \cos \beta \Delta x - 2]\right)}{\left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} [2 \cos \beta \Delta x - 2]\right)} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \left[2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2}\right) - 2\right]\right)}{\left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \left[2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2}\right) - 2\right]\right)}$$

$$\xi = \frac{1 - \frac{2\Delta t v}{\Delta x^2} \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)^2}{1 + \frac{2\Delta t v}{\Delta x^2} \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)^2} \quad (3.37)$$

olacak şekilde elde edilir. Von Neumann koşulu ile elde edilen verilerin kararlılık analizi için yeterlidir. Yani tüm  $\beta$  reel sayıları için  $|\xi| \leq 1$  olduğundan bu yöntem kararlıdır.



## 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

### 4.1. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde elde edilen nümerik sonuçlar ile analitik çözümler karşılaştırılarak yaklaşımların hassasiyetleri gösterilmektedir. Bunun için

$$L_2 = \left[ h \sum_{i=1}^N |U_{analitik} - U_{nümerik}|^2 \right]^{1/2} \quad \text{ve} \quad L_\infty = \max_i |U_i^{analitik} - U_i^{nümerik}|$$

olarak tanımlanan hata normları hesaplanmıştır.

**Tablo 4. 1.** Mertebesi (10,2) olan parçalama (splitting) metodun ABA kalıbının katsayıları (Mclachlan, 1995)

$a_1 = a_6 = 1/2 - w_2,$	$b_1 = b_5 = (322 - 13\sqrt{70})/1800,$
$a_2 = a_5 = w_2 - a_3,$	$b_2 = b_4 = (322 + 13\sqrt{70})/1800,$
$a_3 = a_4 = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{40/7}}}{6},$	$b_3 = 64/225,$
$w_2 = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{40/7}}}{6},$	$b_6 = 0,$

Bu kısımda kullanılacak parçalama metodu tablo ( 4.1) de verilmiştir.

Seydaoğlu (2018), çalışmasında Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine bağlı tablo (4.8) ve tablo (4.9) da verilen mertebesi (10,2) olan parçalama yöntemini Mc(10,2) olarak adlandırmıştır. Biz bu çalışmada kapalı sonlu fark yöntemleriyle birlikte kullandığımız tablolarda mertebesi (10,2) olan parçalama yöntemini KMc(10,2) şeklinde göstereceğiz.

Burgers denklemini  $U(a,t) = U(b,t) = 0, t > 0$  sınır şartları ve iki farklı başlangıç koşulu ele alındı.

**Problem 4.1.** Bir boyutlu Burgers denklemini, sınır şartları  $0 < x < 1$  ve  $t > 0$ ,  $U(0,t) = U(1,t) = 0$  ve başlangıç koşulu



$$U(x, 0) = \sin(\pi x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

olmak üzere problemin analitik çözümü,

$$a_0 = \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\} dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\} \cos(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Fourier katsayıları yardımıyla

$$U(x, t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 vt) a_n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 vt) \cos(n\pi x)}$$

olarak verilmektedir (Kutluay ve ark., 1999).

**Problem 4.2.** Bir boyutlu Burgers denklemini, sınır şartları  $0 < x < 1$  ve  $t > 0$ ,  $U(0, t) = U(1, t) = 0$  ve başlangıç koşulu

$$U(x, 0) = 4.x(1 - x)$$

olmak üzere problemin analitik çözümü,

$$a_0 = \int_0^1 \exp\{-x^2 (3v)^{-1} [3 - 2x]\} dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\{-x^2 (3v)^{-1} [3 - 2x]\} \cos(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Fourier katsayıları yardımıyla

$$U(x, t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 vt) a_n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 vt) \cos(n\pi x)}$$

olarak verilmektedir (Kutluay ve ark., 1999).

**Tablo 4. 2.** Problem 4.1 için  $v = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $t = 0.1$  değerleri için KMc(10,2) yöntemi ile yapılan nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

Nümerik Sonuçlar					
$x$	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.5$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	Analitik
0.1	0.11025	0.10974	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21099	0.21013	0.20988	0.20982	0.20979
0.3	0.29315	0.29226	0.29200	0.29192	0.29190
0.4	0.34868	0.34817	0.34800	0.34795	0.34792
0.5	0.37126	0.37155	0.37159	0.37159	0.37158
0.6	0.35720	0.35864	0.35896	0.35903	0.35905
0.7	0.30632	0.30906	0.30971	0.30986	0.30991
0.8	0.22263	0.22656	0.22752	0.22775	0.22782
0.9	0.11439	0.11914	0.12032	0.12060	0.12069
$L_2$	$2.9490 \times 10^{-3}$	$0.7680 \times 10^{-3}$	$0.1887 \times 10^{-3}$	$0.0458 \times 10^{-3}$	
$L_\infty$	$6.3016 \times 10^{-3}$	$1.6327 \times 10^{-3}$	$0.4009 \times 10^{-3}$	$0.0989 \times 10^{-3}$	

**Tablo 4. 3.** Problem 4.2 için  $v = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $t = 0.1$  değerleri için KMc(10,2) yöntemi ile yapılan nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

Nümerik Sonuçlar					
$x$	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.5$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	Analitik
0.1	0.11363	0.11310	0.11295	0.11291	0.11289
0.2	0.21749	0.21660	0.21635	0.21628	0.21625
0.3	0.30225	0.30133	0.30107	0.30100	0.30097
0.4	0.35960	0.35910	0.35894	0.35889	0.35886
0.5	0.38303	0.38338	0.38343	0.38343	0.38342
0.6	0.36866	0.37021	0.37057	0.37064	0.37066
0.7	0.31626	0.31916	0.31986	0.32002	0.32007
0.8	0.22991	0.23405	0.23506	0.23530	0.23537
0.9	0.11813	0.12310	0.12433	0.12463	0.12472
$L_2$	$3.1000 \times 10^{-3}$	$0.8067 \times 10^{-3}$	$0.1977 \times 10^{-3}$	$0.04792 \times 10^{-3}$	
$L_\infty$	$6.5895 \times 10^{-3}$	$1.7001 \times 10^{-3}$	$0.4160 \times 10^{-3}$	$0.10239 \times 10^{-3}$	

Problem (4.1) - (4.2) de  $v = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $t = 0.1$  ve farklı  $\Delta x$  değerleri için kapalı sonlu fark yöntemiyle elde edilen  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata normları tablo (4.2) - (4.3) de verildi. Bu tablolarda konum adım uzunluğu, yani  $\Delta x$  değeri küçüldükçe hata normlarının da küçüldüğü gözlemlenmektedir.

**Tablo 4. 4.** KMc(10,2) için Problem 4.1'in nümerik ve analitik çözümlerinin farklı zamanlarda ve  $\Delta x = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.0001$  değerler için karşılaştırılması

$x$	$t$	$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Analitik	Nümerik	Analitik
0.25	0.4	0.30898	0.30889	0.34180	0.34191
	0.6	0.24079	0.24074	0.26888	0.26896
	0.8	0.19570	0.19568	0.22143	0.22148
	1.0	0.16256	0.16256	0.18815	0.18819
	3.0	0.02712	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.56973	0.56963	0.66048	0.66071
	0.6	0.44720	0.44721	0.52925	0.52942
	0.8	0.35913	0.35924	0.43902	0.43914
	1.0	0.29174	0.29192	0.37433	0.37442
	3.0	0.04005	0.04020	0.15017	0.15018
0.75	0.4	0.62457	0.62544	0.91010	0.91026
	0.6	0.48623	0.48721	0.76701	0.76724
	0.8	0.37296	0.37392	0.64722	0.64740
	1.0	0.28660	0.28747	0.55592	0.55605
	3.0	0.02960	0.02977	0.22481	0.22481

**Tablo 4. 5.** KMc(10,2) için Problem 4.2'nin nümerik ve analitik çözümlerinin farklı zamanlarda ve  $\Delta x = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.0001$  değerler için karşılaştırılması

$x$	$t$	$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Analitik	Nümerik	Analitik
0.25	0.4	0.31762	0.31752	0.36197	0.36226
	0.6	0.24620	0.24614	0.28183	0.28204
	0.8	0.19958	0.19956	0.23031	0.23045
	1.0	0.16559	0.16560	0.19458	0.19469
	3.0	0.02767	0.02776	0.07612	0.07613
0.50	0.4	0.58464	0.58454	0.68336	0.68368
	0.6	0.45798	0.45798	0.54804	0.54832
	0.8	0.36730	0.36740	0.45349	0.45371
	1.0	0.29816	0.29834	0.38550	0.38568
	3.0	0.04091	0.04106	0.15215	0.15218
0.75	0.4	0.64471	0.64562	0.92032	0.92050
	0.6	0.50166	0.50268	0.78271	0.78299
	0.8	0.38435	0.38534	0.66247	0.66272
	1.0	0.29496	0.29586	0.56910	0.56932
	3.0	0.03026	0.03044	0.22772	0.22774

Tablo (4.4) - (4.5) de problemler için değişik  $\nu$  katsayısı ve  $\Delta x = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.0001$  değerler ile farklı zaman adımlarıyla yapılan nümerik hesaplamaların analitik çözüm ile uyumlu olduğu görülmektedir.

**Tablo4. 6.** Problem 4.1'in  $\nu = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $t = 0.1$ ,  $\Delta x = 0.0125$  değerleri için kapalı sonlu fark yöntemine bağlı Lie -Trotter AB ve BA kalıpları ve Strang ABA ve BAB kalıpları ile elde edilen nümerik çözümlerin var olan analitik çözümler ile karşılaştırılması

Nümerik Sonuçlar					
$x$	AB	BA	ABA	BAB	Analitik
0.1	0.23600	0.23601	0.23593	0.23600	0.23594
0.2	0.46128	0.46130	0.46119	0.46129	0.46122
0.3	0.66429	0.66431	0.66422	0.66430	0.66432
0.4	0.83165	0.83167	0.83167	0.83166	0.83186
0.5	0.94701	0.94702	0.94716	0.94702	0.94741
0.6	0.98973	0.98973	0.98996	0.98973	0.99016
0.7	0.93407	0.93405	0.93425	0.93406	0.93413
0.8	0.75205	0.75200	0.75198	0.75203	0.75133
0.9	0.42874	0.42868	0.42848	0.42871	0.42786

**Tablo 4. 7.** Problem 4.2'nin  $\nu = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $t = 0.1$ ,  $\Delta x = 0.0125$  değerleri için kapalı sonlu fark yöntemine bağlı Lie -Trotter AB ve BA kalıpları ve Strang ABA ve BAB kalıpları ile elde edilen nümerik çözümlerin var olan analitik çözümler ile karşılaştırılması

Nümerik Sonuçlar					
$x$	AB	BA	ABA	BAB	Analitik
0.1	0.26601	0.26604	0.26594	0.26603	0.26613
0.2	0.50284	0.50287	0.50275	0.50285	0.50293
0.3	0.70135	0.70137	0.70131	0.70136	0.70150
0.4	0.85508	0.85510	0.85512	0.85509	0.85534
0.5	0.95564	0.95565	0.95578	0.95564	0.95601
0.6	0.99163	0.99163	0.99182	0.99163	0.99199
0.7	0.94679	0.94677	0.94696	0.94678	0.94690
0.8	0.79653	0.79649	0.79653	0.79651	0.79588
0.9	0.50010	0.49999	0.49983	0.50005	0.50024

Tablo (4.6) - (4.7) de  $\nu = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $t = 0.1$ ,  $\Delta x = 0.0125$  değerleriyle Strang splitting ve Lie -Trotter metotları ile elde edilen nümerik sonuçların, analitik sonuçları ile tutarlı olduğu açıkça görülmektedir.

**Tablo 4. 8.** Problem 4.1 için nümerik ve analitik çözümleri farklı zamanda ve  $\nu = 0.01$ ,  $\Delta x = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.01$  değerleri için karşılaştırılması

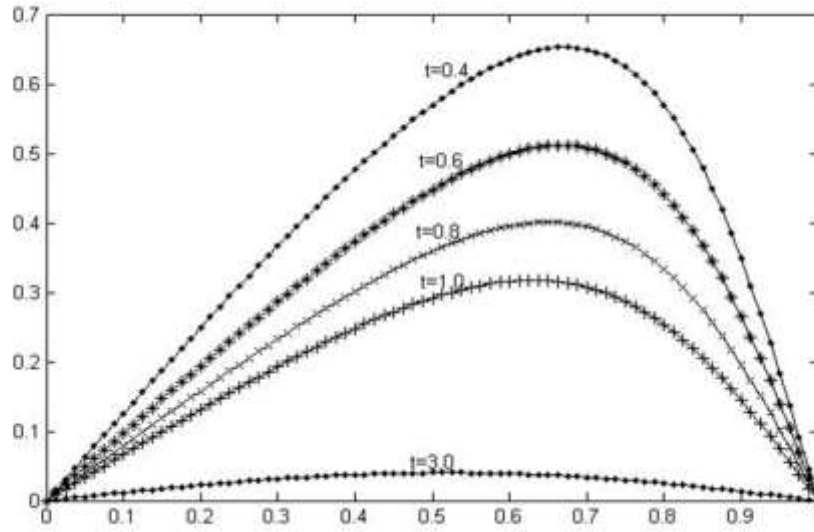
$x$	$t$	[Kadalbajoo ve Awasthi,2006]	[Pandey ve ark., 2009]	KMc(10,2)	Mc(10,2)	Analitik
0.25	0.4	0.34229	0.34267	0.34250	0.34187	0.34191
	0.6	0.26902	0.26908	0.26948	0.26893	0.26896
	1.0	0.18817	0.18806	0.18856	0.18818	0.18819
	3.0	0.07511	0.07505	0.07522	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.66797	0.67588	0.66118	0.66065	0.66071
	0.6	0.53211	0.53678	0.53014	0.52936	0.52942
	1.0	0.37500	0.37671	0.37507	0.37439	0.37442
	3.0	0.15018	0.15022	0.15039	0.15017	0.15018
0.75	0.4	0.93680	0.95424	0.90886	0.91035	0.91026
	0.6	0.77724	0.79252	0.76732	0.76722	0.76724
	1.0	0.55833	0.56535	0.55678	0.55601	0.55605
	3.0	0.22485	0.22528	0.22511	0.22485	0.22481

Tabloda(4.8) de KMc(10,2) metodu kullanılarak elde edilen çözümlerin analitik ve literatürde var olan çözümler ile uyumlu olduğu görülmektedir.

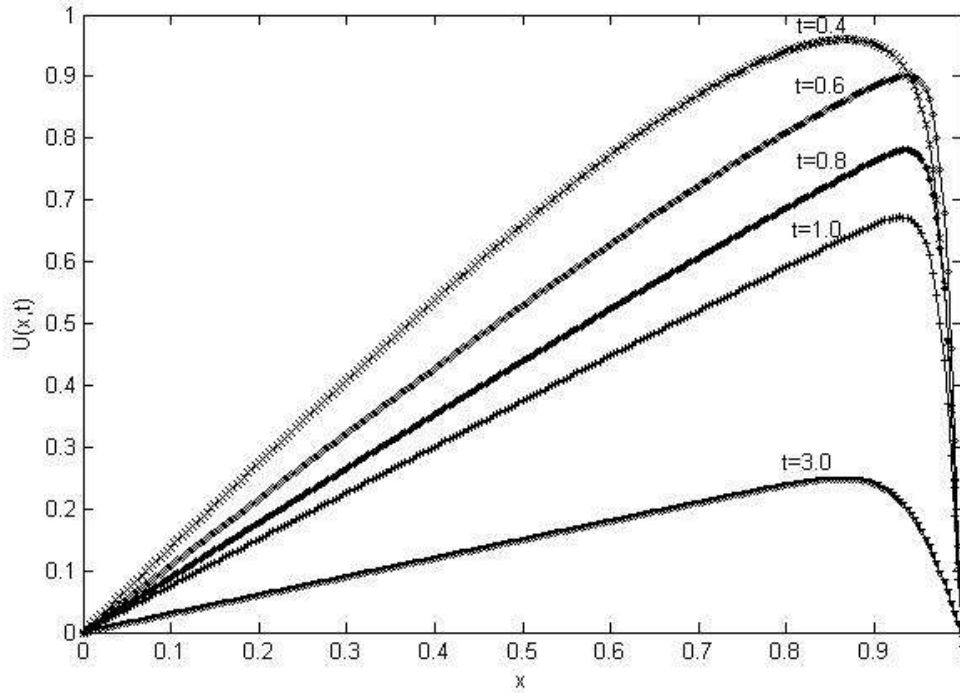
**Tablo 4. 9.** Problem 4.2 için nümerik ve analitik çözümlerinin farklı zamanda ve  $\nu = 0.01$ ,  $\Delta x = 0.0125$   $\Delta t = 0.01$  değerleri için karşılaştırılması

$x$	$t$	(Kadalbajoo ve Awasthi,2006)	(Pandey ve ark., 2009)	KMc(10,2)	Mc(10,2)	Analitik
0.25	0.4	0.36273	0.36339	0.36274	0.36215	0.36226
	0.6	0.28212	0.28228	0.28249	0.28196	0.28204
	1.0	0.19467	0.19458	0.19503	0.19465	0.19469
	3.0	0.07613	0.07607	0.07623	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.69186	0.70088	0.68393	0.68357	0.68368
	0.6	0.55125	0.55671	0.54889	0.54821	0.54832
	1.0	0.38627	0.38826	0.38626	0.38560	0.38568
	3.0	0.15218	0.15223	0.15238	0.15217	0.15218
0.75	0.4	0.94940	0.96667	0.91909	0.92054	0.92050
	0.6	0.79399	0.81017	0.78288	0.78293	0.78299
	1.0	0.57170	0.57942	0.56993	0.56924	0.56932
	3.0	0.22778	0.22824	0.22802	0.22776	0.22774

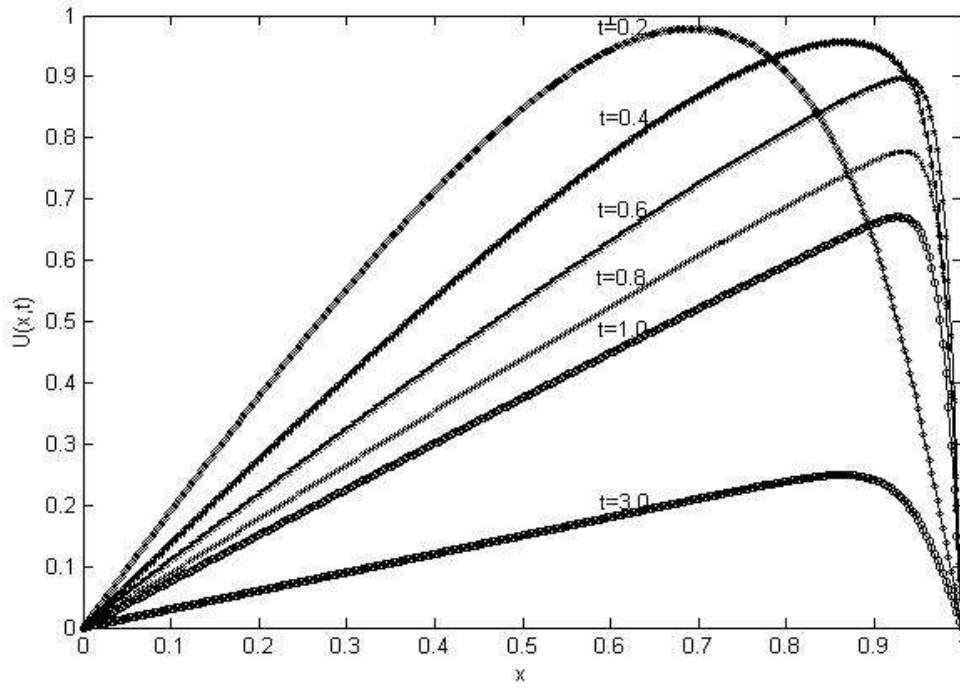
Tabloda(4.9) de KMc(10,2) metodu kullanılarak elde edilen çözümlerin analitik ve literatürde var olan çözümler ile uyumlu olduğu görülmektedir.



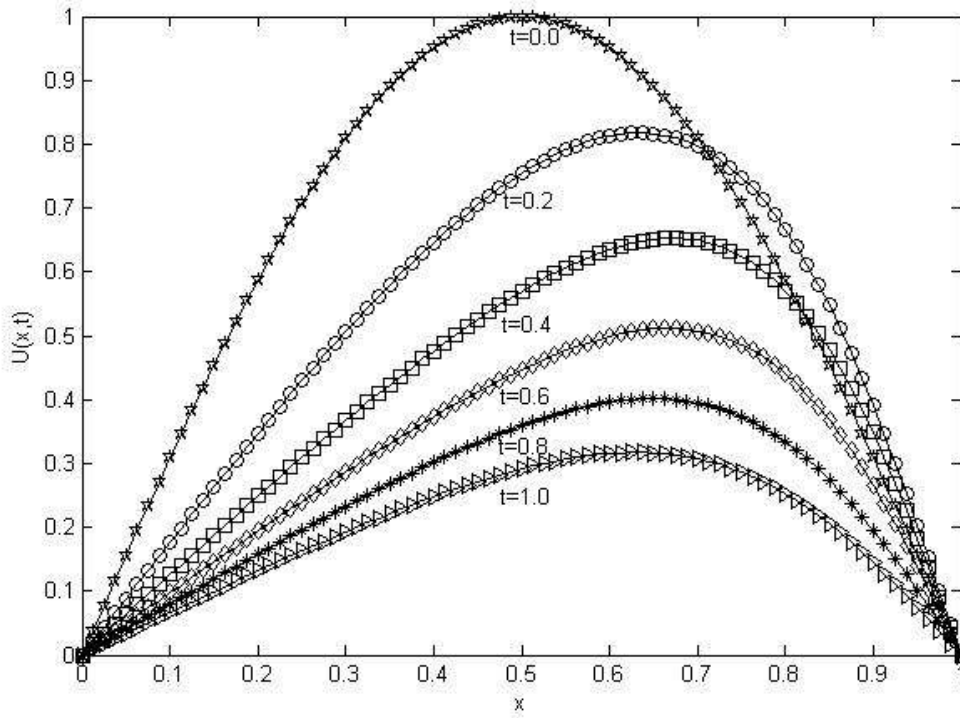
Şekil 4.1.  $\nu = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $\Delta x = 0.0125$  değerleri için problem 4.1'in KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi



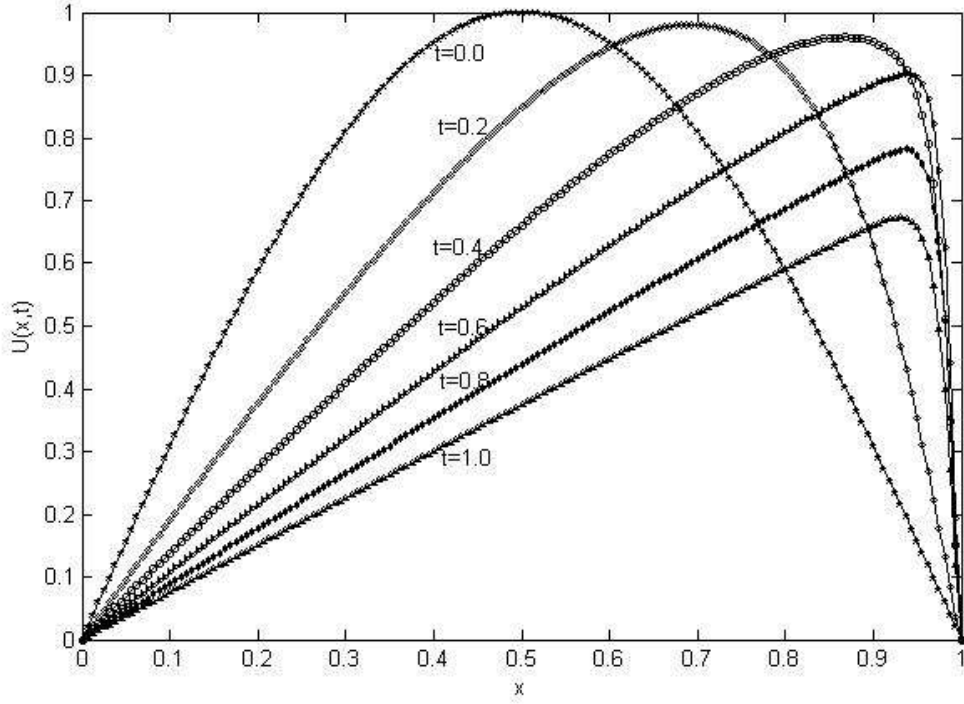
Şekil 4.2.  $\nu = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $\Delta x = 0.0042$  değerleri ile problem 4.1'in KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi



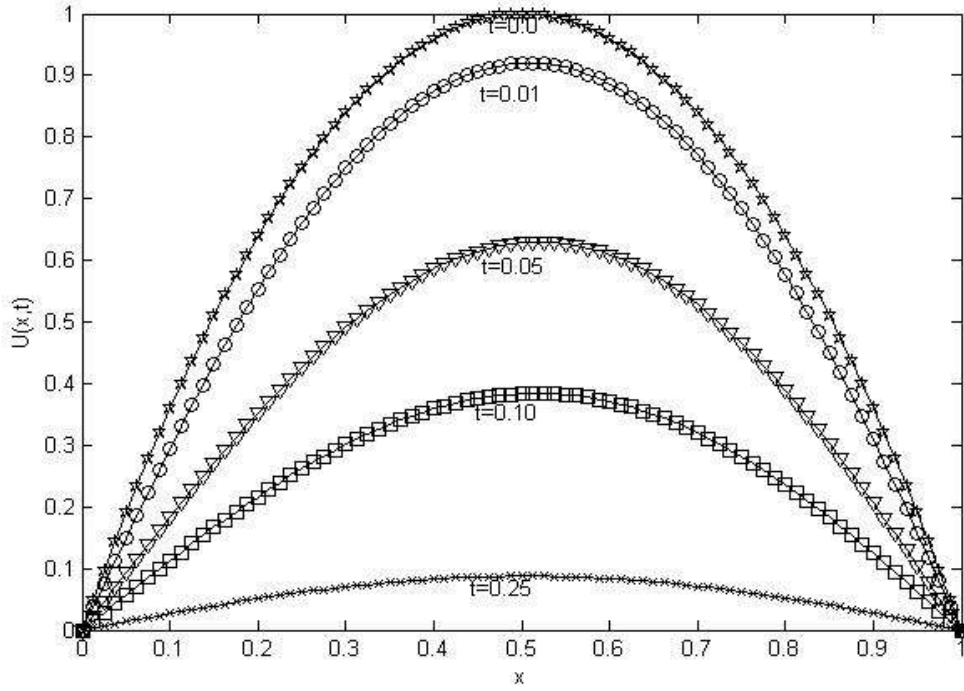
Şekil 4.3.  $\nu = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\Delta x = 0.0031$  değerleri ile problem 4.1'in KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi



Şekil 4.4.  $\nu = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $\Delta x = 0.0125$  değerleri ile problem 4.1'in KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi



Şekil 4.5.  $\nu = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $\Delta x = 0.0063$  değerleri ile problem 4.1'in KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi



Şekil 4.6.  $\nu = 1$ ,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $\Delta x = 0.0125$  değerleri ile problem 4.2'nin KMc(10,2) ile elde edilen nümerik sonuçların farklı zaman değerleri için gösterimi



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kapalı sonlu fark yaklaşımlarına bağlı pertürbe edilmiş sistemler için üretilen parçalama (splitting) metodu kullanılarak Burgers denklemi sayısal olarak çözülmüştür. Burgers denkleminin lineer olmayan kısmını lineerleştirmek için sabit nokta iterasyonu ve küçük viskozite değerleri için ortaya çıkan salınımları dengelemek için filtreleme tekniği kullanıldı.

KMc(10,2) olarak adlandırılan algoritma ile Burgers denkleminin başarılı ve etkili bir şekilde çözülebildiği ve hesaplanan sonuçların analitik çözümler ile uyum içinde olduğu görülmektedir. Öte yandan elde edilen sayısal sonuçların literatürde mevcut olan bazı nümerik sonuçlarla da uyum için de olduğu hatta bazılarında daha da hassas olduğu görülmüştür.

Nümerik hesaplamalar da hassas sonuçlar veren lineer ve lineer olmayan problemler için uygulanan parçalama metodu oldukça iyi sonuçlar vermekte ve Burgers tipi denklemlere de kolayca uygulanabileceği görülmektedir.

## KAYNAKÇA

- Acedo, L., 2006. On the gravitational instability of a set of random walkers, *Europhysics Letters*, 73, 698-704.
- Ames, W.F., 1977. Numerical Methods for partial Differential equations, *Academic Press*, New York.
- Burger, J.M., 1948. A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Applied Mechanics*, 1, 171-199.
- Caldwell, J., Smith, P., 1982. Solution of Burgers equation with a large Reynolds number, *Applied Mathematical Modelling*, 6, 381-385. ,
- Cole, J.D., 1951. On a quasi linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quarterly Applied Mathematics*, 9, 225-236.
- Cordero, A., Franques, A., Torregrosa, J., 2015. Numerical Solution of Turbulence Problems by Solving Burger' equation, *Algorithms.*, 8, 224-233.
- Creutz, M., Gocksch, A., 1989. Higher-order hybrid Monte Carlo algorithms, *Physical Review Letters*, 63, 9- 12.
- Çağal, B. 1989 , Sayısal Analiz, *İstanbul*, 330-334.
- Evans, D.J., Abdullah, A.R., 1984. The group explicit method for the solution of Burgers equation, *Quarterly Applied Mathematics*, 30, 239-253.
- Hairer, E., Lubich, C., Wanner, G., 200, Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, Berlin.
- Hansen, E., Osterman, A., 2009. Exponential splitting for unbounded operators, *Mathematics of Computation*, 78, 1481496.
- Holden, H., Karlsen, K. H., Risebro, N. H., 1999. Operator Splitting for Generalized Korteweg-De Vries Equations, *Journal of Computation Physics*, 153, 203-222.
- Holden, H., Karlsen, K. H., Risebro, N. H., Tao, T., 2011. Operator Splitting for the Kdv equation, *Mathematics. Computation*, 80, 821-846.
- Holden, H., Lubich, C., Risebro, N. H., 2013. Operator Splitting for partial differential equations with Burgers' nonlinearity, *Mathematics. Computation*, 82, 173-185.
- Hopf, E., 1950. The partial differential equation  $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$ . *Communications on Pure Applied Mathematics*, 3, 201-230.
- Iskandar, L., Mohsen, A., 1992, Some numerical experiments on the splitting of Burgers equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 8, 267-276.

- Jain. P. C., Holla, D. N., 1978. Numerical solution of coupled Burgers equation, *International Journal Non Linear Mechanics*, 13, 213-222.
- Jain, P .C., Paja, M., 1979. Splitting-up technique for Burgers equation, *Indian. Journal Pure Applied Mathematics*, 10, 1543-1551.
- Jain. P. C., Shankar, R., Singh, T. V.,1992. Cubic spline technique for solution of Burger' equation with a semi-linear boundary condition, *Communications in Applied Numerical Methods*, 8, 235-242.
- Jiwari, R., 2015. A hybrid numerical scheme for the numerical solution of the Burgers equation, *Computer Physics Communications*, 188, 59-67.
- Jiwari, R., Mittel, R. C., Sharma, K. K., 2013. A numareical scheme based on weighted average differential quadrature method for the numerical solution of Burgers equation, *Applied Matheöatics and Computation*, 219, 6680-6691.
- Khosla, P. K., Rubin, S. G., 1979. Filtering of non-linear instabilities, *Journal Engineering Mathematics*, 13, 127-141.
- Kincaid, D., Cheney, W., 2012, Nümerik Analiz Bilimsel Hesaplama Matematiği, 3, Nuri Özalp/ Nuri Özalp ve Elif Demirci, *Ankara*, Ankara.
- Kutluay, S., Bahadir, A.R., Özdeş, A., 1999. Numerical solution of one dimen-sional Burgers equation: explicit and exact- explicit finite difference methods, *Journal of computational and applied mathematics*, 103, 251-261.
- Kutluay, S., Esen, A., 2004. A linearized numerical scheme for Burgers- like equations, *Applied Mathematics and Computation*, 156, 295-305.
- Laskar, j., Robutel, P., 2001. High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 80, 39-62.
- Landajuela ,M., 2011. Burgers equation. *Basque Center for Applied Mathematics internship*-summer 2011.
- Liao, W., 2008. An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*, 206, 755-764.
- Mclachlan, R.I., 1995. Composition methods in the presence of small parameters, *BIT numerical mathematics*, 35, 258-268.
- Mitta, R.C., Singhal, P., 1993. Numerical solution of Burgers equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9, 397-406.
- O'Brien, C.G., Hyman, M.A., Kaplan, S., 1951. A study of the numerical solution of partial differential equation. *Journal of Mathematics and Physics*, 29, 223-51.

- Öziş, T., Erdoğan, U., 2009. An exponentially fitted method for solving Burgers equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79,696-705.
- Pala, Y., 2006, Modern Uygulamalı Diferansiyel Denklemler, *Ankara*, 76-77, Türkiye.
- Rashidi, M. M., Erfani, E., 2009. New analytic method for solving Burgers and nonlinear heat transfer equations and comparison with HAM, *Computer Physics Communications*, 180, 1539-1544.
- Saka, B., Dağ, I., 2008. A numerical study of the Burgers equation, *Journal of the Franklin Institute*, 345, 328-348.
- Seydaoğlu, M. 2010, Parçalanmış 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Sonlu Fark Yöntemleri ile Nümerik Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, İnönü Üniversitesi, Malatya, xi-3.
- Seydaoğlu, M. 2016, Splitting methods for autonomous and non-autonomous perturbed equations, Doktora Tezi, *Universitat Politècnica de Valencia*, İspanya, 13-14.
- Seydaoğlu, M., 2018. An accurate approximation algorithm for Burgers equation in the presence of small viscosity, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 344 (2018) 473-481.
- Smith, G.D.,1985, Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Clarendon Pres-Oxford, *The American Physical Society*, Vol,39, Number 6, pp 1594-1601.
- Suzuki, M., 1990. Fractal decomposition of exponential operators with applications to many-body theories and Monte Carlo simulations, *Physics Letters A*, 146, 319-323.
- Yoshida, H., 1990. Construction of higher order symplectic integrator, *Physics Letters A*, 150, 262-268.
- Zeytinoğlu, A., 2010, Burgers Denklemlerinin Bazı Yaklaşık Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, 1-2.

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	✓	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	✓	
Denklem yazımları uygun mu?	✓	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirim, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	✓	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	✓	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	✓	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	✓	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	✓	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	✓	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	✓	
*Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	✓	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

Unvanı Adı SOYADI

Öğrenci : Gülşen BAYAR

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

İmza

B. Gülşen

Muaz Seydaoğlu

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum.**

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI

Dr. Öğretim Üyesi Hürun ÖNLÜ

Tarih

17.07.2019

İmza

Hürun Önlü

**ÖZGEÇMİŞ****KİŞİSEL BİLGİLER**

<b>Adı Soyadı</b>	Gülşen BAYAR
<b>Uyruğu</b>	T.C
<b>Doğum Yeri ve Tarihi</b>	Muş / Korkut/16.06.1991
<b>Telefon</b>	05453104921
<b>E-mail</b>	Ressamm021@gmail.com

**EĞİTİM**

<b>İlköğretim</b>	75.Yıl Korkut İlköğretim Okulu / Korkut
<b>Lise</b>	Korkut Çok Programlı Lisesi / Korkut-2011
<b>Üniversite</b>	Dicle Üniversitesi / 2015
<b>Yüksek lisans</b>	Muş Alparslan Üniversitesi / 2019

**UZMANLIK ALANI:** Uygulamalı Matematik

**YABANCI DİLLER:** İngilizce