T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI İLİŞKİLİ EĞRİLER İÇİN FERMİ-WALKER TÜREVİ

Saniye KARATAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2019

MUŞ

TEZ KABUL VE ONAYI

Saniye KARATAŞ tarafından hazırlanan "Bazı İlişkili Eğriler İçin Fermi-Walker Türevi " adlı tez çalışması 17/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Talat KÖRPINAR MŞÜ, Fen Edebiyat Fak., Matematik	…………………………
Danışman Doç. Dr. Talat KÖRPINAR MŞÜ, Fen Edebiyat Fak., Matematik	…………………………
Üye Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK Bitlis Eren Üni., Fen Edebiyat Fak., Matematik	…………………………
Üye Dr. Öğr. Üyesi Selçuk BAŞ MŞÜ, Malazgirt MYO, Muhasebe ve Vergi Uygulamaları	…………………………

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 21/06/2019 Tarih ve 17/IV nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Saniye KARATAŞ

21/06/2019

S. Karataş

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI İLİŞKİLİ EĞRİLER İÇİN FERMİ-WALKER TÜREVİ

Saniye KARATAŞ

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Talat KÖRPINAR

2019, 32 Sayfa

Jüri
Danışman: Doç. Dr. Talat KÖRPINAR
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Selçuk BAŞ

Bu çalışmanın amacı, diferansiyel geometride bildiğimiz birçok eğrinin Fermi-Walker türevi ile yeniden tanımlanabileceğini ifade etmektir. Bu tanımlar geometriye sağlayacağı yararlar bakımından önemlidir. Diferansiyel geometride en dikkat çekici konuların başında eğriler gelmektedir. Bu eğrilerden özel olarak tanımlanan W-yön eğrisinin Fermi-Walker türevini ifade ederek W-yön eğrisine yeni bir tanım getirmiş olduk. Ayrıca hareketli çatıya alternatif bir yaklaşım olan Bishop çatısının Fermi-Walker türevi ifade edildi. Böylece Bishop çatısının Fermi-Walker paralel çatı olduğu gösterilmiş olup Frenet çatı yerine Fermi-Walker paralel çatısının kullanılabileceği ifadesi diferansiyel geometri çalışmaları için önemli bir kaynak olmuştur.

Bu tez çalışmasında Fermi-Walker türevi tanımı ile yeni ilişkili eğrilerin bazı özel karakterizasyonlarından yaralanılmıştır.

.

Anahtar Kelimeler: Bishop Çatısı, Frenet Eğrisi, Fermi-Walker Türevi, W-Yön Eğrisi.

ABSTRACT

MS THESIS

FERMİ-WALKER DERIVATIVE FOR SOME RELATED CURVES

Saniye KARATAŞ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE
OF MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS SCIENCE

Advisor: Doç. Dr. Talat KÖRPINAR

2019, 32 Pages

Jury
Advisor: Assoc. Prof. Talat KÖRPINAR
Jury Member: Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK
Jury Member: Dr. Öğr. Üyesi Selçuk BAŞ

The aim of this study is to state that many curves in differential geometry can be redefined by Fermi-Walker derivative. These definitions are important in terms of their benefits to geometry. Curves are the most striking subjects in differential geometry. We have introduced a new definition to the W-direction curve by expressing the Fermi-Walker derivative of the W-direction curve defined specifically from these curves. Also, the Fermi-Walker derivative of the Bishop Frame, an alternative approach to the moving frame, was expressed. Thus, the Fermi-Walker parallel frame has been shown to be the Bishop frame, and the Fermi-Walker parallel frame can be used instead of the brake frame.

In this thesis, some special characterizations of new associated curves were used with the definition of Fermi-Walker derivative.

.

Keywords: Bishop Frame, Frenet Curves, Fermi-Walker Derivation, W-Direction Curves.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmanın konusu yüksek lisans dönemi içerisinde yapılan araştırma ve çalışmaların neticesinde ortaya konulmuştur. Bu çalışma, Muş Alparslan Üniversitesi Matematik Bölümü Ana Bilim Dalı Başkanlığı bünyesinde gerçekleştirilmiştir.

Yüksek lisans eğitimim boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, sabırla çalışmam konusunda yol gösteren saygı değer hocam Doç. Dr. Talat KÖRPINAR'a teşekkürü bir borç bilirim. Diğer hocalarıma da ayrıca teşekkür ederim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Saniye KARATAŞ
MUŞ-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

W(s) **:** W-yön eğrisi

$\overline{\mathbf{T}}$ **(s)** **:** Teğet normal vektör alanı

$\overline{\boldsymbol{N}}$**(s)** **:** Asli normal vektör alanı

$\overline{\boldsymbol{B}}$**(s)** **:** Asli normal vektör alanı

1. GİRİŞ

Bu çalışmada yönlendirilmiş bir yüzey ve yay uzunluğu ile verilen regüler bir eğrinin Frenet çatısı ve Frenet formülleri yardımıyla ifade edilen bazı yeni ilişkili eğrilerden biri olan W-yön eğrisi ve W-doğrultman eğrisi tanımından W-yön eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanları;

$$\overline{\boldsymbol{T}} = (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{T} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{B}) \ ,$$

$$\overline{\boldsymbol{N}} = (\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{T} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{B}) \ ,$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{T}} \times \overline{\boldsymbol{N}} = -(\frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{N}$$

ifadelerinin Fermi-Walker türevi ifade edilmiştir. Fermi-Walker türevi verilen bu ifadelerin asli, normal ve binormal vektör alanlarının Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerekli durumlar incelendi. Daha sonra haraketli bir çatıya alternatif bir yaklaşım olan Bishop çatısının tanımı göz önüne alınarak W-yön eğrisi ile özel olarak tanımlanan;

$$\overline{\boldsymbol{T}}(s) = \boldsymbol{M}_1(s)$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}_1(s) = -\cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) + \sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s),$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}_2(s) = \sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) + \cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

eğrilerinin Fermi-Walker türevi verildi. Fermi-Walker türevi verilen $\overline{\boldsymbol{M}}_1$-yön eğrisi ve $\overline{\boldsymbol{M}}_2$-yön eğrilerinin Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerekli durumlar ifade edilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Hacısalihoğlu (2000), bir uzay eğrisinin Frenet üç ayaklısının haraketini açıklayarak teğet, normal ve binormal vektörlerini vermiştir. 1977'de n-boyutlu Öklid uzayında haraket geometrisi üzerinde durmuştur.

Hacısalihoğlu (2000), bir uzay eğrisinin Frenet çatısının eğri boyunca haraketi esnasında rektifiyan düzleminde açılamayan bir yüzey üzerine çizilmiş parametre eğrilerinin özelliklerini incelemiştir. Benn and Tucker (1989), Fermi-Walker türevini vermiştir.

Karakuş (2012), Öklid uzayında Fermi-Walker türevi ve geometrik uygulamalarını vermiştir. Fermi-Walker anlamında paralel olmayı ifade etmiştir. Haraketlerin modellenmesinde Frenet çatısı yerine Fermi-Walker paralel çatı kullanılabileceğini belirtmiştir.

Ayrıca diferansiyel geometride Öklid 3-uzayında eğriler teorisi ana çalışma alanlarından biridir. Irsland and Nesovic (2008), doğrultucu eğriyi, konum vektörlerini her zaman asli normal vektör alanının ortogonal tamamlayıcısı içinde bulunan bir eğri olarak tanımlamıştır.

Choi and ark.'nın (2012) E^3 minkowski uzayında Frenet eğrisinin asli yönlü eğri ve asli (binormal) eğrisi kavramını tanıttı. Körpınar T. ve ark.'nın (2013) E^3 de Bishop çatısını kullanarak yeni ilişkili eğrileri ifade etmişlerdir.

Bütün bu bilgilerden yola çıkarak çalışmamızda özel olarak tanımlanan eğrilerden W-yön eğrisinin Fermi-Walker türevi verilerek, Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerekli durumlar incelenmiştir. Daha sonra Bishop çatısına göre tanımlanmış eğrilerinde Fermi-Walker türevi ifade edilmiştir. Fermi-Walker anlamında paralel olmaları için gerekli durumlar incelenmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

İlk olarak Hacısalihoğlu (2000), afin uzay, Öklid uzay, Frenet üç ayaklısının teğet, normal, binormal vektörlerinin tanımları verilecektir. Daha sonra Benn ve Tucker (1989), Fermi-Walker türevi tanımı verilecektir. Sonrasında Karakuş ve Körpınar'ın (2011) araştırmalarından faydalanılarak W-yön eğrilerinin Fermi-Walker türevi verilecektir. Fermi-Walker türevi verilen bu ifadelerin paralel olma durumlarını vereceğiz. Ayrıca Körpınar ve ark'nın (2013) Bishop çatısına göre tanımladıkları $\overline{\boldsymbol{M}}_1$-yön eğrisi ve $\overline{\boldsymbol{M}}_2$-yön eğrilerinin Fermi-Walker türevini vereceğiz ve bu eğrilerin Fermi-Walker anlamında paralel olmaları için gerekli durumların neler olduğunu ifade edeceğiz.

3.1. Temel Tanımlar

Tanım 3.1. A boş olmayan bir cümle ve K cisimi üzerindeki vektör uzayı $\boldsymbol{V}$ olsun.Aşağıda verilen önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \to \boldsymbol{V}$$

fonksiyonu varsa, A ya $\boldsymbol{V}$ ile birleşen *afin uzay* denir.

(i) $\forall P, Q, R \in A$ için

$$f(P,Q) + f(Q,R) = F(P,R)$$

(ii) $\forall P, Q, R \in A$ ve $\alpha \in \boldsymbol{V}$ için

$$f(P,Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 3.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen bir vektör uzayıda $\boldsymbol{V}$ olsun. $\boldsymbol{V}$ vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to R$$

$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına Öklid uzay denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 3.3. n-boyutlu Öklid uzay E^n ve I, R nin irtibatlı açık alt cümlesi olmak üzere,

$$\alpha: I \subset R \rightarrow E^n$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise $\alpha(t)$ cümlesine E^n de bir eğri ve $t \in I$ değişkenine de eğrinin parametresi denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 3.4. M eğrisi(I, α)koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Bu durumda$\Psi = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^r\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$ olmak üzere Ψ den elde edilen $\{V_1, \ldots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin *Frenet r-ayaklısı alanı*ve $m \in M$ için $\{\boldsymbol{V}_1(m), \ldots, \boldsymbol{V}_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki *Frenet r-ayaklısı* denir. Her bir $\boldsymbol{V}_i, 1 \leq i \leq r$ ye *Frenet vektörü* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 3.5. $\alpha: I \subset R \rightarrow E^3$ eğrisi, $t \in I$ için eğrinin teğet vektör alan

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t),$$

eğrinin asli normal vektör alan

$$\boldsymbol{N}(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|},$$

eğrinin binormal vektör alan

$$\boldsymbol{B}(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\| \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \|}$$

olmak üzere bu vektörlerden oluşan $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ sistemine Frenet 3-ayaklısıdenir.$\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ Frenet 3-ayaklısı ortonormal bir çatıdır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 3.6. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), \ldots, V_r(s)\}$ olsun. Buna

$$k_i: I \rightarrow R, 1 \leq i \leq r$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonuve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğriliğidenir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 3.7. $\alpha: I \subset R \rightarrow E^3$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

s yay parametresi ile verilen bir eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ olsun.

$$\boldsymbol{T}'(s) = k_1(s)\boldsymbol{N}(s),$$
$$\boldsymbol{N}'(s) = -k_1(s)\boldsymbol{T}(s) + k_2(s)\boldsymbol{B}(s),$$
$$\boldsymbol{B}'(s) = -k_2(s)\boldsymbol{N}(s)$$

denklemlerine Frenet formülleri denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 3.8. $\alpha: I \subset R \to E^3$ eğrisi için

$$\kappa(s) = k_1(s) = \| \alpha''(s)\|$$

değerine $\alpha(s)$ eğrisinin s-noktasındaki eğriliğidenir (Carmo, 1976).

Tanım 3.9. $\alpha: I \subset R \to E^3$ eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. $\alpha''(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\boldsymbol{B}'(s) = \tau(s)\boldsymbol{N}(s)$$

eşitliği ile tanımlı $\tau(s)$ sayısına $\alpha(s)$ eğrisinin s -noktasındaki burulması denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 3.10. Normal vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğriye slant helis denir (Izumiya and Takeuchi, 2004).

Tanım 3.11. E^3 Öklid uzayında bir $\alpha(s)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı $\boldsymbol{T} = \alpha'(s)$ olsun. **T** vektör alanı belirli bir $\boldsymbol{u}$ vektörü ile sabit açı yapıyorsa $\alpha(s)$ eğrisine *genel helis* denir (Izumiya and Takeuchi, 2004).

Tanım 3.12. X , s yay parametreli $\alpha: I \subset R \to E^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere;

$$\tilde{\nabla}_{\bar{T}} X = \nabla_{\boldsymbol{T}} X - \langle \boldsymbol{T}, X\rangle A + \langle A, X\rangle \boldsymbol{T}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\nabla}_{\bar{T}} X$ türevine $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi denir (Benn and Tucker, 1989). Burada $\boldsymbol{T} = \frac{d\alpha}{ds}$, $A = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}$ dir.

Tanım 3.13. X , s yay parametreli $\alpha: I \subset R \to E^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere eğri boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_{\bar{T}} X = 0$$

ise X vektör alanına $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir denir (Benn and Tucker, 1989).

Tanım 3.14. Bir $\gamma: I \to E^3$ eğrisinin konum vektörü daima kendi rektifyan düzleminde kalıyorsa bu eğriye rektifiyan eğri denir (Chen, 1966).

Tanım 3.15. s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca

$$\bar{\nabla}_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{T} = w^* \wedge \boldsymbol{T},$$

$$\bar{\nabla}_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{N} = w^* \wedge \boldsymbol{N},$$

$$\bar{\nabla}_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{B} = w^* \wedge \boldsymbol{B}$$

olacağından

$$w^* = \tau \boldsymbol{T}$$

vektörüne $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ Frenet çatısına göre Fermi-Walkeranlamında Darboux vektörü denir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

Tanım 3.16. $\gamma: I \to E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet elemanları$\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \kappa, \tau\}$ olsun.

$\varpi = \tau \boldsymbol{T} + \kappa \boldsymbol{B}$ vektör alanına γ eğrisinin Darboux vektör alanı denir.

$$\boldsymbol{W}(s) = \frac{\varpi(s)}{P\varpi(s)P} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} (\tau(s)\boldsymbol{T}(s) + \kappa(s)\boldsymbol{B}(s))$$

vektörüne ise γ eğrisinin Darboux göstergesi denir. Bu vektör $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ üç ayaklısının her s anında bir ani helis haraketi yaptığı eksenidir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

Tanım 3.17. E^3 Öklid uzayında birim hızlı$\alpha: I \subset R \to E^3$ eğrisinin teğet vektör alanı $\boldsymbol{T}$ olsun. Eğri boyunca

$$\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle = 0$$

şartını sağlayan vektör alanları $\boldsymbol{N}_1$ ve $\boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{N}_1$ olmak üzere $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2$vektör alanları hareketli α eğrisi boyunca ortonormal bir çatı oluşturur. Bu $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\}$ çatısına *Bishop Çatısı* denir (Bishop, 1975).

3.2. Frenet Eğrisinin Bazı Yeni Eğrilerinin İlişkileri

M yönlendirilmiş bir yüzey ve $\beta = I \subset R \to M$ yay uzunluğu ile verilen regüler bir eğri olsun. Eğer $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ eğri boyunca Frenet formülleri

$$\boldsymbol{T}' = \kappa \boldsymbol{N},$$
$$\boldsymbol{N}' = -\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B},$$
$$\boldsymbol{B}' = -\tau \boldsymbol{N}$$

ile verilir. Burada $\boldsymbol{T}$ birim tanjant vektör, $\boldsymbol{N}$ asli normal vektör, $\boldsymbol{B}$ binormal vektör,κ ve τ, β'nın eğriliği ve burulmasıdır. M üzerinde bulunan β eğrisinden başka bir eğri daha vardır. Burada eğri boyunca $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}\}$ Darboux çatısı olarak adlandırılır. Bu çatıda $\boldsymbol{T}$ eğrinin birim teğeti, $\boldsymbol{U}$ eğriyle sınırlanan yüzeyin birim normali ve $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{T}$ birim vektörü ile verilir.

Darboux Çatısının türev formülü;

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{V}' \\ \boldsymbol{U}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{U} \end{bmatrix}$$

dir. Burada κ_g geodezik eğrilik, κ_n normal eğrilik ve τ_g de β' nın geodezik burulmasıdır. Geodezik eğrilik, geodezik burulma, normal eğrilik ve κ ve τ arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir.

$$\kappa_g = \kappa \sin \phi, \qquad \kappa_n = \kappa \cos \phi \ , \qquad \tau_g = \tau + \frac{d\phi}{ds}.$$

Burada ϕ, $\boldsymbol{U}$ ve $\boldsymbol{N}$ vektörleri arasındaki açıdır.

Yüzeylerin diferansiyel geometrisinde M yüzeyinde bulunan β eğrisi için aşağıdakiler verilir.

i) $\kappa_g = 0$ ise ancak ve ancak β asimptotik bir eğridir.

ii) $\kappa_n = 0$ ise ancak ve ancak β asimptotik bir doğrudur.

iii) $\tau_g = 0$ ise ancak ve ancak β asli doğrudur.

$\alpha: I \subset R \to \boldsymbol{E}^4$ parametrik yay uzunluğu ile verilen keyfi bir eğri olsun. Eğer α boyunca haraketli Frenet çatısı $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2\}$ ise Frenet formülleri aşağıdaki gibi verilir;

$$\boldsymbol{T}' = \kappa_1 \boldsymbol{N},$$
$$\boldsymbol{N}' = -\kappa_1 \boldsymbol{T} + \kappa_2 \boldsymbol{B}_1,$$
$$\boldsymbol{B}_1' = -\kappa_2 \boldsymbol{N} + \kappa_3 \boldsymbol{B}_2,$$
$$\boldsymbol{B}_2' = -\kappa_3 \boldsymbol{B}_1. \tag{3.18}$$

Burada $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}_1$ ve $\boldsymbol{B}_2$ teğet, binormal, asli normal ve ikinci normali temsil eder. $(k_i = 1,2,3)$ α eğrisinin $(k_1, k_2 > 0)$ eğrilik fonksiyonları ile tanımlanır (Gluck, 1966).

Tanım 3.18. γ, E^3 de bir eğri olsun. Eğer rektifiyan düzleminde baz doğrularının vektörel konumu γ ise γ rektifiyan eğri olarak tanımlanır (Chen, 2003).

Tanım 3.19. C^n sınıfının birim hızlı eğrisi $\beta: I \to E^n$ bir Frenet eğrisi ise $\beta'(s), \beta''(s), \ldots, \beta^{(n-1)}(s)$ vektörleri eğri boyunca her noktada lineer bağımsızdır. $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ Frenet çatısı ile $\gamma: I \subset R \to E^3$ Frenet eğrisi için $V(s) = u(s)\boldsymbol{T}(s) + v(s)\boldsymbol{N}(s) + w(s)\boldsymbol{B}(s)$ ile verilen V vektör alanını düşünelim. Burada u, v, w

$$u^2(s) + v^2(s) + w^2(s) = 1$$

γ eğrisine cevap veren fonksiyondur. O zaman V nin $\overline{\gamma}(s)$ inteğral eğrisi E^3 de I üzerinde bir birim hızlı eğridir.

Tanım 3.20. γ , E^3 de Frenet eğrisi ve w, γ'nin birim Darboux vektör alan olsun. γ'nin W-yönlü eğrisi $w(s)$'nin inteğral eğrisi olarak tanımlanır. Yani $\overline{\gamma}(s)$ eğrisi γ nin W-yönlü eğrisi ise $w(s) = \overline{\gamma}'(s)$ dir. Burada

$$W = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (\tau \boldsymbol{T} + \kappa \boldsymbol{B})$$

dir.

Tanım 3.21. $\overline{\gamma}$ ve γ için bazı s yay uzunluğu parametresi kullanabiliriz. W-yön eğrisinin tanımından

$$w(s) = \overline{\gamma}'(s) = \overline{\boldsymbol{T}}(s) \tag{3.21}$$

elde edilir. $\overline{\gamma}$ nin $\overline{\boldsymbol{B}}$ binormal vektör alan ve $\overline{\boldsymbol{N}}$ asli normal vektör alan olmak üzere;

$$\overline{\boldsymbol{T}} = (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{T} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{B}),$$

$$\overline{\boldsymbol{N}} = (\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{T} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{B}),$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{T}} \times \overline{\boldsymbol{N}} = -(\frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{N}$$

Verilir (Macit ve Düldül, 2014).

3.3. Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Eğriler

Bishop çatısı haraketli bir çatının tanımına alternatif bir yaklaşımdır. İyi tanımlanmış bir eğrinin ikinci türevi olmayabilir. Bir çatının her bileşeninin paralel dönüşümü ile sadece bir eğri boyunca ortonormal çatının paralel bileşeni ifade edilebilir. Çatının geri kalan kısmı için uygun keyfi bir baz ve teğet vektör kullanılır. Bishop çatısı

$$\boldsymbol{T}' = k_1\boldsymbol{M}_1 + k_2\boldsymbol{M}_2$$
$$\boldsymbol{M}_1' = -k_1\boldsymbol{T}$$
$$\boldsymbol{M}_2' = -k_2\boldsymbol{T}$$

şeklinde verilir. $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2\}$ kümesinde k_1 ve k_2 Bishop eğrilikleridir. $\gamma: I \rightarrow \boldsymbol{M}$ Frenet eğrisi için bir V vektör alan

$$\boldsymbol{V}(s) = u(s)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s}) + v(s)\boldsymbol{N}(s) + w(s)\boldsymbol{B}(s)$$

ile verilir (Choi and Kim, 2012).

Önerme 3.22. $\gamma,\ E^3$ de bir Frenet eğrisi ve $\overline{\gamma}$ de bir inteğral eğrisi olsun. γ dönüşümüne kadar$\overline{\gamma}$ nin asli yön eğrisidir ancak ve ancak

$$u(s) = 0, v(s) = -cos(\int \tau(s)ds) \neq 0\,, w(s) = sin(\int \tau(s)ds),$$

dir (Körpınar, Sarıaydın ve Turhan, 2013).

Tanım 3.23. $\beta,\ E^3$ de bir Frenet eğrisi olsun. $\boldsymbol{M}_1$ in inteğral eğrisi Bishop çatısına göre β nın $\boldsymbol{M}_1$ -yön eğrisi olarak adlandırılır. O zaman $\boldsymbol{M}_1$ -yön eğrisi $u(s) = w(s) = 0, v(s) = 1$ ile

$$\boldsymbol{V}(s) = u(s)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s}) + v(s)\boldsymbol{M}_1(s) + w(s)\boldsymbol{M}_2(s)$$

ifadesinin bir integral eğrisidir (Körpınar, Sarıaydın ve Turhan, 2013).

Teorem 3.24. β, τ burulma ve κ eğriliği ile E^3 de bir Frenet eğrisi ve $\overline{\beta}$, $\overline{\tau}$ burulma ve $\overline{\kappa}$ eğriliği ile β nın $\boldsymbol{M}_1$-yön eğrisi olsun. O zaman $\overline{\beta}$ nın Frenet çatısı

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}(s) = \boldsymbol{M}_1(s)$$

$$\overline{\boldsymbol{N}}(s) = -\boldsymbol{T}(s)$$

$$\overline{\boldsymbol{B}}(s) = \boldsymbol{M}_2(s)$$

ile verilir. $\overline{\kappa}(s) = k_1(s)$ ve $\overline{\tau}(s) = -k_2(s)$ alınabilir (Choi ve Kim, 2012).

Sonuç 3.25. β, τ burulma ve κ eğriliği ile E^3 de bir Frenet eğrisi ve $\overline{\beta}, \overline{\tau}$ burulma ve $\overline{\kappa}$ eğriliği ile β nın $\boldsymbol{M}_1$-yön eğrisi olsun. $\overline{\beta}$ nın Bishop çatısı ;

$$\overline{\boldsymbol{T}}(s) = \boldsymbol{M}_1(s)$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}_1(s) = -\,cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) + sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}_2(s) = sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) + cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

ile verilir (Körpınar ve ark., 2013).

4. ARAŞTIRMA VE BULGULARI

4.1. W-Yön Eğrilerinin Fermi-Walker Türevi

Teorem 4.1. Bir w-yön eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanlarının Frenet eğrilikleri yardımıyla Fermi-Walker türevi aşağıdaki şekilde verilir.

$$\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\overline{\boldsymbol{T}}=[(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{T}+[(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{B},$$

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}}=[(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'+(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

$$+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{T},$$

$$-[(\frac{k^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}+\frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{N}+[(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

$$+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})+(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{B},$$

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{B}}=\kappa\boldsymbol{T}-\tau\boldsymbol{B}.$$

İspat: W-yön eğrisinin tanımından $w(s)=\overline{\gamma}'(s)=\overline{\boldsymbol{T}}(s)$ olduğu (3.4) denkleminde verildi. Burada $\overline{\mathbf{T}}$ ifadesi

$$\overline{\boldsymbol{T}}=(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{T}+\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{B})$$

eşitliği ile tanımlandı. $\overline{T}$ ifadesinin Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}=\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}-\langle\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{T}}\rangle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}+\langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{T}}\rangle\overline{\boldsymbol{T}} \quad (4.1)$$

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}=\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}-\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}+\langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{T}}\rangle$$

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}=\langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{T}}\rangle\overline{\boldsymbol{T}}$$

dir**.** Burada ilk olarak Fermi-Walker tanımı gereği $\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}$ türevini bulalım. Buna göre

$$\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}=(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{T}+\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{B})'$$

$$=(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{T}+(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{T}'$$

$$+(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{B} + (\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{B}' \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.2) denkleminde $\boldsymbol{T}'$ ve $\boldsymbol{B}'$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} = (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{T} + (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\kappa\boldsymbol{N})$$
$$+(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{B} + (\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(-\tau\boldsymbol{N})$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra

$$\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} = (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{T} + (\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{B} \tag{4.3}$$

elde edilir. Ayrıca iç çarpım yardımıyla

$$\langle\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{T}}\rangle\overline{\boldsymbol{T}} = \langle(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{T} + (\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{B}, (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{T} + (\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{B}\rangle\overline{\boldsymbol{T}}$$
$$= [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}) + (\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]$$
$$[\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{T} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{B}]$$

hesaplanır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\langle\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{T}}\rangle\overline{\boldsymbol{T}} = [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{T} + [(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{B} \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilir. (4.3) ve (4.4) eşitlikleri (4.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} = [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{T} + [(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{B}$$

denklemi elde edilir.

Benzer şekilde $\overline{\gamma}$ nin $\overline{\boldsymbol{N}}$ asli normal vektör alanı

$$\overline{\boldsymbol{N}} = (\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{T} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{B})$$

eşitliği ile tanımlandı. $\overline{\boldsymbol{N}}$ nın Fermi-Walker türevi:

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}} = \nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}} - \langle\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{N}}\rangle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} + \langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{N}}\rangle\overline{\boldsymbol{T}}$$
$$= \nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}} + \langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{N}}\rangle\overline{T} \tag{4.5}$$

dir. Fermi-Walker tanımı gereği $\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}}$ türevini bulalım. Buna göre

$$\overline{\boldsymbol{N}} = (\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{T} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\boldsymbol{B})'$$

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}} = (\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{T} + \left(\frac{-\boldsymbol{k}}{\sqrt{\boldsymbol{\kappa}^2+\boldsymbol{\tau}^2}}\right)\boldsymbol{T}', +(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{B} + (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{B}' \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) denkleminde $\boldsymbol{T}'$ ve $\boldsymbol{B}'$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}} = (\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{T} - (\frac{k^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{N} + (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{B} - (\frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{N}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}} = (\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{T} - (\frac{k^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{N} + (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{B} \tag{4.7}$$

elde edilir. Ayrıca iç çarpım yardımıyla

$$\langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{N}}\rangle = \langle(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{T} + (\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{B}, (\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{T} + (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{B}\rangle$$

$$= (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle + (\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\langle\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\rangle$$

$$+(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}\rangle + (\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\langle\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\rangle$$

hesaplanır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{N}}\rangle = (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}) + (\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

eşitliği elde edilir.

$$\langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{N}}\rangle\overline{\boldsymbol{T}} = [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}) + (\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'$$

$$(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})][(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]$$

$$= [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}) + (\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]$$

$$(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{T} + [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

$$+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})](\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{B} \tag{4.8}$$

bulunur. (4.7) ve (4.8) ifadeleri (4.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}} = (\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{T} - (\frac{k^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{N}$$

$$+(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{B} + (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + (\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'$$

$$(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})](\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}) + (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

$$+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})](\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\boldsymbol{B}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}} = [(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})' + (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

$$+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{T} - [(\frac{k^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

$$+\frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{N} + [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

$$+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}) + (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})']\boldsymbol{B}$$

elde edilir.

Son olarakda $\overline{\gamma}$ nin $\overline{B}$ binormal vektör alan

$$\overline{\boldsymbol{B}} = -\boldsymbol{N}$$

eşitliği ile tanımlandı. $\overline{B}$ nın Fermi-Walker türevi:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{B}} &= \nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{B}} - \langle\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{B}}\rangle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} + \langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{B}}\rangle\overline{\boldsymbol{T}} \\ &= \nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{B}} + \langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{B}}\rangle\overline{\boldsymbol{T}} \qquad (4.9)\end{aligned}$$

dir. Fermi-Walker türevi tanımı ğereği

$$\begin{aligned}\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{B}} &= -(-\kappa\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B}) \\ &= \kappa\boldsymbol{T} - \tau\boldsymbol{B} \qquad (4.10)\end{aligned}$$

elde edilir. İç çarpım yardımıyla

$$\langle \nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{B}}\rangle \overline{\boldsymbol{T}} = \langle (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{T} + (\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'\boldsymbol{B}, -\boldsymbol{N}\rangle = 0 \tag{4.11}$$

bulunur. (4.10) ve (4.11) ifadeleri (4.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{B}} = \kappa\boldsymbol{T} - \tau\boldsymbol{B}$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

Sonuç 4.2.

i. $\overline{\boldsymbol{T}}$ Fermi-Walker anlamında paralel ise o zaman

$$\kappa = \tau = 0$$

ii. $\overline{\boldsymbol{N}}$ Fermi-Walker anlamında paralel ise o zaman

$$\frac{-\tau}{k} = [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}) + (\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]$$

iii. $\overline{\boldsymbol{B}}$ Fermi-Walker anlamında paralel ise o zaman

$$\kappa = \tau = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: Teorem (4.1) ifadesinde elde ettiğimiz $\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}, \tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}}, \tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{B}}$ ifadelerinin Fermi-Walker anlamında paralel olduğunu

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} = 0$$

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}} = 0$$

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{B}} = 0$$

eşitlikleri ile gösterelim.

i. $\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}$ türevinin Fermi-Walker anlamında paralel olduğunu ifade edelim.

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} = [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{T} + [(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{B}$$

$$0 = [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{T} + [(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{B}$$

dır. Buradan $\boldsymbol{T}$ ifadelesini sıfıra eşitlersek

$$0 = (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

$$\tau = 0, \tau' = 0, \kappa = 0 \text{ ve } \kappa' = 0$$

olur. Aynı şekilde $\boldsymbol{B}$ ifadelesini de sıfıra eşitlersek

$$0 = (\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})'(\frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})$$

$$\tau = 0, \tau' = 0, \kappa = 0 \text{ ve } \kappa' = 0$$

elde edilir ve $\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} = 0$ bulunur.

ii. $\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{N}}$ türevinin Fermi-Walker anlamında paralel olduğunu gösterelim

$$0 = [(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})' + (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})$$
$$+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})]\boldsymbol{T} - [(\frac{k^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$
$$+\frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})]\boldsymbol{N} + [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})$$
$$+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}) + (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})]\boldsymbol{B}$$

ifadesinde

$$0 = (\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})' + [(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})$$
$$+ (\frac{k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})]\boldsymbol{T}$$

olduğundan

$$(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})' = (\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})[(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})$$
$$+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})]$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$0 = -[(\frac{k^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}})]\boldsymbol{N}$$

için

$$\frac{k^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}=\frac{-\tau^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

$$k^2=-\tau^2$$

$$k=\tau$$

elde edilir. Son olarak

$$0=[(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'$$

$$(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})+(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]\boldsymbol{B}$$

denkleminden

$$0=(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})[(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

$$+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]+(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

$$\frac{-\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}=(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})[(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

$$+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})]$$

eşitliğinden

$$\frac{-\tau}{k}=[(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{-k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})+(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})'(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

bulunur.

iii. $\tilde{\nabla}_{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\boldsymbol{B}}$ türevinin Fermi-Walker anlamında paralel olduğunu gösterelim.

$$0=\kappa\boldsymbol{T}-\tau\boldsymbol{B}$$

$$\kappa=0 \text{ ve } \tau=0$$

olur. Böylece $\tilde{\nabla}_{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\boldsymbol{B}}=0$ elde edilir.

4.2. Bishop Çatısına Göre Frenet Vektörlerinin Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde Bishop çatısına göre özel olarak tanımlanan $\overline{\boldsymbol{M}}_1$-yön eğrisi ve $\overline{\boldsymbol{M}}_2$-yön eğrilerinin Fermi-Walker türevi incelendi. Bu eğrilerin Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerekli durumlar verilmiştir.

Teorem 4.3. (3.25) ifadesinde verilen $\overline{\boldsymbol{T}}(s), \overline{\boldsymbol{M}}_1(s), \overline{\boldsymbol{M}}_2(s)$ eğrilerinin Fermi-Walker türevi aşağıdaki şekilde verilir

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} = 0$$

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}}_1 = k_1 \cos(\int k_2\,(s)d_s)\,\boldsymbol{T} + k_2\cos(\int k_2\,(s)d_s)M_2(s)$$

$$-\bar{k}_1\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) + \bar{k}_1\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

$$= k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) + \overline{k}_1\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}_2} = [-k_1\, sin(\int k_2(s)ds) + \overline{k}_2\, sin(\int k_2(s)ds)]\boldsymbol{T}(s)$$

$$-[k_2\, sin(\int(k_2(s)ds)) - \overline{k}_2\, cos(\int(k_2(s)ds))]\boldsymbol{M}_2(s).$$

İspat:

$$\overline{\boldsymbol{T}}(s) = \boldsymbol{M}_1(s)$$

in Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} = \nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} - \langle\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{T}}\rangle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} + \langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{T}}\rangle\overline{\boldsymbol{T}} \tag{4.3}$$

dir. Burada ilk olarak

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\boldsymbol{M}_1 = -k_1\boldsymbol{T} \tag{4.4}$$

ile verilir. İç çarpım yardımıyla

$$\langle\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{T}}\rangle\overline{\boldsymbol{T}} = \langle -k_1\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1\rangle\overline{\boldsymbol{T}}$$

$$= 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.4) ve (4.5) ifadelerini (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} = 0$$

elde edilir.

Benzer şekilde sonuç (3.25) de verilen $\overline{\boldsymbol{M}}_1(s)$ ifadesinin Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}_1} = \nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}}_1 - \langle \overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{M}}_1 \rangle \nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} + \langle \nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{M}}_1 \rangle \overline{\boldsymbol{M}}_1 \tag{4.6}$$

ile verilir. Öncelikle

$$\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}}_1 = [-cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) + sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)]'$$

türevi alınırsa

$$\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}}_1 = k_2(s)\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s}) - cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}'(s)$$

$$+k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) + sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2'(s)$$

denkleminde $\boldsymbol{T}'(s)$ ve $\boldsymbol{M}_2'(s)$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}}_1 = k_2(s)\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s}) + k_1\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s})$$

$$+k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) - k_2(s)\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s)$$

$$= k_1\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s}) + k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) \tag{4.7}$$

elde edilir. İç çarpım yardımıyla

$$\langle \nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{M}}_1 \rangle = \langle \overline{k}_1\overline{\boldsymbol{M}}_1 + \overline{k}_2\overline{\boldsymbol{M}}_2, \overline{\boldsymbol{M}}_1 \rangle$$

$$= \overline{k}_1$$

elde edilir.

$$\langle \nabla_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{M}}_1 \rangle \overline{\boldsymbol{M}}_1 = \overline{k}_1[-cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) + sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)]$$

$$= -\overline{k}_1\, cos(\int k_2(s)ds)\, \boldsymbol{T}(s)$$

$$+\overline{k}_1\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) \tag{4.8}$$

olur. (4.7) ve (4.8) ifadeleri (4.6) denkleminde yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}}_1 = k_1\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s}) + k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

$$-\overline{k}_1\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) + \overline{k}_1\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

$$= k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

$$+\overline{k}_1\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) \tag{4.9}$$

elde edilir.

Son olarakda $\overline{\boldsymbol{M}}_2$ ifadesinin Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\boldsymbol{M}}_2 = \nabla_{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\boldsymbol{M}}_2 - \langle \overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{M}}_2 \rangle \nabla_{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\boldsymbol{T}} + \langle \nabla_{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{M}}_2 \rangle \overline{\boldsymbol{M}}_2$$

dir.

$$\tilde{\nabla}_{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\boldsymbol{M}}_2 = [sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) + cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2]'$$

$$= k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) + sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}'(s)$$

$$-k_2\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) + cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2'(s)$$

$$= k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) - k_1\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}$$

$$-k_2\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) - k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s)$$

$$= -k_1\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s}) - k_2\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

elde edilir.

$$\langle \nabla_{\overline{T}}\overline{T}, \overline{M}_2 \rangle = \langle \overline{k}_1\overline{M}_1 + \overline{k}_2\overline{M}_{2,}\overline{M}_2 \rangle \overline{M}_2$$

$$= \overline{k}_2[sin(\int k_2(s)ds)T(s) + cos(\int k_2(s)ds)M_2(s)]$$

olur.

$$\langle \nabla_{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{M}}_2 \rangle \overline{\boldsymbol{M}}_2 = \overline{k}_2\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s)$$

$$+\overline{k}_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.7), (4.8) ve (4.10) ifadelerini (4.6) denkleminde yerine yazarsak

$$\tilde{\nabla}_{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\boldsymbol{M}}_2 = -k_1\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) - k_2\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

$$+\overline{k}_2\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{T}(s) + \overline{k}_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\boldsymbol{M}}_2 = [-k_1\, sin(\int k_2(s)ds) + \overline{k}_2\, sin(\int k_2(s)ds)]\boldsymbol{T}(s)$$

$$-[k_2\, sin(\int k_2(s)ds) - \overline{k}_2\, cos(\int k_2(s)ds)]\boldsymbol{M}_2(s)$$

elde edilir.

Sonuç 4.4.

i. $\overline{\boldsymbol{T}}$ Fermi-Walker anlamında paralel ise o zaman

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} \;=\; 0$$

ii. $\overline{\boldsymbol{M}}_1$Fermi-Walker anlamında paralel ise o zaman

$$\frac{-k_2}{\overline{k}_1} = \frac{cos(\int k_2(s)ds)}{sin(\int k_2(s)ds)}$$

iii. $\overline{\boldsymbol{M}}_2$ Fermi-Walker anlamında paralel ise o zaman

$$k_1 = \overline{k_2}$$

$$k_2 = \overline{k_2}$$

eşitlikleri elde edilir.

İspat:

i. Teorem (4.3) den elde ettiğimiz

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{T}} = 0$$

olduğunda Fermi-Walker anlamında paraleldir.

ii. (4.9) denkleminden $\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}}_1$ ifadesinin Fermi-Walker anlamında paralel olduğunu gösterelim;

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}}_1 = k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) + \overline{k}_1\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

bu denklemi sıfıra eşitlersek

$$0 = k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) + \overline{k}_1\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

$$-k_2\, cos(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s) = \overline{k}_1\, sin(\int k_2(s)ds)\boldsymbol{M}_2(s)$$

eşitliği elde edilir ve

$$-k_2\, cos(\int k_2(s)ds) = \overline{k}_1\, sin(\int k_2(s)ds)$$

$$\frac{-k_2}{\overline{k}_1}=\frac{cos(\int k_2(s)ds)}{sin(\int k_2(s)ds)}$$

bulunur.

iii. (4.10) denkleminden $\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}}_2$ ifadesinin Fermi-Walker anlamında paralel olduğunu gösterelim;

$$\tilde{\nabla}_{\overline{T}}\overline{\boldsymbol{M}}_2=[-k_1\,sin(\int k_2(s)ds)+\overline{k}_2\,sin(\int k_2(s)ds)]\boldsymbol{T}(s)$$
$$-[k_2\,sin(\int k_2(s)ds)-\overline{k}_2\,cos(\int k_2(s)ds)]\boldsymbol{M}_2(s)$$

eşitliğini sıfıra eşitlersek

$$0=[-k_1\,sin(\int k_2(s)ds)+\overline{k}_2\,sin(\int k_2(s)ds)]\boldsymbol{T}(s)$$
$$-[k_2\,sin(\int k_2(s)ds)-\overline{k}_2\,cos(\int k_2(s)ds)]\boldsymbol{M}_2(s)$$

olduğundan

$$0=-k_1\,sin(\int k_2(s)ds)+\overline{k}_2\,sin(\int k_2(s)ds)$$
$$0=-k_2\,sin(\int k_2(s)ds)+\overline{k}_2\,cos(\int k_2(s)ds)$$

eşitlikleri bulunur. Böylece gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$k_1\,sin(\int k_2(s)ds)=\overline{k}_2\,sin(\int k_2(s)ds)$$
$$k_1=\overline{k}_2$$

ve

$$k_2\,sin(\int k_2(s)ds)=\overline{k}_2\,cos(\int k_2(s)ds)$$
$$k_2=\overline{k}_2$$

elde edilir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada üç boyutlu Öklid uzayında Frenet eğrisinin W-yön eğrisi ve W-doğrultman eğrisinden bahsedildi. Üç boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş bir yüzey üzerinde bulunan bir eğri ile W-yön eğrisinin bazı ilişkilerinden söz edilerek W-yön eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanlarının Fermi-Walker türevi verildi. Bu vektör alanlarının Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerekli durumlar incelendi.

Daha sonra Öklid uzayında özel olarak tanımlanan Frenet eğrisinde $\overline{\boldsymbol{M}}_1$-yön ve $\overline{\boldsymbol{M}}_2$-yöneğrisinin Bishop çatısına göre Fermi-Walker türevi verildi. Bu ifadelerin Fermi-Walker türevi verildikten sonra Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerekli durumlar incelendi.

KAYNAKLAR

Benn, I. M. and Tucker, R. W. 1989. Wave mechanics and inertial guidance. *The American Physical Society*, 39 (6), 1594-1601.

Bishop, R. L. 1975. There is More than One Way to Frame a Curve. *The American Mathematical Monthly*, 82 (3), 246-251.

Carmo, M. 1976. Differantial Geometry of Curves and Surfaces book. *Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs*, New Jersay.

Choi, J. H. and Kim Y. H. 2012. Associated Curves of a Frenet Curve and Their Aplications. *Aplied Mathematics and Computation*, 218 (18), 9116-9124.

Gluck, H. 1996. Higher curvatures of curves in Euclidean space. *The American Mathematical Monthly*, 73 (7), 699-704.

Hacısalihoğlu, H. 2003, Diferensiyel Geometri, *A. Ü. Fen Fakültesi yayınları*, Ankara, Cilt 3.

Hacısalihoğlu, H. 2012, Diferensiyel Geometri, *A. Ü. Fen Fakültesi yayınları*, Ankara, Cilt 2.

Hacısalihoğlu, H. 1998, Diferensiyel Geometri, *A. Ü. Fen Fakültesi yayınları*, Ankara, Cilt 1.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2004. New special curves and developable surfaces. *Turkish Journal of Mathematics* , 39 (3), 153-163.

Karakuş, F. and Yaylı, Y. 2012. On the Fermi-Walker derivative and non-rotating frame, *International Journal Geometric Methods Modern Physics*, 9 (8), 1250066.

Körpınar, T., Turhan, E. 2011. On characterization of B-canal surfaces in terms of biharmonic B-slant helices according to Bishop frame in Heisenberg group Heis 3. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 382 (1), 57-65.

Körpınar, T., Asil V., Baş, S., 2010. Chacterizing Inextensible Flows of Timelike Curves According to Bishop Frame in Minkowski Space, *Journal of Vectorial Relativity*, 31 (2), 9-17.

Körpınar, T., Sarıaydın, M. T., Asil, V. 2010. On Characterization of Parallel Curves According to Bishop Frame in E^3, *Boletín de la Sociedad Matemática*, 33 (1), 33-39.

Körpınar, T., Asil, V., Sarıaydın, M. T. and İncesu, M. 2015. A Characterization for Bishop Equations of Parallel Curves According to Bishop Frame in E^3, *Boletín de la Sociedad Matemática* , 33 (1), 33-39.

Körpınar, T., Sarıaydın M. T., Turhan E. 2013. Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-space. *Advenced Modelling and Optimization* , 15 (8), 713-717.

Macit N., Düldül M. 2014. Some new associated curves of a Frenet curve in E^3 and E^4, *Turkish Journal of Mathematics* , 38 (6), 1023-1037.

Sabuncuoğlu, A. 2006, Diferensiyel Geometri, *Nobel Yayınları*, Ankara, 264-277.

Ek-9

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	√	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	√	
Denklem yazımları uygun mu?	√	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	√	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	√	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	√	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	√	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	√	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	√	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	√	
+Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	√	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

	Unvanı Adı SOYADI	İmza
Öğrenci :	Saniye KARATAŞ	S.Karataş
Danışman :	Talat KÖRPINAR	

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum /vermiyorum**.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı
Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI	Tarih	İmza
Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖNLÜ	02.07.2019	

*Seminer, Yüksek Lisans ve doktora tezleri FBE tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmalıdır. Tezler FBE'ne teslim edilmeden önce yukarıdaki kontrol listesi öğrenci ve danışman tarafından imzalanmalıdır. Bu sayfa tez teslimi esnasında en üst sayfa olarak verilmelidir.

*Tez ilk savunmaya sunulacağında spiral cilt veya clip dosya formunda FBE teslim edilmelidir.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı **:** Saniye KARATAŞ
Uyruğu **:** T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi: Aladağ/ADANA17.03.1992
Telefon **:** 05316424481
e-mail **:** karatas.saniye01@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	: 19 Mayıs Anadolu Lisesi Merkez/ Adana	**2010**
Üniversite	: Muş Alparslan Üniversitesi	**2015**
Yüksek Lisans	: Muş Alparslan Üniversitesi	**2019**