T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI YAKINSAK KÜME DİZİLERİNİN FARKLARI

Esra AYTEPE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2019
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI YAKINSAK KÜME DİZİLERİNİN FARKLARI

Esra AYTEPE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof. Dr. Harun POLAT

Haziran 2019
MUŞ

TEZ KABUL VE ONAYI

Esra AYTEPE tarafından hazırlanan "Bazı Yakınsak Küme Dizilerinin Farkları" adlı tez çalışması 12/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Metin BAŞARIR Sakarya Üniversitesi, FEF, Matematik Bölümü	....
Danışman Prof. Dr. Harun POLAT MŞÜ, FEF, Matematik Bölümü	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICİ TURAN MŞÜ, FEF, Matematik Bölümü	....

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 19/06/2019 Tarih ve 16/I nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Esra AYTEPE
Tarih: 03/07/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI YAKINSAK KÜME DİZİLERİNİN FARKLARI

Esra AYTEPE

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Harun POLAT

2019, 45 Sayfa

Jüri

Başkan: Prof. Dr. Metin BAŞARIR

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Harun POLAT

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICİ TURAN

Bu tezin amacı küme dizilerinin bazı yakınsaklık çeşitlerini çalışmak. Bu küme dizilerinin farkını alarak yeni küme dizilerini oluşturmak. Bu fark küme dizilerinin yakınsaklık çeşitlerinin olup olmadığını incelemektir. Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, şimdiye kadar çalışılan yakınsak küme dizi türleri kısaca anlatıldı. İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan temel tanımlar verildi. Üçüncü bölümde, Mosco, Kuratowski, Wijsman, Haussdorff ve Fisher anlamında yakınsak küme dizisi çeşitleri tanımlandı. İlgili örnekler ve bu yakınsaklık çeşitleri arasındaki ilişkileri gösteren açıklamalar verildi. Dördüncü bölümde ise yakınsak küme dizilerinin farklarından oluşturulan küme dizilerinin yakınsaklık çeşitleri çalışıldı.

Anahtar Kelimeler: Fisher, Haussdorff, Kuratowski, Küme Dizisi, Mosco, Wijsman, Yakınsaklık

ABSTRACT

MS THESIS

DİFFERENCES OF SOME CONVERGENCE OF SEQUENCES OF SETS

Esra AYTEPE

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE
OF MUS ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS SCİENCE

Advisor: Prof. Dr. Harun POLAT

2019, 45 Pages

Jury
Supervisor: Prof. Dr. Metin BAŞARIR

Jury Member: Prof. Dr. Harun POLAT

Jury Member: Dr. Lecturer Gülcan ATICİ TURAN

The aim of the this thesis is to study some type of convergence of sequences of sets. Create new sequences of sets by taking difference of these sequences of sets. This study consist from three chapters. İn first chapter, work done until now was briefly told. İn second chapter, basic definitions and theorems used in the study are given. Some concepts have been studied in the literature for sequences of sets which are subsets of normed space and metric space. In third chapter, convergence types sense of Mosco, Kuratowski, Wijsman, Haussdorff and Fisher were defined. Then related examples and theorems showing the relations between types of these convergence and were given.

Keywords: Convergence, Fisher, Haussdorff, Kuratowski, Mosco, Sequence of set, Wijsman

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana yardımcı olan, Sayın Hocam Prof. Dr. Harun POLAT' a ve Doç. Dr. Muhammet ÇINAR' a, öğrenim hayatım süresince bana yardımcı olan, eğitimim için her türlü fedakârlıkları yapan, sevgili annem ve babama, en sıkıntılı zamanlarımda varlığı ile bana destek olan sevgili eşim Ahmet AYTEPE' ye teşekkür ederim.

Esra AYTEPE
MUŞ-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\boldsymbol{h(A,B)}$	: A ve B kümeleri arasındaki Haussdorff uzaklık
$\Delta \boldsymbol{A_n}$	: A_n küme dizisinin fark dizisi
$\boldsymbol{\delta}$	: Delta
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar Kümesi
$\boldsymbol{inf}$	: En büyük alt sınır
$\boldsymbol{sup}$	: En küçük üst sınır
$\boldsymbol{\varepsilon}$	: Epsilon
$\xrightarrow{F}$	: Fisher anlamında yakınsak
$\xrightarrow{H}$	: Haussdorf anlamında yakınsak
$\xrightarrow{K}$	: Kuratowski anlamında yakınsak
$\xrightarrow{M}$	: Mosko anlamında yakınsak
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{B(x,r)}$	: x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$\boldsymbol{S(x,r)}$	: x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\boldsymbol{D(X)}$	: X metrik uzayın alt kümeleri
$\boldsymbol{CL(X)}$	: X metrik uzayının boştan farklı kapalı alt kümeleri
$\boldsymbol{CC(X)}$	: X metrik uzayının boştan farklı kapalı, konveks alt kümeleri
$\boldsymbol{d(x,A)}$	: x noktasının A kümesine olan uzaklığı
$\boldsymbol{boy(X)}$	: X uzayının boyutu
$\boldsymbol{X'}$	: X uzayının duali
$\xrightarrow{W}$	: Wijsman anlamında yakınsak
$\rightharpoonup$	: Zayıf yakınsaklık

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Matematiğin günlük hayatımızı kolaylaştıran yönü tartışılamaz derecede büyük. Bu kolaylık çoğu kez soyut olan düşüncelerin somut bir şekilde kendini göstermesiyle gerçekleşir. Günlük yaşantımızda, hayatımızın birçok alanında karşımıza çıkan, matematiğin kullanıldığı alanlardan biri de dizilerdir. Diziler başlangıçta sayı dizleri ile ortaya çıkmış ve belli bir düzene göre hareket eden sıralı sayıları ifade etmiştir. Matematiğin günlük hayatı kolaylaştıran ve hayatta sıklıkla kullanılan bir diğer konusu da kümelerdir. Gerek bir gruplaşma gerek bir topluluğu ifade eden kümeler matematiğin temel konularından olup, diğer birçok konuyla ilgilidir.

Bu çalışmada diziler ve kümelerin birleşiminden oluşan küme dizileri ve bu küme dizilerinin bazı yakınsaklık çeşitleri ele alındı. Yakınsak bir küme dizisinin fark dizisinin de yakınsak olup olmadığı incelendi. Literatürde yakınsak küme dizileri ile ilgili birçok çalışma vardır.

Dizilerin yakınsaklık kavramı. Wijsman (1964), Effros (1965), Holmes (1966), Mosco (1969), Salinetti ve Wets (1979), Beer (1985), Baronti ve Pappini (1986), Uthayakumar (1999), Wills (2007), Nuray ve Rhoades (2012), Papini ve Wu (2015) tarafından küme dizilerinin yakınsaklığı kavramına büyükletildi. Küme dizilerinin yakınsaklığı fikri Archimed' e kadar dayanır. 1910'da Haussdorff iki küme arasındaki uzaklığı tanımladı.

Konveks küme dizilerinin ve konveks fonksiyonların yakınsaklığı 1960 larda birçok kişi tarafından çalışıldı. Wijsman 1964 yılında "Konveks küme dizilerinin yakınsaklığı, koniler ve fonksiyonlar" adlı makalesinde bir Öklid m-uzayındaki konveks fakat sınırlı olması gerekmeyen küme dizilerini çalıştı. Effros 1965'te bir topolojik uzayda kapalı alt kümelerin yakınsaklığını çalıştı. Holmes 1966 yılında "En iyi yaklaşımlara yaklaşma" adlı makalesinde normlu uzayda yakınsaklık türlerinden bazılarının sağlanması için uzayın sonlu boyutlu olması gerektirdiğini gösterdi.

Salinetti ve Wets 1979 yılında "Sonlu boyutlarda konveks küme dizilerinin yakınsaklığı üzerine" adlı makalesinde noktasal yakınsaklığı içeren konveks fonksiyonların dizisi için çeşitli yakınsaklık türleri arasındaki ilişkiyi çalıştı. 1985 yılında Beer tarafından kapalı olmayan bir X metrik uzayının alt kümelerinden oluşan $\{C_n\}$ küme dizisinin Kuratowski anlamında X metrik uzayının boştan farklı kapalı bir A altkümesine yakınsak olduğu ve Wijsman ile Kuratowski anlamında yakınsaklıklar arasındaki ilişki gösterildi. 1986 da

Baronti ve Pappini "Küme dizilerinin yakınsaklığı" isimli çalışmalarında Kuratowski, Haussdorff, Fisher, Mosco ve Wijsman yakınsaklıkları arasındaki ilişki gösterildi. Uthayakumar 1999 yılında "Optimizasyon problemlerinin yakınsaklığı üzerine çalışma" çalışmasında sonlu boyutlu uzaylardaki küme dizilerinin yakınsaklıklarının çeşitli notasyonları arasındaki ilişkiyi bir ağ şeklinde sundu ve çalıştı. 2007 yılında Wills "Haussdorff uzaklık ve konveks kümeler" makalesinde normlu bir uzayda alınan sınırlı, kapalı, boştan farklı ve konveks iki kümenin Haussdorff uzaklığının, bu iki kümenin sınırları arasındaki Haussdorff uzaklığı ile aynı olduğunu gösterdi. 2012 de Nuray ve Rhoades tarafından küme dizileri için sınırlı dizi kavramı verildi. Papini ve Wu 2015 yılında "İç içe küme dizileri, yuvarlar, Haussdorff yakınsaklık" adlı makalelerinde Kuratowski ve Haussdorff anlamında yakınsaklık çeşitlerini çalıştı.

2. MATERYAL VE METOD

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1 İyi tanımlı nesneler topluluğuna küme denir (Dönmez, 1987).

Tanım 2.2 Tanım kümesi doğal sayılardan ibaret olan fonksiyona dizi denir.

Tanım 2.3 (x_n) bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $k\epsilon\mathbb{N}$ için $|x_n - \ell| < \varepsilon$ olacak şekilde $n(\varepsilon) > k$ doğal sayısının olması halinde (x_n) dizisi ℓ sayısına yakınsar denir.

Tanım 2.4 (x_n) bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > 0$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde $n = n(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir (Knopp, 1954).

Tanım 2.5 (x_n) bir dizi olsun. Eğer her $n, m\epsilon\mathbb{Z}^+$için $n < m$ iken $x_n < x_m$ ise (x_n) dizisi düzgün artan dizi, her $n, m\epsilon\mathbb{Z}^+$ için $n > m$ iken $x_n > x_m$ ise (x_n) dizisi düzgün azalan dizi denir. Bir dizi düzgün artan ya da düzgün azalan ise diziye düzgün monoton dizidir denir (Mostafazadeh, 2013).

Tanım 2.6 (x_n) bir dizi olsun. Her $k\epsilon\mathbb{N}$ için $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere (n_k) bir dizi olsun. $\left(x_{n_k}\right) = \left(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\right)$ dizisine (x_n) dizisinin alt dizisi denir (Balcı, 2009).

Tanım 2.7 $X \neq \emptyset$ bir küme F reel ya da kompleks sayılar cismi olmak üzere,$+ : X \times X \to X$ ve $\cdot : F \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümleri verilsin. Her $x, y, z\epsilon X$ ve λ, μ skalerleri için aşağıdaki şartları sağlayan X kümesine lineer(vektör) uzay denir.

L1. $x + y\epsilon X$

L2. $x + (y + z) = (x + y) + z$

L3. $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta\epsilon X$ mevcut

L4. $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $(-x)\epsilon X$ olmalı,

L5. $x + y = y + x$

L6. $\lambda x\epsilon X$

L7. $1x = x$ olacak şekilde $1\epsilon X$ vardır.

L8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

L9. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (Maddox, 1970).

Tanım 2.8 $X \neq \emptyset$ bir küme $d: X \times X \to X$ uzaklık fonksiyonu olmak üzere her $x, y, z \epsilon X$ için aşağıdaki şartları sağlayan d fonksiyonuna X te bir metrik (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

M1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2. $d(x, y) = d(y, x)$

M3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.9 X bir lineer uzay olmak üzere x noktasının $\| \ \|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu altındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Her $x, y \epsilon X$ ve $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlayan $\| \ \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(\| \ \|, X)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Maddox, 1970)

Tanım 2.10 X bir metrik uzay olsun. X de alınan her Cauchy dizisi X uzayında bir noktaya yakınsıyorsa X e tam uzay denir (Goldberg, 1976).

Tanım 2.11 X bir lineer uzay olsun. X üzerinde tanımlı olan norm metriğine göre tam ise X e Banach uzayı denir (Çakar, 2007).

Tanım 2.12 (X, d) ve (Y, d') metrik uzayları verilsin. $f : X \to Y$ dönüşüm ve $x_0 \epsilon X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı var öyleki her $x \epsilon X$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ oluyorsa f dönüşümü x_0 noktasında süreklidir denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.13 X boştan farklı bir küme ve τ, X in alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. Eğer τ aşağıdaki özellikleri sağlarsa, τ ailesinin her elemanına, X üzerinde topolojik yapı ya da kısaca topoloji, (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir

T1. $X, \emptyset \epsilon \tau$

T2. Her $i \epsilon \mathbb{N}$ için sonlu ya da sonsuz sayıda A_i lerin birleşimi τ ya ait

T3. Her $i \epsilon \mathbb{N}$ için sonlu sayıda A_i lerin kesişimi τ ya ait (Yüksel, 2002).

Tanım 2.14 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $(A_i)_{i\epsilon I}$ ailesi verilsin. Eğer $X = \bigcup_{i\epsilon I} A_i$ ise, $(A_i)_{i\epsilon I}$ ailesine X kümesinin bir örtüsü denir (Yüksel, 2002).

Tanım 2.15 X bir metrik uzay $M \subset X$ olsun. $\overline{M}$, M nin kapanışını göstersin. Eğer $\overline{M} = X$ ise M kümesi X de yoğun denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.16 V kümesi R veya C üzerinde bir lineer uzayı ve $A \subset V$ olmak üzere $x, y\epsilon A$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$(1-\lambda)x + \lambda y \epsilon A$$

gerçekleniyor ise A kümesine bir konveks küme denir.

Tanım 2.17 X bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse X uzayı kompakttır denir (Çakar, 2007).

Tanım 2.18 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse, (X, τ) uzayına kompakt uzay denir (Yüksel, 2002).

Tanım 2.19 (X, d) bir metrik uzay ve $G \subset X$ olsun. Her $a\epsilon G$ için $B(a, \varepsilon) \subset G$ ise G ye açık küme denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.20 X metrik uzayında tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.21 (X, d) ve (Y, d') metrik uzayları verilsin. $f : X \to Y$ dönüşümü uzaklıkları koruyorsa yani her $x, y\epsilon X$ için $d'\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y)$ ise f dönüşümüne izometrik dönüşüm denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.22 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. d metriğine göre açık kümelerin ailesi τ olacak şekilde X de bir d metriği tanımlanabilirse (X, τ) uzayına metriklenebilir uzay denir (Balcı, 2009).

Tanım 2.23 X, K cismi üzerinde normlu uzay olsun. X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin Banach uzayına X in sürekli düali denir ve X' ile gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.24. $(X, \|.\|)$ uzayında bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer her $f\epsilon X'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olacak şekilde $x_0 \epsilon X$ elemanı varsa (x_n) dizisi x_0 noktasına zayıf yakınsar denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.25 X normlu uzay ve $X = X''$ ise X e yansımalı(yansımalı) uzay denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.26 $\mathbb{R}$ Reel sayılar kümesinin bir E alt kümesinde tanımlı fonksiyonların dizisi (f_n) olsun. Her $x \epsilon E$ için $\big(f_n(x)\big)$ sayı dizisi yakınsak olsun. Bu takdirde her $x \epsilon E$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

şeklinde bir f fonksiyonu tanımlanabilir. Bu durumda (f_n) fonksiyon dizisi E üzerinde noktasal yakınsaktır denir ve f fonksiyonuna dizinin noktasal limiti denir (Çakallı, 2001).

Tanım 2.27 $X \neq \emptyset$ bir küme**,** $P(X)$ X in kuvvet kümesi ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere $f \colon \mathbb{N} \to P(X)$ şeklinde tanımlanan her f fonksiyonu her n$\epsilon\mathbb{N}$ için $P(X)$ kümesinde bir $f(n) = A_n$ kümesini gösterir. Bu şekilde tanımlı f fonksiyonunun görüntü kümesini oluşturan $A_1, A_2, A_3, \ldots$ kümelerinden oluşan $\{A_n\} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ dizisine bir küme dizisi denir.

Tanım 2.28 X bir küme ve (A_n), X in elemanlarından oluşan kümelerin bir ailesi olsun.

$$\lim_n \sup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right)$$

$$\lim_n \inf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right)$$

kümelerine sırasıyla (A_n) küme dizisinin üst limiti ve alt limiti denir.

Tanım 2.29 (A_n) küme dizisi eğer her n için $A_n \subseteq A_{n+1}$ ise (A_n) artan küme dizisi, her n için $A_{n+1} \subseteq A_n$ ise (A_n) azalan küme dizisidir denir (Balcı, 2009).

Tanım 2.30 X bir küme ve $(A_n), X$ in elemanlarından oluşan alt kümelerinin bir küme dizisi olsun. Eğer $\lim_n \inf A_n = \lim_n \sup A_n = A$ ise (A_n) küme dizisi A kümesine yakınsar denir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 2.31 (X, d) bir metrik uzay ve A_n, X in boştan farklı alt kümeleri olsun. Eğer her $x \epsilon X$ için

$$\sup_n d(x, A_n) < \infty$$

oluyorsa, (A_n) küme dizisine sınırlıdır denir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 2.32 X metrik uzayının sayılabilir yoğun alt kümesi varsa X e ayrılabilir metrik uzay denir (Musayev ve Alp, 2000).

Önerme 2.1 (Musayev ve Alp, 2000) Yansımalı bir Banach uzayının her alt uzayı da yansımalıdır.

Önerme 2.2 $Boy(X) < \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olması için gerekli ve yeterli şart $w - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ olmasıdır.

Kuvvetli ve zayıf yakınsaklığın denk olduğu sonsuz boyutlu normlu uzaylar da vardır. Bunlardan biri 1921 yılında I.Schur tarafından verilen l_1 uzayıdır (Musayev ve Alp, 2000).

2.2. Küme Dizilerinin Yakınsaklığı İle İlgili Örnekler

Şimdi ilerideki çalışmalarımızda kullanacağımız yakınsak küme dizi örneklerini verelim (Balcı, 2009).

1. **a.** (A_n) artan bir küme dizisi ise

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

olur.

Bunun için $\lim_n \inf A_n = \lim_n \sup A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ olduğunu gösterelim. (A_n) artan dizi olduğundan

$$\lim_n \sup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ve

$$\lim_n \inf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(A_m \cap A_{m+1} \cap \dots\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_m$$

olur.

b. (B_n) azalan bir küme dizisi ise

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

olur.

Bunun için $\lim_n \inf B_n = \lim_n \sup B_n = \bigcap_{n\epsilon\mathbb{N}} B_n$ olduğunu gösterelim. (B_n) artan dizi olduğundan

$$\lim_n \sup B_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$$

ve

$$\begin{aligned}\lim_n \inf B_n &= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} B_n\right)\\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty}(B_m \cap B_{m+1} \cap \dots)\\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n \cap \dots)\\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\end{aligned}$$

olur.

2. (A_n), herhangi X kümesinin alt kümelerinin ayrık bir dizisi ise

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$$

olur.

$m \neq n$ olmak üzere her $m, n\epsilon\mathbb{N}$ için $A_n \cap A_m = \emptyset$ dir. $\lim_n \inf A_n = \lim_n \sup A_n = \emptyset$ olduğunu gösterelim. (A_n) dizisi ayrık olduğundan

$$\lim_n \inf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \emptyset$$

sağlanır. $\lim_n \sup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \neq \emptyset$ olsun**.** Bu durumda her $m\epsilon\mathbb{N}$ için en az bir $x_0\epsilon \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ vardır. Bu ise her $m\epsilon\mathbb{N}$ için en az bir $m_0\epsilon\mathbb{N}$ $(m_0 \geq m) \ni x\epsilon A_{m_0}$ olmasını gerektirir. Arakesit işlemini $m = m_0 + 1$ için başlatırsak x elemanı $m_0 + 1$ ve daha sonraki indislere sahip bir kümenin elemanı olmak zorundadır. Bu ise (A_n) dizisinin ayrık olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\lim_n \sup A_n = \emptyset$ olmak zorundadır. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ elde edilir.

3. Genel terimleri ile verilen aşağıdaki küme dizilerinin yakınsaklığını inceleyelim.

a. $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ olsun.

Her $n\epsilon\mathbb{N}$ için $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ olduğundan (A_n) dizisi azalan bir dizidir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\epsilon\mathbb{N}} A_n$$

olur.

$$\bigcap_{n\epsilon\mathbb{N}} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

$$= [-1,1] \cap \left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \cap \dots \cap \left[-\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n}\right] \cap \dots$$

$$= \{0\}$$

olduğundan $n \to \infty$ için $lim\, A_n = \{0\}$ elde edilir.

b. $B_n = \{-n, \dots, -2, -1,0,1,2, \dots, n\}$ ise

Her $n\epsilon\mathbb{N}$ için $B_n \subset B_{n+1}$ olduğundan $\{B_n\}$ dizisi artan bir dizidir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

olur.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{-1,0,1\} \cup \{-2,-1,0,1,2\} \cup \dots = \mathbb{Z}$$

olduğundan $n \to \infty$ için $lim\, B_n = \mathbb{Z}$ elde edilir.

4. $E_n = \begin{cases} \left(0,\frac{1}{n}\right) \ ; & n \text{ tek ise} \\ \left[\frac{1}{n},1\right) \ ; & n \text{ çift ise} \end{cases}$

ile tanımlanan (E_n) dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyelim.

$$(A_n) = \left(0,\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$(B_n) = \left[\frac{1}{2n},1\right)$$

olmak üzere (A_n) ve (B_n) dizileri (E_n) dizisinin alt dizileridir.

(A_n) azalan dizi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

olur.

(B_n) artan dizi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (0,1)$$

olur.

(E_n) dizisinin alt dizilerinin limiti birbirinden farklı olduğundan (E_n) dizisinin limiti yoktur.

5. (E_n) herhangi bir dizi ve F herhangi bir küme olsun.

a. $F \setminus \lim_n \sup E_n = \lim_n \inf (F \setminus E_n)$

$$F \setminus \lim_n \sup E_n = F \setminus (\bigcap_{m=1}^{\infty}(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n))$$

$$= F \cap \{\bigcap_{m=1}^{\infty}(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n)\}^t$$

$$= F \cap \{\bigcup_{m=1}^{\infty}(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n)^t\}$$

$$= F \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} {E_n}^t\right)$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(F \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} {E_n}^t\right)\right)$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty}\left(F \cap {E_n}^t\right) = \lim_n \inf (F \setminus E_n)$$

2.3. Küme Dizilerinin Bazı Yakınsaklık Türleri

Çalışmamızın bu kısmında Baronti ve Pappini'nin "Convergence of sequence of sets" makalesinde geçen, küme dizilerinin Mosco, Kuratowski, Wijsman, Haussdorff ve Fisher anlamında yakınsak çeşitleri çalışıldı.

X bir metrik uzay ve $2^X, X$ in elemanlarından oluşan alt kümeleri göstermek üzere, 2^X deki küme dizilerinin sadece yakınsak olanları alınacaktır. Ayrıca küme dizilerinin terimleri ve limiti (mevcutsa) kapalı (boş küme dahil) kümeler olarak alınacaktır. $x \epsilon X$ ve $r > 0$ için,

$$B(x,r) = \{y \epsilon X| \ d(x,y) \leq r\}$$

ve

$$S(x,r) = \{y \epsilon X| \ d(x,y) < r\}$$

kümeleri sırasıyla x merkezli r yarıçaplı kapalı ve açık yuvarları belirtir. Ayrıca $\emptyset \neq A \subset X$ ise x noktasının A kümesine uzaklığı

$$d(x,A) = inf\{d(x,y)| \ y \epsilon A\}$$

ve

$$d(x,\emptyset) = \infty$$

ile tanımlanır (Baronti ve Pappini, 1986).

A ve B boştan farklı iki küme olmak üzere

$$d(A,B) = inf\ \{\|a-b\| | a\epsilon A, b\epsilon B\}$$

ve her $\varepsilon > 0$ için

$$A^{\varepsilon} = \{x\epsilon X|\ \ d(A,\{x\}) \leq \varepsilon\ \}$$

yazılır. Daha kolay olarak,

$$A \subseteq B \Rightarrow A^{\varepsilon} \subseteq B^{\varepsilon}$$

olur. A ve B kümeleri arasındaki Haussdorff uzaklığı

$$h(A,B) = inf\ \{\varepsilon > 0\ | A \subseteq B^{\varepsilon}, B \subseteq A^{\varepsilon}\}$$

ile tanımlanır. ∂A, A nın sınırını göstermek üzere, A ve B konveks ise,

$$h(A,B) = h(\partial A, \partial B)$$

olur. A ve B konveks olmadığında bu yanlıştır. Son zamanlarda bu yeniden tartışılmakta (Wills (2007) ' in çalışmasında bu durum detaylı şekilde çalışılmıştır) (Papini ve Wu, 2015).

2.3.1. Kuratowski yakınsaklık

Şimdi $D(X), X$ metrik uzayının alt kümelerini göstermek üzere küme dizileri için Kuratowski anlamında yakınsaklığı inceleyelim.

Tanım 2.33 $A_n \xrightarrow{K} A$ ya da $K - lim\, A_n$ ile gösterilen $n\epsilon\mathbb{N}$ olmak üzere $\{A_n\}$ küme dizisinin $A \in D(X)$ kümesine Kuratowski anlamında yakınsaklığı;

$$\underline{lim}_n\, A_n = \overline{lim}_n\, A_n = lim_n\ A_n$$

ile tanımlanır (Baronti ve Pappini, 1986). Burada

$$\underline{lim}_n\, A_n = \{x\epsilon X | bir\ \{x_n\} \text{ dizisi mevcut } \ni \text{ her } n\epsilon\mathbb{N} \text{ için } x_n \epsilon A_n,\ x_n \to x\}$$

$$\overline{lim}_n\, A_n = \left\{x\epsilon X \middle| \{A_{n_k}\}, \{x_{n_k}\} \text{ diziler ve en az bir } k\epsilon\mathbb{N} \text{ için } x_{n_k}\epsilon A_{n_k}, x_{n_k} \to x\right\}$$

ve

$$lim_n\, sup\, A_n \subset A \subset lim_n\, inf A_n$$

dır.

Örnek 2.1 $A_n = \left(-\infty, -1 - \frac{1}{n}\right] \cup \left[2 + \frac{1}{n}, \infty\right)$ ve

$$A = \left(-\infty, -1\right]] \cup [2, \infty)$$

ℝ nin alt kümeleri ise,

$$A_1 = (-\infty, -1 - 1/1] \cup [2 + 1/1\,, \infty),$$

$$A_2 = (-\infty, -3/2] \cup [5/2\,, \infty),$$

$$A_3 = (-\infty, -4/3] \cup [7/3\,, \infty),$$

$$\vdots$$

$$A_n = \left(-\infty, -1 - \frac{1}{n}\right] \cup \left[2 + \frac{1}{n}, \infty\right)$$

olur. $n \to \infty$ için $K - lim\, A_n = A = (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ olur (Uthayakumar, 1999).

2.3.2. Haussdorff yakınsaklık

Şimdi $CL(X), X$ metrik uzayınındaki boştan farklı kapalı alt kümeleri göstermek üzere küme dizileri için Haussdorff anlamında yakınsaklığı inceleyelim.

Tanım 2.34 $A_n \overset{H}{\to} A$ ya da $H - lim\, A_n$ ile gösterilen $n \epsilon \mathbb{N}$ olmak üzere $\{A_n\} \in CL(X)$ küme dizisinin $A \in D(X)$ kümesine Haussdorff anlamında yakınsaklığı;

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{h}\,(A_n, A) = 0$$

ile tanımlanır. Burada,

$$\mathrm{h}(A, B) = \max\big(\delta(A, B), \delta(B, A)\big)$$

ve $\delta(\emptyset, B) = 0$, $A \neq \emptyset$ ise

$$\delta(A, B) = \sup_{x \epsilon A} d(x, B)$$

olur (Baronti ve Papini, 1986).

Boştan farklı kümelerin bir $\{A_n\}$ dizisi için bir A kümesine (boş olmayan) Haussdorff anlamında yakınsaklığı

$$\lim_{n} h(A_n, A) = 0$$

ile tanımlıdır (Papini ve Wu, 2015).

Örnek 2.2 $A_n = \{(x,y)|\ nx + y \leq 0\}$ ise,

$$A_1 = \{(x,y)|\ x + y \leq 0\},$$

$$A_2 = \{(x,y)|\ 2x + y \leq 0\},$$

$$A_3 = \{(x,y)|\ 3x + y \leq 0\},$$

$$\vdots$$

$$A_n = \{(x,y)|\ nx + y \leq 0\}$$

olur. $\varepsilon = (1,0)$ alınırsa $h(A,\varepsilon) = 0$ olur. Ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $h(A_n,\varepsilon) = \infty$ dur (Wijsman, 1964).

2.3.3. Wijsman yakınsaklık

Şimdi küme dizileri için Wijsman anlamında yakınsaklık çeşidini inceleyelim.

Tanım 2.35 $A_n \overset{W}{\rightarrow} A$ ya da $W - limA_n$ ile gösterilen $n\epsilon\mathbb{N}$ olmak üzere $\{A_n\} \subset CL(X)$ küme dizisinin $A \in CL(X)$ kümesine Wijsman anlamında yakınsaklığı her $x \in X$için;

$$d(x,A) = \lim_{n\to\infty} d(x,A_n)$$

ile tanımlanır (Baronti ve Pappini, 1986).

Örnek 2.3 $A_n = \{(x,y)|x^2 + y^2 - 2ny = 0\}$ ve $A = \{(x,0)|x \in R\}$ ise,

$$A_1 = \{(x,y)|x^2 + y^2 - 2y = 0\} = \{(x,y)|x^2 + (y-1)^2 = 1\},$$

$$A_2 = \{(x,y)|x^2 + y^2 - 4y = 0\} = \{(x,y)|x^2 + (y-2)^2 = 2^2\},$$

$$A_3 = \{(x,y)|x^2 + y^2 - 6y = 0\} = \{(x,y)|x^2 + (y-3)^2 = 3^2\},$$

$$\vdots$$

$$A_n = \{(x,y)|x^2 + y^2 - 2ny = 0\} = \{(x,y)|x^2 + (y-n)^2 = n^2\}$$

olur. $n \to \infty$ için $W - lim\,A_n = A = \{(x,0)|x \in R\}$ olur (Uthayakumar, 1999).

Örnek 2.4 $X = (0,2)$ reel eksenin alt uzayı olsun ve $C_n = (0,1]\cup\{2 - 1/n\}$ olsun.

$$C_1 = (0,1]\cup\{2 - 1/1\}=(0,1],$$

$$C_2 = (0,1]\cup\{2 - 1/2\}=(0,1]\cup\{3/2\},$$

$C_3 = (0,1]\cup\{2 - 1/3\}$=$(0,1]\cup\{5/3\}$,

$\vdots$

$C_n = (0,1]\cup\{2 - 1/n\}$

olur. Açıkça $C_n \xrightarrow{K} (0,1]$ dir. Buna karşılık

$$\lim_{n\to\infty} d(7/4\,, C_n) = 1/4 < 3/4 = d(7/4\,, (0,1])$$

olur (Beer, 1987).

2.3.4 Mosco yakınsaklık

X, $\mathbb{R}$ reel cismi üzerinde normlu lineer uzay olmak üzere Mosco anlamında yakınsaklığı inceleyelim.

Tanım 2.36 $A_n \xrightarrow{M} A$ ya da $M - lim\, A_n$ ile gösterilen $n\epsilon\mathbb{N}$ olmak üzere $\{A_n\}$ dizisinin A kümesine Mosco anlamında yakınsaklığı

$$\underline{lim}_{n}\, A_n = w - \overline{lim}_{n}\, A_n = \lim_{n} A_n$$

ile tanımlanır. Burada

$$w - \overline{lim}_{n}\, A_n = \left\{x\epsilon X \,\middle|\, \{A_{n_k}\}, \{x_{n_k}\}\text{diziler ve en az bir } k\epsilon\mathbb{N} \text{ için } x_{n_k}\epsilon A_{n_k}, x_{n_k} \rightharpoonup x\right\}$$

dir. X bir normlu uzay, $boy(X) \leq \infty$ (sonlu boyutlu) ve bir konveks kümedir (Baronti ve Pappini, 2012).

Örnek 2.5 $X = \mathbb{R}^2$ ve $A_n = \left\{(x,y)\middle|0 \leq x \leq n\,,\;\; 0 \leq y \leq \frac{1}{n}x\right\}$ ise,

$A_1 = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1\,,\;\; 0 \leq y \leq x\}$,

$A_2 = \left\{(x,y)\middle|0 \leq x \leq 2\,,\;\; 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\right\}$,

$A_3 = \left\{(x,y)\middle|0 \leq x \leq 3\,,\;\; 0 \leq y \leq \frac{x}{3}\right\}$,

$\vdots$

$A_n = \left\{(x,y)\middle|0 \leq x \leq n\,,\;\; 0 \leq y \leq \frac{1}{n}x\right\}$

olur. $n \to \infty$ için $A_n \overset{M}{\to} A = \{(x,y)|x \geq 0\ ,\ y = 0\}$ olur (Baronti ve Papini, 1986).

Örnek 2.6 $A_n = \{(x,y)|y = {}^{x}/_{n}\}$ ise,

$$A_1 = \{(x,y)|y = x\},$$

$$A_2 = \left\{(x,y)\middle|\, y = {}^{x}/_{2}\right\},$$

$$A_3 = \left\{(x,y)\middle| y = {}^{x}/_{3}\right\},$$

$$\vdots$$

$$A_n = \{(x,y)|y = {}^{x}/_{n}\}$$

olur. $n \to \infty$ için $M - lim\, A_n = A = \{(x,0)|x\epsilon\mathbb{R}\}$ olur (Uthayakumar, 1999).

2.3.5. Fisher yakınsaklık

Şimdi son zamanlarda tanımlanan yeni bir küme dizisi yakınsaklık çeşidi olan Fisher anlamında yakınsaklığı inceleyelim.

Tanım 2.37 $A_n \overset{F}{\to} A,\ F - lim\, A_n$ ya da Z$-lim\, A_n$ ile gösterilen $n\epsilon\mathbb{N}$ olmak üzere $\{A_n\} \subset D(X)$ küme dizisinin $A \in D(X)$ kümesine Fisher anlamında yakınsaklığı (Z-yakınsaklık) her $\varepsilon > 0$ için

i. $n > n_\varepsilon$ için $S(x,r) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_ε sayısı,

ve

ii. $x\epsilon A$ için $n > n(\varepsilon,x)$ için $S(x,A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n(\varepsilon,x)$ sayısı vardır ile tanımlanır (Baronti ve Pappini, 1986).

Örnek 2.7 $\mathbb{R}$ de $A_n = [-n,n]$ genel terimiyle verilen $\{A_n\}$ küme dizisinin terimleri

$$A_1 = [-1,1],$$

$$A_2 = [-2,2],$$

$$A_3 = [-3,3],$$

$$\vdots$$

$$A_n = [-n,n]$$

olur. Öyleyse $\{A_n\}$ küme dizisi Mosco anlamında $A = \mathbb{R}$ kümesine yakınsar.

$A_n = [-n, n]$ küme dizisi $A = \mathbb{R}$ kümesine Haussdorff anlamında yakınsak değildir. Çünkü,

$$\mathrm{h}([-n, n], \mathbb{R}) = \sup_{x\epsilon\mathbb{R}} |d(x, \mathbb{R}) - d(x, [-n, n])|$$

olur. Burada $x\epsilon\mathbb{R}$ olduğundan $d(x, \mathbb{R}) = 0$ olur. Supremum özelliği ve uzaklığın pozitif değerli olmasından dolayı

$$\mathrm{h}([-n, n], \mathbb{R}) = \sup_{x\epsilon\mathbb{R}} d(x, [-n, n]) = \infty$$

olur.

$A_n = [-n, n]$ küme dizisi $A = \mathbb{R}$ kümesine Fisher anlamında yakınsaktır. Çünkü, $\overline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} [-n, n] = \mathbb{R}$ olduğundan $\overline{\lim_n} A_n \subset A$ olur. Dolayısıyla $i.$ şartı sağlanır. $\lim_n d(x, [-n, n]) = 0$ olduğundan $ii.$ şartı da sağlanır. $A_n \xrightarrow{F} A = \mathbb{R}$ olur.

Ayrıca $A_n{}' = [n, +\infty)$ alırsak,

$$A_1{}' = [1, +\infty),$$

$$A_2{}' = [2, +\infty),$$

$$\vdots$$

$$A_n{}' = [n, +\infty)$$

olur.

$$\mathrm{h}([n, +\infty), \emptyset) = \sup_{x\epsilon\mathbb{R}} |d(x, \emptyset) - d(x, [n, +\infty))| = 0$$

olduğundan $A_n{}' = [n, +\infty)$ küme dizisi $A = \emptyset$ kümesine Haussdorff anlamında yakınsak olur. İleride ispatı verilen "Haussdorff yakınsak $\Longrightarrow$ Fisher yakınsak $\Longrightarrow$ Wijsman yakınsak $\Longrightarrow$ Kuratowski yakınsaktır" önermesinden dolayı $A_n{}' \xrightarrow{K} \emptyset$, $A_n{}' \xrightarrow{W} \emptyset$ olur (Baronti ve Pappini, 1986).

2.4. Küme Dizilerinin Yakınsaklık Çeşitleri Arasındaki İlişki

Bu kısımda Mosco, Kuratowski, Wijsman, Haussdorff ve Fisher anlamında yakınsaklık çeşitlerinin bazı özellikleri ve bu yakınsak çeşitleri arasındaki ilişki incelendi.

1. Yakınsaklık normlu bir uzayda alınırsa boştan farklı A_n ve A kümeleri genelde (aksi belirtilmedikçe) sınırlı ve konveks kümeler olarak alınmayacak.

2. Fisher veya Haussdorff yakınsaklıkları düşünüldüğünde, $A_n \to \emptyset$ yakınsaklığı, yeterli derecedeki büyük n ler için $A_n = \emptyset$ olduğunu gösterir. Açıkça bunun tersi doğrudur.

$\{A_n\}$ küme dizisinin her bir terimi tek elemanlı ve tüm yakınsaklık çeşitleri, limiti boştan farklı ise alışılmış anlamda dizi yakınsaklığına indirgenir. Mosco, Wijsman, Kuratowski yakınsaklıklarına göre $X = \mathbb{R}$ ve $x_n \to \pm\infty$ ise $\{x_n\} \to \emptyset$ olur.

3. Mosco yakınsaklığı özellikle konveks kümeler üzerinde incelenir.

4. A herhangi bir küme, A' kümesi A nın yığılma noktalarının kümesi ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $A^\varepsilon = \{x\epsilon X |\ d(x, A) < \varepsilon\}$ dir.

$$A^\varepsilon \subset \bigcup_{x\epsilon A} S(x,\varepsilon) \subset \bigcup_{x\epsilon A} B(x,\varepsilon) \subset \{x\epsilon X |\ d(x,A) \leq \varepsilon\} = A'^\varepsilon$$

yazılabilir. A^ε konveks ise A'^ε de konvekstir. Ayrıca

$$A = \bigcap_{\varepsilon>0} A^\varepsilon = \bigcap_{\varepsilon>0} A'^\varepsilon = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{A^\varepsilon} = \left(\bigcap_{\varepsilon>0} A^\varepsilon\right)^-$$

yazılır. Herhangi $B \subset X$ için

$$\delta(B,A) = inf\{\varepsilon > 0 | B \subset A^\varepsilon\} = inf\{\varepsilon > 0 \big| B \subset A'^\varepsilon\}$$

dur. Açıkça $A_n \overset{H}{\to} A$ ve Fisher yakınsaklığın $i.$ şartı olan $n > n_\varepsilon$ için $\delta(A, A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde n_ε sayısının olması ve

(j) Herhangi $\varepsilon > 0, n > n_\varepsilon$ için $\delta(A, A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde n_ε sayısı vardır

şartlarına denktir.

5. $x\epsilon \overline{\lim_n} A_n$ olması $\underline{\lim_n}\, d(x, A_n) = 0$ limitine denk olduğunda $x\epsilon \underline{\lim_n} A_n$ olması genelde $\lim_n d(x, A_n) = 0$ olduğunu belirtir. Ayrıca

$$h(A, A_n) = \sup_{x\epsilon X} |d(x,A) - d(x,A_n)|$$

olur.

6. $\{A_n\}$ küme dizisinin A kümesine Fisher anlamında yakınsaklığı tanımındaki

$ii.$ şartı her $x\epsilon A$ için $\lim_{n} d(x, A_n) = 0$ olduğunu gösterir. Yani $A \subset \underline{\lim}_{n} A_n$ olur. Ayrıca $i.$ şartından $\overline{\lim}_{n} A_n \subset A$ olur. Çünkü $x\epsilon \overline{\lim}_{n} A_n$ ve $x_{n_k}\epsilon A_{n_k}$ ise $\lim_{k} x_{n_k} = x$ olur. Bir alt dizi için $A_{n_k} \subset A^{1/k}$ şartını oluşturursak $x\epsilon \overline{\bigcap_k A^{1/k}} = A$ olur.

Önerme 2.3 (Baronti ve Pappini, 1986) Daima Haussdorff yakınsak $\Longrightarrow$ Fisher yakınsak $\Longrightarrow$ Wijsman yakınsak $\Longrightarrow$ Kuratowski yakınsaktır. Ayrıca normlu uzaylarda Mosco yakınsak $\Longrightarrow$Kuratowski yakınsaktır.

İspat Haussdorff yakınsak $\Longrightarrow$ Fisher yakınsaktır: Yukarıdaki 4. maddede $A_n \xrightarrow{H} A$ olması

Fisher anlamında yakınsaklığın $i.$ şartı ve

(j) Herhangi $\varepsilon > 0$ için n_ε sayısı mevcuttur ki $n > n_\varepsilon$ için $\delta(A, A_n) < \varepsilon$

şartını sağlar. Bu da Fisher anlamında yakınsaklığın tanımındaki $i.$ ve $ii.$şartlarına denktir. Bu durumda $A_n \xrightarrow{H} A$ ise $A_n \xrightarrow{F} A$ olur.

Fisher yakınsak $\Longrightarrow$ Wijsman yakınsaktır: $A_n \xrightarrow{F} A$ olsun. $A = \emptyset$ ise yeterli büyüklükteki her n için $A_n = \emptyset$ olur, istenen sağlanır. $A \neq \emptyset$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve $x\epsilon X$ için $d(x, A) = d$ olsun. Her $n > n_\varepsilon$ için $A_n \subset A^\varepsilon$ olduğundan

$$d(x, A_n) \geq d(x, A^\varepsilon)$$

olur. Artık kolaylıkla herhangi bir A kümesi, $x\epsilon X$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$d(x, A^\varepsilon) = max(0, d(x, A) - \varepsilon)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla her $n > n_\varepsilon$ için $d \leq d(x, A_n) + \varepsilon$ olur, buradan x$\epsilon\underline{\lim}_{n} d(x, A_n)$ olur.

Tersine; $y\epsilon A$ ve $d(x, y) < d + \varepsilon$ olsun. Öyle bir $\overline{n}$ mevcuttur ki $n > \overline{n}$ için $d(x, A_n) < \varepsilon$ olur. ε keyfi,

$$d(x, A_n) \leq d(x, y) + d(y, A_n) < d + 2\varepsilon$$

ve

$$\overline{\lim_{n}}\, d(x, A_n) < d + 2\varepsilon$$

olduğundan $\overline{\lim}_{n} d(x, A_n) < d$ olur.

Wijsman yakınsak $\Longrightarrow$ Kuratowski yakınsaktır: $A_n \xrightarrow{W} A$ olsun. $A = \emptyset$ ise her x için $\lim_n (x, A_n) = \infty$ olur. $\overline{\lim_n} A_n = \emptyset$ olup, $A_n \xrightarrow{K} A$ olur. $A \neq \emptyset$ ise $x\epsilon A$ var ve $0 = d(x, A) = \lim_n d(x, A_n)$ olur. Böylece yukarıdaki 5. maddedeki açıklamadan x$\epsilon\underline{\lim_n} A_n$ olur. Şu halde $A \subset \underline{\lim_n} A_n$ olur.

$x\epsilon \overline{\lim_n} A_n$ alalım. Yine $A_n \xrightarrow{W} A$ olduğundan yukardaki 5. maddedeki açıklamadan $\underline{\lim_n} d(x, A_n) = 0$. Eğer $d(x, A) = \lim_n d(x, A_n) = 0$ ise $x\epsilon A$ olur. O halde $\overline{\lim_n} A_n \subset A \subset \underline{\lim_n} A_n$ olur, dolayısıyla $A_n \xrightarrow{K} A$ olur.

Şimdi X bir normlu lineer uzay olsun.

Mosco yakınsak $\Longrightarrow$Kuratowski yakınsaktır: $\overline{\lim_n} A_n \subset \underline{\lim_n} A_n \subset \overline{\lim_n} A_n \subset w - \overline{\lim_n} A_n = A = \lim A_n$ olduğundan açıktır.

2.5. Küme Dizilerinin Yakınsağı İle İlgili Bazı Özellikler

X uzayına bazı özellikler ekleyerek, küme dizilerinin yakınsaklık çeşitleri arasındaki ilişkiler incelendi..

Eğer $n = 1,2,3, \ldots$ için bir küme dizisindeki her C_n kümesi konveks ise $\underline{\lim_n} C_n$ konvekstir.

Önerme 2.4 (Baronti ve Pappini, 1986) X bir yansımalı normlu uzay olsun. O zaman limiti ve kendisi boştan farklı olan kümelerin bir dizisi Mosko anlamında yakınsak ise Wijsman anlamında yakınsaktır.

Önerme 2.5 (Baronti ve Pappini, 1986) $\{C_n\}$ bir X normlu uzayının konveks bir alt küme dizisi olsun. Eğer $\{C_n\}$ küme dizisi Kuratowski anlamında $C_n \xrightarrow{K} C$ ise Fisher yakınsaklığın i. şartı sağlanırsa $C_n \xrightarrow{M} C$ sağlanır.

İspat $C_n \xrightarrow{K} C$ ise $\underline{\lim_n} C_n = C$ olur. $x\epsilon w - \overline{\lim_n} C_n$ ise her $k\epsilon\mathbb{N}$ için $x_{n_k} \rightharpoonup x$ olacak şekilde $x_{n_k}\epsilon C_{n_k}$ elemanlarından oluşan $\{x_{n_k}\}$ dizisi vardır. $\varepsilon > 0$ ve yeterli derecede büyük her k için $i.$ şart sağlandığından $x_{n_k} \epsilon C^{\varepsilon}$ olur. Ama $\overline{C^{\varepsilon}}$ kapalı ve konveks olduğundan bu kapalılık zayıftır. Yani her $\varepsilon > 0$ için $x \epsilon \overline{C^{\varepsilon}}$ olur, buradan $x \epsilon \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{C^{\varepsilon}} = C$ olur. Böylece $w - \overline{lim}_n C_n \subset C = \underline{lim}_n C_n$ olduğundan $C_n \xrightarrow{M} C$ olur.

Sonuç $\{C_n\}$, X normlu uzaydaki konveks kümelerin bir dizisi olsun ve bir C kümesi için Fisher yakınsaklığın $i.$ şartı sağlansın. O zaman C kümesine olan yakınsaklıkla ilgili olarak

Fisher yakınsaktır ⟺ Kuratowski yakınsaktır ⟺ Mosco yakınsaktır ⟺ Wijsman yakınsaktır

olur. Haussdorff anlamında yakınsaklık bu şartlar göz önüne alındığında diğer yakınsaklık çeşitlerinden farklıdır. $C_n = [-n, n]$ küme dizisinin ele alındığı 2.7 Örneği buna örnek olarak gösterilebilir. Örnekte normlu lineer uzayda ele alınan $\{C_n\}$ küme dizisi Fisher yakınsaklığın $i.$ şartını sağlar. $\{C_n\}$ Fisher, Wijsman ve Mosco anlamında $\mathbb{R}$ ye yakınsak olmasına karşın, Haussdorff anlamında yakınsak değildir.

2.6. Monoton Küme Dizileri İçin Yakınsaklık

$\{A_n\}$ azalan bir küme dizisi olsun. O halde Kuratowski anlamında $\{A_n\}$ küme dizisinin yakınsaklığı $A_n \xrightarrow{K} A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ olur. Genelde Wijsman anlamında $A_n \xrightarrow{W} A$ yakınsak değil ya da X normlu uzayında Mosco anlamında $A_n \xrightarrow{M} A$ limiti mevcut değildir.

Önerme 2.6 (Baronti ve Pappini, 1986) $\{C_n\}$ bir X normlu uzayındaki konveks kümelerin herhangi bir azalan dizisi olmak üzere $\{A_n\}$ küme dizisinin Mosco anlamında yakınsaklığı,

$$C_n \xrightarrow{M} C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

olur.

Holmes (1966) çalışmasında normlu bir X uzayında yakınsaklık türlerinden bazılarının sağlanması için normlu uzayının sonlu boyutlu olması gerektiğini göstermeye çalıştı. İspat aşağıdaki iki adıma dayanır:

(p) $\{C_n\}$ konveks, sınırlı ve boştan farklı kümelerin azalan bir dizisi olmak üzere,

$$C_n \xrightarrow{W} C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

olur.

(s_1) Eğer $boy(X) = \infty$ ise her n, m için $\|x_n\| = 1 - \|x_n - x_m\|$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi seçilebilir.

(s_2) $A = \{x_n | n\epsilon\mathbb{N}\}$ kümesi ve (s_1) deki gibi $\{x_n\}$ dizisi verilsin. $\bar{x}\epsilon X \setminus B(\theta, 1)$ alalım. A_n, $S(\bar{x}, \frac{1}{n}) \cup (x_i | i > n)$ kümesinin kapalı ve konveks örtüsünü belirtsin. O zaman

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\bar{x}\}$$

olur.

Eğer (s_1) doğru ise her n, m için $\|x_n - x_m\| \epsilon [1,2]$ reel sayısı olacak şekilde $B(\theta, 1)$ de $\{x_n\}$ dizisi seçmek mümkündür.

Aksine X yansımalı olduğunda (s_2) doğru olmaz. Çünkü bu Nilman' ın aşağıdaki sonucu ile çelişir.

(s_3) Bir Banach uzayı yansımalı olması için gerekli ve yeterli şart X in boştan farklı kapalı konveks, sınırlı ve azalan bir dizisi boştan farklı bir kesişime sahip olmasıdır.

(s_2) şartıyla ilgili Drop Teoremi olarak bilinen aşağıdaki teorem verildi.

Önerme 2.7 (Baronti ve Pappini, 1986) Sonsuz boyutlu bir Banach uzayının yansımalı olması için gerekli ve yeterli şart (p) nin sağlanmasıdır.

İspat X yansımalı Banach uzayı olsun. (p) deki şartı sağlayan bir dizi için (s_3) ten X yansımalı Banach uzayı X in kapalı konveks, sınırlı ve boştan farklı azalan bir dizisi boştan farklı bir kesişime sahiptir. Önerme 2.6 dan X bir normlu uzay olduğundan konveks kümelerin herhangi bir azalan $\{C_n\}$ dizisi için

$$C_n \xrightarrow{M} C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

olur. Önerme 2.4 ten X bir reflexif normlu uzayı için limiti ve kendisi boştan farklı olan kümelerin bir dizisi Mosco anlamında yakınsak ise Wijsman anlamında yakınsaktır. Ve

$$C_n \xrightarrow{W} \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

olur. Böylece (p) sağlanır.

Tersine, X yansımalı olmasın. O zaman (s_3) ten kapalı konveks sınırlı ve boştan farklı kümelerin bir $\{C_n\}$ dizisi vardır ki $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ yazılabilir. Böylece verilen herhangi bir $n\epsilon\mathbb{N}$ ve $x\epsilon X$ için

$$d(x, C_n) \leq d(x, C_1) + çap(C_1) < d(x, \emptyset) = \infty$$

olur.

Önerme 2.8 (Baronti ve Pappini, 1986) $\{A_n\}$ küme dizisi normlu bir X uzayındaki konveks kümelerin artan bir dizisi ise

$$A_n \xrightarrow{W} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^-$$

dir.

2.7. Yakınsak Küme Dizilerinde Kompaktlığın Rolü

Şimdiye kadar çalışmalarda konveks, kapalı, monoton küme dizilerinin yakınsaklığı çalışıldı. Burada ise bu küme dizilerinin kompakt olması durumu incelendi.

Önerme 2.9 (Baronti ve Pappini, 1986) Eğer A kompakt ve Fisher anlamında $A_n \xrightarrow{F} A$ ise o zaman Haussdorff anlamında $A_n \xrightarrow{H} A$ dır. Eğer Fisher yakınsaklığın $i.$ şartı sağlanır ve Kuratowski anlamında $A_n \xrightarrow{K} A$ ve A kompakt ise Mosco anlamında $A_n \xrightarrow{M} A$ olur. Özellikle Fisher anlamında $A_n \xrightarrow{F} A$ ve A kompakt ise Mosco anlamında $A_n \xrightarrow{M} A$ olur.

İspat $A_n \xrightarrow{F} A$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Fisher anlamında yakınsaklığın $i.$ şartından yeterli büyüklükteki her n için $S(A_n, A) < \varepsilon$ dur. Sonsuz çokluktaki her $n\epsilon\mathbb{N}$ için $A \not\subset (A_n)^{\varepsilon}$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir n için $d(x_n, A_n) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x_n\epsilon A$ seçilebilir. A nın bazı x elemanları için $x_{n_k} \to x$ elde ederiz. Böylece yeterli derecede büyük k lar için $d\left(x, A_{n_k}\right) > \varepsilon/2$ olur. Bu ise Fisher yakınsaklığın $ii.$ şartı ile çelişir. Dolayısıyla yeterli derecede büyük n ler için $A \subset (A_n)^{\varepsilon}$ sağlanır. Böylece Haussdorff anlamında $A_n \xrightarrow{H} A$ olur.

Şimdi ikinci kısmı göz önüne alalım. Diyelim ki $x_{n_k}\epsilon A_{n_k}$ olsun. Yeterli derecede büyük n ler için $A_{n_k} \subset A^{\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ olduğundan $\left\|x_{n_k} - a_{n_k}\right\| \to 0$ olacak şekilde $a_{n_k}\epsilon A$

seçilebilir. Eğer $a, (a_{n_k})$ nın da bir küme noktası ise o zaman $\{x_{n_k}\}$ nın da bir noktasıdır. Dolayısıyla $w - \overline{lim}_n A_n \subset \underline{lim}_n A_n = A$ olur, böylece $A_n \overset{M}{\to} A$ dır.

Aşağıda verilen (a) ve (b) varsayımları yukarıdaki sonuçların geçerli olması için yeterli değildir.

(a) C_n kümeleri konveks ve kompakt ise $C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ sınırlıdır.

Limitin kompaktlığının başka imalara yol açtığı görülmez. Mosko yakınsak$\nRightarrow$Wijsman yakınsak, ayrıca konveks ve kompakt kümelerin dizileri için benzer varsayımlar altında Kuratowski yakınsak$\nRightarrow$Mosko yakınsak ve Wijsman yakınsak$\nRightarrow$Fisher yakınsak olur.

Diğer bir önerme farklı varsayımlar altında ispatlanabilir.

Önerme 2.10 (Baronti ve Pappini, 1986) $A_n \overset{K}{\to} A$ olsun ve aşağıdaki şartın sağlandığını varsayalım.

(b) Kompakt K ve her büyük n için $A_n \subset K$ dır.

O zaman Haussdorff anlamında $A_n \overset{H}{\to} A$ dır.

İspat Eğer Kuratowski anlamında $A_n \overset{K}{\to} \emptyset$ ise yeterli derecede büyük n ler için $A_n = \emptyset$ olur. Gerçekten (b) nin anlamı: her $k \epsilon \mathbb{N}$ için $x_{n_k} \epsilon A_{n_k}$ olacak şekilde K da bir x_{n_k} dizisi vardır. Fakat $\overline{lim}_n A_n = \emptyset$ kümesinde bir $x \epsilon K$ limit noktası olması gerekir. Bu ise bir çelişkidir. O halde Hausssdorff anlamında $A_n \overset{H}{\to} A$ olur.

Şimdi A boştan farklı kompakt olsun ve (b) sağlansın. $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon/2)$ olacak şekilde A kümesinde sonlu bir $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ alt kümesi alınsın. $x_i \epsilon A$ olduğundan $\lim_n d(x_i, A_n) < \varepsilon/2$ olur $(i = 1,2,3, \dots, n\,)$. Böylece her i ve $n > \bar{n}$ için $d(x_i, A_n) < \varepsilon/2$ olacak şekilde $\bar{n}$ vardır. Böylece $n > \bar{n}$ ve herhangi bir $y \epsilon A$ için $d(y, A_n) < \varepsilon$ elde ederiz. Böylece yeterli derecede büyük n ler için $A \subset (A_n)^{\varepsilon}$ olur.

Şimdi bazı $\varepsilon > 0$ ve sonsuz çokluktaki n ler için $A_n \subset A^{\varepsilon}$ olmadığını kabul edelim. Böyle n ler için $d(x_n, A) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x_n \epsilon A_n$ alalım. $\{x_n\}$ dizisinden başka x e yakınsayan bir dizi vardır ((b) den dolayı). Bu durumda $x \epsilon A$ olması $d(x, A) \geq \varepsilon$ olmasıyla çelişir. O halde Haussdorff anlamında $A_n \overset{H}{\to} A$ dır.

Örnek 2.8 Eğer $x_1 \neq x_2$, $A_{2n} = \{x_2\}$ ve $A_{2n+1} = \{x_1\}$ ise $\underline{lim}_n A_n = \emptyset$ olur ve (b) sağlanır. Haussdorff anlamında $A_n \xrightarrow{H} A = \emptyset$ olur.

Şimdi X normlu uzay ve $boy(X) < \infty$ olsun. O zaman basitçe Mosko yakınsak ⇔Kuratowski yakınsaktır.

Hatta böylece Kuratowski yakınsak⇔Wijsman yakınsak (Holmes, 1966, Teorem 5(b); Wijsman, 1966, Teorem3.1; Salinetti ve Wets, 1979, Teorem1; Beer, 1985, Teorem 1) Örnek 2.5 ve Örnek 2.7 gösterir ki diğer ifadelerin hiçbiri sağlamaz.

Önerme 2.11 (Salinetti ve Wets,1979, Önerme 3) $\{C_n\}$, sonlu boyutlu X uzayının konveks alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer C kompakt ve $C_n \xrightarrow{K} C \neq \emptyset$ ise o zaman $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ sınırsızdır.

C nin kompaktlığı, boştan farklı olması ve her n için C_n lerin konveks olması varsayımlarının hepsi yukarıdaki önermenin doğruluğu için gereklidir. Bu durum aşağıdaki örnekte görülebilir.

Örnek 2.9 ℝ de aşağıdaki genel anlamda yakınsak küme dizileri alınsın.

$$C_n = [n, n+1], \quad C_n{}' = [0, n], \quad C_n{}'' = \{\theta\} \cup [n, n+1]$$

Her durumda $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ sınırlıdır.

Önerme 2.10 ve Önerme 2.11 sonucunda aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2.12 (Salinetti ve Wets, 1979, Önerme 13) $\{C_n\}$ konveks kümelerin bir dizisi $Boy(X) < \infty$ olsun. C boştan farklı ve kompakt olmak üzere Kuratowski anlamında $C_n \xrightarrow{K} C$ ise, o zaman Haussdorff anlamında $C_n \xrightarrow{H} C$ dir.

Yine $C = \emptyset$ için Örnek 2.9 da görüldüğü gibi yukarıdaki önerme yanlıştır. Sonlu boyutlu uzaylarda bazı şartlar Kuratowski yakınsaklığına denktir (Salinetti ve Wets, 1981, Teorem 2.2).

2.8. Bir Metrik Uzaydaki Kapalı Kümelerin Yakınsaklığı

X metrik uzayındaki kapalı kümelerin uzayı $CL(X)$ deki bir C kümesi için uzaklık fonksiyonu $d(.,C): X \to [0,\infty)$, $d(x,C) = inf\,\{d(x,z) | z\epsilon C\}$ ile tanımlanır. Eğer $F_1, F_2 \epsilon CL(X)$ ise F_1 ve F_2 arasındaki Haussdorff uzaklık

$$h_d(F_1, F_2) = sup\ (\{d(x, F_1)|x\epsilon F_2\} \cup \{d(x, F_2)|x\epsilon F_1\})$$

ile tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan uzaklık $CL(X)$ üzerinde sonsuz değerli bir metrik belirler.

Şimdi "Hangi uzaylarda $CL(X)$ deki bir C_n dizisinin boş olmayan bir C kümesine noktasal yakınsaklığı, dizideki kümeler için uzaklık fonksiyonlarının C için uzaklık fonksiyonuna denktir?" sorusuna cevap aranacaktır.

Burada kendine yakınsayan kümelerin dizilerinin yakınsaklığı ile uzaklık fonksiyonlarının bir dizisinin yakınsaklığı arasındaki ilişki incelenmiştir.

Tanım 2.38 $\{C_n\}, X$ metrik uzayında kapalı kümelerin bir dizisi ise $lim\,inf\ C_n$(ya da $lim\ sup\ C_n$)**,** limitine karşılık gelen y deki tüm komşuluklarında bulunan noktaların kümesidir. Fakat $\{C_n\}$ kümelerinin çoğu sonlu (ya da sonsuz) çokluktadır.

Açıkça $lim\,inf C_n \subset lim\,sup\,C_n$ dir. Hem $lim\ inf\ C_n$ hem de $lim\ sup\ C_n$ kapalı kümelerdir (boş olması mümkün). Eğer

$$lim\ inf C_n = lim \sup C_n = C$$

ya da denk bir ifadeyle

$$lim\ sup\ C_n \subset C \subset lim\,inf\ C_n$$

olduğunda C_n dizisi kapalı C kümesine Kuratowski yakınsar denir (Beer, 1985).

X yerel kompakt ve ayrılabilir ise Kuratowski yakınsaklığı $CL(X)$ üzerindeki belli bir metriklenebilir topolojiye göre yakınsaktır.

$\{C, C_1, C_2, \dots\} \subset CL(X)$ ve $\{d(x, C_n)\}, d(x, C)$ ye noktasal yakınsak olsun. Her $x\epsilon C$ için $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, C_n) = 0$ şartı $x\epsilon lim\,inf\ C_n$ olduğunu gösterir, çünkü $C \subset lim\,inf\ C_n$ dir.

Öte yandan eğer $x\epsilon lim\,sup\ C_n$ ise bir $\{x_n\} \to x$ dizisi ve her x için tamsayıların artan bir $\{n_k\}$ dizisi vardır. $\lim\limits_{k\to\infty} d\left(x, C_{n_k}\right) = 0$ sağlanır. Bu durum uzaklık fonksiyonlarının $x\epsilon C$ ye noktasal yakınsaklıklarından kaynaklanmaktadır. Yani, $lim\ sup\ C_n \subset C$ dir. Böylece $\{d(x, C_n)\},\ d(x, C)$ ye noktasal yakınsaklığı C_n in C ye Kuratowski yakınsaklığını gerektirir (Tersi genelde yanlıştır).

Örnek 2 .10 $X = (0,2)$ reel eksenin altuzayı olsun ve $C_n = (0,1] \cup \{2 - 1/n\}$ olsun.

Açıkça $C_n \xrightarrow{K} (0,1]$ dir. Buna karşılık

$$\lim_{n\to\infty} d(7/4\,, C_n) = 1/4 < 3/4 = d(7/4\,, (0,1])$$

olur (Beer, 1987).

Önerme 2.13 (Beer, 1985) (X, d) bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) X metrik uzayının kapalı ve boştan farklı altkümelerinin bir $\{C_n\}$ dizisi, kapalı ve boştan farklı C kümesine Kuratowski yakınsak olduğunda o zaman $\{d(x, C_n)\}$, $d(x, C)$ ye noktasal yakınsar.

(2) Her $p\epsilon X$ için eğer $\{x_n\}$ dizisi X de hiçbir küme noktası olmayan bir dizi ise o zaman her $x\epsilon X$ için

$$d(p, x) \leq lim\ inf\ d(p, x_n)$$

olur.

İspat (1) ⇒ (2): Diyelim (2) yanlıştır. X uzayında $lim\ inf\ d(p, x_n) < d(p, x)$ ifadesini sağlayan p ve x noktaları ve X de hiçbir küme noktası olmayan bir $\{x_n\}$ dizisi seçilsin. Bir alt diziye geçilerek bazı $\epsilon > 0$ ve her bir n için $d(p, x_n) < d(p, x) = \varepsilon$ olduğu varsayılabilir. Her n için $C_n = \{x, x_n\}$ olsun. Açıkça $lim\ inf C_n = lim \sup C_n = \{x\}$ dir. Ancak $C = \{x\}$ ile

$$lim\ inf\ d(p, C_n) = lim \sup d(p, x_n) < d(p, x) - \varepsilon = d(p, C) - \varepsilon$$

yazılır. Dolayısıyla $\{d(x, C_n)\}$ dizisinin $\{d(x, C)\}$ ye noktasal yakınsaklığı yanlıştır.

(2) ⇒ (1): $\{C_n\}$, $CL(X)$ de bir dizi ve boştan farklı C kümesine Kuratowski anlamında yakınsak ve $p\epsilon X$ sabit olsun. Çünkü $C \subset lim\ inf\ C_n$ dir. Geriye $d(p, C) < lim\ inf\ d(p, C_n)$ olduğunu göstermek kalır. Bunun için her n için $x_n\epsilon C_n$ seçilsin öyle ki

$$d(p, x_n) < d(p, C_n) + 1/n$$

olsun. O zaman

$$\lim_{k\to\infty} d(p, x_{n_k}) = lim\ inf\ d(p, C_n)$$

olacak şekilde $\{x_n\}$ in bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Eğer $\{x_{n_k}\}$ bir x küme noktasına sahipse o zaman $x\epsilon lim\ sup\ C_n = C$ ve d nin sürekliliği ile

$$d(p, C) \leq d(p, x) = lim\ inf\ d(p, C_n)$$

olur. Aksi halde her $x \epsilon X$ için

$$d(p,x) \leq lim\, inf\, d(p,x_n) = lim\, inf\, d(p,C_n)$$

dir. Özellikle bu her $x \epsilon X$ için doğrudur. Böylece $d(p,C) \leq lim\, inf\, d(p,C_n)$ olur.

Kolayca gözlemlenir ki eğer C yukarıdaki (2) şartını sağlarsa o zaman X yerel kompakt ve tam olmalıdır. Ayrıca X in her bir kapalı ve sınırlı alt kümelerinin kompaktlığı (2) yi garantiler.

Önerme 2.14 (Papini ve Wu, 2015) $\{A_n\}$ kapalı, konveks ve sınırlı kümelerin bir dizisi ve

$$\lim_n inf\, A_n = A$$

ise A konveks bir kümedir.

İspat x ve y, A da iki nokta ve $\lambda \epsilon (0,1)$ keyfi bir sayı olsun. O zaman her $n \epsilon \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y$$

ve $x_n, y_n \epsilon A_n$ olacak şekilde $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ gibi iki dizi mevcuttur. O zaman

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n + (1-\lambda)\lim_{n\to\infty} y_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n)$$

olur. Her $n \epsilon \mathbb{N}$ için A_n konveks olduğundan $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \epsilon A_n$ yazılabilir. Dolayısıyla $\lambda x + (1-\lambda)y \epsilon A$ olur. Böylece A konvekstir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

3.1. Küme Dizilerinin Farklarının Yakınsaklığı

ω tüm sayı dizilerin kümesini göstermek üzere,

$$l_\infty = \left\{x = (x_k)\epsilon\omega \middle| \sup_k |x_k| < \infty\right\}$$

$$c = \left\{x = (x_k)\epsilon\omega \middle| \lim_{k\to\infty} x_k = l, l\epsilon\mathbb{C}\right\}$$

$$c_0 = \left\{x = (x_k)\epsilon\omega \middle| \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\}$$

kümeleri sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizilerin kümesini belirtir. Bu kümeler birer vektör uzayıdır. Kızmaz (1981) yaptığı çalışmada $X = l_\infty,\ c,\ c_0$ olmak üzere,

$$X(\Delta) = \{x = (x_k)\epsilon\omega |\ \Delta x_k \epsilon X\ \}$$

kümesi ile fark dizi uzaylarını tanımladı. Bu dizi uzaylarının bazı topolojik yapılarını inceledi. Burada $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ dir. Ardından Kızmaz (1981) ve Sarıgöl (1987) çalışmalarında $X(\Delta)$ fark uzaylarını

$$X(\Delta_r) = \{x = (x_k)\epsilon\omega |\ \Delta_r x = \{k^r(x_k - x_{k+1})\}\epsilon X\ , r < 1 \text{ için}\}$$

ile tanımlı uzaylara genişletti ve $X(\Delta_r)$ uzayının $\alpha-, \beta-, \gamma-$ duallerini hesapladılar.

Ahmad ve Mursaleen (1987) bu uzayları $X(p, \Delta)$ uzaylarına genişlettiler.

Malkowsky (1989) $l_\infty(p, \Delta)$ ve $c_0(p, \Delta)$ kümelerinin Köthe-Toeplitz duallerini belirledi.

Choudhary ve Mishra (1993) $r \geq 1$ için $c_0(\Delta_r)$ dizi uzaylarının bazı özelliklerini çalıştılar. Mursaleen ve diğerleri (1996)

$$l_\infty(p, \Delta_r) = \{x = (x_k)\epsilon\omega | \Delta_r x \epsilon l_\infty(p)\}\ , \quad (r > 0)$$

dizi uzayını tanımladı ve bu dizi uzaylarının bazı özelliklerini incelediler.

Yine son zamanlarda $0 < p < 1$ durumu için Altay ve Başar (2003) ve $0 < p \leq \infty$ durumu için Malkowsky ve diğerleri (2004), $(x_k - x_{k+1})$ şeklindeki $x = (x_k)$ dizilerinden oluşan p −sınırlı değişkenli dizilerinin b_{v_p} fark uzaylarını tanımladı.

$$b_{v_p} = \{x = (x_k)\epsilon\omega |\ \textstyle\sum_k |x_k - x_{k+1}|^p < \infty\}, (0 < p < \infty)$$

$$b_{v_\infty} = \left\{x = (x_k)\epsilon\omega \middle| \sup_{k\epsilon\mathbb{N}} |x_k - x_{k+1}| < \infty\right\}$$

Biz de bu çalışmada adı geçen sayı dizileri yerine yakınsak küme dizileri aldık. $\{A_n\}$ bir küme dizisi olmak üzere bu küme dizisinin fark dizisini, $\mathrm{P}_n = (\Delta A_n) = A_n - A_{n-1}$ ve $A_0 = \{0\}$ alacağız $(n = 0,1,2,3, \dots)$. Burada

$$\mathrm{P}_1 = A_1 - A_0$$

$$\mathrm{P}_2 = A_2 - A_1$$

$$\mathrm{P}_3 = A_3 - A_2$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{P}_n = A_n - A_{n-1}$$

olur.

$\{A_n\}$ küme dizisi A kümesine yakınsak iken $\{\Delta A_n\}$ küme dizisi A kümesine yakınsak mıdır? Yani,

$$\lim_n sup\, A_n = \lim_n sup\, A_n = A \text{ ise } \lim_n sup\, \Delta A_n = \lim_n sup\, \Delta A_n = A$$

mıdır? Acaba $\lim_{n\to\infty} P_n$ mevcut mudur? Kuratowski, Haussdorff, Mosco, Wijsman ve Fisher anlamında yakınsak küme dizilerinin fark küme dizisinin de adı geçen anlamda nereye yakınsak olduğu çalışıldı.

$\{A_n\}$ küme dizisinin her bir terimi ayrık ise Bölüm 1'deki ayrık küme dizisi örneğinden $lim\, sup\, A_n = lim\, inf\, A_n = \emptyset$ idi. Şimdi $\{\Delta A_n\}$ küme dizisini göz önüne alalım:

$$\mathrm{P}_1 = A_1 - A_0 = A_1$$

$$\mathrm{P}_2 = A_2 - A_1 = A_2$$

$$\mathrm{P}_3 = A_3 - A_2 = A_3$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{P}_n = A_n - A_{n-1} = A_n$$

ve A_n ler ayrık olduğundan her $n, m \in \mathbb{N}$ için $A_n \cap A_m = \emptyset$ dir. Buradan,

$$\mathrm{P}_1 = A_1$$

$$\mathrm{P}_2 = A_2$$

$$\mathrm{P}_3 = A_3$$

$\vdots$

$$\mathrm{P}_n = A_n$$

bulunur. Yani $\{P_n\} = \{A_n\}$ olur. O zaman $lim\, A_n = lim\, P_n = \emptyset$ dir. Gerçekten $\{P_n\}$ dizisi ayrık olduğundan $m \neq n$ olmak üzere her $m, n \epsilon \mathbb{N}$ için $P_n \cap P_m = \emptyset$ olur hatta daha genel bir yazılımla $\bigcap_{n=m}^{\infty} P_n = \emptyset$ ve buradan

$$\underset{n}{lim}\, inf\, P_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} P_n\right) = \emptyset$$

olur.

$\underset{n}{lim}\, sup\, P_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} P_n\right) \neq \emptyset$ olduğunda $\bigcup_{n=m}^{\infty} P_n \neq \emptyset$ olur**.** Yani her $m \epsilon \mathbb{N}$ için en az bir $x_0 \epsilon \bigcup_{n=m}^{\infty} P_n$ vardır. Bu ise her $m \epsilon \mathbb{N}$ için $x_0 \epsilon P_{m_0}$ olacak şekilde en az bir $m_0 \epsilon \mathbb{N}$ $(m_0 \geq m)$ vardır. Arakesit tanımından x elemanı $P_{m_0+1}, P_{m_0+1}, \ldots$ terimlerinin elemanıdır. Bu $\{P_n\}$ dizisinin ayrık kümelerin dizisi olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\underset{n}{lim}\, sup\, P_n = \emptyset$ olmak zorundadır. Yani $\lim_{n \to \infty} P_n = \emptyset$ olur.

$\{A_n\}$ küme dizisinin her terimi ortak bir kesişime sahip olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \epsilon \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ olur. Diyelim ki $\bigcap_{i \epsilon \mathbb{N}} A_n = P$ olsun. Bu şekildeki bir küme dizisinin limitini bulalım. $k > m$ olmak üzere $(k, m, n \epsilon \mathbb{N})$,

$$\begin{aligned}
\underset{n}{lim}\, sup\, P_n &= \underset{n}{lim}\, sup\, \Delta A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} (A_n - A_{n-1})\right) \\
&= \bigcap_{m=1}^{\infty} \big((A_m - A_{m-1}) \cup (A_{m+1} - A_m) \cup (A_{m+2} - A_{m+1}) \cup \cdots \cup \\
&\quad (A_k - A_{k-1}) \cup \cdots \big) \\
&= [(A_1 - A_0) \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots] \\
&\qquad \cap [(A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup (A_4 - A_3) \cup \cdots] \\
&\qquad \cap [(A_3 - A_2) \cup (A_4 - A_3) \cup (A_5 - A_4) \cup \cdots] \cap \cdots \\
&\qquad \cap [(A_k - A_{k-1}) \cup (A_{k+1} - A_k) \cup (A_{k+2} - A_{k+1}) \cup \cdots] \\
&\qquad \cap \cdots \\
&= [(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) - \textstyle\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m] \cap [(A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \cdots) - \\
&\quad \textstyle\bigcap_{m=2}^{\infty} A_m] \cap [(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \cdots) - \bigcap_{m=3}^{\infty} A_m] \cap \cdots \cap \big[\big((A_k \cup A_{k+1} \cup \\
&\quad A_{k+2} \cup \cdots) - \textstyle\bigcap_{m=k}^{\infty} A_m\big)\big] \cap \cdots
\end{aligned}$$

$$= [(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m] \cap [(A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m] \cap [(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m] \cap \cdots \cap \left[\left((A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right)\right] \cap \cdots$$

$$= [(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \cdots) \cap (A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \cdots) \cap \cdots \cap (A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \cdots) \cap \cdots] - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$$

$$= \lim_n \sup A_n - P \;=\; \lim_n \sup A_n - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$$

Burada, $P = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcap_{m=2}^{\infty} A_m = \bigcap_{m=3}^{\infty} A_m = \cdots = \bigcap_{m=k}^{\infty} A_m = \cdots$ olur. Çünkü dizinin tüm terimleri aynı kesişime sahiptir. Yukarıdaki eşitlikteki her bir ifade yerine $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ yazdık.

$$\lim_n \inf P_n = \lim_n \inf \; \Delta A_n \;= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty}(A_n - A_{n-1})\right)$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left((A_m - A_{m-1}) \cap (A_{m+1} - A_m) \cap (A_{m+2} - A_{m+1}) \cap \cdots \cap (A_k - A_{k-1}) \cap \cdots\right)$$

$$\begin{aligned} = [(A_1 - A_0) \cap (A_2 - A_1) \cap (A_3 - A_2) \cap \cdots] \\ \cup [(A_2 - A_1) \cap (A_3 - A_2) \cap (A_4 - A_3) \cap \cdots] \\ \cup [(A_3 - A_2) \cap (A_4 - A_3) \cap (A_5 - A_4) \cap \cdots] \cup \cdots \\ \cup [(A_k - A_{k-1}) \cap (A_{k+1} - A_k) \cap (A_{k+2} - A_{k+1}) \cap \cdots] \\ \cup \cdots \end{aligned}$$

$$= [(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m] \cup [(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \cdots) - \bigcap_{m=2}^{\infty} A_m] \cup [(A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \cdots) - \bigcap_{m=3}^{\infty} A_m] \cup \cdots \cup \left[\left((A_k \cap A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap \cdots) - \bigcap_{m=k}^{\infty} A_m\right)\right] \cup \cdots$$

$$= [(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m] \cup [(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m] \cup [(A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m] \cup \cdots \cup \left[\left((A_k \cap A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right)\right] \cup \cdots$$

$$= [(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots) \cup (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \cdots) \cup (A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \cdots) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap \cdots)] - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$$

$$= \lim_n \inf A_n - P = \lim_n \inf A_n - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$$

Sonuç olarak $\{A_n\}$ küme dizisi yakınsak ve $\lim_n \sup A_n = \lim_n \sup A_n = A$ ise $\{A_n\}$ küme dizisinin fark dizisinin limiti de mevcuttur. Bu limit

$$\lim_n \sup (A_n - A_{n-1}) = \lim_n \inf (A_n - A_{n-1}) = A - \cap_{n=1}^{\infty} A_n$$

şeklindedir.

Örnek 3.1 $X = \mathbb{R}^2$ ve $A_n = \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{x}{n}, x\epsilon\mathbb{R}, \mathrm{n}\epsilon\mathbb{N}\right\}$ ise,

$$A_1 = \{(x,y)|\, y = \mathrm{x}, x\epsilon\mathbb{R}\},$$

$$A_2 = \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{x}{2}, x\epsilon\mathbb{R}\right\},$$

$$A_3 = \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{x}{3}, x\epsilon\mathbb{R}\right\},$$

$$\vdots$$

$$A_n = \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{\mathrm{x}}{n}, x\epsilon\mathbb{R}\right\}$$

olur. $n \to \infty$ için $A_n \to A = \{(x,y)|\, y = 0, x\epsilon\mathbb{R}\}$ olur. $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{(0,0)\}$ olduğundan $\{A_n\}$ küme dizisinin terimleri ortak bir kesişime sahiptir. $A_0 = \emptyset$ olmak üzere $\{A_n\}$ dizisinin fark dizisi olan $\{\Delta A_n\}$ küme dizisini bulalım. $(\Delta A_n) = (P_n) = (A_n - A_{n-1})$ olduğundan,

$$P_1 = A_1 - A_0 = \{(x,y)|\, y = \mathrm{x}, x\epsilon\mathbb{R}\} - \emptyset$$

$$P_2 = A_2 - A_1 = \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{x}{2}, x\epsilon\mathbb{R}\right\} - \{(x,y)|\, y = \mathrm{x}, x\epsilon\mathbb{R}\}$$

$$P_3 = A_3 - A_2 = \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{x}{3}, x\epsilon\mathbb{R}\right\} - \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{x}{2}, x\epsilon\mathbb{R}\right\}$$

$$\vdots$$

$$P_n = A_n - A_{n-1} = \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{\mathrm{x}}{n}, x\epsilon\mathbb{R}\right\} - \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{\mathrm{x}}{n-1}, x\epsilon\mathbb{R}\right\}$$

olur. Buradan,

$$P_1 = \{(x,y)|\, y = \mathrm{x}, x\epsilon\mathbb{R}\} - \emptyset = A_1$$

$$P_2 = \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{x}{2}, x\epsilon\mathbb{R}\right\} - \{(0,0)\} = A_2 - \{(0,0)\}$$

$$P_3 = A_3 = \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{x}{3}, x\epsilon\mathbb{R}\right\} - \{(0,0)\} = A_3 - \{(0,0)\}$$

$$\vdots$$

$$P_n = A_n - A_{n-1} = \left\{(x,y)\middle|\, y = \frac{x}{n}, x\epsilon\mathbb{R}\right\} - \{(0,0)\} = A_n - \{(0,0)\}$$

elde edilir. Şimdi (P_n) fark dizisinin limitinin $A - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{(x,0)|\, x\epsilon\mathbb{R}\} - \{(0,0)\}$ olduğunu küme dizilerinin limitini kullanarak bulalım.

Bunun için $\limsup_n (A_n - A_{n-1}) = \liminf_n (A_n - A_{n-1}) = A - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
\limsup_n P_n = \limsup_n (A_n - A_{n-1}) &= \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty}(A_n - A_{n-1})\right) \\
&= \bigcap_{m=1}^{\infty}\big((A_m - A_{m-1}) \cup (A_{m+1} - A_m) \cup (A_{m+2} - A_{m+1}) \cup \cdots \cup (A_k - A_{k-1}) \cup \cdots\big) \\
&= [(A_1 - A_0) \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots] \cap [(A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup (A_4 - A_3) \cup \cdots] \cap [(A_3 - A_2) \cup (A_4 - A_3) \cup (A_5 - A_4) \cup \cdots] \cap \cdots \cap [(A_k - A_{k-1}) \cup (A_{k+1} - A_k) \cup (A_{k+2} - A_{k+1}) \cup \cdots] \cap \cdots \\
&= [(A_1 - \emptyset) \cup (A_2 - \{(0,0)\}) \cup (A_3 - \{(0,0)\}) \cup \cdots] \cap [(A_2 - \{(0,0)\}) \cup (A_3 - \{(0,0)\}) \cup (A_4 - \{(0,0)\}) \cup \cdots] \cap [(A_3 - \{(0,0)\}) \cup (A_4 - \{(0,0)\}) \cup (A_5 - \{(0,0)\}) \cup \cdots] \cap \cdots \cap [(A_k - \{(0,0)\}) \cup (A_{k+1} - \{(0,0)\}) \cup (A_{k+2} - \{(0,0)\}) \cup \cdots] \cap \cdots \\
&= [(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) - \{(0,0)\}] \cap [(A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \cdots) - \{(0,0)\}] \cap [(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \cdots) - \{(0,0)\}] \cap \cdots \cap \big[\big((A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \cdots) - \{(0,0)\}\big)\big] \cap \cdots \\
&= \left[(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right] \cap \left[(A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right] \cap \left[(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right] \cap \cdots \cap \left[\left((A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \cdots) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right)\right] \cap \cdots \\
&= [(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \cdots) \cap (A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \cdots) \cap \cdots \cap (A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \cdots) \cap \cdots] - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \\
&= \limsup_n A_n - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \mathrm{A} - \{(0,0)\} = \{(x,0)|\, x\epsilon\mathbb{R}\} - \{(0,0)\}
\end{aligned}$$

$$\liminf_n P_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty}(A_n - A_{n-1})\right)$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty}\big((A_m - A_{m-1}) \cap (A_{m+1} - A_m) \cap (A_{m+2} - A_{m+1}) \cap \cdots \cap (A_k - A_{k-1}) \cap \cdots\big)$$

$$= [(A_1 - A_0) \cap (A_2 - A_1) \cap (A_3 - A_2) \cap \cdots] \cup [(A_2 - A_1) \cap (A_3 - A_2) \cap (A_4 - A_3) \cap \cdots] \cup [(A_3 - A_2) \cap (A_4 - A_3) \cap (A_5 - A_4) \cap \cdots] \cup \cdots \cup [(A_k - A_{k-1}) \cap (A_{k+1} - A_k) \cap (A_{k+2} - A_{k+1}) \cap \cdots] \cup \cdots$$

$$= [(A_1 - \emptyset) \cap (A_2 - \{(0,0)\}) \cap (A_3 - \{(0,0)\}) \cap \cdots] \cup [(\mathrm{A}_2 - \{(0,0)\}) \cap (\mathrm{A}_3 - \{(0,0)\}) \cap (\mathrm{A}_4 - \{(0,0)\}) \cap \cdots] \cup [(\mathrm{A}_3 - \{(0,0)\}) \cap (\mathrm{A}_4 - \{(0,0)\}) \cap (\mathrm{A}_5 - \{(0,0)\}) \cap \cdots] \cup \cdots \cup [(\mathrm{A}_\mathrm{k} - \{(0,0)\}) \cap (\mathrm{A}_{\mathrm{k}+1} - \{(0,0)\}) \cap (\mathrm{A}_{\mathrm{k}+2} - \{(0,0)\}) \cap \cdots] \cdots$$

$$= [(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots) - \{(0,0)\}] \cup [(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \cdots) - \{(0,0)\}] \cup [(A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \cdots) - \{(0,0)\}] \cup \cdots \cup \big[\big((A_k \cap A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap \cdots) - \{(0,0)\}\big)\big] \cup \cdots$$

$$= [(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots) \cup (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \cdots) \cup (A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \cdots) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap \cdots)] - \{(0,0)\}$$

$$= [(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots) \cup (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \cdots) \cup (A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \cdots) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap \cdots)] - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$$

$$= \lim_n \inf A_n - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \mathrm{A} - \{(0,0)\}$$

Örnekten görüldüğü gibi $\lim_n \inf A_n = \lim_n \sup A_n = A = \{(x,0) |\, x \epsilon \mathbb{R}\}$ iken $\lim_n \inf \Delta A_n = \lim_n \sup \Delta A_n = A - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{(x,0) |\, x\epsilon\mathbb{R}\} - \{(0,0)\}$ olur.

3.2. Monoton Küme Dizilerinin Fark Dizilerinin Yakınsaklığı

Azalan küme dizilerinin fark fizilerinin limiti

$\{A_n\}$ azalan küme dizisi olsun. O halde monoton azalan küme dizisi tanımından $A_{n+1} \subset A_n$ dir. $A_0 = \emptyset$ ve $P_n = \Delta A_n = A_n - A_{n-1}$ olmak üzere, $\cdots \subset A_k \subset \cdots \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1$ olduğundan,

$$P_1 = A_1 - A_0 = A_1$$

$$P_2 = A_2 - A_1 = \emptyset$$

$$P_3 = A_3 - A_2 = \emptyset$$

$$\vdots$$

$$P_n = A_n - A_{n-1} = \emptyset$$

olduğundan

$$\lim_n P_n = \lim_n A_n - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

olur.

Örnek 3.2 Genel terimi $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ ile verilen küme dizisini göz önüne alalım. Bu azalan bir küme dizisi olup,

$$A_1 = [-1,1]$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$\vdots$$

$$A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

ve $\lim_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ olur. Şimdi $P_n = \Delta A_n = A_n - A_{n-1}$ genel terimiyle verilen fark dizisinin limitini bulalım. $A_0 = \emptyset$ olmak üzere,

$$P_1 = A_1 - A_0 = [-1,1]$$

$$P_2 = A_2 - A_1 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] - [-1,1] = \emptyset$$

$$P_3 = A_3 - A_2 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] - \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \emptyset$$

$$\vdots$$

$$P_n = A_n - A_{n-1} = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] - \left[-\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}\right] = \emptyset$$

olur. $\lim\limits_{n} P_n = \emptyset$ bulunur.

Artan küme dizilerinin fark dizilerinin limiti

$\{A_n\}$ artan küme dizisi olsun. O halde monoton artan küme dizisi tanımından $A_n \subset A_{n+1}$ dir. $A_0 = \emptyset$ ve $P_n = \Delta A_n = A_n - A_{n-1}$ olmak üzere, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$ olduğundan,

$$P_1 = A_1 - A_0 = A_1$$

$$P_2 = A_2 - A_1$$

$$P_3 = A_3 - A_2$$

$$\vdots$$

$$P_n = A_n - A_{n-1}$$

kümeleri ayrıktır. O halde her $n, m \epsilon \mathbb{N}$ için $n \neq m$ olmak üzere $A_n \cap A_m = \emptyset$ dir. Şimdi dizinin limitini bulalım:

$$\lim\limits_{n} \inf P_n = \cup_{m=1}^{\infty}(\cap_{n=m}^{\infty} P_n) = \cup_{m=1}^{\infty}(P_m \cap P_{m+1} \cap P_{m+2} \cap \cdots)$$

$$= \cup_{m=1}^{\infty}(\emptyset) = \emptyset$$

Ayrık küme dizileri için $\lim\limits_{n} \sup P_n = \emptyset$ olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla $\lim\limits_{n} \sup P_n = \lim\limits_{n} \inf P_n = \emptyset$ olup $\{P_n\}$ fark dizisi için $\lim\limits_{n} P_n = \emptyset$ olur.

Örnek 3.3 $A_n = [-n, n]$ artan küme dizisi için

$$A_1 = [-1,1]$$

$$A_2 = [-2,2]$$

$$A_3 = [-3,3]$$

$$\vdots$$

$$A_n = [-n, n]$$

ve $\lim\limits_{n} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ olur. $P_n = \Delta A_n = A_n - A_{n-1}$ için $A_0 = \emptyset$ olmak üzere,

$$P_1 = A_1 - A_0 = [-1,1]$$

$$P_2 = A_2 - A_1 = [-2,2] - [-1,1] = [-2,-1) \cup (1,2]$$

$$P_3 = A_3 - A_2 = [-3,3] - [-2,2] = [-3,-2) \cup (2,3]$$

$$\vdots$$

$$P_n = A_n - A_{n-1} = [-n,n] - [-n+1,n-1] = [-n,-n+1) \cup (n-1,n]$$

olur. Her $n\epsilon\mathbb{N}$ için P_n kümeleri ayrık olduğundan $\lim_n P_n = \emptyset$ olur. Gerçekten de

$$\lim_n \sup P_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}(\bigcup_{n=m}^{\infty} P_n) = \bigcap_{m=1}^{\infty}(P_m \cup P_{m+1} \cup P_{m+2} \cup \cdots)$$

$$= (P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \cdots) \cap (P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup \cdots) \cap (P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup \cdots) \cap \cdots$$

$$= ([-1,1] \cup ([-2,-1) \cup (1,2]) \cup ([-3,-2) \cup (2,3]) \cup \cdots) \cap \Big(([-2,-1) \cup (1,2]) \cup \big(([-3,-2) \cup (2,3])\big) \cup ([-4,-3) \cup (3,4]) \cup \cdots \Big) \cap \Big(([-3,-2) \cup (2,3]) \cup ([-4,-3) \cup (3,4]) \cup ([-5,-4) \cup (4,5]) \cup \cdots \Big) \cap \cdots$$

$$= \emptyset$$

$$\lim_n \inf P_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}(\bigcap_{n=m}^{\infty} P_n) = \bigcup_{m=1}^{\infty}(P_m \cap P_{m+1} \cap P_{m+2} \cap \cdots)$$

$$= (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \cdots) \cup (P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap \cdots) \cup (P_3 \cap P_4 \cap P_5 \cap \cdots)$$

$$= ([-1,1] \cap ([-2,-1) \cup (1,2]) \cap ([-3,-2) \cup (2,3]) \cap \cdots) \cup \Big(([-2,-1) \cup (1,2]) \cap ([-3,-2) \cup (2,3]) \cap ([-4,-3) \cup) \cap \cdots \Big) \cup \Big(([-3,-2) \cup (2,3]) \cap ([-4,-3) \cup (3,4]) \cap ([-5,-4) \cup (4,5]) \cap \cdots \Big) \cup \cdots$$

$$= \emptyset$$

olur. $\lim_n \sup P_n = \lim_n \inf P_n = \emptyset$ olup $\{P_n\}$ fark dizisi için $\lim_n P_n = \emptyset$ olur.

Elde Edilen Bazı Genel Sonuçlar

1. Genel olarak $\{A_n\}$ küme dizisi bir A kümesine yakınsak ise fark dizisi olan $\{\Delta A_n\}$ küme dizisi $A - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesine yakınsar.
2. $\{A_n\}$ artan yakınsak küme dizisi ise fark dizisi $\{\Delta A_n\}$ terimleri ayrık bir küme dizisi olduğundan boş kümeye yakınsar.
3. $\{A_n\}$ azalan ya da ayrık kümelerin yakınsak küme dizisi ise fark dizisi $\{\Delta A_n\}$ sonsuz sayıda terimi boş küme olan bir küme dizisi olduğundan boş kümeye yakınsar.

3.3. Küme Dizilerinin Fark Dizileri İçin Bazı Yakınsaklık Çeşitleri

Şimdiye kadar yakınsak bir $\{A_n\}$ küme dizisinin fark dizisi olan $\{\Delta A_n\}$ küme dizisinin de yakınsak olup olmadığını inceledik. Eğer yakınsak ise bu yakınsamanın $\{A_n\}$ küme dizisinin yakınsaklığına bağlı olup olmadığını inceledik. Şimdi bir X metrik uzayında alınan $\{\Delta A_n\}$ fark küme dizisi için yakınsaklık çeşitlerini tanımlayacağız. Ve bunlar arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

3.3.1. Kuratowski yakınsaklık

Tanım 3.1 $\Delta A_n \xrightarrow{K} P$ ile gösterilen $\{\Delta A_n\}$ küme dizisinin P kümesine Kuratowski anlamında yakınsaklığı;

$$\underline{lim}_{n}\, \Delta A_n = \overline{lim}_{n}\, \Delta A_n = \underset{n}{lim}\ \Delta A_n$$

ile tanımlanır. Burada,

$$\underline{lim}_{n}\, \Delta A_n = \{x \epsilon X | bir\ \{x_n\} \text{ dizisi mevcut} \ni \text{her } n \epsilon \mathbb{N} \text{ için } x_n \epsilon \Delta A_n,\ x_n \to x\}$$

$$\overline{lim}_{n}\, \Delta A_n = \left\{x \epsilon X \middle| \{A_{n_k}\}, \{x_{n_k}\} \text{ diziler ve en az bir } k \epsilon \mathbb{N} \text{ için } x_{n_k} \epsilon \Delta A_{n_k}, x_{n_k} \to x\right\}$$

ve

$$\underset{n}{lim}\, sup\, \Delta A_n \subset P \subset \underset{n}{lim}\, inf\ \Delta A_n$$

dır.

3.3.2. Haussdorff yakınsaklık

Şimdi $CL(X), X$ metrik uzayınındaki boştan farklı kapalı alt kümeleri göstermek üzere küme dizileri için Haussdorff anlamında yakınsaklığı inceleyelim.

Tanım 3.2 $\Delta A_n \overset{H}{\rightarrow} A$ ile gösterilen $\{\Delta A_n\} \in CL(X)$ küme dizisinin $P \in D(X)$ kümesine Kuratowski anlamında yakınsaklığı;

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{h}\,(\Delta A_n, P) = 0$$

ile tanımlanır. Burada

$$\delta(P, B) = \sup_{x\epsilon P} d(x, B) \quad ; P \neq \emptyset \text{ ise}$$

$$\delta(\emptyset, B) = 0 \quad ; P = \emptyset \text{ ise}$$

ve

$$\mathrm{h}(P, B) = \max\big(\delta(P, B), \delta(B, P)\big)$$

olur.

3.3.3. Wijsman yakınsaklık

Şimdi küme dizilerinin farkları için Wijsman anlamında yakınsaklık çeşidini inceleyelim.

Tanım 3.3 $A_n \overset{W}{\rightarrow} A$ ile gösterilen $n\epsilon\mathbb{N}$ olmak üzere $\{\Delta A_n\} \subset CL(X)$ küme dizisinin $P \in CL(X)$ kümesine Wijsman anlamında yakınsaklığı her $x \in X$için;

$$d(x, P) = \lim_{n\to\infty} d(x, \Delta A_n)$$

ile tanımlanır.

3.3.4. Mosco yakınsaklık

X, $\mathbb{R}$ reel cismi üzerinde normlu lineer uzay olmak üzere küme dizilerinin farkları için Mosco anlamında yakınsaklığı inceleyelim.

Tanım 3.4 $\Delta A_n \overset{M}{\rightarrow} P$ ile gösterilen $n\epsilon\mathbb{N}$ olmak üzere $\{\Delta A_n\}$ dizisinin P kümesine Mosco anlamında yakınsaklığı

$$\underline{\lim_{n}}\, \Delta A_n = w - \overline{\lim_{n}}\, \Delta A_n = \lim_{n} \Delta A_n = P$$

ile tanımlanır. Burada

$$w - \overline{\lim_n}\, \Delta A_n = \{x\epsilon X | \{\Delta A_{n_k}\}, \{x_{n_k}\} \text{diziler ve en az bir } k\epsilon\mathbb{N} \text{ için } x_{n_k}\epsilon\Delta A_{n_k}, x_{n_k} \rightharpoonup x\}$$

dir. X bir normlu uzay, $boy(X) \leq \infty$ (sonlu boyutlu) ve bir konveks kümedir.

3.3.5. Fisher yakınsaklık

Şimdi son yakınsaklık çeşidi Fisher anlamında yakınsaklığı inceleyelim.

Tanım 3.5 $A_n \xrightarrow{F} A$ ile gösterilen $n\epsilon\mathbb{N}$ olmak üzere $\{\Delta A_n\} \subset D(X)$ küme dizisinin $P \in D(X)$ kümesine Fisher anlamında yakınsaklığı her $\varepsilon > 0$ için

i. $n > n_\varepsilon$ için $S(\Delta A_n, P) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_ε sayısı vardır
ii. $x\epsilon P$ için $n > n(\varepsilon, x)$ için $S(x, \Delta A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n(\varepsilon, x)$ sayısı vardır

şartlarının sağlanması ile tanımlanır.

$i.$ şartı $\overline{\lim_n}\, \Delta A_n \subset P$ olmasına, $ii.$ şartı ise her $x\epsilon P$ için $\lim_n d(x, \Delta A_n) = 0$ yani $P \subset \underline{\lim_n}\, \Delta A_n$ olmasına denktir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Küme dizilerinin yakınsaklık durumlarını, Kuratowski, Wijsman, Haussdorff, Mosco ve Fisher anlamında yakınsaklık çeşitlerini ve bu yakınsaklık çeşitleri arasındaki ilişkileri inceledik. Küme dizisindeki kümelerin özelliklerine göre yakınsaklık durumları üzerinde durulmuştur. Küme dizilerinin fark dizilerini tanımladık. Yakınsak olan küme dizilerinin arakesitlerinin boştan farklı olması, monoton artan ve azalan olması özelliklerine göre farkını alarak oluşan yeni fark dizilerinin de yakınsak olduğu gösterdik. Buradan fark dizileri için Kuratowski, Wijsman, Haussdorff, Mosco ve Fisher anlamında yakınsaklık çeşitlerini tanımladık.

KAYNAKLAR

Balcı, M., 2014, Reel Analiz. *Balcı yayınları*, 144 sayfa, Türkiye.

Baronti, M., Papini, P.L., 1986, Convergence of sequence of sets., Methods of Functional Analysis in Approximation Theory (Bombay, 1985), *İnternational Schriftenreihe Numeration Mathematics,* Birkhauser-Verlag Basel. 76, 135-155.

Başar, F., Bilal, A., 2003. On the spaces of sequences of *p*-bounded varition and related matrix mappings. *Ukrainian Mathematical Journal* 55(1), 136-147.

Bayraktar, M., 2006, Fonksiyonel Analiz. *Gazi Kitapevi,* 320 sayfa, Ankara.

Beer, G., 1985. On convergence of closed sets in a metric spaces and distance functions. *Bulletin Australian Mathematical Society* 31, 421-432.

Beer, G., 1987. Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets. *Bulletin Australian Mathematical Society* 35, 81-96.

Choudhary B., Mishra S.K., 1993. A note on certain squence spaces, *Journal Analysis* 1, 139-148.

Çakar, Ö., 2007, Fonksiyonel Analize Giriş I. *A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları,* 215 sayfa, Ankara.

Çolak, R., Et, M., Malkowsky E., 2004, Some topics of sequence spaces. *Lecture Notes in Mathematics*, Fırat Ünv. Elazığ, Turkey, 1-63.

Dönmez, A., 1997, Analiz. *Hatiboğlu Yayıncılık,* 958 sayfa, Türkiye.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum,* vol. 2, 241– 244.

Gaur, A.K., Mursaleen, Saiti, A.H., 1996. Some new sequences spaces and their duals and matrix transformations. *Bulletin Calcutta Mathematical Society* 88(3), 201-212.

Goldberg, R.R., 1976, Method of reel analysis. *Wiley,* 416 sayfa, USA.

Holmes, R.B., 1966. Approximating best approximations. *Nieuw Arcief Wiskunde.* 14, 106-113.

Kızmaz, H., 1981. On certain sequence spaces. *Canadian Mathematical Bulletin* 24(2), 169-176.

Knopp, K., 1956, İnfinity sequences and series. *Dover Publications,* 186 sayfa, USA.

Maddox, I.J., 1970, Elements of functional analysis. *Cambridge University Press,* 208 sayfa, New York.

Malkowsky, E., 1989. Absolute and ordinary Köthe-Toeplitz duals of some sets of sequences and matrix transformations. *Publications de l'Institut Mathématique*. (Beograd) (N.S) 46(60), 97-103.

Malkowsky, E., Mursaleen, 2001. Some matrix transformations between the difference sequences spaces $\Delta c_0(p), \Delta c(p)$ ve $l_\infty(p)$. Filomat. 15, 68-83.methods. *The American Mathematical Monthly*, 66(5), 361–375.

Mostafazadeh, A., 2013, A first course in abstract mathematics. *Koç University Press,* 279 sayfa, İstanbul.

Musayev, B., Alp, M., 2000, Fonksiyonel Analiz. *Balcı Yayınları*, 470 sayfa, Kütahya.

Nuray, F., Rhoades, B. E., 2012. Statistical convergence of sequences of sets. *Fasciculi Mathematici*, 49, 87–99.

Papini, P.L., Wu, S., 2015. Nested sequences of sets, balls, Haussdorff convergence. *Note di Matematica*, 35(2), 99-114.

Salinetti, G., Wets, R.J.B., 1979. On the Convergence of sequence of convex sets in finite dimensions. *Society for Industurıal and Applıed Matematics Review*. 21(1), 18-33.

Salinetti, G., Wets, R.J.B., 1981 "On the convergence of closed valued measurable multifunctions", *Trans. American Mathematical Society* 266(1), 275-289.

Sarıgöl, M.A., 1987. On difference sequences spaces. Journal Karadeniz Technical University Faculty of Arts and Sciences Series Mathematics-Physics 10, 63-71

Schoenberg, I.J., 1959. The integrability of certain functions and related summability

Sonntag, Y., 1983. A reformulation of the Haussdorff metric, *Rostock Math. Kolloquium*, vol 24, 71-76.

Uddin, A.Z., Mursaleen, 1987. Köthe-Toeplitz duals of some new sequence spaces and their matrix mapps. *Publications de l'Institut Mathematique* (Bengrad) 42, 57-61.

Uthayakumar, R., 1999, Study on convergence of optimization problems. *The Gandhigram Rural Institute Departmen of Mathematics,* 19-23.

Wijsman, R. A., 1964. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 70, 186–188.

Wijsman, R. A., 1966. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 123(1), 32–45.

Wills, M.D., 2007. Haussdorff distance and convex sets. *Journal of Convex Analysis,* 14(1), 109-117.

Yüksel, Ş., 2002, Genel Topoloji. *Selçuk Üniversitesi Basımevi*, 487 sayfa, Türkiye.

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	✓	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	✓	
Denklem yazımları uygun mu?	✓	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	✓	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	✓	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	✓	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	✓	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	✓	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	✓	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	✓	
+Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	✓	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

	Unvanı Adı SOYADI	İmza
Öğrenci :	Esra AYTEPE	
Danışman :	Prof. Dr. Harun POLAT	

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum**.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI: Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖNLÜ

Tarih: 04.07.2019

İmza

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Esra AYTEPE
Uyruğu	**:**	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Muş, 19.01.1993
Telefon	**:**	05414518084
Faks	**:**	-
e-mail	**:**	esraderinsoykan@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Şeker Anadolu Lisesi, Merkez, Muş	2010
Üniversite	:	Muş Alparslan Ümiversitesi, Merkez, Muş	2014
Yüksek Lisans	:	Muş Alparslan Ümiversitesi, Merkez, Muş	2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014-2015	Zafer Çağlayan İlköğretim Okulu	Ücretli Öğretmen

YABANCI DİLLER: İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER: Yüksek Lisans eğitimine Bitlis Eren Üniversitesi ve Muş Alparslan Üniversitesi Ortak Yüksek Lisans programı ile başladı. Daha sonra yalnızca Muş Alparslan Üniversitesinde devam etti ve halen burada devam etmektedir.