T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS DÜZLEMDE BÖLGELERDE FONKSİYONLARIN POLİNOMLARLA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Mehmet Şerif KOÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Haziran-2019

MUŞ

T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS DÜZLEMDE BÖLGELERDE FONKSİYONLARIN POLİNOMLARLA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Mehmet Şerif KOÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Danışman

Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

Haziran-2019

MUŞ

TEZ KABUL VE ONAYI

Mehmet Şerif KOÇ tarafından hazırlanan "Kompleks Düzlemde Bölgelerde Fonksiyonların Polinomlarla Yaklaşım Özellikleri" adlı tez çalışması 18/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Dr. Öğr. Üyesi Fatih TEMİZSU Bingöl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik	....
Danışman Prof. Dr. Sadulla JAFAROV Muş Alparslan Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Abdullah AYDIN Muş Alparslan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik	....

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 21/06/2019 Tarih ve 17/XIV nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Mehmet Şerif KOÇ

Tarih: 04.07.2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS DÜZLEMDE BÖLGELERDE FONKSİYONLARIN POLİNOMLARLA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Mehmet Şerif KOÇ

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

2019, 48 Sayfa

Jüri
Danışman: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Fatih TEMİZSU
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Abdullah AYDIN

Bu tez çalışmasında, Smirnov uzaylarında Dirichlet serileri için yaklaşım teorisinin düz ve ters yaklaşım teoremleri konveks çokgenler üzerinden incelenmiştir. Fonksiyonların yakınsaklığının ve düzgünlüğünün derecesi k. mertebeden modüle göre değerlendirilmiştir. Ayrıca, diferansiyellenebilirlik şartının yaklaşım hızına olan etkisi ve ters durum incelenir. Bu çalişma Yu. I. Mel'nikin sonuçlarını genişletir ve elde edilen sonucun iyi olması ile ilgili örnek verilmiştir.

Ayrıca, bu tez çalışmasında kompleks düzlemin Dini –düzgün eğri ile sınırlanan bögelerinde Smirnov-Orlicz sınıflarının belirli alt sınıflarında fonksiyonların polinomlarla yaklaşımı ile ilgili yaklaşım teorisinin ters teoremi ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dirichlet Serileri, Düz ve Ters Teoremler, Fourier ve Leont'ev Katsayıları, Smirnov uzayı, Smirnov-Orlicz uzayı.

ABSTRACT

MS THESIS

APPROACH PROPERTIES OF FUNNCTIONS WITH POLINOMAS IN REGIONS IN COMPLEX PLANT

Mehmet Şerif KOÇ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS SCIENCE

Advisor: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

2019, 48 Pages

Jury
Advisor: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Jury Member: Asst. Prof. Dr. Üyesi Fatih TEMİZSU
Jury Member: Asst. Prof. Dr. Üyesi Abdullah AYDIN

In this thesis; the direct and inverse theorems of approximation theory for Dirichlet series in Smirnov spaces over convex polygons have been investigated. The degree of convergence and the regularity of the functions with moduli of arbitrary order k have been estimated. Moreover, the influence of differentiably conditions on the rate of approximation and vice versa have been investigated and gives an example on the improvement obtained resuls.

Also, in the thesis; the inverse theorem of the approximation theory, about approximation of the functions by polynomials in certain subclasses of Smirnov-Orlicz classes in the domains with Dini-smooth boundaries of the complex plane is proved.

Keywords: Dirichlet series, Directand Inverse theorems, Fourier and Leont’ev coefficients, Smirnov spaces, Smirnov-Orlıcz spaces.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın hazırlanmasında emeği bulunan başta ailem olmak üzere, Yüksek Lisans eğitimim boyunca ve bu tez çalışması süresince, her anlamda benden desteklerini hiç bir şekilde eksik etmeyen, zahmetten kaçınmayan ve akademik gelişmemde bilgi ve becerilerini paylaşarak bana yardımcı olan, rehberliği ile bana yol gösteren başta danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sadulla JAFAROV'a ve değerli meslektaşım Hakan YILDIRIM'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Mehmet Şerif KOÇ
MUŞ-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Komleks sayılar kümesi
$L^p(L)$	: Lebesgue Uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$H^p(D)$	: Hardy Uzayı
$\Vert\cdot\Vert$	: Norm
$(X,\Vert\cdot\Vert)$	: Normlu uzay
$E^p(D)$	: Smirnov sınıfı
$\forall$	: Her
(X,d)	: Metrik uzayı
$H^{\alpha}(L)$ veya $Lip\alpha(L)$	: L eğrisi üzerinde Hölder veya (Lipshitz) α sınıfı
$C(L)$	: L eğrisi üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
(X,d)	: Metrik uzayı
$E_M(G)$	: Smirnov-Orlicz sınıfı

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi matematik analizin bölümlerinden biridir. Yaklaşım teorisinde belli özelliklere sahip fonksiyon uzaylarının elemanlarına, bu uzayın bir alt uzayından olup daha iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlarla yaklaşım problemleri incelenir. Genellikle bu alt uzay olarak, özellikleri çok iyi bilinen, polinomlar yada rasyonel fonksiyonlar ailesi alınmaktadır. Temel problemlerden biri, verilen fonksiyona alt uzaydan en iyi yaklaşan elemanın varlığı problemidir. Özel halde, alt uzay olarak cebirsel polinomlar veya (periyodik halde) trigonometrik polinomlar kümesi alındığında Banach uzaylarında en iyi yaklaşım elemanının varlığı iyi bilinmektedir. Yaklaşım teorisinde verilen fonksiyonla buna en iyi yaklaşan eleman arasındaki hatanın, fonksiyonunun belli karakteristikleri (örneğin, düzgünlük modülü) yardımıyla değerlendirilmesi probleminin çözümü önem arz etmektedir. En iyi yaklaşım hatasının üstten değerlendirilmesi ile ilgili problemlere yaklaşım teorisinin düz problemleri, elde edilen teoremlere ise düz teoremler denir. Bunun tam zıttı olan problemler ise yaklaşım teorisinin ters problemleri olarak bilinmektedir. Bu durumda, düzgünlük modülü üstten en iyi yaklaşım sayısı yardımıyla değerlendirilir ve fonksiyonun yaklaşım özelliklerine göre hangi sınıfa ait olduğu hakkında bilgi edinme amacı güdülür. En ideal durum, belli bir sınıfta elde edilen düz ve ters yaklaşım teoremlerinin bir birini karşılamasıdır. Yani, yaklaşım hızına dayanarak bu fonksiyonun hangi sınıftan olduğuna kesin karar verilmesidir. Bu durumda verilen fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonu elde edilebilir denir.

$\mathbb{C}$ kompleks düzlemde, $N > 2$ olacak şekilde $a_1, a_2, a_3 ... a_N$ köşeli bir D açık konveks(dış bükey) çokgenini göz önüne alalım. Orjin noktasının D'ye ait olduğunu kabul edelim. D'nin a_j köşelerini dikkata alarak,

$$L(z) = \sum_{j=1}^{N} d_j e^{a_j z}$$

biçiminde L kvazipolinomu tanımlayalım, burada $d_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $j = 1, ... N$' ve $L(z)$ ise sinüs tipinde bir tam fonksiyondur (Lewin ve Ljubarskiĭ 1975). Λ ile $L(z)$ tam fonksiyonunun köklerinin dizisini gösterelim. $E^p(D)$, $1 < p < \infty$ Smirnov fonksiyomlar sınıfı olmak üzere $f \in E^p(D)$ fonksiyonlarını, $\varepsilon(\Lambda) := (e^{\lambda z})_{\lambda \in \Lambda}$ kompleks üsteller ailesine göre genişletebiliriz. Yukarıdaki gösterimlerden yararlanarak,

$$f(z) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} k_f(\lambda) \frac{e^{\lambda z}}{L'(\lambda)},$$

Dirichlet serisini göz önüne alalım, burada,

$$k_f(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} d_j e^{a_j \lambda} \int_{a_l}^{a_j} f(\eta) e^{-\lambda \eta} d\eta$$

biçiminde ifade edilen Leont'ev katsayılarıdır. Burada, a_l tepe noktası keyfi seçilmiştir, fakat sabittir.

Yeteri kadar büyük C için $\left|\lambda_n^{(j)}\right| > C$ olmak üzere L'nın $\lambda_n^{(j)}$ kökleri $\lambda_n^{(j)} = \tilde{\lambda}^{(j)} + \delta_n^{(j)}$ şeklindedir, burada $\tilde{\lambda}^{(j)} = \dfrac{2\pi ni}{a_{j+1} - a_j} + q_j e^{i\beta j}$ ve $\left|\lambda_n^{(j)}\right| \le e^{-an}$. Burada $0 < a_j = sabit$, $j = 1, ..., N$, $n > n_0$, ve $a_{N+1} := a_1$ dir. β_j ve q_j parametreleri $d_{N+1} := d_1$ olmak üzere $e^{q_j(a_{j+1} - a_j)} e^{i\beta j} = -{d_j}/{d_{j+1}}$ şartını sağlamaktadırlar. Bu yüzden bu $\lambda_n^{(j)}$ kökleri tektir. Λ köklerinin kümesi

$$\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1,...,n_0} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N} \left\{\lambda_n^{(j)}\right\}_{n=n(j), n(j)+1, ...} \right).$$

biçiminde gösterilebilir.

Ağırlıklı genelleştirilmiş Jackson çekirdeği yardımıyla

$$S_{n,k,s}(f)(z) := \sum_{m=1}^{n_0} k_f(\lambda_m) . \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=n(j)}^{n} \left(1 - x_{n,k,m}^{s+1}\right) k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right) \frac{e^{\lambda_m^{(j)}(z)}}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)}, \tag{1.1}$$

biçiminde Dirichlet serilerinin kısmi toplamlarını tanımlayalım. Burada,

$$x_{n,k,m} = \sum_{p=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{p} J_{n,k,mp},$$

dir, $J_{n,k,mp}$ ise $n \in N, k \ge 2, M := [n/k] + 1$ olmak üzere

$$K_{n,k(t)} := \lambda_{n,k} \left(\frac{\sin Mt/2}{t/2} \right)^{2k} = \frac{J_{n,k,0}}{2} + \sum_{l=1}^{n} J_{n,k,l} \cos lt,$$

genelleştirilmiş Jackson çekirdeğinin katsayılarını belirtir ve $\lambda_{n,k}$ öyle seçilir ki,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{n,k}(t) dt = 1.$$

şartı sağlansın. $K_{n,k}$ ise derecesi n'yi aşmayan çift negatif olmayan trigonometrik polinomdur (De Vore ve Lorentz, 1993).

$$\mathrm{P}_n(z)=\sum_{m=0}^{m_0} x_{m,n}\frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=n(j)}^{n} x_{j,m,n}\frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} \tag{1.2}$$

şekilinde kvazipolinomu gözönüne alalım.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde yaklaşım teorisi ve üzerinde çalışılan problemle ilgili kaynak araştırması incelenmektedir. Bu tez çalışmasının Material ve Yöntem diye adlandırılan üçüncü bölümünde Kompleks Fonksiyonların Teorisi ile ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler ve esas sonuçların ispatı için gerekli tanımlar ve yardımcı sonuçlar verilecektir. Ayrıca, Fourier ve Leont'ev katsayıları arasındaki bağıntı ile ilgili sonuçlar ifade edilmiştir. Tez çalışmasının dördüncü bölümünde tezin esas sonuçları ifade edilmektedir. Ayrıca, D konveks çokgenlerde $E^p(D)$ Smirnov sınıflarına ait fonksiyonların Dirichlet serilerinin (1.1) biçiminde kısmi toplamları ile yaklaşımı üzerine yaklaşım teorisinin düz problemleri incelenmektedir. Daha sonra ise D konveks çokgenlerde $E^p(D)$ Smirnov sınıflarına ait fonksiyonların (1.2) biçiminde kvazipolinomlarla yaklaşımı ile ilgili yaklaşım teorisinin ters teoreleri verlecektir.

Bu tez çalışmasında dördüncü bölümünde ilave olarak, Dini-düzgün eğri ile sınırlanmış bölgelerde tanımlanmış $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıflarında, yaklaşım teorisinin ters teoremi ispatlanmaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Yaklaşım teorisinin temeli Chebyshev (1854) tarafından atılmıştır. Daha sonra alman matematikçi Weirstrass'ın sonucu (1885) yaklaşım teorisinde önemli bir yer edinmiştir.

Yaklaşım teorisi (Lebesgue, 1898; Vallée-Poussin, 1910, 1911; Jackson, 1911, 1912, 1924; Bernstein, 1912; Favard, 1936, 1937, 1949; Kolmogorov, 1935; Nikolski, 1946; Timan, 1950) ve daha birçok bilim adamı tarafından çalışılmıştır.

Trigonometrik fonksiyonlar için Lebesgue uzaylarında polinomlarla yaklaşımın hızı pek çok matematikçi tarafından araştırılmıştır. Stechkin (1951) yaklaşım teorisinin düz teoremini ispatlanmış. Timan (1966) tarafından bu teoremin iyileştirmesi yapılmıştır. Bu uzayda ters teorem Timan (1950) tarafından verilmişdir. Timan (1958) tarafından bu ters teoremin iyileştirmesi ispatlanmıştır.

Cebirsel polinomlar yaklaşım teorisinin temel taşlarından birisidir ve bu teorinin gelişmesinde önemli yere sahiptir. Bunun en güzel örneği, reel eksenin herhangi bir sonlu ve kapalı alt kümesi üzerinde tanımlı, sürekli fonksiyonların veya kompakt küme üzerinde tanımlı analitiik fonksiyonların polinomlarla en iyi yaklaşmanın mümkün olması ile ilgili Weierstrass ve Runge teoremleridir. Bu ise bir yandan verilmiş fonksiyonun analitik şeklinin belirlenmesi, diğer yandan bu fonksiyonun polinomlar dizisinin düzgün limiti şeklinde gösterilmesi demektir.

Farklı normlarda periyodik ve periyodik olmayan fonksiyonlar sınıfında fonksiyonların yakınlaşımı ile ilgili araştırmalar (La Vallée-Poussin, 1919; Jackson, 1930, 1941; Natanson, 1949; Zygmund, 1959; Timan, 1994; Bary, 1964; Akhiezer, 1965; Lorentz, 1966) ve buna benzer bilim adamlarının kitaplarinda mevcuttur. Klasik ve son on yıllarda elde edilen sonuçlar (De Vore ve Lorentz, 1993; Stepanets, 1995; Mhaskar, 1996; Trigub ve Belisky, 2004; Dzyadyk ve Shevchuk, 2009; Andrievskii ve ark., 1995; Andrievskii ve Blatt, 2002) kitaplarında yer almaktadır.

Ağırlıklı ve ağırlıksız Smirnov uzaylarda yaklaşım teoprisinin düz problemleri bir çok yazar tarafından incelenmiştir. Örneğin, (Al'per, 1960; Andersson, 1977; Andrasko, 1963; Ibragimov ve Mamedhanov, 1976; Kokilashvili, 1969; Dyn'kin, 1979,1980; Israfilov, 1987; Israfilov, 2001; Israfilov, 2004; Israfilov ve Guven, 2005).

Dzjadyk (1974) çalışmasında (1.1) Dirichlet serilerinin noktasal ve düzgün yakınsaması için şartlar verilmiştir. Lewin ve Ljubarskiĭ (1975) çalışmasında $\varepsilon(\Lambda)$

ailesinin $E^2(D)$'nın ($p=2$ hali için) bir Riesz bazını oluşturduğu ispatlamış ve böylece, bu seriler Hilbert uzayındaki norma göre yakınsaktır. $\varepsilon(\Lambda)$, $E^p(D)$'de bir Schauder bazı oluşturduğundan, Sedletskii'nin (1979) çalışmasında keyfi $1<p<\infty$ için (3.1) Dirichlet serilerinin düzgün yakınsaklığı ispatlanmıştır.

Bu serilerin yakınsaklık oranını değerlendirmek için, Yu. I. Mel'nik Fourier katsayıları ve Leont'ev katsayıları arasındaki bağlantı üzerinde çalıştı. Onun düşüncesi, Jackson ve Bernstein'nin Fourier serilerinin yakınsaklık oranı ve yaklaşımı ile ilgili iyi bilinen sonuçlarından faydalanmaktır (Timan, 1994; Mel'nik, 1985; Mel'nik, 1988) çalışmalarında gösteriyor ki, belli koşullar altında $f\in E^p(D)$'nın Leont'ev katsayıları, bazı $F\in L^p([0,2\pi])$ fonksiyonlarının Fourier katsayılarıdır. Bu çalışmalarda, birinci süreklilik modülü teriminin de F'in düzgünlüğü değerlendirilmektedir. Birinci modül için Smirnov uzaylarında Dirichlet serileri için düz ve ters yaklaşım teoremlerini ispatlamak için Mel'nik (1988) kendi çalışmalarındaki verilen sonuçları kullanmıştır.

Bu tez çalışmasında yukarıdaki çalışmalardan esinlenerek, $E^p(D)$ Smirnov sınıflarında tanımlanmış fonksiyonların Dirichlet serilerini kullanarak, yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri konveks çokgenler üzerinde incelenmektedir. Fonksiyonların yakınsaklığının ve düzgünlüğünün derecesi k mertebeden modüle göre değerlendirilmektedir. Ayrıca, diferensiyellenebilirlik şartının yaklaşım hızına olan etkisi ve bu durumun tersi incelenmektedir. Elde edilen sonuçların, sadece birinci modülü kullanarak, Mel'nik (1988)'deki sonuçtan, yaklaşım oranı ile ilgili daha iyi bir değerlendirme verdiği bir örnek ile gösterilir. Forster (2004) çalışmasında keyfi mertebeden modül için Leont'ev ve Fourier katsayıları arasındaki değerlendirilme genelleştirilmiştir. Forster (2004) çalışmasındaki sonuçlar kullanılarak, bu tez çalışmasında Dirichlet serileri için düz ve ters yaklaşım teoremlerinin, keyfi $k\in N$ mertebeden modül'e genelleştirilmesi ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Böylece, fonksiyonların Dirichlet serilerinin yaklaşım oranından yaralanarak, bir $f\in E^p(D)$ fonksiyonun diferansiyellenebilirliği ile ilgili bilgi elde etmiş oluruz. Elde edilen sonuçlar, Mel'nik (1988) sonuçlarını genelleştirmektedir.

Orlicz uzayları Bimbaum ve Orlicz (1931) tarafından tanımlanmıştır. Orlicz uzayları klasik $L_p, p>1$ Lebesgue uzaylarının genelleştirilmesidir. Orlicz uzayının tanımında $M(x)$ konveks fonksiyonu $M(x)=M(x,p):=x^p, 1<p<\infty$ olarak alınırsa, bu durumda Orlicz uzayı, $L_p, p>1$ Lebesgue uzayı ile çakışmaktadır. Orlic uzayı ve özelliklerile ilgili bilgiler bir çok yazar tarafından incelenmiştir (Bimbaum ve Orlicz, 1931; Orlicz, 1931; Krasnoselskii ve Rutickii, 1961; Rao ve Ren, 1991; Rao ve Ren, 2002; Karlovich, 1996, 2002; Boyd, 1967, 1969, 1971; Bennett ve Sharpley, 1988; Maligranda, 1985; Böttcher ve Karlovich, 1997; Matuszewska ve Orlicz, 1960).

Orlicz uzayının görüntü işlemlerinde, akışkan dinamiğinde, diferansiyel denklemlerde bir çok uygulamaları bulunmaktadır (Alaouia ve ark., 2014; Chen ve ark., 2006; Colombo ve Mingione, 2015; Giannetti ve ark., 2013; Harjulehto ve ark., 2013; Świerczewska Gwiazda, 2014; Wróblews- Kamińska, 2014).

Smirnov-Orlicz sınıfları Smirnov sınıflarının genelleşmesi olarak Kokilashvili (1968) tarafından tanımlanmıştır. G, kompleks düzlemde bir bölge olmak üzere $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıfının tanımında $M(x)$ konveks fonksiyonu $M(x)=M(x,p):=x^p,\ 1<p<\infty$ olarak alınırsa, bu durumda $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıfı $E_M(G)$ Smirnov sınıfı ile çakışmaktadır.

Ağırlıklı, ağırlıksız Orlicz uzaylarında ve ağırlıklı, ağırlıksız Smirnov-Orlicz sınıflarında yaklaşım teorisinin düz ve ters problemleri bir çok yazar tarafından incelenmiştir (Ramazanov, 1984; Wu, 1991; Ponomarenko, 1966; Gavrilyuk, 1963; Israfilov ve Guven, 2006; Guven ve Israfilov, 2011; Akgün ve Israfilov, 2006, 2008, 2010, 2011; Khabazi, 2002; Runovski, 2001; Guven ve Israfilov, 2002; Israfilov ve Akgün, 2006; Israfilov ve ark., 2005; Jafarov, 2011, 2012, 2013, 2018; Jafarov ve Mamedhanov, 2012).

Ayrıca, bu tez çalışmasında, ağırlıklı ve ağırlıksız Smirnov-Orlicz sınıflarında fonksiyonların yaklaşımı ile ilgili yukarıdaki çalışmalardan esinlenerek, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bulunan G bölgesinin sınırı Dini-düzdün eğri olduğunda $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıflarında, yaklaşım teorisinin ters teoremi ispatlanmaktadır. Başka deyişle, f fonksiyonunun türevinin süreklilik modülü ile ilgili değerlendirme elde edilmiştir. Elde edilen sonuç, Alper (1960) sonucunun $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıflarına genelleştirilmesidir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Temel kavramlar

Biz bu bölümde temel tanımları teoremleri vereceğiz. $\mathbb{C}$ ile kompleks düzlemi göstereceğiz.

Tanım 3.1 a) $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$$

fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzlemde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

b) Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise, γ'ya kapalı eğridir, denir.

c) Bir γ eğrisi sadece $t_1=t_2$ için $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ oluyorsa basit eğridir, denir. Bazen basit eğrilere Jordan eğrisi de denir. γ basit bir eğri ve $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi) denir.

d) Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ diferansiyellenebilir eğri (yay) diye, adlandırılır.

e) γ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer $\gamma'(t)\neq 0$ ise, γ'ya düzgün eğri (regüler eğri) denir.

f) $[a,b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç , γ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda γ'nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar γ''nün bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse γ parçalı diferansiyellenebilir eğridir, denir.

g) γ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer her $t\in[a,b]$ için $\gamma'(t)\neq 0$ ise, γ parçalı düzgün eğridir, denir (Baskan, 1998).

Tanım 3.2 $\gamma: z(t),\ (a\le t\le b)$ komleks düzlemde bir eğri ve $\mathrm{P}:=\{(t_0,t_1,t_2,...,t_n): a=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_n=b\}$, $[a,b]$ kapalı aralığının bir bölüntüsü olsun. Eğer

$$\sup\sum_{v=1}^{n}\left|z(t_v)-z(t_{v-1})\right|<\infty$$

ise γ eğrisine sonlu uzunluklu eğri denir. Burada supremum P kümesi üzerinden alınır (Markushevich, 1985).

Tanım 3.3 $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ kümesi için

a) G açık bir küme;

b) $\forall z_1, z_2 \in G$ için bu noktaları birleştiren ve $\gamma \subset G$ olacak şekilde bir $\gamma := \gamma(z_1, z_2)$ eğrisi varsa, G kümesine kompleks düzlemde bir bölge denir (Zill ve Shanahan, 2003).

Tanım 3.4 Eğer bir G bölgesinin sınırı olan Γ bağlantılı ise G bölgesine basit bağlantılı bölge denir (Markushevich, 1985).

Tanım 3.5 Her G açık kümesi

$$G = \bigcup_k G_k,\ G_k \text{ ayrık bölgeler } \partial G_k \subset \partial G$$

şeklinde yazılabilir. Bu sayılabilir G_k bölgelerine G 'nin bileşenleri denir(Mel'nik, 1988).

Tanım 3.6 $D, D^* \subset \mathbb{C}$ ve $f : D \to D^*$ tanımlı bir fonksiyon ve $z_0 \in D$ olsun.

$a)$ $f(z_0)$ tanımlı,

$b)$ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ var ve

$c)$ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

şartları sağlanırsa, bu durumda f fonksiyonuna $z = z_0$ noktasında süreklidir, denir (Wunsch, 2005).

Fonksiyonun sürekliliği ile ilgili tanım $\varepsilon - \delta$ tekniğiyle, aşağıdaki şekilde de verilebilir:

f fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir demek, $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $0 < |z - z_0| < \delta$ iken $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısının bulunması demektir. Eğer f fonksiyonu bir D kümesindeki her bir noktada sürekli ise f 'ye D üzerinde süreklidir denir.

L eğrisi üzerinde sürekli fonksiyonların kümesini $C(L)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.7 $L \subset \mathbb{C}$ bir küme ve $f : L \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $\forall t_1, t_2 \in L$ için, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^{\alpha},\ A = sabit > 0$$

şartı sağlanırsa, f fonksiyonu Hölder (Lipshitz) α sınıfı'na aittir denir ve $f \in H^{\alpha}(L)(f \in Lip\alpha(L))$ ile gösterilir (Rudin, 1974).

L eğrisi üzerinde sürekli fonksiyonların kümesini $C(L)$ ile göstereceğiz. Aşağıdaki özellikler verilebilir:

1) $f \in H(L) \Rightarrow f \in C(L)$;

2) $\beta \le \alpha$ olmak üzere $f \in H^{\alpha} \Rightarrow f \in H^{\beta}$ dir. Yani $H^{\alpha} \subseteq H^{\beta}$ dir;

3) $f \in H(L)$, $g \in H(L)$ olmak üzere,

$$f+g \in H(L),\; fg \in H(L),\; \frac{f}{g} \in H(L)(g \neq 0)$$

dir (Rudin, 1974).

Tanım 3.8 $w = f(z)$ bir E kümesinden F kümesine bire-bir sürekli bir dönüşüm olsun. $f(z)$'nin tersi $f^{-1}(w)$ fonksiyonu F kümesi üzerinde sürekli ise o zaman bu dönüşüme bir homeomorfizm denir (Baskan, 1998).

Aralarında bir homeomorfizma bulunan topolojik uzaylara " birbirine hemeomorfiktir'' denir. Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu homeomorfizm ise X uzayı Y uzayına homeomorfiktir denir ve $X \approx Y$ gösterilir (Baskan, 1998).

Tanım 3.9 Kompleks düzlemde birim çemberin homeomorfik bir dönüşüm altındaki görüntüsüne Jordan eğrisi denir (Karlovich ve Böttcher, 1997).

Tanım 3.10 Kabul edelim ki**,** f, z_0 noktasının belli bir komşuluğunda tanımlanan kompleks değerli bir fonksiyondur. Eğer

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

limiti var ve sonlu ise, bu durumda $f'(z_0)$'a f'in z_0 noktasındaki türevi denir.

$G \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer, f fonksiyonu her $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilirse o zaman f fonksiyonuna G'de türevlenebilirdir, denir (Başkan,1998).

Tanım 3.11 f fonksiyonun $z_0 \in G$ noktasında $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ kısmi türevleri mevcut olsun. Bu durumda $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ ve $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$ türevleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) =: f_z(z_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) =: f_{\bar{z}}(z_0).$$

Eğer, özel olarak $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ alınırsa,

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y),$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y),$$

elde edilir (Ahlfors, 1979).

Tanım 3.12 Eğer f fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilirse,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$$

olur (Ahlfors, 1979).

Teorem 3.13 f fonksiyonu $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilirse,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

kısmi türevleri mevcut olup bu kısmi türevler,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

koşulunu sağlar (Ahlfors, 1979).

Tanım 3.14 Eğer f fonksiyonu verilmiş bir z_0 noktasının herhangi bir komşuluğundaki bütün noktalarda türevlenebiliyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında analiktir, denir (Zill ve Shanahan, 2003).

Eğer f fonksiyonu her $z \in G$ noktasında analitik ise, f fonksiyonuna G de analitiktir denir.

G ’de analitik tüm fonksiyonların kümesini $A(G)$ ile, G de analitik ve $\overline{G}$ ’da sürekli olan fonksiyonların kümesini ise $A(\overline{G})$ ile göstereceğiz.

γ , G bölgesinde yerleşen kapalı ölçülebilir Jordon eğrisi olsun. γ eğrisini içi $Int\gamma$ ile, γ eğrisinin dışı ise $Ext\gamma$ ile gösterilir.

Teorem 3.15 (Cauchy Teoremi) $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in A(G)$ olsun. γ ise G de yerleşen kapalı ölçülebilir Jordon eğrisi ise,

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

dır (Saff ve Snider, 1993).

Teorem 3.16 (Cauchy İntegral Formülü) $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in A(G)$ olsun. γ ise G 'de yerleşen kapalı ölçülebilir Jordon eğrisi ise $\forall z \in Int\gamma$ için,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

dır (Saff ve Snider, 1993).

Teorem 3.17 (Cauchy Türev Formülü) $G \subset \mathbb{C}$ sonlu sayıda parçalı düzgün eğri ile sınırlı bölge olsun. Kabul edelim ki $G \subset D$ ve f fonksiyonu ise D de analitik fonksiyondur. Bu durumda $\forall z \in G$ ve her $n = 0,1,2,...$ için

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \qquad \zeta \in \partial G$$

dır (Saff ve Snider, 1993).

Teorem 3.18 (Maksimum-Modülüs Prensibi) $G \subset \mathbb{C}$, $L := \partial G$ Jordon eğrisiyle sınırlı sonlu bir bölge olsun. Eğer f, G de analitik ve $\overline{G}$ da sürekli ise $|f|$, maksimum değerini ∂G de alır (Saff ve Snider, 1993).

Tanım 3.19 X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \to R^{+}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için,

$$d(x, y) \geq 0;$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$d(x, y) = d(y, x);$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (X, d) ikilisine ise metrik uzay denir (Kreyszıg, 1978).

Tanım 3.20 L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $\cdot : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L'ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

$\forall x, y \in L$ için $x + y \in L$;

$\forall x, y, z \in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$;

$\forall x \in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde, $\theta \in L$ vardır;

$\forall x \in L$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde, $(-x) \in L$ vardır;

$\forall x, y \in L$ için $x+y=y+x$;

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır;

$\alpha \cdot x \in L$;

$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;

$(\alpha+\beta) \cdot x=\alpha \cdot x+\beta \cdot x$;

$(\alpha \cdot \beta) . x=\alpha(\beta \cdot x)$;

$I \cdot x=x$.

$F=\mathbb{R}$ ise L'ye reel lineer uzay, $F=\mathbb{C}$ ise, L'ye kompleks lineer uzay denir (Maddox, 1970).

Tanım 3.21 L bir lineer uzay ve $A \subset L$ olsun. $\forall x, y \in A$ için, $B=\{z \in L : z=\alpha x+(1-\alpha) y,\ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$ ise, A kümesine konveks küme denir (Kreyszıg, 1978).

Tanım 3.22 X bir lineer uzay olsun ve F cismi $\mathbb{R}$ olmak üzere, $|\cdot| : X \to F$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir normlu uzay denir (Kreyszıg, 1978).

$\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için,

$\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$;

$\|\alpha . x\|=|\alpha|\|x\|$;

$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

Tanım 3.23 X bir normlu lineer uzay olsun. Eğer X uzayı,

$$d(x, y)=\|x-y\| \quad (x, y \in X)$$

ile verilen norm metriğine göre tam ise, bu durumda X uzayına Banach uzayı denir.

X uzayının kompleks veya reel lineer uzay oluşuna göre, Banach uzayı kompleks veya reel Banach uzayı olarak adlandırılır (Kreyszıg, 1978).

Tanım 3.24 G ,$\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Ayrıca, $w = f(z)$ ise G bölgesinde tanımlı kompleks bir dönüşüm olsun. Eğer G bölgesinin içinde de olan ve z_0 da kesişen her C_1 ve C_2 düzgün eğri çifti için z_0 da C_1 ve C_2 eğrileri arasındaki açı, $f(z_0)$ da bu eğrilerin görüntüleri olan $C_1' = f(C_1)$ ve $C_2' = f(C_2)$ eğrileri arasındaki açıyla aynı büyüklükte ve yöndeyse $w = f(z)$, z_0 noktasında da konform bir dönüşümdür, denir (Zill ve Shanahan, 2003).

Teorem 3.25 f , z_0'ı içeren D bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun. Bu durumda $w = f(z)$, z_0 da konform bir dönüşümdür (Zill ve Shanahan, 2003).

Teorem 3.26 (Riemann Dönüşüm Teoremi) $G \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ tespit edilmiş bir nokta olsun. G bölgesini $D := \{w : |w| < 1\}$ birim dairesine dönüştüren ve $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır (Goluzin, 1968).

Teorem 3.27 $\Omega := \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ ve $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ olmak üzere

$$\Phi(\infty) = \infty \text{ ve} \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

olacak şekilde bir tek $\Phi : \Omega \to \Delta$ konform dönüşümü vardır (Markushevich, 1985).

Teorem 3.26 daki Φ fonksiyonu Ω bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktası Φ nin basit kutup noktasıdır. Bu durimda

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = a$$

olmak üzere,

$$\Phi(z) = az + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

biçiminde olur. Φ fonksiyonunun tersi Ψ olsun. Bu durumda Ψ fonksiyonu Δ bölgesinde ∞ noktası dışında analitik olur. Bu durümda Ψ fonksiyonunun ∞ noktası dışındaki Laurent seri acılımı $b = \frac{1}{a}$ olmak üzere,

$$\Psi(w) = bw + b_0 + \frac{b_{-1}}{w} + \frac{b_{-2}}{w^2} + \dots$$

biçimindedir, burada b sayısına G bölgesinin kapasitesi denir (Gaier, 1987).

$\mathbb{C}$ kompleks düzlemde G bölgesi verilmiş olsun. φ fonksiyonu G bölgesini birim çemberine konform dönüştürsün. G bölgesinin dış kısmını Ω ile gösterelim. Φ fonksiyonu ise Ω bölgesini birim çemberinin dış kısmına konform dönüştürsün.

Tanım 3.28 $0 < r < 1 < R < +\infty$ olsun.

$$L_r := \{z \in G : |\varphi(z)| = r\},\ L_R := \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = R\},\ L_1 \equiv L$$

eğrilerine sırasıyla iç ve dış seviye eğrileri denir (Markushevich, 1967).

3.2. Bazı Analitik Fonksiyonlar sınıfı

Tanım 3.29 G sonlu uzunluklu bir L Jordon eğrisiyle sınırlı bölge ve $1 \le p < \infty$ olsun. L'de Lebesgue ölçülebilir ve $|f|^p$ nin yay uzunluğuna göre Lebesgue integrallenebilir olduğu komleks değerli f fonksiyonların kümesine Lebesgue Uzayı denir. $L^p(L)$ ile gösterilir (Andrievskii ve Pritsker, 2000).

Tanım 3.30 $g \in L^p = L^p[0,2\pi], 1 \le p < \infty$, için

$$\omega_p(g,\delta) := \sup_{0<h<\delta} \left\{ \int_0^{2\pi} |g(x+t) - g(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

fonksiyonuna g'nin p.dereceden integral süreklilik modülü denir (Andrievskii ve Pritsker, 2000).

Tanım 3.31 $\Gamma_r,\ o < r < 1,\ D$ diskinin G bölgesi üzerine konform dönüşümü altında $\{w : |w| = r, 0 < r < 1\}$ çemberinin görüntüsü ve $1 \le p < \infty$ olsun. G bölgesinde analitik olan ve

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesine $E^p(G)$ Smirnov sınıfı denir (Timan, 1963).

Her $f \in E^p(G)$ fonksiyonu Γ üzerinde hemen hemen (h.h.) her yerde açısal limit değerine sahiptir ve eğer f 'nin açısal limiti için aynı notasyon kullanılırsa, $f \in L^p(\Gamma)$ dır. Ayrıca $G = D$ olduğu durumda, $H^p(D) := E^p(D)$ olarak tanımlanan uzaya Hardy uzayı denir (Timan, 1963).

Uyarı: $L^p(L)$ ve $E^p(G)$ uzayları $p \ge 1$ olduğunda,

$$\|f\|_{E^p(G)} = \|f\|_{L^p(L)} := \left(\int_L |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre Banach uzayıdırlar.

Γ, $\mathbb{C}$ komleks düzleminde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Bu eğri, düzlemi $G := Int\Gamma$ ve $G^- := Ext\Gamma$ şeklinde iki bölgeye ayırır. Genelliği bozmadan $0 \in G$ olduğunu kabul edelim. D birim dairesi, $T := \partial D$, $D^- := extT$ olsun. ϕ ise, $\phi(\infty) = \infty$ ve $\lim_{z\to\infty} \phi(z)/z > 0$ şartı altında, G^-nin D^- ye konform dönüşümü olsun. $\psi(w)$ ise $\phi(z)$'nin tersi olsun. h, $[0, 2\pi]$ aralığında bir sürekli fonksiyon olsun ve onun süreklilik modülü

$$\omega(t,h) := \sup\left\{ |h(t_1) - h(t_2)| : t_1, t_2 \in [0, 2\pi],\ |t_1 - t_2| \le t \right\}, \quad t \ge 0$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.32 $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eğrisinin parametrik denklemi

$$\Gamma : \phi_0(s), \qquad 0 \le s \le 2\pi$$

şeklinde olsun. Eğer $\phi_0'(s) \ne 0$ ve $\phi_0'(s)$ fonksiyonu Dini-süreklilik şartını, yani,

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega(t, \phi_0')}{t} dt < \infty,$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda Γ eğrisi Dini-düzgün eğri adlandırılır (Pommerenke, 1992).

Γ Dini-düzdün eğri olduğunda, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır,

$$c_1 \le |\psi'(w)| \le c_2, \qquad |w| \ge 1,$$

$$c_3 \le |\phi'(z)| \le c_4, \qquad z \in \overline{G^-}, \tag{3.1}$$

burada c_1, c_2 ve c_3, c_4 sabitleri sırasıyla w ve z'den bağımsızdırlar (Warschawski, 1932).

Konveks ve sürekli bir $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu için $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve

$$\lim_{x\to 0} \frac{M(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = \infty$$

şartları sağlanırsa, M fonksiyonu N - fonksiyon olarak adlandırılır. M fonksiyonunun tamamlayıcı fonksiyonu

$$N(y) := \max_{x \geq 0} \left(xy - M(x) \right), \ \ y \geq 0.$$

şeklinde tanımlanır.

M bir N - fonksiyon ve N ise onun tamamlayıcı fonksiyonu olsun. $\alpha > 0$ için

$$\int_{\Gamma} M\left[\alpha \left| f(z) \right|\right] |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan, Lebesgue ölçülebilir $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının doğrusal uzayını $L_M(\Gamma)$ ile gösterelim. $L_M(\Gamma)$ de f fonksiyonunun donatılmış normu

$$\| f \|_{L_M(\Gamma)} := \sup \left\{ \int_{\Gamma} \left| f(z) g(z) \right| |dz| : g \in L_N(\Gamma), \ \rho(g, N) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$\rho(g, N) := \int_{\Gamma} N\left(\left| g(z) \right| \right) |dz|,$$

dir, $L_M(\Gamma)$ uzayı bir Banach uzayıdır (Rao ve Ren, 1991).

$\| \cdot \|_{L_M(\Gamma)}$ normu, Orlicz normu, $L_M(\Gamma)$ Banach uzayı da Orlicz uzayı olarak adlandırılır.

Bilindiği gibi $L_M(\Gamma)$ uzayındaki her fonksiyon Γ de integrallenebilir, yani,

$$L_M(\Gamma) \subset L_1(\Gamma).$$

dir.

M bir N fonksiyon olmak üzere $\limsup_{x \to \infty} \frac{M(2x)}{M(x)} < \infty$ ise, M fonksiyonu Δ_2- koşulunu sağlar denir.

$L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının yansımalı (refleksif) olması için gerekli ve yeterli koşulun M ve onun tamamlayıcı fonksiyonu N in, her ikisinin de birlikte Δ_2- koşulunu sağlamasıdır (Rao ve Ren, 1991).

Orlicz uzayı hakkındaki önceki bilgiler Krasnoselskii ve Rutickii (1961) ve Rao ve Ren (1991) kaynaklarında bulunabilir.

M bir N - fonksiyon ve $M^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ise M nin ters fonksiyonu olsun.

$$h : (0, \infty) \to (0, \infty], \qquad h(x) := \limsup_{t \to \infty} \frac{M^{-1}(t)}{M^{-1}\left(\frac{t}{x}\right)}, \ \ x > 0$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının α_M alt indisi ve β_M üst indisi

$$\alpha_M := \lim_{x \to 0} \frac{\log h(x)}{\log x}, \qquad \beta_M := \lim_{x \to \infty} \frac{\log h(x)}{\log x}$$

şeklinde tanımlanır (Karlovich, 1996). Bu indisler ilk kez Matuszewska ve Orlicz (1960) tarafından düşünülmüştür ve $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının Boyd indisleri olarak adlandırılmıştır. Bilindiği gibi

$$0 \le \alpha_M \le \beta_M \le 1$$

ve

$$\alpha_N + \beta_M = 1, \qquad \alpha_M + \beta_N = 1.$$

Eğer $0 < \alpha_M$ ve $\beta_M < 1$ ise α_M, β_M Body indisleri, trivial (aşikar) değildir denir. $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının yansımalı olması için gerekli ve yeterli koşulun $0 < \alpha_M \le \beta_M < 1$ şartının sağlanmasıdır, yani, eğer Body indisleri trivial değil ise, bu durumda $L_M(\Gamma)$ uzayı yansımalıdır.

Tanım 3.33 M bir $N-$fonksiyonu, f ise G bölgesinde analitik fonksiyon olsun.

$$\int_{\Gamma_r} M\left(\left|f(z)\right|\right)|dz| < \infty \text{ i}$$

şartı sağlanırsa, bu durumda $f : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının sınıfı $E_M(G)$ ile gösterilir, burada Γ_r, $|w| < 1$ dairesinin G bölgesine konform dönüşümü altında, $\{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$, $0 < r < 1$çemberinin görüntüsüdür (Kokilashvili, 1968).

Tanım 3.34 $E_M(G)$ sınıfı Smirnov-Orlicz sınıfı olarak adlandırılır.

Eğer $M(u) = |u|^p$ $(1 < p < \infty)$, ise $E_M(G)$ sınıfı iyi tanımlanmış $E_p(G)$ Smirnov sınıfı ile çakışır.

Açıktır ki, $E_M(G)$ sınıfına ait herhangi bir $f(z)$ analitik fonksiyonu, aynı zamanda $E_1(G)$ sınıfına da ait olacaktır, yani,

$$\int_{\Gamma_r} \left|f(z)\right||dz| \le c < \infty,$$

yakınsaması, r, $(0 < r < 1)$ ye göre düzgün yakınsamadır. $E_M(G) \subset E_1(G)$ olduğundan, $E_M(G)$ sınıfındaki her fonksiyon, Γ üzerindeki (h.h.) her yerde açısal yollar boyunca sınır değerlerine sahiptir ve sınır değer fonksiyonu $L_M(\Gamma)$ ye aittir (Kokilashvili, 1968).

Bu yüzden $E_M(G)$ de norm

$$\| f\|_{E_M(G)} := \| f\|_{L_M(\Gamma)} .$$

olarak tanımlanabilir.

Tanım 3.35 $g \in L_M(T)$ olsun. g nin süreklilik modülü

$$\omega_{T,M}(\delta, g) := \sup_{|h|\le\delta} \left\| g\left(e^{i(\theta+h)}\right) - g\left(e^{i\theta}\right)\right\|_{LM(T)}$$

olarak tanımlanır.

$f_r(w) = f^{(r)}[\psi(w)]$ şeklinde gösterelim. $f^{(r)}(z) \in L_M(\Gamma)$ için süreklilik modülünü

$$\omega^*_{\Gamma,M}\left(\delta, f^{(r)}\right) := \omega_{T,M}(\delta, f_r) = \sup_{|h|\le\delta} \left\| f_r\left(e^{i(\theta+h)}\right) - f_r\left(e^{i\theta}\right)\right\|_{LM(T)} .$$

şeklinde tanımlayalım

3.3. Dirichlet Serileri ve Özellikleri

$\mathbb{C}$ kompleks düzlemde, $N > 2$ olacak şekilde $a_1, a_2, a_3 ... a_N$ köşeli bir D açık konveks(dış bükey) çokgenini göz önüne alalım. $\overline{D}$ ise D'nin kapanışı ve $\partial D = \overline{D}/D$ ise D'nin sınırını gösterir. Orjin noktasının D'ye ait olduğunu kabul edelim.

D'nin a_j köşelerini dikkata alarak,

$$L(z) = \sum_{j=1}^{N} d_j e^{a_{jz}}$$

biçiminde L kvazipolinomu tanımlayalım, burada $d_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $j = 1, ... N$'dir. Buradan $L(z)$ sinüs tipinde bir tam fonksiyondur (Lewin, Ljubarskiĭ, 1975). Λ ile $L(z)$ tam fonksiyonunun köklerinin dizisini gösterelim. $f \in E^P(D)$ fonksiyonlarını, $\varepsilon(\Lambda) := \left(e^{\lambda z}\right)_{\lambda\in\Lambda}$ kompleks üsteller ailesine göre genişletebiliriz. Bu aile, aslında $E^p(D)$, $1 < p < \infty$ nın Jchauder temelini oluşturur. Bu

$$f(z) \sim \sum_{\lambda\in\Lambda} k_f(\lambda) \frac{e^{\lambda z}}{L'(\lambda)}, \qquad (3.2)$$

Dirichlet serisini verir, burada,

$$k_f(\lambda)=\sum_{j=1}^{N} d_j e^{a_j\lambda}\int_{a_l}^{a_j} f(\eta)e^{-\lambda\eta}d\eta \tag{3.3}$$

biçiminde ifade edilen Leont'ev katsayılarıdır. Burada, a_l tepe noktası keyfi seçilmiştir, fakat sabittir. Bu serilerle ilgili bir çok sonuçlar Leont'ev (1967) tarafından elde edilmiştir ve bu sonuçlar onun kitabında bulunabilir. Özellikle, Leont'ev (1967) bu kitapta bizim ispatlarımız için çok önemli olan Λ kökler kümesinin ve $\varepsilon(\Lambda)$ kompleks usteller ailesinin özelliklerini incelemiştir.

(A) Yeterli kadar büyük C için $\left|\lambda_n^{(j)}\right|>C$ olmak üzere L' nın $\lambda_n^{(j)}$ kökleri $\lambda_n^{(j)}=\tilde{\lambda}^{(j)}+\delta_n^{(j)}$ şeklindedir, burada $\tilde{\lambda}^{(j)}=\dfrac{2\pi ni}{a_{j+1}-a_j}+q_j e^{i\beta j}$ ve $\left|\lambda_n^{(j)}\right|\le e^{-an}$.

Burada $0<a_j=sabit$, $j=1,...,N$, $n>n_0$, ve $a_{N+1}:=a_1$ dir. β_j ve q_j parametreleri $d_{N+1}:=d_1$ olmak üzere $e^{q_j(a_{j+1}-a_j)}e^{i\beta j}=-d_j/d_{j+1}$ şartını sağlamaktadırlar. Bu yüzden bu $\lambda_n^{(j)}$ kökleri tektir. Λ köklerinin kümesi

$$\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1,...,n_0}\cup\left(\bigcup_{j=1}^{N}\left\{\lambda_n^{(j)}\right\}_{n=n(j),n(j)+1,...}\right).$$

biçiminde gösterilebilir.

Kolaylık olsun diye L'nın tüm köklerinin tek olduğunu kabul edelim.

(B) A_1 ve C_1 pozitif sabitleri vardır öyle ki tüm $n\ge n(j)$ ve $\xi\in[a_j,a_k]$ için

$$\left|e^{-\lambda_n^{(j)}(\xi-a_k)}-e^{-\chi_n^{(j)}(\xi-a_k)}\right|\le A_1.e^{-c_1 n}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $[a_j,a_k]$ kompleks düzlemde a_j ve a_k köşeleri arasındaki doğru parçasını gösterir.

(C) Aşağıdaki eşitsizlik tüm $z\in\overline{D}$ için doğrudur. Bir c_2 pozitif sabiti vardır, öyle ki her $k\in N_0$ ve tüm $n>n_0$ için

$$\left|\frac{\left(\lambda_n^{(j)}\right)^k e^{\lambda_n^{(j)}z}}{L'\left(\lambda_n^{(j)}\right)}-(-1)^n B_j\left(\lambda_n^{(j)}\right)^k e^{\lambda_n^{(j)}\left(z-\left(a_{j+1}+a_j\right)/2\right)}\right|\le A(k)e^{-c_2 n}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $A(k)>0$ sabiti vardır, burada tüm $B_j \neq 0$ $j=1,...,N$, sabitlerdirler.

$f \in L^p(\partial D)$ fonksiyonu ve $I \subset \partial D$ yayı verilmiş olsun. $k \in N_0$ için I yayı üzerinde cebirsel en iyi yaklaşım,

$$E_k(f,I)=\inf_{P_k}\|f-P_k\|L_p\,(\mathrm{I})$$

biçiminde tanımlanır. Burada infimum derecesi k'nı aşmayan tüm P_k cebirsel polinomları üzerinden alınmaktadır. $k.$ mertebeden modül aşağıdaki şekilde tanımlanır. Dördüncü bölümde aşağıdaki şekilde tanımlanan $k.$cı mertebeden modülü kullanacağız.

Tanım 3.36 $h>0$ için $h/2 \leq |I_j| \leq h$ olmak üzere $\partial D=\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ tüm parçaları göz önüne alalım. $f \in E^p(D)$, $1<p<\infty$ fonksiyonunun $k.$ metrik düzgünlük modülü,

$$\omega_k(f,h)_p := \omega_{k,\bar{p}}(f,h)_p := \sup\left(\sum_{j=1}^{n}\inf\|f-P_k\|L^p(I_j)\right)$$
$$=\sup\left(\sum_{j=1}^{n}E_k(f,I_j)\right)$$

biçiminde tanımlanır, burada supremum tüm parçalar üzerinden alınmaktadır

Bu modüllerin, sonlu aralıkta tanımlı düzgünlük modüllerine denk olduğu gösterilebilir (Brudnyi, 1976).

3.4. Yardımcı sonuçlar

Biz bu bölümde dördüncü bölümde esas sonuçların ispatında kullanılan temel lemmalar, önermeler ve teoremleri verecğiz.

Önerme 3.37 $$\mathrm{P}_n(z)=\sum_{m=0}^{m_0}x_{m,n}\frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=n(j)}^{n}x_{j,m,n}\frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} \qquad (3.4)$$

şeklindeki her P_n kvazipolinomu ve her $1<p<\infty$ için aşağıdaki eşitsizlik $E^p(D)$ normunda geçerlidir:

$$\|\mathrm{P}_n'\|_p \leq c(p)\cdot n\cdot\|\mathrm{P}_n\|_p,$$

burada $c(p)$, sadece p'ye bağımlı bir pozitif sabittir (Mel'nik, 1988).

Lemma 3.38 $f \in E^P(D)$, $1<p<\infty$ ve $1\leq j\leq N$ sabit olsun. Bu durumda $k_f(\lambda_m(j))$, $m \geq n(j)$ Leont'ev katsayıları, bir $F_j \in L^p([0,2\pi])$ fonksiyonun Fourier katsayılarıdır:

$$k_f\left(\lambda_m(j)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_j(\theta)\cdot e^{im\theta}d\theta=:c_m\left(F_j\right).$$

$\left(F_j\right)$'nin $k.$cı modülü aşağıdaki gibi majorik edilebilir;

$$\omega_k\left(F_j,h\right)_p\leq\text{const}\left(\omega_k\left(f,h\right)_p+\delta_k\left(f,h\right)_p\right),\tag{3.5}$$

burada,

$$\delta_k\left(f,h\right)_p:=\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=1}^{k}\binom{k}{n}\left\{\left(\int_0^{nh}\left|f\left(a_j-\frac{a_{j+1}-a_j}{2\pi}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}+\left(\left(\int_{2\pi-nh}^{2\pi}\left|f\left(a_j-\frac{a_{j+1}-a_j}{2\pi}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}\right)\right\}.$$

$\delta_k\left(f,h\right)_p$ fonksiyonu, $0<h<2/2\pi$ için sürekli, azalmayandır ve $\lim\limits_{h\to0^+}\delta_k\left(f,h\right)_p=0$ şartı sağlanır. (3.5)'deki sabit sadece $p,\,k$ 'ya ve $a_1,...,a_k$ köşelerine bağlıdır.

Bu lemma, Mel'nik (1988)'deki sonucunu genişletmektedir. Bu lemma Forster (2004)'de çalışmasında ispat edilmiştir. Dikkat edelim ki $\delta_k\left(f,h\right)_p$ terimi (3.2)'den çıkarılamaz. Bu nedenle Forster (2004)'de bir örnek vermiştir.

Lemma 3.38 den (3.2) Dirichlet serilerindeki (3.3) Leont'ev katsayılarının, belli F fonksiyonlarının Fourier katsayılarına dönüştürmesini sağlar. Lemma 3.38 de F 'nin düzgünlüğü ile ilgili bilgi verildiğine göre klassik Jackson ve Bernstein teoremleri uygun Fourier serilerine uygulanabilir. Bu teoremleri aşağıdaki bölümlerde düz ve ters yaklaşım teoremlerini ispatlamak için uygulayacağız.

D'nin sınırlarında diferansiyellenebilen $f\in E^p(D)$ fonksiyonları için yaklaşım tertibi yükseltilebilir. Bunu göstermek için, kısmi integrasyon metodu ile ispatlanabilen aşağıdaki lemmadan yararlanılacaktır (Mel'nik, 1985).

Lemma 3.39 $f\in AC^r\left(\overline{D}\right),\ r\in\mathbb{N},$ ve $s=0,...,r-1$ için

$$\sum_{k=1}^{N}d_k f^{(s)}\left(a_k\right)=0$$

olsun. Bu durumda (3.1) Dirichlet serilerinin katsayıları için aşağıdaki doğrudur:

$$k_f\left(\lambda_m\right)=\frac{k_{f^{(r)}}\left(\lambda_m\right)}{\left(\lambda_m\right)^r}.$$

Tanım 3.40 Γ düzeltilebilir Jordan eğrisi olsun. $f\in L^1(\Gamma)$ fonksiyonun bir $z\in\Gamma$ noktasındaki Cauchy singüler integrali,

$$\left(S_\Gamma f\right)(z):=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus\overline{D}(z,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in\Gamma$$

olarak tanımlanır, buradaki $\overline{D}(z,\varepsilon)$, z merkezli ε yarıçaplı disktir. $S_\Gamma : f\to S_\Gamma f$ lineer operatörüne Cauchy singüler operatörü denir (Böttcher ve Karlovich, 1997).

Kabul edelim ki, Γ düzeltilebilir Jordan eğrisi ve $G:=Int\Gamma,\ G^-:=Ext\Gamma$ dir. $f\in L_1(\Gamma)$ olsun.

$$f^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(s)}{s-z}ds,\qquad z\in G$$

ve

$$f^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(s)}{s-z}ds,\qquad z\in G^-$$

şeklinde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonları, sırasıyla G ve G^-'de analitiktirler ve $f^-(\infty)=0$ dır.

Privalov'un teoremine göre $f^+(z)$ ve $f^-(z)$ fonksiyonlarından her hangi biri, Γ üzerinde hemen hemen her yerde açısal yollar boyunca sınır değere sahipse, bu durumda Γ üzerinde hemen hemen her yerde $S_\Gamma f(z)$ vardır ve aynı zamanda $f^+(z)$ yada $f^-(z)$ fonksiyonlarından diğerinin de Γ üzerinde h.h. her yerde açısal yollar boyunca sınır değeri vardır. Tersine, eğer, Γ üzerinde hemen hemen her yerde $S_\Gamma f(z)$ mevcutsa, bu durumda $f^+(z)$ ve $f^-(z)$ fonksiyonlarının da Γ üzerinde hemen hemen her yerde açısal yollar boyunca sınır değeri vardır. Her iki durumda da Γ üzerinde hemen hemen her yerde

$$f^+(z)=S_\Gamma(f)(z)+\frac{1}{2}f(z),\qquad f^-(z)=S_\Gamma(f)(z)-\frac{1}{2}f(z)$$

formülleri geçerlidir (Goluzin, 1968).

Γ, $\mathbb{C}$ komleks düzleminde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Bu eğri, düzlemi $G:=\operatorname{int}\Gamma$ ve $G^-:=ext\Gamma$ şeklinde iki bölgeye ayırır. Genelliği bozmadan $0\in G$ olduğunu kabul edelim. D birim dairesi, $T:=\partial D$, $D^-:=extT$ olsun. ϕ ise, $\phi(\infty)=\infty$ ve $\lim_{z\to\infty}\phi(z)/z>0$ şartı altında, G^-nin D^- ye konform dönüşümü olsun. $\psi(w)$ ise $\phi(z)$'nin tersi olsun.

Aşağıdaki lemmalar, temel sonuçların ispatlanmasında büyük rol oynayacaktır.

Lemma 3.41 $L_M(\Gamma)$ bir yansımalı Orlicz uzayı ve M ise bir N fonksiyon olsun. Bu durumda n .dereceden her bir T_n trigonometrik polinomu için,

$$\|T_n'\|_{L_M(T)} \leq c_8 n \|T_n\|_{L_M(T)} \tag{3.6}$$

eşitsizliği geçerlidir, burada c_8 sabiti n ' den bağımsızdır (Israfilov ve Güven, 2006).

Lemma 3.42 Γ bir Dini-düzdün eğri olsun ve $L_M(\Gamma)$ ise Γ üzerinde yansımalı Orlicz uzayı olsun. Bu durumda n. dereceden bir $P_n(z)$ polinomu için n den bağımsız öyle bir c_9 sabiti var ki ,

$$\|P_n'(z)\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_9 n \|P_n(z)\|_{L_M(\Gamma)} \tag{3.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: T_n trigonometrik polinomu için bu eşitsizlik (Israfilov ve Guven, 2006) çalışmasında elde edilmiştir. $z = e^{i\theta}$ için

$$P_n(z) = T_n(\theta) \quad \text{ve} \qquad P_n'(z) i e^{i\theta} = T_n'(\theta).$$

elde edilir. $P_n(z)$ polinomu için Faber polinomlara göre

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k [\phi(z)]^k + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\xi}{\varsigma - z} \sum_{k=0}^{n} a_k [\phi(\varsigma)]^k, \quad z \in ext\Gamma \tag{3.8}$$

açılımı geçerlidir. Bu durumda $z \in Ext\Gamma$ için şunu elde ederiz:

$$P_n'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k [\phi(z)]^{k-1} \phi'(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\xi}{\varsigma - z} \sum_{k=0}^{n} k a_k [\phi(\varsigma)]^{k-1} \phi'(\varsigma). \tag{3.9}$$

$P_{n,0}(\tau) = P_n[\psi(\tau)] \in L_M(T)$ fonksiyonunu dikkate alalım.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{P_{n,0}(\tau)}{\tau - w} d\tau$$

Cauchy tipi integrali, D ve D^- 'de sırasıyla $P_{n,0}^+$ ve $P_{n,0}^-$ analitik fonksiyonlarını açıklar. $w \in T$ için,

$$P_{n,0}^+(w) = \sum_{k=0}^{n} a_k w^k$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.1) gereğince,

$$\|P_n[\psi(\tau)]\|_{L_M(T)} \leq c_{10} \|P_n(z)\|_{L_M(\Gamma)} \tag{3.10}$$

olur. (3.10) ve singüler integralin sınırlı olmasını kullanılırsa, şunu elde ederiz:

$$\left\| S_T\left(P_{n,0}\right)(w)\right\|_{L_M(T)} \le c\left\|P_n\right\|_{L_M(\Gamma)} \tag{3.11}$$

(3.10), (3.11) ve Minkowski eşitsizliği gereğince

$$\left\|P_{n,0}^{+}(w)\right\|_{L_M(T)} = \left\|S_T\left(P_{n,0}\right)(w)\right\|_{L_M(T)}$$

$$\le \left\|S_T\left(P_{n,0}\right)(w)\right\|_{L_M(T)} + \frac{1}{2}\left\|P_{n,0}(w)\right\|_{L_M(T)} \le c_{11}\left\|P_n(z)\right\|_{L_M(\Gamma)} \tag{3.12}$$

bulunur.

Bu durumda T üzerindeki açısal yollar boyunca limitler için (3.6) ve (3.12)'den

$$\left\|\left(P_{n,0}^{+}(w)\right)'\right\|_{L_M(T)} \le c_{13} n \left\|P(z)\right\|_{L_M(\Gamma)}$$

elde edilir. (3.1) yardımıyla,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} k a_k \left[\phi(z)\right]^{k-1}\phi'(z)\right\|_{L_M(\Gamma)} \le c_{14}\left\|\sum_{k=1}^{n} k a_k w^{k-1}\right\|_{L_M(T)} \le c_{15} n \left\|P_n(z)\right\|_{LM(\Gamma)} \tag{3.13}$$

elde ederiz.

(3.13)'u, Minkowski eşitsizliğini ve Orlicz uzayında S_Γ singüler operatörün sınırlılığını kullanarak, (3.9) deki sağ taraftaki integralin Γ üzerindeki açısal yollar boyunca limitleri için

$$\left\|\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k \left[\phi(z)\right]^{k-1}\phi'(z)\right) + S_\Gamma\left[\sum_{k=1}^{n} k a_k \left[\phi(z)\right]^{k-1}\phi'(z)\right]\right\|_{L_M(\Gamma)} \tag{3.14}$$

$$\le c_{16}\left\|\sum_{k=1}^{n} k a_k \left[\phi(z)\right]^{k-1}\phi'(z)\right\|_{L_M(\Gamma)} \le c_{17} n \left\|P_n(z)\right\|_{L_M(\Gamma)}$$

bulunur. (3.9), (3.13) ve (3.14)'den (3.7) eşitsizliği elde edililir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

4.1. Konveks çokgenler üzerinde tanımlanmış Smirnov sınıflarında fonksiyonların yaklaşımı (Düz ve Ters Teoremler)

Tüm $f \in E^p(D),\ 1 < p < \infty$ için,

$$S_n(f) := \sum_{m=1}^{n_0} k_f(\lambda_m) \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=n(j)}^{n} k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right) \frac{e^{\lambda_m^{(j)} z}}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)} \tag{4.1}$$

Dirichlet serilerinin kısmi toplamlarının yaklaşım oranını göz önüne alalım. Bilindiği gibi $S_n : E^p(D) \to E^p(D)$ operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir (Leont'ev, 1976; Mel'nik, 1983, 1988; Sedletskii, 1979).

(i) $S_n(f),\ \ E^p(D)$ deki norma göre f 'ye yaklaşır : $n \to \infty$ için $\|f - S_n(f)\|_p \to 0$.

(ii) S_n kvazipolinomlara göre değişmezdir, yani,

$$P_n(z) := \sum_{m=1}^{n_0} y_{m,n} \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=n(j)}^{n} y_{j,m,n}\left(\lambda_m^{(j)}\right) \frac{e^{\lambda_m^{(j)} z}}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)}, \tag{4.2}$$

için $S_n(P_n) = P_n,\ n \in \mathbb{N}$ dir, burada $y_{m,n}, y_{j,m,n} \in \mathbb{C}$ dir.

(iii) Pozitif bir C_p sabiti vardır, öyle ki tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\|S_n\|_p \le C_p$ 'dir.

(iv) P_n, (4.2) şeklinde kvazipolinomlar olmak üzere $f \in E^p(D)$ fonksiyonunun en iyi yaklaşmı $E_n(f)_p := \inf_{P_n} \|f - P_n\|_p$ olarak tanımlanır. Bu durumda,

$$\|f - S_n(f)\|_p \le \left(1 + \|S_n\|_p\right) \cdot E_n(f)_p \le \left(1 + C_p\right) . E_n(f)_p .$$

Böylece, Fourier serilerinin kısmi toplamları ile ilgili esas özellikler, Dirichlet serilerin kısmi toplamları içinde geçerlidir. Bu nedenle şunu sormamız doğaldır.

Fourier serileri için Jackson tipli teoremlerde olduğu gibi, (i)'de keyfi modül için yaklaşım hızı ile ilgili değerlendirme yazmak mümkün mü?

Fourier serileri durumunda olduğu gibi, yakınsama hızını yükseltmek için (4.1) de uygun toplam çekirdeğine ihtiyaç vardır. Ağırlıklı genelleştirilmiş Jackson çekirdeği yardımıyla,

$$S_{n,k,s}(f)(z) := \sum_{m=1}^{n_0} k_f(\lambda_m) . \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=n(j)}^{n} \left(1 - x_{n,k,m}^{s+1}\right) k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right) \frac{e^{\lambda_m^{(j)}(z)}}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)}, \tag{4.3}$$

biçiminde Dirichlet serilerinin kısmi toplamlarını tanımlayalım. Burada,

$$x_{n,k,m} = \sum_{p=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{p} J_{n,k,mp},$$

dir, $J_{n,k,mp}$ ise $n \in N, k \geq 2, M := [n/k]+1$ olmak üzere

$$K_{n,k(t)} := \lambda_{n,k} \left(\frac{\sin Mt/2}{t/2} \right)^{2k} = \frac{J_{n,k,0}}{2} + \sum_{l=1}^{n} J_{n,k,l} \cos lt,$$

genelleştirilmiş Jackson çekirdeğinin katsayılarını belirtir ve $\lambda_{n,k}$ öyle seçilir ki,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{n,k}(t)\, dt = 1.$$

şartı sağlansın. $K_{n,k}$ ise derecesi n'yi aşmayan çift negatif olmayan trigonometrik polinomdur (De Vore ve Lorentz, 1993).

Teorem 4.1 $f \in E^p(D),\ 1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda Dirichlet serilerinin (4.3) eşitliğindeki $S_{n,k,0}(f)$ kısmi toplamları ile f fonksiyonu arasında

$$\left\| f - S_{n,k,0}(f) \right\|_p \leq const. \left\{ \omega_{k,\bar{D}} \left(f, \frac{1}{n} \right)_p + \delta_k \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \right\}$$

değerlendirilmesi geçerlidir. Bu sonuç, Mel'nik (1988)'deki sonucu kapsar ve onu genişletir.

İspat: Bölüm 3'de verilen L'nin köklerinin (C) özelliğini kullanarak, f'nin Dirichlet serilerine açılımını yazalım:

$$f(z) = \Phi(z) + \sum_{j=1}^{N} \Phi_j(z), \tag{4.4}$$

burada

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^{n_0} k_f(\lambda_m) . \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=n(j)}^{\infty} k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right) . \left(\frac{e^{\lambda_m^{(j)} z}}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)} - (-1)^m \cdot B_j \cdot e^{\lambda_n^{(j)} \left(z - \left(a_{j+1} + a_j\right)/2\right)} \right) \quad (4.5$$

ve

$$\Phi_j(z) = B_j \sum_{m=n(j)}^{\infty} k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right) \cdot (-1)^m \cdot e^{\lambda_m^{(j)} \left(z - \left(a_{j+1} + a_j\right)/2\right)}, \tag{4.6}$$

$j = 1, \ldots, N$.

Aynı işlemi $S_{n,k,0}(f)(z)$ kısmi toplamları için de yapabiliriz:

$$S_{n,k,0}(f)(z) := S_{n,k,0}(\Phi)(z) + \sum_{j=1}^{N} S_{n,k,0}(\Phi_j)(z),$$

burada, $S_{n,k,0}(\Phi)$ (4.5) serisinin n. kısmi toplamını ve $S_{n,k,0}(\Phi_j)$ (4.6)'ın uygun toplamını belirtir. Bazı pozitif C sabitleri ve tüm $z \in \overline{D}$'ler için Dirichlet serilerle ilgili Bölüm 3 deki (C) özelliğinden yararlanarak, şunu elde ederiz:

$$\left|\Phi(z) - S_{n,k,0}(\Phi)(z)\right|$$

$$\le \left|\sum_{j=1}^{N} \sum_{m=n(j)}^{n} x_{n,k,m} k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right)\left(\frac{e^{\lambda_m^{(j)} z}}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)} - (-1)^m B_j e^{\lambda_m^{(j)}\left(z-\left(a_{j+1}+a_j\right)/2\right)}\right)\right|$$

$$+\sum_{j=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{\infty} k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right) . \left(\frac{e^{\lambda_m^{(j)} z}}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)} - (-1)^m \cdot B_j \cdot e^{\lambda_m^{(j)}\left(z-\left(a_{j+1}+a_j\right)/2\right)}\right)$$

$$\le \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=n(j)}^{n} \left|x_{n,k,m}\right| \left|k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right)\right| A(0) e^{-cm} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{\infty} \left|k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right)\right| A(0) e^{-cm}$$

$n \to \infty$ için $\left|x_{n,k,m}\right| = O\left(m^k / n^k\right)$ olduğundan şu değerlendirme doğrudur:

$$\left|\Phi(z) - S_{n,k,0}(\Phi)(z)\right| \le C\left(\frac{1}{n^k} + e^{-cn}\right) = C\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p . \tag{4.7}$$

Ayrıca,

$$\left\|\Phi_j - S_{n,k,0}(\Phi_j)(z)\right\|_p^p$$

$$\le const \cdot \int_{a_j}^{a_{j+1}} \left| B_j \sum_{m=n+1}^{\infty} (-1)^m \cdot k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right) . e^{\lambda_m^{(j)}\left(z-\left(a_{j+1}+a_j\right)/2\right)} \right|^p |dz|$$

$$\le const \cdot \left|B_j\right| . \frac{\left|a_{j+1} - a_j\right|}{2\pi}$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} (-1)^m \cdot k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right) . e^{\lambda_m^{(j)}\left(a_j + \left[\left(a_{j+1}-a_j\right)/2\pi\right]\theta - \left(a_j + a_{j+1}\right)/2\right)} \right|^p d$$

$$= const \cdot \left|B_j\right| . \frac{\left|a_{j+1} - a_j\right|}{2\pi} \cdot \left| e^{q_j e^{i\beta_j\left[\left(a_j - a_{j+1}\right)/2\right]}} \right|$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} e^{-i\pi m} \cdot k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right) \cdot e^{-i\pi m} e^{q_j e^{i\beta_j\left[\left(a_{j+1}-a_j\right)/2\pi\right]\theta}} \cdot e^{im\theta} \right|^p d\theta$$

$$\leq const\cdot\int_0^{2\pi}\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}k_f\left(\lambda_m^{(j)}\right)\cdot e^{im\theta}\right|^p d\theta, \tag{4.8}$$

burada biz tekrar Dirichlet serileri ile ilgil Bölüm 3 deki (A), (B) ve (C) özelliklerini kullandık (Mel'nik, 1981, 1988). Lemma 3.38 gereğince

$$F_j(\theta)=\sum_{m=n(j)}^{\infty}K_f\left(\lambda_m^{(j)}\right).e^{i\pi\theta}$$

fonksiyonu $L^p([0,2\pi])$'nın bir elemanıdır ve onun k. süreklilik modülü için

$$\omega_k\left(F_j,h\right)_p\leq const\cdot\left(\left(\omega_{k,\overline{D}}(f,h)\right)_p+\delta_k(f,h)_p\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Böylece, Jackson'un ve Stechkin'in Fourier serileri için düz yaklaşım teorimi (De Vore ve Lorentz, 1993; Timan, 1994) bizim ifademizin doğru olduğunu gösterir. Yani,

$$\begin{aligned}\left\|\Phi_j-S_{n,k,0}\left(\Phi_j\right)\right\|_p&\leq const\cdot\omega_k\left(F_j,\frac{1}{n}\right)_p\\&\leq const\cdot\left(\omega_{k,\overline{D}}\left(f,\frac{1}{n}\right)_p+\delta_k\left(f,\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

olur.

D'nin sınırlarında diferansiyellenebilen $f\in E^p(D)$ fonksiyonları için yaklaşım tertibinin yükseltilmesini inceliyelim. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 4.2 $s\in\mathbb{N}$ ve $1<p<\infty$. için $f^{(s)}\in E^p(D)$ olsun ve tüm $\sigma=0,1,...,s-1$ için

$$\sum_{j=1}^{N}d_k f^{(\sigma)}\left(a_j\right)=0 \tag{4.9}$$

şartı sağlansın. Bu durumda tüm $0\leq\sigma\leq s$ için

$$\left\|f^{(\sigma)}-S_{n,k,s}\left(f^{(\sigma)}\right)\right\|_p\leq const.\frac{1}{n^{s-\sigma}}\left\{\omega_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p+\delta_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p\right\}$$

değerlendirilmesi doğrudur.

İspat: $f^{(s)}\in E^p(D)$için $f^{(\sigma)}$ türevleri $\sigma=0,1,...,s-1$için $\overline{D}$'de süreklidir ve bu durumda (4.9) formülünün anlamı vardır (Golusin, 1968). $f^{(s)}(z)$'yi

$$f^{(s)}(z)=\Phi_s(z)+\sum_{j=1}^{N}\Phi_{j,s}(z)$$

şeklinde ifade edelim, burada

$$\Phi_s(z)=\sum_{k=1}^{n_0}k_{f^{(s)}}(\lambda_m).\frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=n(j)}^{\infty}k_{f^{(s)}}\left(\lambda_m^{(j)}\right)\left(\frac{e^{\lambda_m^{(j)}z}}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)}-(-1)^m B_j\cdot e^{\lambda_m^{(j)}\left(z-\left(a_{j+1}-a_j\right)/2\right)}\right)$$

ve

$$\Phi_{j,s}(z)=B_j\sum_{m=n(j)}^{\infty}k_{f^{(s)}}\left(\lambda_m^{(j)}\right)\cdot(-1)^m\cdot e^{\lambda_m^{(j)}\left(z-\left(a_{j+1}-a_j\right)/2\right)}.$$

dir. (4.4), (4.5) ve (4.6) ile karşılaştırıldığında biz sadece f ’yi $f^{(s)}$ şeklinde değiştirdik. $\sigma=s$ için Teorem 4.1 gereğince

$$\left\|\Phi_{j,s}-S_{n,k,s}\left(\Phi_{j,s}\right)\right\|_p\le const\cdot\left\{\omega_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p+\delta_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p\right\}.$$

değerlendirilmesini verir. Şimdi $0\le\sigma<s$ için serilerin kısmi toplamlarını göz önüne alalım. $f^{(s)}$ integrallenebilir olduğundan, Lemma 3.39 gereğince

$$k_{f^{(\sigma)}}\left(\lambda_m^{(j)}\right)=\frac{1}{\left(\lambda_m^{(j)}\right)^{s-\sigma}}k_{f^{(s)}}\left(\lambda_m^{(j)}\right)$$

olur. Teorem 4.1’in ispatındaki (4.8)’den, biliyoruz ki,

$$\left\|\Phi_{j,\sigma}-S_{n,k,\sigma}\left(\Phi_{j,\sigma}\right)\right\|_p^p\le c\int_0^{\infty}\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}k_{f^{(\sigma)}}\left(\lambda_m^{(j)}\right)e^{im\theta}\right|d\theta.$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi sağ tarafdaki integrale daha ayrıntılı bakalım.

$$F_{j,\sigma}(\theta):=\sum_{m=n(j)}^{\infty}k_{f^{(\sigma)}}\left(\lambda_m^{(j)}\right)e^{im\theta}$$

ve

$$S_n\left(F_{j,\sigma}\right)(\theta):=\sum_{m=n(j)}^{\infty}k_{f(\sigma)}\left(\lambda_m^{(j)}\right)e^{im\theta}.$$

gösterelim. Bu durumda tüm $Q\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{m=n+1}^{n+Q}k_{f^{(\sigma)}}\left(\lambda_m^{(j)}\right)e^{im\theta}$$

$$=\sum_{m=n+1}^{n+Q}\frac{1}{\left(\lambda_m^{(j)}\right)^{s-\sigma}}k_{f^{(s)}}\left(\lambda_m^{(j)}\right)e^{im\theta}$$

$$=\sum_{m=n+1}^{n+Q}\frac{1}{\left(\lambda_m^{(j)}\right)^{s-\sigma}}.\left(F_{j,s}(z)-S_{m-1}\left(F_{j,s}\right)(z)+S_m\left(F_{j,s}\right)-F_{j,s}(z)\right)$$

$$=\sum_{m=n+1}^{n+Q-1}\frac{1}{\left(\lambda_{m+1}^{(j)}\right)^{s-\sigma}}.\left(F_{j,s}(z)-S_m\left(F_{j,s}\right)(z)\right)$$

$$-\sum_{m=n+1}^{n+Q}\frac{1}{\left(\lambda_m^{(j)}\right)^{s-\sigma}}.\left(F_{j,s}(z)-S_m\left(F_{j,s}\right)(z)\right)$$

$$=\frac{1}{\left(\lambda_{n+1}^{(j)}\right)^{s-\sigma}}.\left(F_{j,s}(z)-S_n\left(F_{j,s}\right)(z)\right)-\frac{1}{\left(\lambda_{n+Q}^{(j)}\right)^{s-\sigma}}\left(F_{j,s}(z)-S_{n+Q}\left(F_{j,s}\right)(z)\right)$$

$$+\sum_{m=n+1}^{n+Q}\left(\frac{1}{\left(\lambda_{m+1}^{(j)}\right)^{s-\sigma}}-\frac{1}{\left(\lambda_m^{(j)}\right)^{s-\sigma}}\right).\left(F_{j,s}(z)-S_m\left(F_{j,s}\right)(z)\right)$$

olur. Böylece, L'nın sıfırları ile ilgili özellikleri kullanarak ve Teorem 4.1 ve (4.9) dan yararlanarak,

$$\left\|\sum_{m=n+1}^{n+Q}k_{f^{(\sigma)}}\left(\lambda_m^{(j)}\right).\frac{e^{\lambda_m^{(j)}}}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)}\right\|_p$$

$$\leq const\cdot\left\{\frac{1}{n^{s-\sigma}}\left(\omega_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p+\delta_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p\right)\right.$$

$$+\frac{1}{(n+Q)^{s-\sigma}}\left(\omega_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n+Q}\right)_p+\delta_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n+Q}\right)_p\right)$$

$$\left.+\sum_{m=n+1}^{n+Q}\left(\frac{1}{m^{s-\sigma}}-\frac{1}{(m+1)^{s-\sigma}}\right)\left(\omega_k\left(f^{(s)},\frac{1}{m}\right)_p+\delta_k\left(f^{(s)},\frac{1}{m}\right)_p\right)\right\}$$

sonucunu elde ederiz. $Q\to\infty$ giderken

$$\left\|\sum_{m=n+1}^{n+Q}k_{f^{(\sigma)}}\left(\lambda_m^{(j)}\right).\frac{e^{\lambda_m^{(j)}}}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)}\right\|_p$$

$$\leq const\cdot\left\{\frac{1}{n^{s-\sigma}}\left(\omega_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p+\delta_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^{s-\sigma}}\left(\omega_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p+\delta_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p\right)\right\}$$

$$\le const\left\{\frac{1}{n^{s-\sigma}}\left(\omega_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p+\delta_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p\right)\right.$$

$$\left.+\left(\omega_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p+\delta_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p\right).\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^{s-\sigma}}-\frac{1}{(m+1)^{s-\sigma}}\right)\right\}$$

$$\le const\cdot\frac{1}{n^{s-\sigma}}\left(\omega_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p+\delta_k\left(f^{(s)},\frac{1}{n}\right)_p\right).$$

bulunur. (4.7) eşitsizliği Φ_σ için göz önüne alındığında, istenen sonuç elde edilir.

Biz keyfi mertebeden modüller için şu genelleştirilmiş düz yaklaşım teoremleri ile Dirichlet serilerinin kısmi toplamlarının yaklaşım hızı ile ilgili daha net bilgi elde edebiliyoruz. Bunu aşağıdaki örnekle açıklayabiliriz.

Köşeleri $-1+i, -1-i, 1-i$ ve $1+i$ olan D karesi üzerinde

$$g(z)=(z+1).\ln\left(\frac{1}{z+1}\right)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. g fonksiyonunun 1. türevi $z=-1$'de bir logaritmik dal noktasına sahiptir. Böylece, diferensiyellenebilme şartları, yaklaşımın daha iyi bir derecesini sağlayamaz. Burada $h\to 0$ için $\omega_{1,\overline{D}}(g,h_2)=O\left(h\ln\frac{1}{h}\right)$ olarak tanımlanmıştır. Fakat, $h\to 0$ için $\omega_{2,\overline{D}}(g,h)_2=O(h)$ ve $\delta_2(g,h)_2=O(h)$ olur. Bu doğrudan hesaplama ile gösterilebilir. Görüldüğü gibi, söz konusu fonksiyon için 1.modülün değerlendirilmesinde sağ tarafta $\ln\left(\frac{1}{h}\right)$ var. Fakat 2.modülün değerlendirilmesinde ise sağ tarafta $\ln\left(\frac{1}{h}\right)$ bulunmamaktadır. Dolayısıyla, 1.süreklilik modülü için Mel'nik (1988)'deki bilinen sonuçla kıyaslandığında, Teorem 4.2 gereğince daha yüksek mertebeden modül, $E^2(D)$'de Dirichlet serilerinin uygun $S_n(g)$ kısmı toplamlarının yakınsaklık hızının değeri için daha iyi sonuç vermektedir. Yüksek mertebeden modül $\ln(n)$ katsayısının iyileşmesini sağlamaktadır.

Şimdi konveks çokgenlerde $E^p(D)$ Simirnov fonksiyonlar sınıfı için ters teoremleri inceliyelim.

Mel'nik (1988) çalışmasında 1.süreklilik modülü için, düz teoremin ters analoğu ispat edilmiştir. Bu çalışmada, modülü değerlendirmek için, normal baskılar kullanılmıştır, yani $\delta > 0,\ t > 1$, sabit $\sigma \geq 1$ ve $\gamma \geq 0$ üstü için $\varphi(t\delta) \leq \sigma t^{\gamma}(\delta)$ olmak üzere sınırlı, azalmayan $\varphi :]0,\infty[\to]0,\infty[$ fonksiyonunu göz önüne alınmıştır.

Ters teoremin ispatında kvazipolinomlar için Bernstein tipinde bir eşitsizlikle ilgili Önerme 3.37 kullanılmaktadır.

Brigitte Forster (2006) ve Mel'nik (1988)'deki ters yaklaşım teoremleri, $k \in \mathbb{N}$ keyfi modül için genişletilebilir (Forster, 2007).

Teorem 4.3 $\omega_k(h)$, k üstlü ile birlikte normal bir baskı (mojarant) olsun. $f \in E^p(D), 1 < p < \infty.$ ve $\{\mathrm{P}_n\}_{n\in N}$ ise (3.3) şeklinde kvazipolinomlar dizisi olsun, öyle ki:

$$\|f - \mathrm{P}_n\|_p \leq const \cdot \omega_k\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.10}$$

şartı sağlanır. Bu durumda f 'in, $\omega_k(f,h)_p$ $k.$ süreklilik modülü için,

$$\omega_k(f,h)_p \leq const \cdot h^k \int_h^1 \frac{\omega_k(u)}{u^{k+1}} du.$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: $h > 0$ için, Δ_h^k ile

$$\Delta_h f := f(.+h) - f(.) \quad \text{ve} \quad \Delta_h^{k+1} f := \Delta_h\left(\Delta_h^k f\right).$$

şeklinde ardışık olarak tanımlanan $k.$ fark operatörünü gösterelim. Tümevarım metodu ile kolayca göstermek olur ki, (Timan, 1994).

$$\Delta_h^{k+1} f(x) = \underbrace{\int_0^h \ldots \int_0^h}_{k\,\tan e} . f^{(k)}(x + t_1 + \ldots + t_k)\, dt_1 \ldots dt_k \tag{4.11}$$

eşitsizliği geçerlidir, burada f, k defa türevlenebilirdir

Şimdi $|h| > 0$ olsun ve bir $Q \in \mathbb{N}$ öyle seçelim ki, $2^{-(Q+1)} < |h| \leq 2^{-Q}$ şartı sağlansın. Bu durumda

$$\Delta_h^k f(u) = \Delta_h^k \mathrm{P}_1(u) + \sum_{q=1}^{Q} \Delta_h^k\left(\mathrm{P}_{2^q} - \mathrm{P}_{2^{q-1}}\right)(u) + \Delta_h^k\left(f - \mathrm{P}_{2^Q}\right)(u). \tag{4.12}$$

olur. (4.10) eşitsizliği ve ω_k 'nın normallık şartı gereğince,

$$\left\|\mathrm{P}_{2^q} - \mathrm{P}_{2^{q-1}}\right\|_p \leq \left\|\mathrm{P}_{2^q} - f\right\|_p + \left\|f - \mathrm{P}_{2^{q-1}}\right\|_p$$

$$\le const\cdot\left(\omega_k\left(\frac{1}{2^q}\right)+\omega_k\left(\frac{1}{2^{q-1}}\right)\right)\le const\cdot\omega_k\left(\frac{1}{2^{q-1}}\right). \qquad (4.13)$$

sonucu elde edilir.

∂D sınırının parametrik denklemini $T_{j-1}\le u\le T_j,\ j=1,...,N,$ için $z:\partial D\to[0,T]$,

$$z(u)=a_j+\frac{a_{j+1}-a_j}{|a_{j+1}-a_j|}.(u-T_{j-1})$$

ile gösterelim, burada $T_0:=0,\ T_j=\sum_{l=1}^{j}|a_{l+1}-a_l|$ ve $T:=T_N:=\sum_{l=1}^{N}|a_{l+1}-a_l|$ dir.

(4.11) eşitliği, (4.13) değerlendirilmesi ve Önerme 3.37 kullanılırsa, şu şekilde devam ederiz:

$$\left\|\Delta_h^k\left(\mathrm{P}_{2^q}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}\right)\right\|_p$$

$$=\left(\int_0^T\left|\int_0^h...\int_0^h\left(\mathrm{P}_{2^q}^{(k)}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(k)}\right)\left(z\left(x+t_1+...+t_k\right)\right)z'\left(x+t_1+t_2+...+t_k\right)dt_1...dt_k\right|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\le\left|\int_0^h\cdots\int_0^h\left(\int_0^T\left|\left(\mathrm{P}_{2^q}^{(k)}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(k)}\right)\left(z\left(x+t_1+...+t_k\right)\right)\right|^p dx\right)^{1/p}dt_1\cdots dt_k\right|$$

$$\le const\cdot|h|^k\left\|\mathrm{P}_{2^q}^{(k)}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(k)}\right\|_p\le const|h|^k\cdot 2^q\cdot\left\|\mathrm{P}_{2^q}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}\right\|_p$$

$$\le const\cdot|h|^k\,2^q\cdot\omega_k\left(\frac{1}{2^q}\right)\le const\cdot 2\cdot|h|^k\cdot\int_{2^{-q}}^{2^{-(q-1)}}\frac{\omega_k(u)}{u^{k+1}}du\,.$$

Burada, biz ek olarak, $[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ kompakt karesi üzerinden tanımlanan $g(x,y)$ fonksiyonları için,

$$\left(\int_a^b\left|\int_c^d g(x,y),dy\right|^p dx\right)^{1/p}\le\int_c^d\left(\int_a^b|g(x,y)|^p dx\right)^{1/p}dy,\quad 1\le p<\infty,$$

Genişletilmiş Minkowski eşitsizliği kullanılmıştır (Zygmund,1988). (4.12) eşitliği kullanılırsa, $h>0$ için,

$$\omega_k(f,h)_p\le const\cdot\left(h^k+h^k.\int_h^1\frac{\omega_k(u)}{u^{k+1}}du+\omega_k(h)\right)$$

$$\le const\cdot h^k\int_h^1\frac{\omega_k(u)}{u^{k+1}}du,$$

elde edilir. Şu ise istenen sonuçtur.

Diferensiyellenebilir $f \in E^p(D)$ fonksiyonları için yaklaşım hızı ile ilgili değerlendirmeni daha da iyileştirebiliriz.

Teorem 4.4 $\omega_k \in L^1([0,1])$ k üstelli bir normal baskı (majorant) olsun. $f \in E^p(D)$, $1 < p < \infty$. ve $\{P_n\}_{n\in N}$ ise (3.3) biçiminde kvazipolinomlarının bir dizisi olsun, öyle ki

$$\| f - P_n \|_p \le const \cdot \frac{1}{n^s} \cdot \omega_k\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.14}$$

Şartı sağlansın. Bu durumda $f^{(\sigma)}(z), \sigma = 0,...,s-1,$ türevleri $\overline{D}$'de süreklidir, $f^{(s)} \in E^p(D)$ ve

$$\sum_{k=1}^{N} d_k f^{(\sigma)}(a_k) = 0, \qquad \sigma = 0,...,s+k-1 \tag{4.15}$$

dir. f fonksiyonunun $f^{(s)}$, türevinin $\omega_k\left(f^{(s)}, h\right)_p$, k. modülü için

$$\omega_k\left(f^{(s)}, h\right)_p \le const.\left\{\int_0^h \frac{\omega_k(u)}{u} du + h^k \int_h^1 \frac{\omega_k(u)}{u^{k+1}} du\right\}.$$

değerlendirilmesi geçerlidir.

İspat: $z \in D$ için

$$f(z) = P_1(z) + \sum_{q=1}^{\infty}\left(P_{2^q}(z) - P_{2^{q-1}}(z)\right). \tag{4.16}$$

eşitliği yazılabilir. (4.14) gereğince, seriler, $E^p(D)$ normuna göre yakınsaktır. $a > 0$ ve $w \in D$ olsun, öyle ki, $z \in D$ için $|z-w| \ge a$ şartı sağlansın. (4.16)'yi $s!/2\pi i(z-w)^{s+1}$ ile çarpalım. ∂D sınırı boyunca integral alınırsa,

$$\frac{s!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-w)^{s+1}} dw$$

$$= \frac{s!}{2\pi i}\int_{\partial D}\left(P_1(z) + \sum_{q=1}^{\infty}\left(P_{2^q}(z) - P_{2^{q-1}}(z)\right)\right). \frac{1}{(z-w)^{s+1}} dw.$$

elde edilir. Böylece, tüm $w \in D$ 'ler için

$$f^{(s)}(w) = P_1^{(s)}(w) + \sum_{q=1}^{\infty}\left(P_{2^q}^{(s)}(w) - P_{2^{q-1}}^{(s)}(w)\right). \tag{4.17}$$

sonucuna ulaşırız.

Böylece, Önerme 3.37 ve (4.14) eşitsizliği gereğince:

$$\left\|\mathrm{P}_{2^q}^{(s)}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(s)}\right\|_p \le const\cdot 2^{sq}.\left\|\mathrm{P}_{2^q}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}\right\|_p \le const\cdot\omega_k\left(\frac{1}{2^q}\right) \tag{4.18}$$

$$\le const\cdot\int_{2^{-q}}^{2^{-(q-1)}}\frac{\omega_k(u)}{u}du.$$

elde edilir.

$\frac{\omega_k(u)}{u}\in L^1([0,1])$ olduğundan dolayı, (4.17) serileri $E^p(D)$ de yakınsaktır. Böylece, $f^{(s)}\in E^p(D)$ olur. $Q\in\mathbb{N}$ için (4.18) ve (4.18) gereğince aşağıdakini elde ederiz:

$$\left\|f^{(s)}-\mathrm{P}_{2^Q}^{(s)}\right\|\le\sum_{q=Q+1}^{\infty}\left\|\mathrm{P}_{2^q}^{(s)}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(s)}\right\|_p$$

$$\le const\cdot\sum_{q=Q+1}^{\infty}\int_{2^{-q}}^{2^{-(q-1)}}\frac{\omega_k(u)}{u}du\le const\cdot\int_0^{2^Q}\frac{\omega_k(u)}{u}du.$$

Teorem 4.3 den

$$\omega_k\left(f^{(s)},h\right)_p\le const\cdot h^k\int_h^1\frac{\int_0^u\left(\frac{\omega_k(v)}{v}\right)dv}{u^{k+1}}du$$

bulunur. Modül ve normal baskılar için standart hesaplamalar

$$\omega_k\left(f^{(s)},h\right)_p\le const\cdot\left\{\frac{\omega_k(u)}{u}du+h^k\int_h^1\frac{\omega_k(u)}{u^{k+1}}du\right\}.$$

değerlendirilmesini vermektedir (Timan, 1994).

Diferansiyellenebilme ve (4.15) eşitliklerini ispatlamak için, tüm $z\in\partial D$ için

$$\int_0^z\left|\mathrm{P}_{2^q}^{(k)}(u)-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(k)}(u)\right|^p|du|\le const\left\|\mathrm{P}_{2^q}^{(k)}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(k)}\right\|_p^p$$

eşitsizliğini kullanırız, burada integralleme $[0,z]$ doğru parçası üzerinden alınmaktadır (4.18) ve Önerme 3.37 kullanılırsa, tüm $z\in\partial D$ için

$$\left|\mathrm{P}_{2^q}^{(s-1)}(z)-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(s-1)}(z)\right|$$

$$\le\int_0^z\left|\mathrm{P}_{2^q}^{(s)}(u)-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(s)}(u)\right||du|+\left|\mathrm{P}_{2^q}^{(s-1)}(0)-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(s-1)}(0)\right|$$

$$\le const\left\|\mathrm{P}_{2^q}^{(s)}(u)-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(s)}(u)\right\|_p+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left|\frac{\mathrm{P}_{2^q}^{(s-1)}(u)-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(s-1)}(u)}{u}\right||du|$$

$$\le const\cdot\left(\int_{2^{-q}}^{2^{-(q-1)}}\frac{\omega_k(u)}{u}du+\left\|\mathrm{P}_{2^q}^{(s-1)}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(s-1)}\right\|_p\right)$$

$$\leq const\cdot\left(\int_{2^{-q}}^{2^{-(q-1)}}\frac{\omega_k(u)}{u}du+2^{q(s-1)}\left\|\mathrm{P}_{2^q}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}\right\|_p\right)$$

$$\leq const\cdot\left(\int_{2^{-q}}^{2^{-(q-1)}}\frac{\omega_k(u)}{u}du+\frac{1}{2^q}\omega_k\left(\frac{1}{2^q}\right)\right)$$

$$\leq const\cdot\left(\int_{2^{-q}}^{2^{-(q-1)}}\frac{\omega_k(u)}{u}du+\frac{1}{2^q}\int_{2^{-q}}^{2^{-(q-1)}}\frac{\omega_k(u)}{u}du\right).$$

değerlendirilmesi elde edilir.

$\frac{\omega_k(u)}{u}\in L^1([0,1])$ olduğuna göre

$$f^{(s-1)}(z)=\mathrm{P}_1^{(s-1)}(z)+\sum_{q=1}^{\infty}\left(\mathrm{P}_{2^q}^{(s-1)}-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(s-1)}(z)\right)$$

serisi, $\overline{D}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Ayrıca, $0\leq\sigma\leq s-1$ için

$$f^{(\sigma)}(z)=\mathrm{P}_1^{(\sigma)}(z)+\sum_{q=1}^{\infty}\left(\mathrm{P}_{2^q}^{(\sigma)}(z)-\mathrm{P}_{2^{q-1}}^{(\sigma)}(z)\right)$$

serisinin mutlak ve düzgün yakınsaklığını tespit edebiliriz. (3.3) şeklinde verilen kvazipolinomların (3.4) biçimi nedeniyle

$$\sum_{l=1}^{N}d_l\mathrm{P}_n^{(s)}(a_l)=\sum_{m=0}^{n_0}x_{m,n}.(\lambda_m)^s\left(\sum_{l=1}^{N}d_l\,\frac{e^{\lambda_m a_l}}{L'(\lambda_m)}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=n(j)}^{n}x_{j,m,n}.\left(\lambda_m^{(j)}\right)^s\frac{\sum_{l=1}^{N}d_l e^{\lambda_m^{(j)}a_l}}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)}$$

$$=\sum_{m=0}^{n_0}x_{m,n}\cdot(\lambda_m)^s\,\frac{L(\lambda_m)}{L'(\lambda_m)}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=n(j)}^{n}x_{j,m,n}.\left(\lambda_m^{(j)}\right)^s\,\frac{L\left(\lambda_m^{(j)}\right)}{L'\left(\lambda_m^{(j)}\right)}=0$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $n\to\infty$ limit alınırsa, (4.15) eşitliğinin doğruluğu ispatlanmış olur.

4.2. Smirnov-Orlıcz Sınıflarında Yaklaşma Teorisinin Ters Teoremi

Teorem 4.5 Γ bir Dini-düzgün eğri olsun, $L_M(\Gamma)$ ise Γ de yansımalı bir Orlicz uzayı olsun. Her n doğal sayısı için, n. dereceden öyle bir $P_n(z)$ polinomu vardır ki,

$$\left\|f(\varsigma)-P_n(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)}\leq\frac{c_5}{n^{r+\alpha}}, \tag{4.19}$$

şartı sağlanır, burada, $0<\alpha\le 1$ ve r ise bir negatif olmayan tamsayıdır. Bu durumda $f\in E_M(G)$ dir ve $\omega^*_{\Gamma,M}\left(\delta, f^{(r)}\right)$ süreklilik modülü için, aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir (Jafarov, 2012).

$$\omega^*_{\Gamma,M}\left(\delta, f^{(r)}\right)\le c_6\delta^{\alpha}, \qquad 0<\alpha<1, \tag{4.20}$$

$$\omega^*_{\Gamma,M}\left(\delta, f^{(r)}\right)\le c_7\delta\left(1+\left|\ln\delta\right|\right), \qquad \alpha=1 \tag{4.21}$$

İspat:

$$\left\|P_n(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)}\le\left\|P_n(\varsigma)-f(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|f(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)}\le c_{18} \tag{4.22}$$

eşitsizliği geçerlidir, burada c_{18} sabiti n 'den bağımsızdır.

$\{P_n(\varsigma)\}$ dizisi $L_M(\Gamma)$ de yakınsar. Buna bağlı olarak, $\{P_n(\varsigma)\}$ dizisi belli bir ölçüye göre yakınsar. (4.22) eşitsizliği sağlandığından (Israfilov ve Akgun, 2006), (Kokilashvili, 1968) a göre $\{P_n(\varsigma)\}$ dizisi, bölgenin içinde $f(z)\in E_M(G)$ fonksiyonuna düzdün yakınsar ve açısal yollar boyunca $f(z)$'nin sınır değerleri (Γ 'nın içinden) Γ üzerinde hemen hemen her yerde $f(\varsigma)$ ile çakışır.

Aşağıdaki biçimde polinomlar dizisini tanımlayalım:

$$T_0(z)=P_1(z), \qquad T_k(z)=P_{2^k}(z)-P_{2^{k-1}}(z) \quad (k=1,2,...)$$

$\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}T_k(z)$ serileri, G nin içinde $f(z)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Bu durumda $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}T_k^{(r)}$ serileri, G nin içinde $f^{(r)}(z)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

$$K_n(s)=\sum_{k=0}^{n}T_k^{(r)}(s).$$

şeklinde dizi tanımlayalım. Şimdi $K_n(s)$ dizisinin $L_M(\Gamma)$ de yakınsadığını gösterelim. (4.19) gereğince

$$\left\|T_k(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)}\le\left\|f(\varsigma)-P_{2^k}(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|f(\varsigma)-P_{2^{k-1}}(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)}\le\frac{c_{19}}{2^{k(r+\alpha)}} \tag{4.23}$$

eşitsizliği elde edlir. (4.23) ve (3.7) ye göre

$$\left\|T_k^{(r)}(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)}\le\frac{c_{20}}{2^{n\alpha}} \tag{4.24}$$

bnulunur. (4.24) kullanılırsa, aşağıdaki elde edilir:

$$\left\|K_m(\varsigma)-K_n(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)} \le \sum_{k=n+1}^{m}\left\|T_k^{(r)}(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)} \le \frac{c_{21}}{2^{n\alpha}}, \quad (m>n). \tag{4.25}$$

Bu durumda (4.25) eşitsizliğine göre, $K_n(s)$ dizisi bir Cauchy dizisidir. $L_M(\Gamma)$ bir Banach uzayı olduğundan, $\{K_n(\varsigma)\}$ dizisi, $L_M(\Gamma)$ de yakınsaktır. Böylece, $K_n(s)$ dizisi belli bir ölçüye göre yakınsaktır.

$\left\|K_n(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)} \le c_{22}$ olduğundan, $K_n(s)$ dizisi, belli bir ölçüye göre $f^{(r)}(z)$ fonksiyonunun $f^{(r)}(\varsigma)$ açısal yollar boyunca sınır değerlerine yakınsar. $K_n(s)$ dizisinin öyle bir $K_{n_i}(s)$ alt dizisi vardır ki, Γ üzerinde h.h. her yerde,

$$K_{n_i}(s) \to f^{(r)}(s)$$

dir. Buradan Γ üzerinde hemen hemen her yerde şunu elde ederiz:

$$\left|K_{n_i}(\varsigma)-K_n(\varsigma)\right| \to \left|f^{(r)}(\varsigma)-K_n(\varsigma)\right|$$

Fatou lemması ve (4.25) e göre

$$\left\|f^{(r)}(\varsigma)-K_n(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma)} \le \frac{c_{22}}{2^{n\alpha}} \tag{4.26}$$

elde edilir, burada $K_n(\varsigma)$ polinomu 2^n. dereceden bir polinomdur. $0<\delta\le\frac{1}{2}$ şartını sağlayan δ sayısını seçelim ve $m\in N$ sayısını öyle seçelim ki, $2^{m-1}\le\frac{1}{\delta}<2^m$ şartı sağlansın.

Eğer (w) komleks düzlemine geçiş yapılırsa, bu durumda (4.26) eşitsizliğinden

$$\left\|f_r\left(we^{ih}\right)-f_r(w)\right\|_{L_M(T)} \le \frac{c_{23}}{2^{m\alpha}}+\left\|K_{m-1}\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]-K_{m-1}\left[\psi(w)\right]\right\|_{L_M(T)} \tag{4.27}$$

elde edilir. Aşağıdaki biçimde polinomlar dizisini tanımlayalım:

$$Q_1(z)=K_1(z), \quad Q_k(z)=K_k(z)-K_{k-1}(z),$$

burada $Q_k(z)$ polinomu 2^k. derecedendir. (4.26)’den şunu elde ederiz:

$$\left\|Q_k(z)\right\|_{L_M(\Gamma)}=\left\|K_k(z)-K_{k-1}(z)\right\|_{L_M(\Gamma)} \le \frac{c_{23}}{2^{k\alpha}}, \qquad k\ge 2 \tag{4.28}$$

$w=e^{ix}$ yazarak, $Q_k\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right]=v_k(x)$ tanımlayalım. Bu durumda şunu elde ederiz:

$\left\|v_k(x+h)-v_k(x)\right\|_{L_M(T)}$

$$= \sup\left\{\int_T \left|v_k\left(x+h\right)-v_k\left(x\right)\right| g\left(x\right)dx : g \in L_N\left(T\right), \int_T N\left(\left|g\left(x\right)\right|\right)dx \le 1\right\}$$

$$= \sup\left\{\int_T \left|\int_0^h v_k'\left(x+h\right)dt\right| g\left(x\right)dx : g \in L_N\left(T\right), \int_T N\left(\left|g\left(x\right)\right|\right)dx \le 1\right\} \tag{4.29}$$

$$\le h\left\|v_k'\left(x\right)\right\|_{L_M(T)} .$$

Γ eğrisi, Dini-düzgün eğri olduğundan, (3.1) gereğince

$$\left\|v_k'\left(x\right)\right\|_{L_M(T)} \le c_{24}\left\|Q_k'\left(z\right)\right\|_{L_M(\Gamma)} \tag{4.30}$$

elde edilir. (4.29) ve (4.30) kullanılırsa, şunu elde ederiz:

$$\left\|Q_k\left[\psi\left(w^{ih}\right)\right]-Q_k\left[\psi\left(w\right)\right]\right\|_{L_M(T)} \le c_{25}h\left\|Q_k'\left(z\right)\right\|_{L_M(\Gamma)} \tag{4.31}$$

(3.7) ve (4.30) a göre

$$\left\|K_{m-1}\left[\psi\left(w^{ih}\right)\right]-K_{m-1}\left[\psi\left(w\right)\right]\right\|_{L_M(T)}$$

$$\le c_{26}h\sum_{k=1}^{m-1}\left\|Q_k'\left(z\right)\right\|_{L_M(\Gamma)} \le c_{27}h\sum_{k=1}^{m-1}2^k\left\|Q_k\left(z\right)\right\|_{L_M(\Gamma)} \tag{4.32}$$

bulunur. (4.27), (4.32) ve (4.28) yi kullanarak, $|h| \le \delta$ için

$$\omega_{\Gamma,M}^*\left(\delta, f^{(r)}\right) \le \frac{c_{28}}{2^{m\alpha}} + c_{29}\delta\sum_{k=2}^{m-1}2^{k(1-\alpha)} + c_{30}\delta \tag{4.33}$$

eşitsizliği bulunur. (4.33) den istenen (4.20) ve (4.21) eşitsizlikleri elde edilir. Böylece, Teorem 4.5'in ispatı tamamlanmış olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

D konveks çokgen olmak üzere $E^p(D)$ Smirnov sınıflarına ait fonksiyonların Dirichlet serilerinin (1.1) biçiminde kısmi toplamları ile yaklaşımı üzerine yaklaşım teorisinin düz problemleri araştırılmaktadır. Daha sonra ise D konveks çokgenlerde $E^p(D)$ Smirnov sınıflarına ait fonksiyonların (1.2) biçiminde kvazipolinomlarla yaklaşımı ile ilgili yaklaşım teorisinin ters teoremleri verilmektedir.

Ayrıca, ilave olarak, Dini-düzgün eğri ile sınırlanmış bölgelerde tanımlanmış $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıflarında, yaklaşım teorisinin ters teoremi ispatlanmaktadır.

5.2 Öneriler

Bu tezdeki sonuçlar daha genel özelliklere sahip bölgelerde ve başka uzaylarda incelenebilir.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L.V., 1979, Comlex Analysis, Second Edition, McGraw Hill Book Company, *Tokyo,* 336s.

Akgün, R. and Israfilov, D. M. 2006. Approximation in Smirnov-Orlicz class, *Journal Korean Mathematical Society*, 43, no. 2, 413-424.

Akgün, R. and Israfllov, D. M. 2008. Approximation and moduli of fractional orders in Smirnov-Orlicz classes, *Glasnik Matematicki*. 43, 63, 121–136

Akgün, R. and Israfilov, D.M. 2010. Simultaneous and converse theorems in weighted Orlicz spaces, *Bulletin Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, 17,13-28.

Akgün, R. and Israfilov, D.M. 2011. Approximation in weighted Orlicz spacers, *Mathematica Slovaca*, 61,601-618.

Alaouia, M. K., Nabilab, T. and Altanjia, M. 2014. On some new-linear diffusion models for the image filtering, *Applicable Analysis,* 93. No. 269-280.

Alper, S. Ja., 1960. Approximation in the Mean of Analytic functions of Class E_p, *Izdatelstvo Fizika-Matematika Literatura,* Moscow, 272–286 (in Russian).

Akhiezer, N.I., 1965. Lectures on Approximation Theory, Nauka, *Moscow*, (Russian).

Andersson, J. E., 1977, On degree of polynomial approximation in $E^p(D)$, *Journal of Approximatiın Theory* 19, 61-68.

Andrasko, M. I., 1963. On the approximation in the mean of analytic functions in regions with smooth boundaries, Problems in mathematical physics and function theory, *Izdatelstvo Akademia Nauk. Ukrainskii RSR*, Kiev, 1, p. 3 (in Russian).

Andrievskii, V.V., Belyi, V.I. and Dzjadyk, V.K. 1995. Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable, *Atlanta*, *Georgia:* World Federation Publisher.

Andrievskii, V.V. and Pritsker, I.E. 2000. Convergence of Bieberback Polynomials in domains with Interior Cusps, *Journal d' Analyse Mathématique,* 82, 315-332.

Andrievskii, V.V. and Blatt, H.P. 2002, Discrepancy of Signed Measures and Polynomial Approximation, Springer-Verlag *New York*.

Bary, N.K., 1964. A Treatise on Trigonometric Series, Fizmatgiz, *Moscow*, 1961 (Russian).- English transl.: Pergamon Press, MacMillan, *New York*.

Baskan, T, 1998, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, 3. Baskı Vipaş, 360.s.

Bennett, C. and Sharpley, R. 1988. Interpolation of Operators, Academic Press.

Bernstein, S.N., 1912. Sur les recherches récentes erlatives à la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes, *Proceedings of 5th International Mathematical Congress* Vol. 1, 256-266.

Bernstein, S.N., 1912. Sur l'orde de la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes de degree donne, *Mem. Cl. Sci. Acad. Roy.* Belg. 4, 1-103.

Bimbaum, Z. W. and Orlicz, W. 1931. Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander Konjugierten Potenzen, *Studia Mathematica*, 3, 1-67.

Boyd, D. W., 1967. Spaces, between a par of reflexive Lebesgue spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 18, 215-219.

Boyd, D. W., 1969. Indices of functions spacesand their relationship to interpolation, *Canadian Journal of Mathematics*, 21, 1245-1254.

Boyd, D. W., 1971. Indices fort he Orlicz spaces, *Pacific J. Math*. 38, 315-325.

Böttcher, A. and Karlovich, Yu. I., 1997. Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Teoplitz Operators, *Birkhäuser*.

Brudnyi, Ju.A., 1976. Piecewise polynomial approximation, embedding theorem and rational approximation. *Lecture Notes in Mathematica.,*volume 556, pages 73–98. Springer.

Chebychev, 1953. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, *Mémoires de l' Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg,* 7 (1854), pp. 539-568. [17, vol. 1, pp. 109-143). read on 28.1.

Colombo, M. and Mingione, G. 2015. Regularity for Double Plase Variational Problems Arch. *Rational Mechanica Analysis,* 215. No. 443-496.

Chen, Y., Levine, S. and Rao, M. 2006. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 66, no. 1383-1406.

Depree, J.D. and Gehring, C.C. 1969, Elements of Comlex Analysis, Addison Wesley Publishing Company, *USA.*

De Vore, R.A. and Loretz, G.G. 1993, Constructive Approximation, Springer Berlin Heidelberg *New York.*

Dyn'kin, E.M., 1979/1980, The rate of polynomial approximation in complex domain, In: *Complex Analysis and Spectral Theory, (Lenilgrad, 1979/1980), Springer-Verlag,* Berlin, pp. 90-142.

Dzjadyk, V. K., 1974. On convergence conditions for Dirichletseries on closed polygons. *Matematicheskii USSR Sbornik*, 24:463–481,

Dzyadyk, V.K. and Shevchuk, I.A. 2009. Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomils, Brill Academic Publishers.

Favard, J., 1936. Application de la formüle sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques on presquepériodiques, *Matematick Tidskrift* K B.H. 4, 81-94.

Favard, J., 1937. Sur les meilleurs procédés d' approx,imation de certaines classes des fonctions par des polynômes trigonométriques, *Bulletin des Sciences Mathematiques,* 61, 209-224, 243-256.

Favard, J., 1949. Sur l'approximation dans les espaces vectoriels, *Anali di Matematica Pure ed Applicable*., (4) 24, 259-291.

Forster, B., 2004. On therelation between Fourier and Leont'ev coecients with respectto Smirnov spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, 4:628 – 640.

Forster, B., 2004. On the relation between Fourier and Leont'ev coefficients with respect to Smirnov spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, 4, :628 – 640.

Forster, B., 2007. Approximation in Smirnov spaces: Direct and inverse theorems, *Constructive Approximation,* 26: 46-64.

Gaier, D., 1987, Lectures on complex approximation, *Brikhauser Boston, Inc*.

Gavrilyuk, V. G., 1963. Linear method of summing Fourier series and best approximation, *Ukrainian Mathematical Journal*, 15, 4, 412-417.

Giannetti, F. and Passarelli di Napoli, A. 2013. Regularity results for a new class of functions with non-standart growth conditions, *Journal of Differential Equations*, 254, 1280-1305.

Goluzin, G. M., 1968. Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, Translation of Mathematical Monographs vol. 26, R.I. AMS, Providence.

Guven, A. and Israfilov, D. M. 2002. Polynomial approximation in Smirnov Orlicz classes, *Computational Methods and Function Theory* 2-2, 509-517

Guven, A. and Israfilov, D. M., 2011. On approximation in weighted Orlicz spaces, *Mathematica Slovaca*, 62, 77-86.

Ibragimov, I. I. and Mamedhanov, D. I. 1975-1976. A constructive characterization of a certain class of functions, *Doklad Akademia Nauk SSSR* 223 (1975), 35-37; English transl.: *Soviet Mathematica Dokad*, 4 (1976), 820-823.

Israfilov, D.M., 1987. Approximation properties of the generalized Faber seriesin an integral metric, *Izvestiya. Akademia Nauk Azerbaijan SSR, Seriya Fizika -Tekhnik Matematika. Nauk* 2, 10-14, (in Russian).

Israfilov, D.M., 2001. Approximation by $p-$Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E_p(G,\omega)$ and the Bieberbach polynomials, *Constructive Approximation*, 17, 335-351.

Israfilov, D.M., 2004. Approximation by $p-$Faber – Laurent rational functions in the weighted Lebesgue spaces, *Czechoslavak Mathematical Journal*, 54 (3), 751-765.

Israfilov, D.M and Guven, A. 2005. Approximation in weighted Smirnov classes, *East Journal on Approximation*, 11, 1, 91-102.

Israfilov, D. M., Oktay, B. and Akgun, R. 2005. Approximation in Smirnov-Orlicz classes, *Glasnik Matematicki*, 40 (60), 87–102.

Israfilov, D. M. and Guven, A. 2006. Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces, *Studia Mathematica*, 174, 2, 147–168.

Israfilov, D. M. and Akgun, R. 2006. Approximation in weighted Smirnov-Orlicz classes, *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 46, 4, 775–770.

Israfilov, D. M. and Guven, A., 2006. Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces, *Studi Mathematica*, 174 (2), 147-168.

Jackson, D., 1911. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganzerationale Functionen gegebenen Grades und trigonometrichen Summen gegeneber Ordnung, Diss., *Göttingem*.

Jackson, D., 1912. On approximation by trigonometricsums and polynomials, *Transaction American Mathematica Society*, 13, 491-515.

Jackson, D., 1924. Ageneral class of problemsin approximation, *American Journal. of Mathematics*, 46, 215-234.

Jackson, D., 1930. The Theory of Approximation, Amer. Math. Soc., *New York*.

Jackson, D., 1941. Fourier series and ortogonal polynomials, Carus Mathematical Monographs.

Jafarov, S. Z., 2011. Approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces, *Journal of Computational Analysis and Applications* (JoCAAA), 13, no. 5, 953-962.

Jafarov, S. Z., 2011. Approximation by rational functions in Smirnov-Orlicz classes, *Journal Mathematical Analsis and Applications*, 379, 870–877.

Jafarov, S. Z., 2012. On approximation in weighted Smirnov – Orlicz classes, *Complex Variables and Elliptic Equations* 57, no. 5, 567-577

Jafarov, S. Z., 2012. The inverse theorem of approximation of the function in Smirnov- Orlicz classes, *Mathematical Inequalities and Applications*, no.4, 835-844**.**

Jafarov, S.Z., 2012. (in common with Mamedkhanov J. I), On approximation by trigonometric polynomials in Orlicz spaces, *Georgian Mathematical Journal*, 9, no. 4, 687-695

Jafarov, S. Z., 2013. Approximation of conjugate functions by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces, *Journal of Mathematical Inegualities*, **7** 2, 271-281.

Jafarov, S. Z., 2013. Approximation by Fejér sums of Fourier trigonometric series in weighted Orlicz space, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42 3, 259-268.

Jafarov, S. Z., 2018. Linear methods of summing Fourier series and approximation in weighted Orlicz spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 42, 2916-2925.

Karlovich, A.Yu., 1996. Algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on reflexive Orlicz spaces, *Mathematische Nachrichten,* 179, 187-222.

Karlovich, A. YU., 2002. Algebras of singular integral operators with PC coefficients in rearrangementinvariant spaces with Muckernhoupt weights, *Journal of Operator Theory* 47, 303–323.

Kokilashvili, V., 1968. On analytic functions of Smirnov-Orlicz classes, *Studia Mathematica*, 31,43-59.

Kokilashvili, V. 1968., On analytic functions of Smirnov-Orlicz classes, *Studia Mathematica*, 31, 43–59.

Kokilashvili, V., 1969. A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials, *Soviet Mathematica Doklad,* 10, 411-414.

Kolmogoroff, A.N., 1935. Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Fonktionen, *Ann. of Mathem*. 36, 521-526.

Khabazi, M., 2002. The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes, *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute*, 129, 65-75.

Krasnoselskii, M. A. and Rutıckıı, YA. B. 1961. Convex Functions and Orlicz Spaces, P. Norrdhoff Ltd., *Groningen*.

Kreyszıg, E. 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley& Sons, *New York*.

Lebesgue, H., 1898. Sur l'approximation des fonctions, *Bulletin Science Mathematica,* 2 , 22, 278-287.

Leont'ev A.F., 1976, Exponential Series. Nauka, *Moscow*, Russian.

Lewin, B. Ja and Ljubarskiĭ, Ju. I. 1975. Interpolation by means of special classes of entire functions and related expansions in series of exponentials. *Mathematics of the USSR -Izvestiya*, 9:621–662.

Lorentz, G.G., 1966, Approximation of Functions, New York, Chicago, San Francisco, Toronto, *London*.

Maddox, I. J., 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge Unıversity Press, Cambridge, Londonand *New York*.

Maligranda, L., 1985. Indices and interpolation, *Dissertationes Math*. 234.

Markushevich, A.I., 1985, Theory of Functions of a Comlex Variable, Chelsea Publisling., *New York*, There evolumes in one.1231s.

Matuszewska, W. and Orlıcz, W. 1960. On certain properties of φ -functions, *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques,* 8-7, 439–443.

Mel'nik, Yu. I., 1981. Dirichlet series of functions regular in convex polygons. *Ukrainian Mathematica Journal*., 32:576–581.

Mel'nik, Yu. I., 1983.Absolute convergence of series of exponents that represent regular functions in convex polygons. *Ukrainian Mathematical Journal*, 35:681–685.

Mel'nik, Yu. I., 1985. Rate of convergence of exponential series representing functions regular in convex polygons. *Ukrainian Mathematical. Journal*, 37:587–591,18.

Mel'nik, Yu. I., 1988. Direct theorems for the approximation of functions, regular in convex polygons, by exponential polynomials in the integral metric. *Ukrainian Mathematical Journal,* 40:498–504.

Mel'nik, Yu. I., 1988. Inverse theorems for approximation of functions regular in convex polygons by exponential polynomials in the integral metric. *Ukrainian. Mathematical Journal,* 40(6):633–638.

Mhaskar, H.N., 1996. Introduction to the Theory of Weighted Polynomial Approximation, Series in Approximation and Decompositions 7, World Sci., River *Edge*, NJ.

Natanson, I.P., 1949, Constructive theory of functions, *Moskow-Leningrad*: Gostecizdat, (Russian).

Nikolskii, S.M., 1946. Approximation of functions by trigonometric polynomials in the mean, *Izvestia Akademia Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 10, 207-256. (Russian).

Orlicz, W., 1931. Über konjugiente Exponentenfolgen, *Studia Mathematica*, 3, 200-211.

Pommerenke, CH., 1992, Boundary Behavior of Conformal Maps, *Berlin*, Springer-Verlag.

Ponomarenko, V. G., 1966. Approximation of periodic functions in an Orlicz spaces, *Sibirskii Matematicheskii Journal*, 6, 1338-1346 (in Russian).

Ramazanov, A. R. K., 1984. On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces, *Anaysis Mathematica*, 10, 117–132.

Ramazanov, A.R. K., 1984. On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces, *Analysis Mathematica*, 10, 117-132.

Rao, M. M. and Ren, Z. D. 1991, Theory of Orlicz Spaces, *Marcel Dekker*, 449pp.

Rao, M. M. and Ren, Z. D. 2002, Applications of Orlicz Spaces, *Marcel Dekker*, 464 pp.

Rudin, 1974, Real and Comlex Analysis, *McGraw-Hill*, 452s.

Runovski, K., 2001. On Jackson type inequality in Orlicz classes, *Revista Matematica Complutense*, 14, 395-404.

Saff, E.B. and Snider, A.D. 1993, Fundamentels of Comlex Analysis, Prentice Hall, Upper Saddle River, *New Jersey*, 528s.

Sedletskii, A. M., 1979. Bases of exponential functions in the space E^p on converx polygons, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 13(2):387 13 (2), 387-404.

Stechkin, S.B., 1951. On the order of approximation of continuous function, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Mathematicheskii*, 15 , 219-242.

Stepanets, A.I., 1995. Clasification and Approximation of Periodic Functions, Naukova Dumka, *Kiev*, 1987 (Russian). English transl.: *Kluwer*, *Dordrecht*.

Świerczewska_Gwiazda, A., 2014. Nonlinear parabolic problemsin Musielak-Orlicz spaces, *Nonlinear Anal*. 98, 48-65.

Timan, A.F. and Timan, M.F. 1950. Generalized modulus of continuity and best approximation in the mean, *Doklad Akademia Nauk SSSR* 71, 17-20. (Russian).

Timan, M.F., 1958. Converse Theorems of the Constructive Theory of Functions, *Matematicheskii Sbornik*, 46,125-132.

Timan, M.F., 1966. On Jackson's Theorem in spaces, *Ukrainian Mathematica Journal*, 18, 134-137.

Timan, A. F., 1994. Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. Dover Publications. Russian original, *Moscow*: Fizmatgiz, 1960. First English edition, Oxford: Pergamon Press, 1963.

Trigub, R.M. and Belisky, E.S., 2004. Fourier Analysis and Approximation of Functions, Kluwer Academic Publishers, *Dordrecht/Boston/London*.

Vallée-Poussin, Ch. J. La., 1910. Sur les polynomes d' approximation et la représentation approchée d'un angle, *Bulletin Academie Science Belgique*, 12, 808-844.

Vallée-Poussin and Ch. J. La., 1911. Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe, *Buletin de l'Academie Royali des Sciences de Belgique Clesse des Sciences*, 199-211.

Vallée-Poussin, Ch. J. La., 1919. Leçons sur l'approximation des fonctions d'unevariable reele, *Paris*, Gautier-Villars.

Weierstrass, K., 1885. Über die analytische Darsdellung sogenannter willkürlicher Funktionen einerieelen Veränderlichen, *Sitzungsberichte der Akad. zu. Berlin*, 633-639, 789-805.

Warschawski, S. E., 1932. Uber das Ranverhalten der Ableitung der Abbildunggs funktion bei konformer, *Abbildung Mathematik,* Z. 35, 321–456.

Wunsch, A.D., 2005, Complex Variableswith Applications, Third Edition, Addison Wesley Publishing Company, *USA*, 696 s.

Wu, G., 1991. On approximation by polynomials in Orlicz spaces, *Approimation Theory and its Applications*, 7, no.3, 97-110.

Wróblews- Kamińska, A., 2014. Existence result for the motion of several rigid bodies in an incompressible non- Newtonian fluid with growth condition in Orlicz spaces, *Nonlinearity* 27, 685-716.

Zill, D.G. and Shanahan, P.D. 2003, A First Caurse in Comlex Analysis with Applications, Jones and Bartlett Publishers, *USA*, 449s.

Zygmund, A., 1959. Trigonometric series, 2nd ed. Voll I.II, Cambridge University Press, *Cambridge.*

Zygmund, A. 1988. Trigonometric Series, Vols. I &II. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press. First edition. *Warsaw*, 1935.

Ek-9

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	X	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	X	
Denklem yazımları uygun mu?	X	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	X	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	X	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	X	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	X	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	X	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	X	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	X	
+Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	X	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

	Unvanı Adı SOYADI	İmza
Öğrenci :	Mehmet Şerif KOÇ	
Danışman :	Prof. Dr. Sadulla JAFAROV	

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum /vermiyorum**.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı
Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI	Tarih	İmza
Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖNLÜ	04.07.2019	………………

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Mehmet Şerif KOÇ
Uyruğu	:	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	:	MUŞ/06.08.1988
Telefon	:	5394292552
Faks	:	
e-mail	:	m.serif49@outlook.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Muş Şeker Lisesi	**2006**
Üniversite	:	Muş Alparslan Üniversitesi	**2014**
Yüksek Lisans	:	Muş Alparslan Üniversitesi	**2019**
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014-2015	Muş Final Temel Lisesi	Matematik öğretmeni
2016-2019	Muş Seçkin Kadro Özel Öğretim Kursu	Müdür

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR