T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FRAKSİYONEL İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

Fatma AYDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık-2020
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FRAKSİYONEL İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

Fatma AYDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Aralık-2020
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Fatma AYDEMİR tarafından hazırlanan "**Fraksiyonel İntegro Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Kararlılığı**" adlı tez çalışması 22/12/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Doç. Dr. Derya ARSLAN …………………..
Bitlis Eren Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Danışman
Doç. Dr. Erdal KORKMAZ …………………..
Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye
Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU …………………..
Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Eğitimi

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu …../……/……. Tarih ve ………/……….. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Fatma AYDEMİR

22/12/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FRAKSİYONEL İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

Fatma AYDEMİR

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Bu çalışmada, kesirli diferansiyel denklemlerin yeni kararlılık sonuçları ve kullanılan analitik yöntemler hakkında kısa bir genel bakış verilmiştir. Lineer kesirli sistemin öz değerleri analiz edilerek kararlılığı tartışılmıştır. Ayrıca lineer olmayan kesirli dinamik sistemin kararlılığı lineer olmayan terimde koşullar verilerek analiz edilmiştir. Ayrıca, kesirli nötr ve integro diferansiyal sistemlerin kararlılığı incelenmiştir. Kesirli diferansiyel denklemlerin uygulanabilirliğini göstermek için bazı örnekler sunulmuştur.

2020, 44 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Asimptotik Kararlılık, İntegral Denklem, İntegro Denklem, Kararlılık, Kesirli Türev.

ABSTRACT

MS THESIS

STABILITY OF FRACTIONAL INTEGRO DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS

Fatma AYDEMİR

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematic

Advisor: Assoc. Prof. Erdal KORKMAZ

In this study, a brief overview of the new stability results of fractional differential equations and the used analytical methods is given. The stability of the linear fractional system is discussed by analyzing the eigenvalues. In addition, the stability of the nonlinear fractional dynamical system is analyzed in the nonlinear term by giving the conditions. In addition, the stability of fractional neutral and integro differential systems was investigated. Some examples are presented to demonstrate the applicability of fractional differential equations.

2020, 44 Pages

Keywords: Asymptotic Stability, Fractional Derivative, Integral Equation, Integro Equation, Stability,

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, özellikle bu süreçte bana büyük sabır gösteren çok kıymetli danışman hocam sayın Doç. Dr. Erdal KORKMAZ'a sonsuz teşekkür eder saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Kardeşlik duygusunu kendisinde bir kere daha hissettiğim, yüksek lisans eğitimim boyunca manevi desteğini gördüğüm değerli dostum Merve ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım

Fatma AYDEMİR
MUŞ-2020

İÇİNDEKİLER

ÖZET .... **iv**

ABSTRACT .... **v**

ÖNSÖZ .... **vi**

İÇİNDEKİLER .... **vii**

SİMGELER ve KISALTMALAR .... **viii**

ŞEKİLLER DİZİNİ .... **ix**

1. GİRİŞ **1**

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **3**

3. MATERYAL ve YÖNTEM **5**

3.1 Kararlılık ve Fraksiyonel Türev İle İlgili Temel Kavramlar 5
3.2 Fraksiyonel Türev Üzerine Uyarılar 9

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA **11**

4.1 İntegral ve İntegro Denklemler Hakkında Ön Bilgiler 11
4.2 Kesirli İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Lyapunov Kararlılık Çözümleri 13
4.3 Kesirli Nötr ve İntegro Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Kararlılığı 16

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER **41**

5.1 Sonuçlar 41
5.2 Öneriler 41

KAYNAKLAR **42**

ÖZGEÇMİŞ **44**

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\boldsymbol{R}$	**:** Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{C}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}})$	**:** $[a,b]$' den R^n'de tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
${}^{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}$	**:** α-mertebeden Caputo kesirli türev operatörü
$\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$	**:** $f(t)$ fonksiyonunun α-mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}_{\boldsymbol{GL}}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{0},\boldsymbol{t}}$	**:** α-mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türev operatörü
$\boldsymbol{I}^{\boldsymbol{\alpha}}$	**:** α-mertebeden Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{I}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$	**:** $f(t)$ fonksiyonunun a'dan b'ye α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{z})$	**:** Mittag-Leffler operatörü
$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{n})$	**:** Gama fonksiyonu
$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$	**:** Beta fonksiyonu
$\boldsymbol{\tau}$	**:** Gecikme parametresi
$\boldsymbol{\Omega}$	**:** Omega
$\boldsymbol{\delta}$	**:** Delta
$\boldsymbol{\varepsilon}$	**:** Epsilon
$\boldsymbol{\gamma}$	**:** Gama

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 α=0,5 için (4.34) denkleminin çözüm grafiği 211
Şekil 4.2 α=0,66 için (4.34) denkleminin çözüm grafiği 23
Şekil 4.3 α=1 için (4.34) denkleminin çözüm grafiği 22
Şekil 4.4 α=0.67 için (4.34) denkleminin çözüm grafiği 244
Şekil 4.5 α=0,75 için (4.34) denkleminin çözüm grafiği 24
Şekil 4.6 α=0,5 için (4.35) denkleminin çözüm grafiği 266
Şekil 4.7 α=0.9 için (4.35) denkleminin çözüm grafiği 277
Şekil 4.8 α=1 için (4.37) denkleminin çözüm grafiği 288
Şekil 4.9 α=0,5 için (4.37) denkleminin çözüm grafiği 299
Şekil 4.10 α=0,5 için (4.55) denkleminin çözüm grafiği 366
Şekil 4.11 α=0,5 için (4.56) denkleminin çözüm grafiği 377
Şekil 4.12 α=0,9 için (4.58) denkleminin çözüm grafiği 388
Şekil 4.13 α=0,5 için (4.59) denkleminin çözüm grafiği 399
Şekil 4.14 α=0,5 için (4.60) denkleminin çözüm grafiği 40

1. GİRİŞ

Kesirli analiz, klasik analizdeki türev ve integral kavramlarının tamsayı olmayan mertebeden (karmaşık, reel ve rasyonel sayı) türev ve integrallere genellemesi olarak tanımlanır. 19. yüzyıldan bu yana, kesirli analiz teorisi, çoğunlukla kesirli geometri, kesirli diferansiyel denklemler ve kesirli dinamikler gibi bir dizi uygulamalı disiplinin temeli olarak hızla gelişmiştir. Günümüzde de kesirli analiz uygulamaları çok geniştir. Örneğin, reoloji, viskoelastisite, akustik, optik, kimyasal ve istatistiksel fizik, robotik, kontrol teorisi, elektrik ve mekanik mühendisliği, biyo mühendislik vb. alanlarda çok sayıda uygulamaları bulunur. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının olması problemin çeşidine en uygun olanının kullanılmasını sağlar. Böylelikle problemin en iyi çözümünün elde edilmesi imkanını verir. Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl, Hadamard, Riesz ve Marchaud başlıca kesirli türev çeşitleridir. Birbirleri arasında ilişkiler olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları yönünden farklıdırlar (Oldham ve Spanier, 1974; Samko ve ark., 1993a; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1998; Hilfer, 2000). Kesirli analiz uygulamalarının başarılı olmasının temel nedeni, bu yeni kesirli düzen modellerinin genellikle tamsayı düzenindekilerden daha doğru olmasıdır, yani kesirli düzen modelinde klasik modelden daha fazla serbestlik derecesi vardır.

İntegral denklemler bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında ortaya çıktığı diferansiyel denklemler olarak tanımlanır. İntegral denklemler ile ilgili ilk bilimsel gelişmeler 19. Yüzyılın ilk yarısında ortaya çıkmıştır. Günümüzde de integral denklemlerin pek çok alanda uygulanabilirliğinden söz edilebilir. Fiziksel olaylar ile ilgili birçok modellemeler integral ve integro-diferansiyel denklemler ile ifade edilebilmektedir. İntegro-diferansiyel denklemler 1930 yılında ilk olarak Vito Volterra tarafından ortaya atılır. Volterra, integro-diferansiyel denklemleri bilinmeyen fonksiyonun türevlerini ya da integral işareti altında bilinmeyen fonksiyonu, türevlerini veya ikisini birden içeren denklemler olarak tanımlar (Varol Bayram, 2019). Integro-diferansiyel denklemler, farklı disiplinlerde matematiksel modeller olarak oldukça sık ortaya çıkmaktadır. İntegral ve integro-diferansiyel denklemler çalışmasının kökenleri Abel, Lotka, Fredholm, Malthus, Verhulst ve Volterra'nın mekanik, matematiksel biyoloji ve iktisat problemleri üzerindeki çalışmalarına dayanır (Lakshmikantham, 1995). İntegro-diferansiyel denklemler elektromanyetik teori, termoelastikiyet, biyoloji, ısı iletimi, mekanik, ekoloji, dalgaların kırınımı gibi alanlarda da ortaya çıkmaktadır.

İntegro-diferansiyel denklem sistemini çözmek için çeşitli yöntemler vardır. Adomian ayrışma yöntemi, Galerkin yöntemi, rasyonelleştirilmiş Haar fonksiyonları yöntemi, Homotopi pertürbasyon yöntemi ve varyasyonel yineleme yöntemi bunlardan bazılarıdır. Son yıllarda dinamik sistemlerde kontrol teori, mekanik, optik, elektrik, gibi gerçek hayat problemlerinde kesirli integro diferansiyel denklem sistemleri kullanılır. Diğer taraftan iyi bilinmektedir ki kesirli integro diferensiyel denklemlerde kararlılık analizinin yapılması temel problemlerden biri olarak bilinir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Kesirli Diferansiyel Denklemler farklı araştırma alanlarında ve mühendislik uygulamalarında daha sık görülür. Birçok fiziksel sistem davranışının kesirli düzen teorisi kullanılarak doğru bir şekilde tanımlanabileceği bulunmuştur. Aslında, gerçek dünya süreçleri(işlemleri) genellikle kesirli düzen(dizi) sistemleridir. Kesirli analiz süreksizlik oluşumunun açıklanmasında yardımcı olur ve tekillik oluşumu zenginleştirici bir düşünce deneyidir. Kesirli türevlerin uzun bir matematiksel tarihi olmasına rağmen, uzun yıllar fizikte kullanılmamışlardır. Böyle bir popülerliğin olası bir açıklaması, kesirli türevlerin birden fazla eşdeğer olmayan tanımının olması olabilir. Diğer bir zorluk, kesirli türevlerin yerel olmayan karakterleri nedeniyle belirgin bir geometrik yoruma sahip olmamalarıdır. Ancak, son 10 yıl boyunca kesirli analiz, fizikçiler ve matematikçilerin daha fazla dikkatini çekmeye başlamaktadır. Özellikle disiplinler arası uygulamaların kesirli türevlerin yardımıyla zarif bir şekilde modellenebileceği bulunmuştur. Tamsayı sıralı modellerin kullanılmasının ana nedeni kesirli diferansiyel denklemler için çözüm yöntemlerinin olmamasıdır. Fraksiyonel düzenin diferansiyel denklemleri, akışkanlar mekaniği, viskoelastisite, biyoloji, fizik ve mühendislik vb. gibi çeşitli uygulamalarda sıklıkla görünmesi nedeniyle birçok araştırmanın odak noktası olmuştur. (Podlubny, 1998; Diethelm ve Ford, 2002; Kilbas ve ark., 2006). Kesirli diferansiyel denklem kullanmanın en önemli avantajı, yerel olmayan özellikleridir. Tamsayı sıralı diferansiyel operatörü yerel bir operatördür, ancak kesirli sıralı diferansiyel operatörü yerel değildir. Bu, bir sonraki sistem durumunun sadece mevcut durumuna değil, aynı zamanda tüm tarihsel durumlarına da bağlı olduğu anlamına gelir. Kesirli diferansiyel denklemlerin bu özel özellikleri, araştırmacıları bu alanda çalışma yapmak için çekmiştir. İçinde bulunduğumuz yüzyılın ortasına kadar önemli katkılar sağlayan matematikçilerin bir listesi P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), A.K. Grounwall (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), J.Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), G.H. Hardy ve J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Levy (1923), M. Riesz (1949) ve diğerleridir. Adi kesirli diferansiyel denklemler için temel varlık ve teklik teoremleri burada sunulmaktadır (Samko ve ark., 1993b; Podlubny, 1998). Kararlılık analizi kesirli diferansiyel denklemler çalışmasında merkezi bir görevdir ve birçok yazar tarafından kararlılık analizi yapılmıştır (Odibat, 2006; Qian ve ark., 2010; Odibat, 2010; Li ve Zhang, 2011).

Hem sistem teorisi hem de kesirli analizin bilgisini zenginleştiren Mittag-Leffler kararlılığı ve kesirli Lyapunov direkt metodu tartışılmıştır. (Li ve ark., 2009). Mittag-Leffler kararlılığı, üssel kararlılık ve güç yasası kararlılığının bir genellemesi olup, yakınsama hızı üssel kararlılıktan daha doğrudur (Li ve ark., 2009). Daha sonra, s-düzlemini F-düzlemine dönüştürerek lineer kesirli bir diferansiyel denklemin kararlılığı elde edilir (Ran-Chao ve ark., 2013). Son olarak, herhangi bir sayıda kesirli elemanı olan bir sistemin kararlılığını incelemek için bir yöntem açıklanmıştır (Radwan ve ark., 2009). Burada, (Hu ve Blanchini, 2010) bileşik ikinci dereceden fonksiyonların, tartışılan lineer diferansiyel kapanımların sağlam kararlılık analizi ve sağlam dengeleme için gerekli ve yeterli koşulları sağladığı gösterilmiştir (Miller ve Ross, 1993; Li ve ark., 2009). Son zamanlarda, değişken iterasyon yöntemi (varyasyonel yineleme metodu) (He, 1999b) gibi kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için çeşitli yaklaşık sayısal yöntemler verilmiştir. Homotopi pertürbasyon metodu (He, 1999a), Adomian'ın ayrışma metodu (Jafari ve Daftardar-Gejji, 2006), homotopi analiz metodu (Hashim ve ark., 2009) ve kollokasyon gibi yöntemler verilmiştir (Khader, 2011).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde materyal olarak çalışmada kullanacağımız literatürde mevcut kararlılık tanımları, kararlılık teoremleri ve fraksiyonel türevde kullanılan fonksiyon tanımları verilecektir.

3.1 Kararlılık ve Fraksiyonel Türev İle İlgili Temel Kavramlar

Fizik ve mühendislikte en çok tanımlanan matematiksel modeller ya da denklemler çoğunlukla $x(t_0) = x_0$ başlangıç şartı ile birlikte,

$$x' = F(t, x) \tag{3.1}$$

formunda otonom olmayan adi diferansiyel denklemlerdir. Burada $D \subset R^n$, $x = 0$ orijini içeren bir bölge ve $F: [0, +\infty]xD \to R^n$ fonksiyonu $[0, +\infty]xD$ üzerinde x'e göre Lipchitz şartını sağlayan ve t'ye göre parçalı sürekli bir fonksiyondur. Genellikle tüm ölçüm türlerinden kaynaklanan ilk verilerde hata olabileceğinden, ilk verilerdeki küçük farklılıkların (3.1) in çözümlerinin istenen davranışını ne kadar etkilediğini bilmek önemlidir. Yani başlangıç şartında yeterince küçük bir değişiklik yapılması durumunda, ilgili çözümde önemli bir sapma gözlenirse, o zaman verilen başlangıç verilerinden elde edilen çözüm kabul edilemezdir, çünkü istenen davranışı yaklaşık olarak tanımlamamaktadır. Çözümlerin kayda değer bir şekilde istenen davranıştan sapmasına izin vermeyecek koşulların araştırılması problemi, bunun için önemlidir. (3.1) in çözümlerinin davranışlarıyla ilgili bu tür problemlerle ilgilenen matematik alanı genellikle kararlılık teorisi olarak tercih edilir. $t_0 \geq 0$ sağında var olan (t_0, x_0) başlangıç noktasından geçen (3.1) in bir çözümü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ olsun. Şimdi (3.1) in $x(t, t_0, x_0)$ çözümü için çeşitli kararlılık tanımları verilir.

Teorem 3.1 $F(t, x)$ fonksiyonu $B = \{(t, x): t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, \|x - x_0\| \leq b\}$ kümesinde sürekli ve $(t, x_1), (t, x_2) \in B$ için,

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$$

Lipschitz şartını sağlasın. O zaman $x_n \to x_0$ demek $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için

$$x(t, t_0, x_n) \to x(t, t_0, x_0)$$

düzgün demektir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.1 (3.1) diferansiyel denklem sisteminin herhangi bir çözümü $x(t)$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (3.1) in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t, t_0, \bar{x}_0)$ çözümü için $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1) 'in $x(t)$ çözümüne kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.2 Eğer (3.1) in $\mathrm{x(t)}$ çözümü kararlı ve bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ var $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| \to 0$ oluyorsa (3.1) ‘in $\mathrm{x(t)}$ çözümüne asimptotik kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.3 (3.1) diferansiyel denklem sisteminin herhangi bir çözümü $\mathrm{x(t)}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (3.1) in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t, t_0, \bar{x}_0)$ çözümü ve $t_1 > t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta$ iken her $t > t_1$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1) in $\mathrm{x(t)}$ çözümüne düzgün kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.4 Eğer (3.1) in $\mathrm{x(t)}$, çözümü düzgün kararlı ve bir $\delta_0 > 0$ vardır ve her bir $\eta > 0$ için bir $T = T(\eta) > 0$ vardır ki $t_1 \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta_0$ iken her $t \geq t_1 + T$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \eta$ oluyorsa (3.1) in $\mathrm{x(t)}$ çözümüne düzgün asimptotik kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.5 (3.1) diferansiyel denklem sisteminin herhangi bir çözümü $\mathrm{x(t)}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (3.1) in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t, t_0, \bar{x}_0)$ çözümü ve $t_1 > t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1) ‘in $\mathrm{x(t)}$ çözümüne kuvvetli kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

$D \subset \mathcal{R}^n$ olmak üzere $f : D \to \mathcal{R}^n$ lokal lipchitz şartını sağlayan bir dönüşüm olsun.

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.2}$$

otonom diferansiyel denklem sistemi verilsin.

Tanım 3.6 (3.2) diferansiyel denklem sisteminin denge noktası $x = 0$ olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\|x(0)\| < \delta$ iken $\forall\, t \geq 0$ için $\|x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.2) nin $\mathrm{x} = 0$ denge noktası kararlıdır denir. Aksi takdirde kararsızdır. Eğer (3.2) nin $x = 0$ denge noktası kararlı ve $\|x(0)\| < \delta$ iken $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ oluyorsa (3.2) nin $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır denir (Khalil ve Grizzle, 2002).

Orijini içeren $D \subset R^n$ bölgesinde tanımlanan $V: D \to R$ sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. V nin (3.2) eğrisi boyunca türevi

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\, \dot{X}_\iota = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\, f_i(X)$$

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] . \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x}\, f(x)$$

olur.

Teorem 3.2 $f(t,x)$ fonksiyonu t ye göre parçalı sürekli, $D \subset R^n$ bölgesinde her x ve her $\mathrm{t} > \mathrm{t}_0$ için x e göre lokal Lipchitz sağlasın. W kümesi x_0 içeren D nin kompact bir alt kümesi olsun. Eğer $x' = f(t,x)$, $x(t_0)$ başlangıç değer probleminin her çözümü tamamen W da kalırsa o zaman her $\mathrm{t} > \mathrm{t}_0$ için başlangıç değer probleminin tanımlanan bir tek çözümü vardır (Khalil ve Grizzle, 2002).

Teorem 3.3 (3.2) diferansiyel denklem sisteminin $x = 0$ denge noktasını içeren bir $D \subset R^n$ bölgesi verilsin. $V: D \to R$ sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $V(0) = 0, D - \{0\}$ da $V(x) > 0\ ve\ D'de\ \dot{V}(x) \leq 0$ ise o zaman (3.2)'nin $x = 0$ çözümü kararlıdır. Ayrıca eğer $D - \{0\}$ da $\dot{V}(x) < 0$ ise (3.2) nin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır (Khalil ve Grizzle, 2002).

Tanım 3.7 $\gamma(0) = 0$ ve $\gamma: [0, a) \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonu sıkı artan ise γ ya K-sınıfına aittir denir. Eğer $a = \infty$ ve $r \to \infty$ iken $a(r) \to \infty$ ise γ ya K_∞ sınıfına aittir denir (Khalil ve Grizzle, 2002).

Lemma 3.1 Orijini içeren $D \subset R^n$ bölgesi üzerinde tanımlı, sürekli pozitif tanımlı $V: D \to R$ fonksiyonu verilsin. Bir $r > 0$ için $B_r \subset D$ olsun. O zaman her $x \in B_r$ için

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

olacak şekilde $[0, r]$ de tanımlanan α_1 ve α_2 K-fonksiyonlar sınıfı vardır. Eğer $D = R^n$ ise α_1 ve α_2 fonksiyonları $[0, \infty]$ tanımlanmış olacak ve yukarıdaki eşitsizlik $x \in R^n$ için sağlanacak. Ayrıca $V(x)$ radyal sınırsız ise o zaman α_1 ve α_2 fonksiyonları K_∞ sınıfından seçilebilir (Khalil ve Grizzle, 2002).

Teorem 3.4 (3.2) sisteminin $x = 0$ denge noktasını içeren bir bölge $D \subset R^n$ olsun. $V: [0, +\infty]xD \to R$ sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\forall\, t \geq 0$ ve $\forall\, x \in D$ için $W_1(x)$ ve $W_2(x)$ sürekli pozitif tanımlı fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki

$$W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x) \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq 0 \tag{3.4}$$

şartları sağlanıyor ise o zaman (3.2) sisteminin $x = 0$ denge noktası düzgün kararlıdır (Khalil ve Grizzle, 2002).

Tanım 3.8 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} dt \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir. Gamma fonksiyonun en temel yorumu basit bir şekilde tüm reel sayılar için faktöriyelin genelleştirilmesidir. Gamma fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir (Kimeu, 2009).

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.6}$$

$$\Gamma(x) = (x-1)!\,, \qquad x \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

Tanım 3.9 $Re\ v > 0$ olmak üzeri

$$\Gamma^*(v,t) = \frac{1}{\Gamma(v)t^v} \int_0^t e^{-x} x^{v-1} dx \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona tam olmayan gamma fonksiyonu denir (Kimeu, 2009).

Tanım 3.10 $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir. Ayrıca Beta fonksiyonu Gamma fonksiyonu yardımıyla $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{3.10}$$

olarak da tanımlanır (Kimeu, 2009).

Tanım 3.11 $\alpha > 0, z \in \mathbb{C}$ için tek parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{3.11}$$

$\alpha, \beta > 0, z \in \mathbb{C}$ için iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{3.12}$$

$\alpha, \beta > 0, A \in R^{n\times n}$ için bir A matrisinin Mittag-Leffler işlevi şu şekilde tanımlanır.

$$E_{\alpha,\beta}(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{3.13}$$

Mittag-Leffler fonksiyonlarının Laplace dönüşümü aşağıda ki gibidir.

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda}, \quad \left(\mathcal{R}(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}\right) \tag{3.14}$$

burada $t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$’dir (Podlubny, 1998).

Tanım 3.12 Riemann-Liouville kesirli integral operatörü $\alpha > 0$ ve $f \in L^1(R^+)$ fonksiyonu tarafından aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \tag{3.15}$$

Burada $\Gamma(.)$, Euler gama fonksiyonudur (Podlubny, 1998).

Tanım 3.13 Riemann-Liouville kesirli türevi sırsıyla $\alpha > 0,\ n-1 < \alpha < n,\ n \in N$ olmak üzere

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanır. Burada D^n adi diferansiyel operatör ve $f(t)$ fonksiyonu $(n-1)$. mertebeye kadar sürekli türeve sahiptir. (Podlubny, 1998).

Tanım 3.14 Kaputo kesirli türevi sırasıyla $\alpha > 0,\ n-1 < \alpha < n,\ n \in N$ olmak üzere

$${}^{C}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^n(s) ds \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlanır. $f(t)$ fonksiyonu $n-1$ sırasına kadar kesinlikle sürekli türev içerir (Podlubny, 1998).

Tanım 3.15 α kesirli mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi, $x(t) \in C^m[0,t]$ ve $m-1 \leq \alpha < m \in Z^+$ olmak üzere,

$${}_{GL}D_{0,t}^{\alpha} x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k(0) t^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} x^{(m)}(\tau) d\tau \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlanır.

Grünwald-Letnikov kesirli türevinin orijinal tanımı bir sınır ile verilir, yani

$${}_{GL}D_{0,t}^{\alpha} x(t) = \lim_{h \to 0, nh=t} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} x(t-kh)$$

şeklindedir. Bu sınır ifadesi kullanım için uygun değildir, bu nedenle Tanım 3.15 sıklıkla benimsenir (Li ve Deng, 2007).

3.2 Fraksiyonel Türev Üzerine Uyarılar

Bu bölümde Grunwald Letnikov türevi, Riemann Rieouville türevi ve Caputo türevinin özellikleri tartışılmıştır. $x(t)$ fonksiyonunun yeterince düzgün olduğunu varsayarsak, Grünwald-Letnikov türevi Rieman Liouville türevine eşdeğerdir. Burada bir grup pürüzsüz fonksiyonla çalışmalarımızı kısıtladığımız için, Riemann -Liouville türevini Caputo türeviyle karşılaştırmamız gerekiyor.

Teorem 3.2 Eğer $x(t) \in C^m[0,\infty)$ ve $m-1<\alpha<m \in Z^+$, o zaman

a) ${}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}\left(x(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}x^{(k)}(0)\right)$

b) ${}_{C}D_{0,t}^{\alpha}D_{0,t}^{-\alpha}x(t) = {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}D_{0,t}^{-\alpha}x(t) = x(t) \quad m=1$ için geçerlidir.

c) $D_{0,t}^{-\alpha}\,{}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}x^{(k)}(0)$

d) $D_{0,t}^{-\alpha}\,{}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = x(t) - \sum_{k=1}^{m}\left[{}_{RL}D_{0,t}^{\alpha-k}x(t)\right]_{t=0}\frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$

e) ${}_{RL}D_{0,t}^{m}D_{0,t}^{-m}x(t) = x(t), D_{0,t}^{-m}\,{}_{RL}D_{0,t}^{m}x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}x^{(k)}(0)$

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

4.1 İntegral ve İntegro Denklemler Hakkında Ön Bilgiler

Tanım 4.1 Bilinmeyen bir u(x) fonksiyonunun integral altında ortaya çıktığı diferansiyel denklemlere integral denklemler denir. İntegral denklemlerin genel formu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt$$

ile temsil edilir. Burada $K(x,t)$ iki değişkenli fonksiyonu integralin çekirdeği olarak adlandırılır. İntegral sınırları sabit ise denklem Fredholm integral denklemi olarak adlandırılır. Fredholm integral denkleminin genel hali

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt$$

olur. Fredholm integral denkleminde bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu yalnız integral simgesi altında yer alıyorsa bu denkleme birinci tip Fredholm integral denklemi denir. Genel formu

$$f(x) = \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt$$

ile temsil edilir. Diğer taraftan eğer bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu Fredholm integral denkleminde integral simgesinin hem içinde hemde dışında yer alıyorsa bu denklem ikinci tip Fredholm denklemi olarak adlandırılır. Bu denklemin genel formu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt$$

ile temsil edilir. Eğer Fredholm integral denklemindeki $f(x)$ fonksiyonu tamamen sıfır ise homojen integral denklemi olarak adlandırılır. Homojen Fredholm integral denklemi

$$u(x) = \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt$$

olarak ifade edilir.

İntegral denklemlerde integral sınırlarından en az biri değişken olan denklemler Volterra denklemler olarak adlandırılır (Bocher, 1974). Volterra integral denkleminin genel hali

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

olur.

Bir Volterra integral denkleminde bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu yalnız integral simgesi altında yer alıyorsa bu denkleme birinci tip Volterra integral denklem denir. Bu denklemin genel formu

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

ile temsil edilir. Diğer taraftan eğer bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu Volterra integral denkleminde integral simgesinin hem içinde hem de dışında yer alıyorsa bu denklem ikinci tip Volterra integral denklem olarak adlandırılır. Bu denklemin genel formu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

ile temsil edilir. Burada $K(x,t)$ çekirdek, $f(x)$ reel değerli bir fonksiyon ve λ bir parametredir.

Eğer Volterra integral denklemindeki $f(x)$ fonksiyonu tamamen sıfır ise homojen Volterra integral denklemi olarak adlandırılır. Homojen Volterra integral denklemi

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

olarak ifade edilir.

Tanım 4.2 Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonun integrasyon işareti altında göründüğü ve ayrıca bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonun türevlerini içeren diferansiyel denklemlere integro diferansiyel denklemler denir. Genel formu

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt$$

olarak ifade edilir.

Tanım 4.3 Volterra integral denklemi için eğer $g(x)$ ve $h(x)$ integral sınırlarından biri veya her ikisi sonsuz ise yada $K(x,t)$ çekirdeği integrasyon aralığından bir veya daha fazla noktada sınırsız oluyorsa (yani sonsuz değerini alıyorsa), Volterra integral denklemi singülerdir denir.

4.2 Kesirli İntegro Diferansiyel Denklemler İçin Lyapunov Kararlılık Çözümleri

R**,** reel sayılar kümesini R^n n-boyutlu Öklid uzayını göstermek üzere $J=[t_0,t_0+a]$, $f\in C[J\times R^n,R^n]$ ve $K\in C[J\times J\times R^n,R^n]$ olmak üzere $0<\alpha\leq 1$ için

$$x^{(\alpha)}(t)=f\big(t,x(t)\big)+\int_{t_0}^{t}K\big(t,s,x(s)\big)ds, \tag{4.1}$$

kesirli integro diferansiyel denklemini

$$x^{(\alpha-1)}(t_0)=x_0 \tag{4.2}$$

başlangıç şartı ile birlikte göz önüne alalım. Bu bölümde kesirli integro diferansiyel denklemlerin çözümlerinin Lyapunov anlamda kararlılığı ve asimptotik kararlılığı için yeter koşullar verilir. Tüm $t\in J$ için $f(t,0)\equiv 0$ ve $K(t,s,0)\equiv 0$ olduğu kabul edilir. Böylece $x=0$ (4.1) denkleminin bir çözümü olacaktır.

Tanım 4.4 $\alpha>0$ için $[a,b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonunun kesirli integrali

$$I_a^{b^{\alpha}}f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-s)^{\alpha-1}f(s)ds, \tag{4.3}$$

olarak tanımlanır (Momani ve Hadid, 2004).

Lemma 4.1 $0<t_0<t\leq t_0+a$ olmak üzere (4.1)-(4.2) başlangıç değer problemi

$$\begin{aligned} x(t)=&\frac{x_0}{\Gamma(\alpha)}(t-t_0)^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f\big(s,x(s)\big)ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\int_{s}^{t}K\big(\sigma,s,x(s)\big)d\sigma ds, \end{aligned} \tag{4.4}$$

lineer olmayan integral denklemine denktir. Başka bir ifadeyle (4.4) integralin her çözümü aynı zamanda orijinal (4.1)-(4.2) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür ve bunun tersi de doğrudur (Momani ve Hadid, 2004).

Lemma 4.2 (Gronwall Lemması) $u(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları $t_0\leq t\leq t_0+a$ aralığında negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun. Aynı zamanda $f(t)$ fonksiyonu $t_0\leq t\leq t_0+a$ aralığında pozitif, sürekli ve monoton azalmayan olsun ve

$$u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\, ds; \tag{4.5}$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ için

$$u(t) \leq f(t) exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds\right) \tag{4.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $w(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\, ds$ olsun. $w(t_0) = f(t)$ olduğu açıktır. O zaman (4.5)'den $u(t) \leq w(t)$ olur. $u(t)$ ve $v(t)$ negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olduğundan dolayı $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ için

$$w'(t) = u(t)v(t) \leq w(t)v(t)$$

olur. Bu eşitsizliği $exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)$ ile çarparak

$$\frac{d}{dt}\left[w(t) exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)\right] \leq 0$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği t_0 dan t ye integrallersek

$$w(t) exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right) - w(t_0) \leq 0$$

olur. $u(t) \leq w(t)$ ve $w(t_0) = f(t)$ olduğundan $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ için

$$u(t) \leq f(t) exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds\right)$$

sahip olunur.

Teorem 4.1 f fonksiyonunu

$$\left|f\big(t, x(t)\big)\right| \leq \gamma(t)|x|, \tag{4.7}$$

eşitsizliğini sağlasın ve $s \in [t_0, t]$ için K

$$\left|\int_{s}^{t} K\big(\sigma, s, x(s)\big) d\sigma\right| \leq \delta(t)|x|, \tag{4.8}$$

sağlasın. Burada

$$sup \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\, [\gamma(t) + \delta(t)] ds < \infty. \tag{4.9}$$

olacak şekilde $\gamma(t)$ ve $\delta(t)$ sürekli negatif olmayan fonksiyonlardır. O zaman (4.1)'in her $x(t)$ çözümü

$$|x(t)| \leq \frac{|x_0|}{\Gamma(\alpha)}(t-t_0)^{\alpha-1} exp\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\,[\gamma(s)+\delta(s)]ds\right\} < \infty \qquad (4.10)$$

sağlar (Momani ve Hadid, 2004).

İspat: $0 \leq t_0 < s < t \leq t_0 + a$ için (4.4) ten

$$\Gamma(\alpha)|x(t)| \leq |x_0|(t-t_0)^{\alpha-1} + \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\,\gamma(s)|x(s)|ds$$
$$+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\delta(s)\,|x(s)|ds \qquad (4.11)$$

yazılır. Böylece

$$\Gamma(\alpha)|x(t)| \leq |x_0|(t-t_0)^{\alpha-1}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\,[\gamma(s)+\delta(s)]\Gamma(\alpha)|x(s)|ds \qquad (4.12)$$

elde edilir. Gronwell Lemmasından

$$\Gamma(\alpha)|x(t)| \leq |x_0|(t-t_0)^{\alpha-1}\, exp\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\,[\gamma(s)+\delta(s)]ds\right\} \qquad (4.13)$$

olur. Böylece

$$|x(t)| \leq \frac{|x_0|(t-t_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} exp\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\,[\gamma(s)+\delta(s)]ds\right\} \qquad (4.14)$$

yazılabilir. Buda ispatı tamamlar.

Sonuç 2.2 Eğer

$$\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\,[\gamma(s)+\delta(s)]ds = O((t-t_0)^{\alpha-1}) \qquad (4.15)$$

ise o zaman

$$|x(t)| \leq C_0((t-s)^{\alpha-1}) \qquad (4.16)$$

olur. Burada C_0 pozitif bir sabittir ve bu ise (4.1) -(4.2) başlangıç değer probleminin çözümünün asimptotik kararlı olması demektir.

Sonuç 2.3 (4.16) dan kolayca gösterilebilir ki $\forall 0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için

$$x(t) \in L^2(t_0, \infty) \qquad (4.17)$$

Teorem 4.2 Kabul edelim ki

(i) t'nin bir fonksiyonu f, $L^2(t_0, \infty)$ dadır,

(ii) $K(t,s,x) = O\big((t-s)^{\alpha-3/2}\big)$

şartları sağlanır. O zaman $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için (4.1)-(4.2) nin sıfır çözümü asimptotik olarak kararlıdır (Momani ve Hadid, 2004).

İspat: $0 \leq t_0 < s < t \leq t_0 + a$ için (4.4)'ten

$$\Gamma(\alpha)x(t) = x_0(t-t_0)^{\alpha-1} + \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1} f\big(s,x(s)\big)ds + \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\int_{s}^{t} K\left(\sigma,s,x(s)\right)d\sigma ds \tag{4.18}$$

olur. Buradan

$$\Gamma(\alpha)|x(t)| \leq |x_0|(t-t_0)^{\alpha-1} + \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}|f\big(s,x(s)\big)|ds + \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\int_{s}^{t}|K\left(\sigma,s,x(s)\right)|d\sigma ds. \tag{4.19}$$

alırız. Schwartz eşitsizliğini kullanarak

$$\Gamma(\alpha)|x(t)| \leq |x_0|(t-t_0)^{\alpha-1} + \left(\int_{t_0}^{t}(t-s)^{2\alpha-2}ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_0}^{t}|f\big(s,x(s)\big)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{t_0}^{t}(t-s)^{2\alpha-2}ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_0}^{t}\left(\int_{s}^{t}|K\left(\sigma,s,x(s)\right)|d\sigma\right)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.20}$$

elde ederiz. Şimdi teoremin (i) ve (ii) şartlarından C_1 ve C_2 pozitif sabitler olmak üzere

$$\Gamma(\alpha)|x(t)| \leq |x_0|(t-t_0)^{\alpha-1} + C_1\left((t-t_0)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right) + C_2\left((t-t_0)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right) \tag{4.21}$$

elde edilir.

(4.21) ve $0 \leq t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + a$ için

$$|x(t)| \leq (t-t_0)^{\alpha-\frac{1}{2}}\left[\frac{|x_0|}{\Gamma(\alpha)}(t-t_0)^{-\frac{1}{2}} + C_1 + C_2\right] \tag{4.22}$$

Sahip oluruz. Bu da (4.1)-(4.2) başlangıç değer probleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olduğu anlamına gelir.

4.3 Kesirli Nötr ve İntegro Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Kararlılığı

Bu bölümde kesirli diferansiyel denklemlerin kararlılık sonuçları üzerinde durulmuş ve kullanılan bazı analitik metotlar verilmiştir. Lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem sistemlerinin kararlılığı özdeğerler analiz edilerek tartışılmıştır. Sonuçlar bazı örneklerle desteklenmiştir.

Lemma 4.3 $0 < \alpha < 2$, β keyfi bir kompleks sayı ve $\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < min\{\pi, \pi\alpha\}$ olacak şekilde keyfi bir reel sayı olsun. O zaman keyfi bir $p \geq 1$ tamsayısı için $|\arg(z)| \leq \mu \; ve \; |z| \to \infty$ olduğu zaman;

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-1-P}) \tag{4.23}$$

$\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi \; ve \; |z| \to \infty$ olduğu zaman;

$$E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-1-P}) \tag{4.24}$$

açılımlara sahip olunur.

Özellikle eğer $\alpha = \beta$ ise, $|\arg(z)| \leq \mu \; ve \; |z| \to \infty$ olduğu zaman;

$$E_{\alpha,\alpha}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\alpha)/\alpha} \exp\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right) - \sum_{k=2}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} + O(|z|^{-1-P}), \tag{4.25}$$

$\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi \; ve \; |z| \to \infty$ olduğu zaman;

$$E_{\alpha,\alpha}(z) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} + O(|z|^{-1-P}), \tag{4.26}$$

sahip olunur (Podlubny, 1998).

Lemma 4.4 A bir matris ve $\|.\|$ herhangi bir matris normu olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i.) Herhangi bir $0 < \alpha < 1$ için

$$\|E_\alpha(At^\alpha)\| \leq M_1 \|e^{At}\|, \tag{4.27}$$

$$\|E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)\| \leq M_2 \|e^{At}\|, \tag{4.28}$$

olacak şekilde $M_1, M_2 \geq 1$ sonlu reel sabitleri vardır

ii.) $\alpha \geq 1$ ise o zaman $\beta = 1,2,\alpha$ için

$$\|E_{\alpha,\beta}(At^\alpha)\| \leq \|e^{At^\alpha}\| \tag{4.29}$$

olur.

Ayrıca, eğer A bir köşegen kararlı matris ise, o zaman $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \|E_{\alpha,\beta}(At^\alpha)\| &\leq Ne^{-\lambda t}, \quad 0 < \alpha < 1; \\ \|E_{\alpha,\beta}(At^\alpha)\| &\leq e^{-\lambda t}, \quad 1 < \alpha < 2, \end{aligned} \tag{4.30}$$

olacak şekilde bir $N > 0$ sabiti vardır. Burada λ köşegen matrisin en büyük özdeğeridir. Özellikle $\frac{\alpha\pi}{2} < \arg(z) < 2\pi - \frac{\alpha\pi}{2}$ bölgesinde $E_\alpha(z)$ sınırlıdır. Özellikle $\alpha = 1$ olduğunda yani $|\arg(z)| > \frac{\pi}{2}$ olduğunda e^z sınırlıdır. Mittag-Leffer fonksiyonunun asimptotik davranışı üstel biçimde değildir ancak o $t^{-\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ biçimindedir. Özellikle $E_\alpha(-t^\alpha)$ Mittag-Leffler fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon, uzun zamanlar için onun çok yavaş düşüşü nedeniyle, negatif kuvvet yasasını interpole eder. Bu yüzden

$$E_\alpha(-t^\alpha) \approx \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \qquad t \to \infty. \tag{4.31}$$

Aynı zamanda, Mittag-Leffler fonksiyonunun davranışının $\alpha < 1$ için gevşeme olduğu, $\alpha = 1$ için üstel olduğu, $1 < \alpha < 2$ için sönümlü bir salınım olduğu ve $\alpha = 2$ için salınım olduğu gözlenebilir. Bozulma $t \to 0^+$ iken çok hızlı ve $t \to \infty$ iken çok yavaştır (Ran-Chao ve ark., 2013).

Tanım 4.5 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\alpha \in (0,1)$ ve $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olmak üzere Caputo türevini içeren

$$^{C}D^\alpha x(t) = Ax(t) \tag{4.32}$$

kesirli diferansiyel sistemini $x(0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^T$ başlangıç değeri ile birlikte göz önüne alalım.

i. Herhangi bir x_0 ve $t \geq 0$ için $\|x(t)\| \leq \epsilon$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ varsa (4.32) sistemi kararlıdır denir.

ii. $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$ ise (4.32) sistemi asimptotik kararlıdır denir (Qian ve ark., 2010).

Teorem 4.3 (4.32) otonom sisteminin asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$|\arg(spec(A))| > \frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.33}$$

olmasıdır. Bu durumda konum bileşenleri $t^{-\alpha}$ gibi 0'a doğru azalır (Qian ve ark., 2010).

İspat: Başlangıç şartını göz önünde bulundurarak Laplace dönüşümünü (4.32) kesirli denklem sistemine uygularsak

$$X(s)s^\alpha - x_0 = AX(s)$$

elde ederiz.

Hemen (4.32) sisteminin çözümü

$$x(t) = x_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha}).$$

ile verilir. İlk olarak, A matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu varsayalım, yani

$$\Lambda = T^{-1}AT = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

olacak şekilde tersinir bir T matrisi vardır.

O zaman

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha}) &= TE_{\alpha,\alpha}(\Lambda t^{\alpha})T^{-1} \\ &= Tdiag\big[E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}), E_{\alpha,\alpha}(\lambda_2 t^{\alpha}), \dots, E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n t^{\alpha})\big]T^{-1}. \end{aligned}$$

olur. $t \to +\infty$ iken (4.33) ve (4.26) uygulayarak $1 \leq i \leq n$ için

$$E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^{\alpha}) = -\sum_{k=2}^{p} \frac{(\lambda_i t^{\alpha})^{-k}}{\Gamma(\alpha - k\alpha)} + 0(|\lambda_i t^{\alpha}|^{-1-p}) \to 0$$

sahip olunur. Böylece,

$$\|E_{\alpha,\alpha}(\Lambda t^{\alpha})\| = \|diag\big[E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}), E_{\alpha,\alpha}(\lambda_2 t^{\alpha}), \dots, E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n t^{\alpha})\big]\| \to 0$$

olur. Dolayısıyla sonuç geçerlidir.

Sonra, A matrisinin Jordan kanonik forma benzer olduğunu, yani

$$J = T^{-1}AT = diag(J_1, J_2, \dots, J_r),$$

olacak şekilde tersinir bir T matrisinin olduğunu varsayalım. Burada J_i, $1 \leq i \leq r$ aşağıdaki forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$

sahiptir ve $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ olur. Açıkçası,

$$E_{\alpha,\alpha}(\mathrm{A}t^{\alpha}) = T\, diag\big[E_{\alpha,\alpha}(J_1 t^{\alpha}), E_{\alpha,\alpha}(J_2 t^{\alpha}), \dots, E_{\alpha,\alpha}(J_r t^{\alpha})\big]T^{-1},$$

burada $1 \leq i \leq r$ için

$$E_{\alpha,\alpha}(J_i t^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_i t^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} J_i^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \dots & C_k^{n_i-1} \lambda_i^{k-n_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} C_k^{n_i-1} \lambda_i^{k-n_i+1} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} \end{pmatrix}$$

($C_k^j, 1 \leq j \leq n_i - 1$ iki terimli katsayılardır).

$$\begin{pmatrix} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha) & \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial \lambda_i} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha) & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!}(\frac{\partial}{\partial \lambda_i})^{n_i-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha) \\ & E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial \lambda_i} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha) \\ & & & E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha) \end{pmatrix}$$

Bazı cebirsel hesaplamalar ve Lemma 4.3 ile eğer $t \to \infty$ ve $1 \leq i \leq r$ için $|\arg(\lambda_i(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$ sonra $0 \leq j \leq n_i - 1$ ve $1 \leq i \leq r$ için

$\left|E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha)\right| \to 0$ ve $\left|\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\right)^j E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha)\right| \to 0$

Nitekim bunlar aşağıdakilerden anlaşılabilir:

$$E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha) = -\sum_{k=2}^{p} \frac{(\lambda_i t^\alpha)^{-k}}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} + 0(|\lambda_i t^\alpha|^{-1-p})$$

Bu $t \to \infty$ iken $\left|E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha)\right| \to 0$ anlamına gelir ve

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\right)^j E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha) = \frac{1}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\right)^j \left\{-\sum_{k=2}^{p} \frac{(\lambda_i t^\alpha)^{-k}}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} + 0(|\lambda_i t^\alpha|^{-1-p})\right\}$$

$$= -\sum_{k=2}^{p} \frac{(-1)^j (k+j-1) \ldots (k+1) k \lambda_i^{-k-j} t^{-\alpha k}}{\mathrm{j}!\, \Gamma(\alpha - \alpha k)} + 0(|\lambda_i|^{-1-p-j} |t^\alpha|^{-1-p})$$

$$= -\sum_{k=2}^{p} \frac{(-1)^j (k+j-1)!\, \lambda_i^{-k-j} t^{-\alpha k}}{\mathrm{j}!\, (\mathrm{k}-1)!\, \Gamma(\alpha - \alpha k)} + 0\left(|\lambda_i|^{-1-p-j} |t^\alpha|^{-1-p}\right),$$

$t \to \infty$ olarak $\left|\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\right)^j E_{\alpha,\alpha}(\lambda_i t^\alpha)\right| \to 0$ ve $1 \leq j \leq n_i - 1$'e götürür.

Şimdi sıfır olmayan herhangi bir başlangıç değeri x_0 için

$$\|x(t)\| = \|x_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)\| \to 0$$

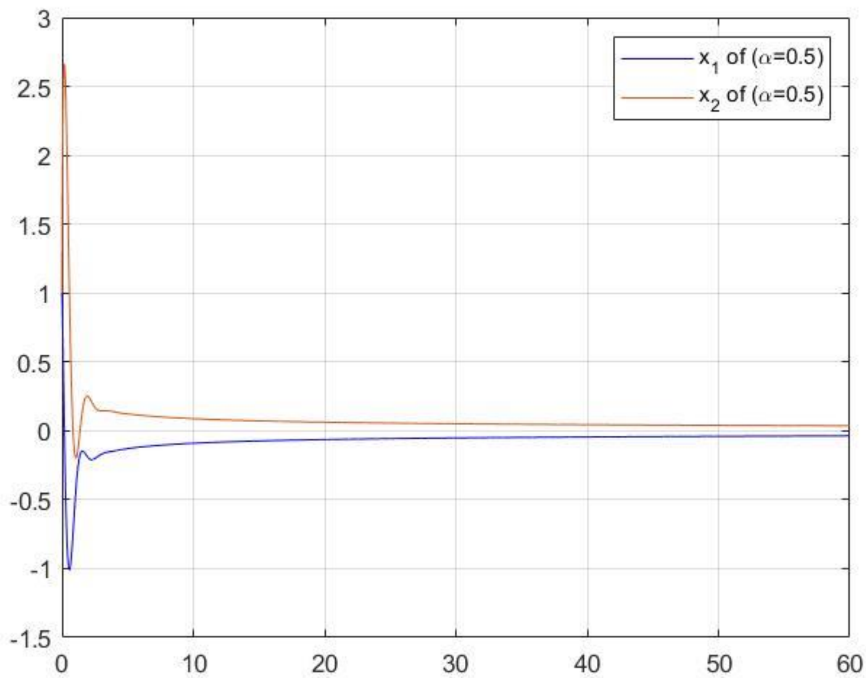
$t \to \infty$ olarak izler (Odibat, 2006; Qian ve ark., 2010). Ayrıca Zeng ve ark. (2005) Mittag-Leffler fonksiyonunu kullanarak ayrıntılı olarak kanıtlamıştır.

Örnek 4.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$^{C}D^{\alpha} x(t) = Ax(t), \qquad 0 < \alpha \leq 1, \tag{4.34}$$

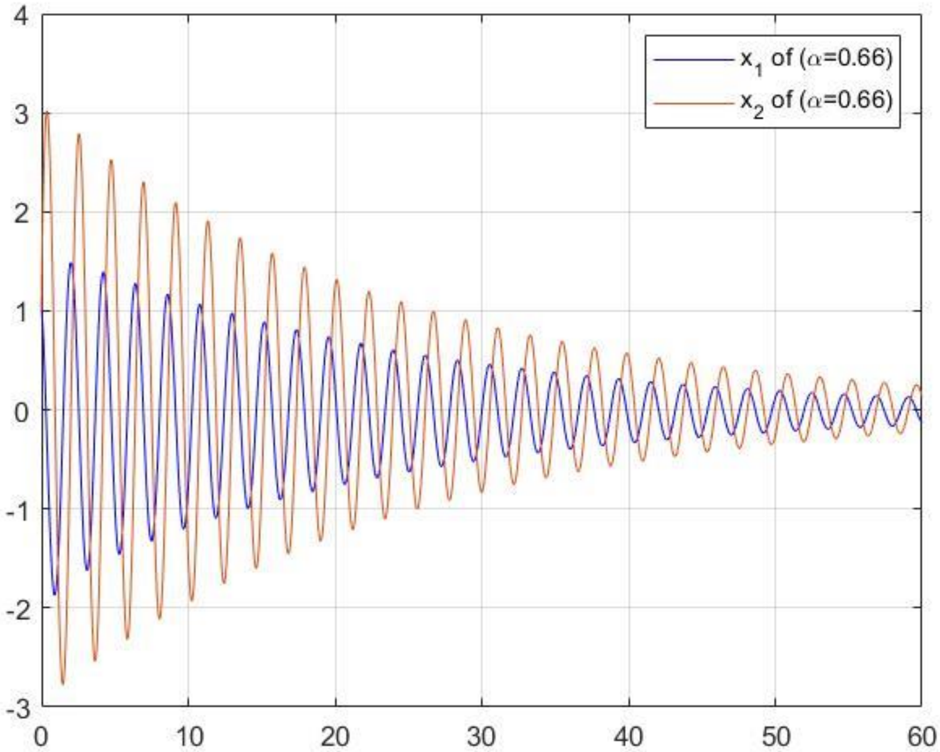
lineer sisteminin kararlılığı $x(0) = (1,1)^T$ başlangıç koşulu ile birlikte tartışılır. A'nın öz değerleri $\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$ ve karşılık gelen öz vektörler $u = (-0.5i, -0.866)^T, v = (0.5i, -0.866)^T$ olur. Standart $u = a + ib, v = a - ib$ biçimde yazılabilir, burada $a = (0, -0.866)^T, b = (-0.5,0)^T$'dir. Şimdi kesirli mertebenin farklı değerleri için çözümlerin asimptotik kararlılığını inceleyelim.

(4.34) kesirli mertebeden diferansiyel denklem siteminde önce $\alpha = \frac{1}{2}$ olsun. Özdeğerler $|\arg(\lambda_1)| = \frac{\pi}{3}$ ve $|\arg(\lambda_2)| = \frac{\pi}{3}$ olduğundan, tüm özdeğerler için $|\arg(spec(A))| > \frac{\pi}{4}$ eşitsizliği sağlanır. O halde verilen kesirli diferansiyel denklem sistemi Teorem 4.3 gereği $\alpha = \frac{1}{2}$ için asimptotik kararlıdır. Şekil 4.1 incelendiğinde $\alpha = \frac{1}{2}$ için t artarken çözümlerin sıfıra yaklaştığı görülür.



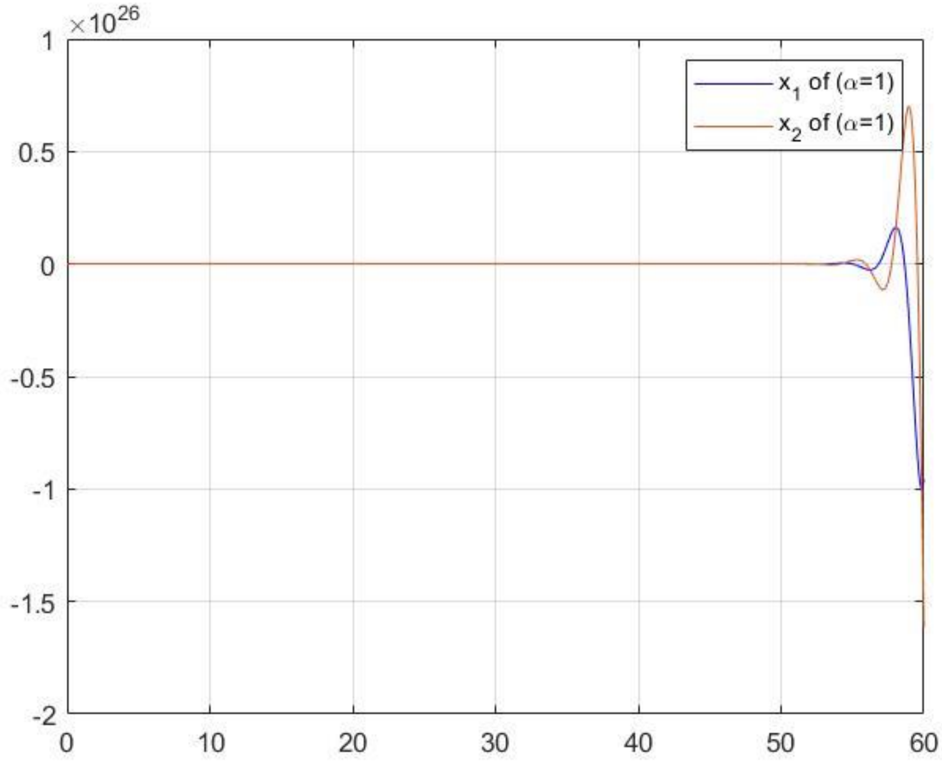
Şekil 4.1 $\boldsymbol{\alpha}$=0,5 için (4.34) denkleminin çözüm grafiği

(4.34) kesirli mertebeden diferansiyel denklem siteminde önce $\alpha = 0{,}66$ olsun. Özdeğerler $|\arg(\lambda_1)| = \frac{\pi}{3}$ ve $|\arg(\lambda_2)| = \frac{\pi}{3}$ olduğundan, tüm özdeğerler için $|\arg(spec(A))| > \frac{0{,}66\pi}{2}$ eşitsizliği sağlanır. O halde verilen kesirli diferansiyel denklem sistemi Teorem 4.3 gereği $\alpha = 0{,}66$ için asimptotik kararlıdır. Şekil 4.2 incelendiğinde $\alpha = 0{,}66$ için t artarken çözümlerin sıfıra yaklaştığı görülür.



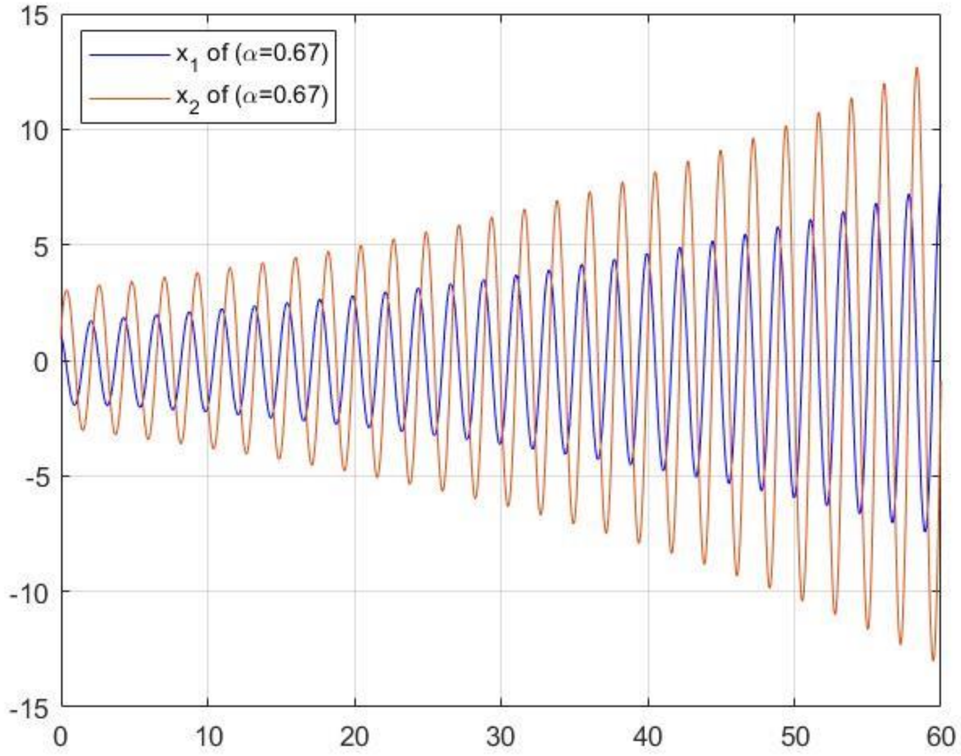
Şekil 4.2 $\boldsymbol{\alpha}$=0,66 için (4.34) denkleminin çözüm grafiği

(4.34) kesirli mertebeden diferansiyel denklem siteminde $\alpha = 1$ olduğunda, özdeğerlerin negatif reel kısma sahip olmadığı görülür. Yani $|\arg(spec(A))| > \frac{\pi}{2}$ sağlamaz. O halde verilen kesirli diferansiyel denklem sistemi α = 1 için Teorem 4.3 gereği asimptotik kararlı değildir. Şekil 4.3 incelendiğinde $\alpha = 1$ için t artarken çözümlerin sıfırdan uzaklaştığı görülür, buda çözümün asimptotik kararlı olmadığı anlamına gelir.

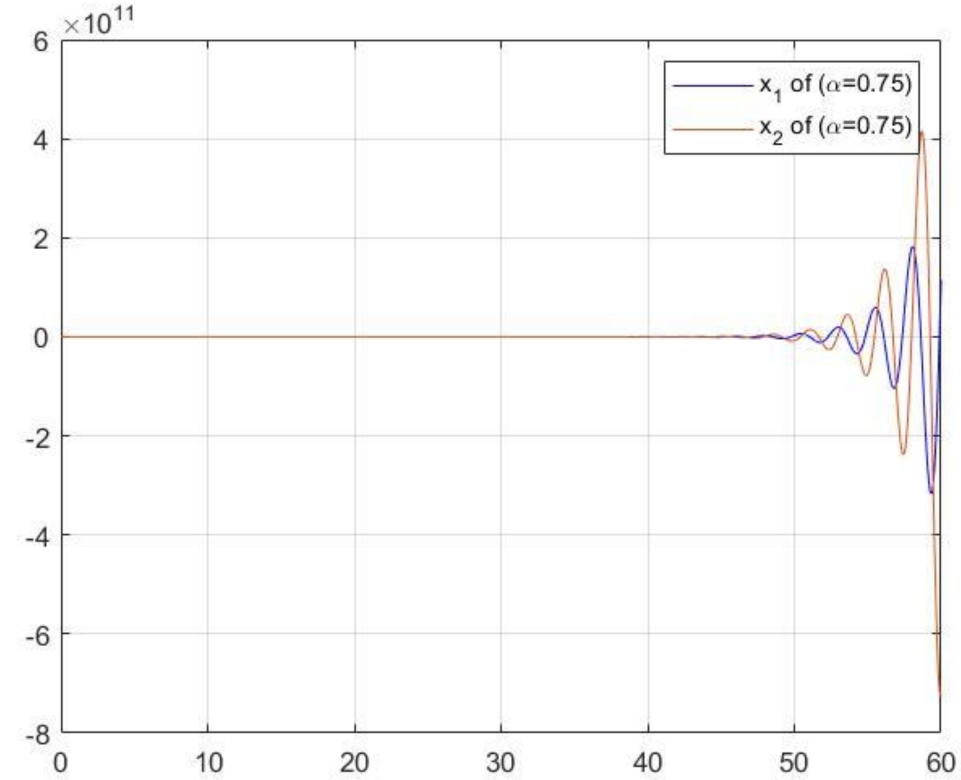


Şekil 4.3 $\boldsymbol{\alpha}$=1 için (4.34) denkleminin çözüm grafiği

(4.34) kesirli mertebeden diferansiyel denklem sisteminde $\alpha = 0{,}67$ ve $\alpha = 0{,}75$ alındığında, özdeğerlerin negatif reel kısma sahip olmadığı görülür. Yani $|\arg(spec(A))| > \alpha\frac{\pi}{2}$ sağlamaz. O halde verilen kesirli merteben diferansiyel denklem sistemi $\alpha = 0{,}67$ ve $\alpha = 0{,}75$ için Teorem 4.3 gereği çözümler asimptotik kararlı değildir. Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 incelendiğinde $\alpha = 0{,}67$ ve $\alpha = 0{,}75$ için t artarken çözümlerin sıfırdan uzaklaştığı görülür, buda çözümlerin asimptotik kararlı olmadığı anlamına gelir.



Şekil 4.4 $\boldsymbol{\alpha}$=0.67 için (4.34) denkleminin çözüm grafiği



Şekil 4.5 $\boldsymbol{\alpha}$=0,75 için (4.34) denkleminin çözüm grafiği

Sonuç: Matlabda çizilen yukarıdaki grafiklerden de görüldüğü gibi $0 < \alpha < \frac{2}{3}$ için çözümler kararlı $\frac{2}{3} < \alpha \leq 1$ için çözümler kararsızdır.

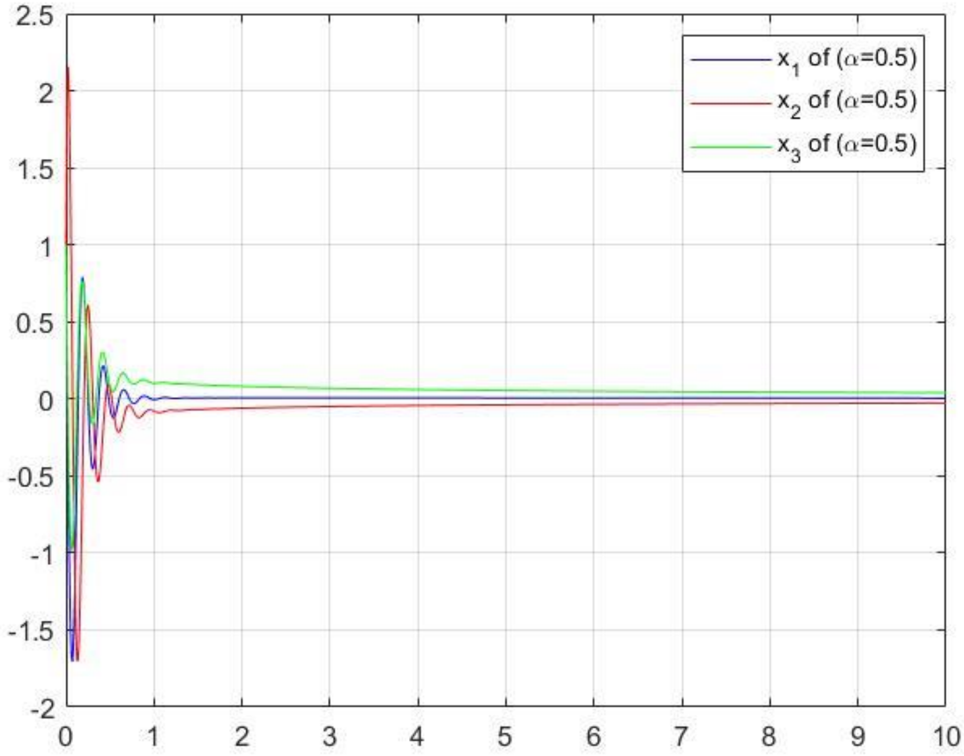
Örnek4.2 $A = \begin{pmatrix} 8.30 & -3.70 & -8.10 \\ 7.55 & 3.05 & -3.35 \\ 6.55 & -2.95 & -7.35 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = Ax(t), \qquad 0 < \alpha \leq 1, \tag{4.35}$$

$x(0) = (1,1,1)^T$ başlangıç şartı ile verilen fraksiyonel diferansiyel denklemin sıfır çözümünün kararlılığını inceleyelim.

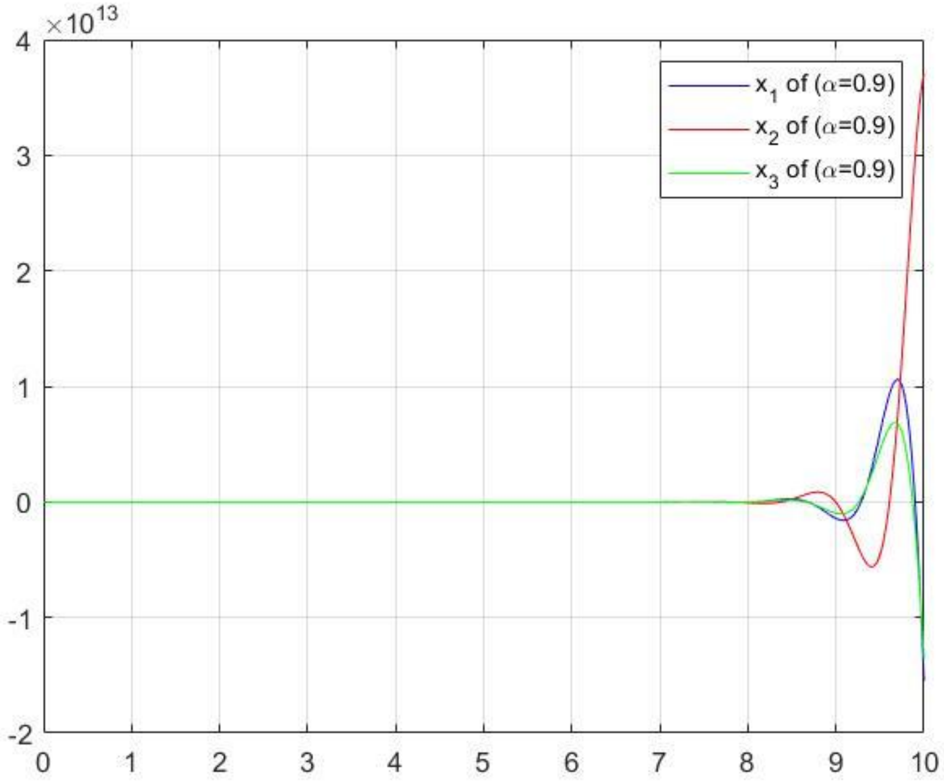
Bu matrisin $\lambda_1 = 3 - 4i,\ \lambda_2 = 3 + 4i$ ve $\lambda_3 = -2$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri sırasıyla $v_1 = (7 - i, -2 - 9i, 5), v_2 = (7 + i, -2 + 9i, 5)$ ve $v_3 = (2, -1, 3)$ ve $|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = 53.13^o$, $|\arg(\lambda_3)| = 2\pi$ olur.

(4.35) kesirli mertebeden diferansiyel denklem siteminde önce $\alpha = \frac{1}{2}$ olsun. Özdeğerler $|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = 53.13^o$ ve $|\arg(\lambda_3)| = 2\pi$ olduğundan, tüm özdeğerler için $|\arg(spec(A))| > \frac{\pi}{4}$ eşitsizliği sağlanır. O halde verilen kesirli diferansiyel denklem sistemi Teorem 4.3 gereği $\alpha = \frac{1}{2}$ için asimptotik kararlıdır. Şekil 4.6 incelendiğinde $\alpha = \frac{1}{2}$ için t artarken çözümlerin sıfıra yaklaştığı görülür.



Şekil 4.6 $\boldsymbol{\alpha}$=0,5 için (4.35) denkleminin çözüm grafiği

(4.35) kesirli mertebeden diferansiyel denklem siteminde önce $\alpha = 0{,}9$ olsun. Özdeğerler $|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = 53.13^o$ ve $|\arg(\lambda_3)| = 2\pi$ olduğundan, tüm özdeğerler için $|\arg(spec(A))| > \frac{0{,}9\pi}{2}$ eşitsizliği sağlanmaz. O halde verilen kesirli diferansiyel denklem sistemi Teorem 4.3 gereği $\alpha = 0{,}9$ için asimptotik kararlı değildir. Şekil 4.7 incelendiğinde $\alpha = 0{,}9$ için t artarken çözümlerin sıfırdan uzaklaştığı görülür. Buda çözümün asimptotik kararlı olmadığı anlamına gelir.



Şekil 4.7 $\boldsymbol{\alpha}$=0.9 için (4.35) denkleminin çözüm grafiği

$f(t,x) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(t,0) = 0$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ve $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olmak üzere

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f\big(t, x(t)\big), \qquad \alpha \in (0,1) \tag{4.36}$$

formundaki lineer olmayan sistemi $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu ile birlikte düşünelim.

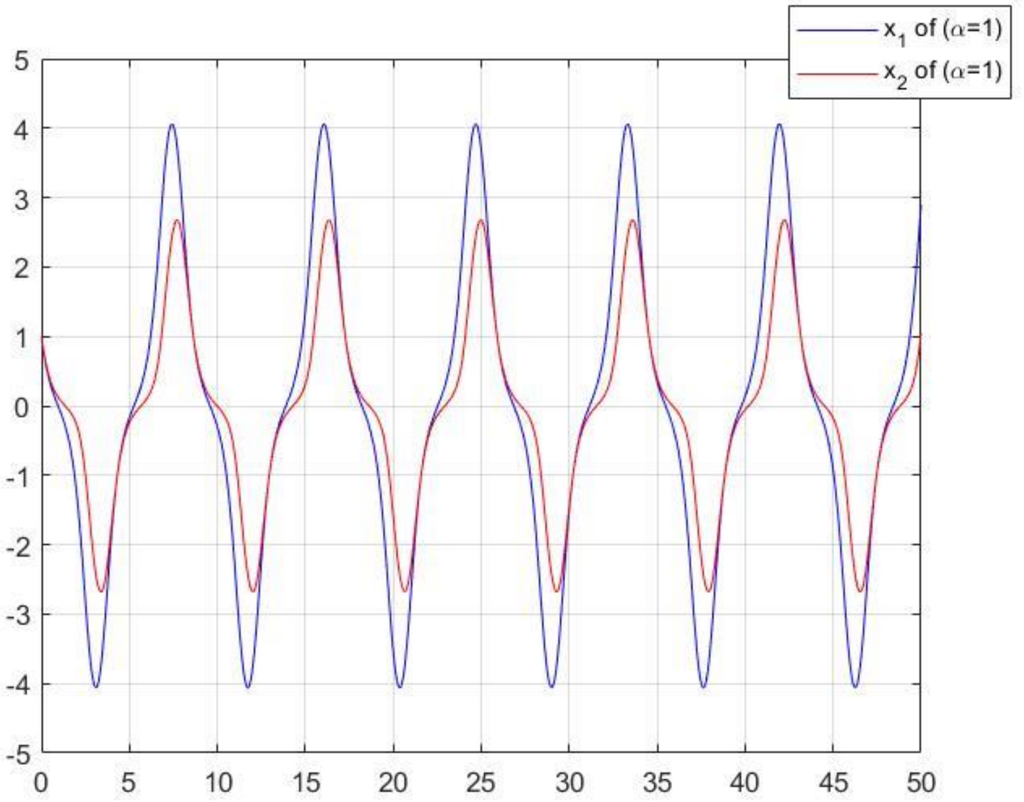
Teorem 4.4 Kabul edelim ki $\|f(t,x(t))\| \leq M\|x\|$ ve A'nın bütün özdeğerleri (4.33)'ü sağlar. O zaman, (4.36)'nın sıfır çözümü asimptotik kararlıdır (Qian ve ark., 2010).

Örnek 4.3 $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $f(t,x) = (0, -\sin(x_1(t))^T$ olmak üzere

$$^{C}D^{\alpha}x(t) + Ax(t) = f(t,x), \qquad 0 < \alpha \leq 1, \tag{4.37}$$

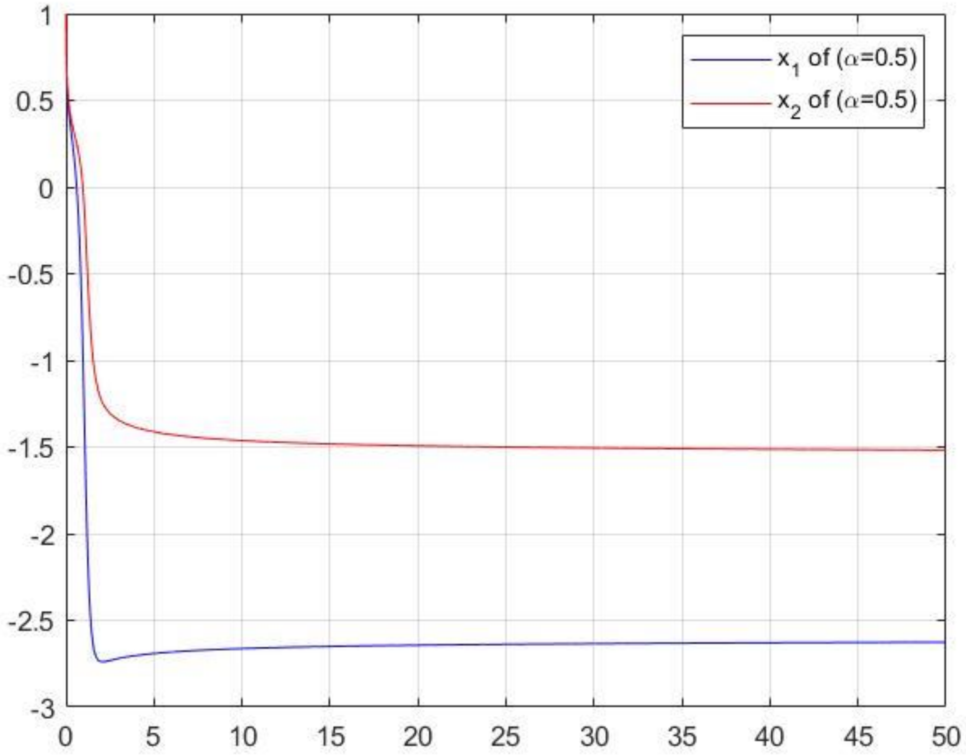
lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem sisteminin kararlılığını tartışalım. A matrisinin öz değerleri $\pm i$ olur.

(4.37) kesirli mertebeden diferansiyel denklem sisteminde $\alpha = 1$ olduğunda denklem birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem sistemi olacaktır. Öncelikle homojen sistemi düşünelim, çünkü A'nın öz değerleri negatif reel kısma sahip olmadığından, asimptotik kararlı değildir. Şekil 4.8 incelendiğinde çözümlerin sıfırdan uzaklaştığı görülür bu ise çözümün asimptotik kararlı olmadığı anlamına gelir.



Şekil 4.8 $\boldsymbol{\alpha}$=1 için (4.37) denkleminin çözüm grafiği

Şimdi de (4.37) kesirli mertebeden diferansiyel denklem sisteminde $\alpha = \frac{1}{2}$ olsun. İlk önce homojen sistemi düşünelim, burada A'nın öz değerleri $\left|\arg\left(spec(A)\right)\right| = \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4}$ olur. Ayrıca lineer olmayan $f(t,x) = (0, -\sin(x_1))^T$ terimi, $\|f(t,x)\| \leq M\|x\|$ eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla verilen lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem sistemi Teorem 4.4 gereği asimptotik kararlıdır.



Şekil 4.9 $\boldsymbol{\alpha}$=0,5 için (4.37) denkleminin çözüm grafiği

$f(t,x), g(t,x) \in \mathbb{C}^1(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(t,0) = 0$, $g(0,x_0) \neq x_{0,}$ $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ve $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olmak üzere $0 < \alpha < 1$ için

$$ {}^{C}D^{\alpha}[x(t) - g(t,x(t))] = Ax(t) + f\big(t,x(t)\big), \tag{4.38}$$

lineer olmayan sistemini $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu ile birlikte göz önüne alalım. Kabul edelim ki (4.38) sistemi aşağıdaki koşulları sağlar.

A1. $g(t,x,y)$ fonksiyonu Lipschitz süreklidir, yani $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|g(t,x,y)\| \leq C_1\|x\| + C_2\|y\|$$

olacak şekilde C_1 ve C_2 pozitif sabitleri vardır.

Lemma 4.5 (Gronwall Eşitsizliği)

Kabul edelim ki $g(t)$ ve $\phi(t)$ fonksiyonları $[t_0, t_1]$ aralığında süreklidir, $g(t) \geq 0$ ve $\lambda \geq 0, r \geq 0$ iki sabittir. Eğer

$$\phi(t) \leq \lambda + \int_{t_0}^{t} [g(\tau)\phi(\tau) + r]\, d\tau \tag{4.39}$$

ise o zaman $t_0 \leq t \leq t_1$ için

$$\phi(t) \leq \big(\lambda + r(t_1 - t_0)\big)exp\left(\int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau\right) \tag{4.40}$$

olur (Ye ve ark., 2007).

Lemma 4.6 A'nın tüm özdeğerleri

$$|\arg(spec(A))| > \frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.41}$$

eşitsizliğini sağlarsa o zaman

$$\int_{t_0}^{t} \left\|\theta^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A\theta^{\alpha})\right\| d\theta \leq K \tag{4.42}$$

olacak şekilde $K > 0$ sabiti vardır (Qian ve ark., 2010).

Teorem 4.5 Kabul edelim ki $f\big(t, x(t)\big)$ ve $g(t, x(t))$ fonksiyonları $M_2 \neq 1$ için

$$\begin{aligned} \|f(t, x(t))\| &\leq M_1\|x\|, \\ \|g(t, x(t))\| &\leq M_2\|x\|, \end{aligned} \tag{4.43}$$

koşullarını sağlar A1 varsayımı ve A 'nın tüm özdeğerleri (4.41) eşitsizliğini sağlar. O zaman, (4.38) 'in sıfır çözümü asimptotik kararlıdır (Priyadharsini, 2016).

İspat: Verilen (4.38) denklemi

$${}^{C}D^{\alpha}[x(t)] = Ax(t) + f\big(t, x(t)\big) + {}^{C}D^{\alpha}\big[g\big(t, x(t)\big)\big]$$

şeklinde yazılabilir. Sistemin çözümü,

$$\begin{aligned} x(t) &= E_{\alpha}(A(t)^{\alpha})x_0 \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha})\{f\big(s, x(s)\big) + {}^{C}D^{\alpha} g\big(s, x(s)\big)\}ds, \\ &= E_{\alpha}(At^{\alpha})x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha}) f\big(s, x(s)\big)ds \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha})\, {}^{C}D^{\alpha} g\big(s, x(s)\big)ds, \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. I_2'yi değerlendirelim,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha})\, {}^{C}D^{\alpha} g\big(s, x(s)\big)ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{-\alpha} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha}) g'\big(\tau, x(\tau)\big) d\tau ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t g'\big(\tau, x(\tau)\big) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_{\tau}^{t} (t-s)^{\alpha k + \alpha - 1}(s-\tau)^{-\alpha} ds\, d\tau, \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t E_\alpha(A(t-\tau)^\alpha) g'(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Parçalara göre integralleme kullanarak,

$$I_2 = g(t,(x,t)) - E_\alpha(At^\alpha) g(0,x_0) + A \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^\alpha) g(\tau, x(\tau)) d\tau$$

Elde edilir. Böylece

$$x(t) = E_\alpha(At^\alpha)\{x_0 - g(0,x_0)\} + g(t,(x,t))$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha \{f(s,x(s)) + Ag(s,x(s))\} d\tau.$$

sahip olunur Buradan,

$$\|x(t)\| \leq \left\| E_\alpha A t^\alpha (x_0 - g(0,x_0)) \right\| + \|g(t,x(t))\|$$

$$+ \int_0^t \left\| (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha \right\| \left\| f(s,x(s)) + Ag(s,x(s)) \right\| d\tau,$$

$$\leq \left\| E_\alpha(At^\alpha)(x_0 - g(0,x_0)) \right\| + M_2 \|x\|$$

$$+\{M_1 + \|A\| M_2\} \int_0^t \left\| (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha \right\| \|x\| d\tau,$$

$$\leq \left\| E_\alpha(At^\alpha) \frac{(x_0 - g(0,x_0))}{1-M_2} \right\|$$

$$+ \left\{ \frac{M_1 + \|A\| M_2}{1-M_2} \right\} \int_0^t \left\| (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha \right\| \|x\| \, d\tau$$

yazılabilir Lemma 4.3'ü kullanarak, $C_1 = \frac{(x_0 - g(0,x_0))}{1-M_2}$, $C_2 = \frac{M_1 + \|A\| M_2}{1-M_2}$ olmak üzere

$$\|x(t)\| \leq \|E_\alpha(At^\alpha) C_1\| exp \left\{ C_2 \int_0^t \left\| (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha \right\| d\tau \right\}$$

yazılır. Ayrıca $t \to \infty$ iken $\|E_\alpha(At^\alpha) x_0\| \to 0$ olur (Ran-Chao ve ark., 2013). Böylece $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ sahip olunur. Bu nedenle, verilen sistemin sıfır çözümü, asimptotik kararlıdır.

$g \in C[JxR^n, R^n]$, $J = [0,a]$, $g(t,x(t)) \leq 0$, $g(t,0) = 0$, olmak üzere

$$^C D^\alpha x(t) = Ax(t) + I^\alpha g(t,x(t)), \qquad 0 < \alpha \leq 1 \tag{4.44}$$

kesirli integro-diferansiyel denklemini $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu ile birlikte göz önüne alalım

Lemma 4.7 Eğer A'nın tüm özdeğerleri

$$|\arg(spec(A))| > \frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.45}$$

Eşitsizliğini sağlarsa o zaman

$$\int_0^t \left\|\theta^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}(A\theta^\alpha)\right\| d\theta \leq K \tag{4.46}$$

olacak şekilde bir K> 0 sabiti var (Qian ve ark., 2010).

Teorem 4.6 $g(t,x(t))$ fonksiyonu

$$\|g(t,x(t))\| \leq M_1\|x\|, \tag{4.47}$$

eşitsizliğini sağlasın ve A'nın bütün özdeğerleri (4.45) eşitsizliğini sağlar. O zaman (4.44) 'ün sıfır çözümü asimptotik kararlıdır (Priyadharsini, 2016).

İspat: Çözüm

$$x(t) = E_\alpha(At^\alpha)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)I^\alpha g(s,x(s))ds$$

$$= E_\alpha(At^\alpha)x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(\tau,x(\tau))d\tau ds$$

$$= I_1 + I_2.$$

olarak ifade edilir. I_2 yi değerlendirelim.

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \int_0^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)g(\tau,x(\tau))d\tau ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g(\tau,x(\tau) \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_\tau^t (t-s)^{\alpha k+\alpha-1}(s-\tau)^{\alpha-1}dsd\tau$$

$$= \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A(t-\tau)^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+2\alpha)}g(\tau,x(\tau))d\tau$$

$$= \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}(A(t-\tau)^\alpha)g(\tau,x(\tau))d\tau$$

Böylece

$$x(t) = E_\alpha(At^\alpha)x_0 + \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}(A(t-\tau)^\alpha)g\big(\tau,x(\tau)\big)d\tau.$$

olur. O zaman

$$\|x(t)\| \leq \|E_\alpha(At^\alpha)x_0\| + M\int_0^t \left\|(t-\tau)^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}(A(t-\tau)^\alpha))\right\|\|x\|d\tau$$

eşitsizliği yazılabilir. Lemma 4.5'i kullanarak,

$$\|x(t)\| \leq \|E_\alpha(At^\alpha)x_0\|exp\left\{M\int_0^t \left\|(t-\tau)^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}(A(t-\tau)^\alpha)\right\|d\tau\right\}$$

sahip olunur. Lemma 4.3'ü kullanarak,

$$\|x(t)\| \leq C\|E_\alpha(At^\alpha)x_0\|$$

elde edilir. Ayrıca ispat teorem 4.5’e benzer (Priyadharsini, 2016).

$J = [0, \alpha]$, $g \in C[J \times R^n, \times R^n, R^n]$, $K \in C[J \times J \times R^n, R^n]$, her t ∈ J için $g(t, 0) = 0$ ve $K(t, s, 0) = 0$ olmak üzere $0 < \alpha \leq 1$için

$$^C D^\alpha x(t) = Ax(t) + g\left(t, x(t), \int_0^t K\big(t, s, x(s)\big)ds\right) \tag{4.48}$$

kesirli integro diferansiyel denklemini $x\,(0) = x_0$ başlangıç koşuluyla göz önüne alalım.

Teorem 4.7 $K(t, s, x(s))$ fonksiyonu

$$\big\|K\big(t, s, x(s)\big)\big\| \leq M_1\|x\|, \qquad s \in [0, t] \tag{4.49}$$

eşitsizliğini sağlasın ve A'nın bütün özdeğerleri

$$|\arg spec(A)| > \frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.50}$$

eşitsizliğini sağlar. O zaman (4.48) 'in sıfır çözümü asimptotik kararlıdır (Priyadharsini, 2016).

İspat: (4.48) denklemi ile (4.36) denklemi karşılaştırıldığında, lineer olmayan terim

$$f\big(t, x(t)\big) = g\left(t, x(t), \int_0^t K\big(t, s, x(s)\big)ds\right)$$

olarak verilmiştir. O zaman kararlılık için koşul

$$\big\|f\big(t, x(t)\big)\big\| = \left\|g\left(t, x(t), \int_0^t K\big(t, s, x(s)\big)ds\right)\right\|$$

$$\leq C_1\|x\| + C_2\left\|\int_0^t K\big(t, s, x(s)\big)ds\right\|.$$

ile verilir. (4.49) şartını kullanarak

$$\left\|f\left(t, x(t), \int_0^t K\big(t, s, x(s)\big)ds\right)\right\|$$

$$\leq C_1\|x\| + C_2 a M_1\|x\|,$$

$$\leq M\|x\|$$

elde ederiz.

Burada lineer olmayan terim, teorem 4.5'in istenen koşulunu sağlar. Ayrıca ispat, teorem 4.5'e benzer.

Sonuç1. $g(t,x) \in \mathbb{C}(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $g(t,x) \leq 0, g(t,0) = 0$ ve $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ve $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olmak üzere lineer olmayan

$$ {}^{C}D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + \int_0^t g\big(\tau, x(\tau)\big)dt, \qquad \alpha \in (0,1) \tag{4.51}$$

kesirli denklem sistemini $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu ile göz önüne alalım. Kabul edelim ki

$$\|g(t,x(t))\| \leq M\|x\| \tag{4.52}$$

eşitsizliği sağlanır ve A'nın tüm özdeğerleri (4.45)'i sağlar. O zaman, (4.51) 'in sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

$f(t,0) = 0$, $x = (x_1, \dots, x_2)^T$ ve $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olmak üzere lineer olmayan

$$ {}^{C}D^{\alpha}x(t) - AI^{\alpha}x(t) = f\big(t, x(t)\big), \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{4.53}$$

sistemini $x(0) = x_0$ bşlangıç koşuluyla göz önüne alalım.

Teorem 4.8 Kabul edelim ki $f\big(t, x(t)\big)$ fonksiyonu

$$\|f(t,x(t))\| \leq M_1\|x\|, \tag{4.54}$$

eşitsizliğini sağlar ve A'nın tüm özdeğerleri (4.50)'yi sağlar. O zaman, (4.38) 'in sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat: Verilen (4.53) denklemi

$$ {}^{C}D^{\alpha}x(t) = AI^{\alpha}x(t) + f\big(t, x(t)\big)$$

olarak yazılabilir. Her iki tarafta Laplace dönüşümü yaparak,

$$X(s) = \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha} - A}x_0 + L\big\{(t)^{2\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}(At^{2\alpha}) * f(t,x(t)\big\}$$

elde ederiz. Ters Laplace dönüşümü ile sistemin temsili çözümü

$$x(t) = E_{2\alpha}(At^{2\alpha})x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}(A(t-s)^{2\alpha})f(s,x(s))ds$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\|x(t)\| = \|E_{2\alpha}(At)^{2\alpha})x_0\| + \int_0^t \big\|(t-s)^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}(A(t-s)^{2\alpha})\big\|\big\|f\big(s,x(s)\big)\big\|ds$$

sahip olunur. (4.54) koşulunu kullanarak

$$\|x(t)\| \leq \|E_{2\alpha}(At^{2\alpha})x_0\| + M\int_0^t \big\|(t-s)^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}(A(t-s)^{2\alpha})\big\|\big\|f\big(s,x(s)\big)\big\|ds$$

elde edilir. Gronwalls eşitsizliğini kullanarak,

$$\|x(t)\| = \|E_{2\alpha}(At^{2\alpha})x_0\| exp\left\{M\int_0^t (s)^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}(As^{2\alpha})\right\}ds$$

yazılır. Lemma 4.5'i kullanarak,

$$exp\left\{M\int_0^t (s)^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}(As^{2\alpha})\right\}ds$$

sınırlıdır. Aynı zamanda $t \to \infty$ iken $\left\|E_{2\alpha,(At^{2\alpha})}x_0\right\| \to 0$ olur (Ran-Chao ve ark., 2013). Böylece $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ sahip olunur.

Şimdi kesirli mertebeden kararlı olan ve tamsayı mertebeden kararsız olan Lineer ve lineer olmayan bir sistemin bir örneği verilir. Buradan, kesirli mertebeden bir sistemin doğada meydana gelen kendine özgü özelliklere sahip olduğu görülür. Birçok fiziksel sistem, kesirli sistemler kullanılarak doğru bir şekilde tanımlanabilir. Kesirli mertebeden sistemleri çözmek için herhangi bir yöntemin olmamasından dolayı, kesirli mertebe sistem bir tamsayı mertebe sisteme dönüştürülür ve çözülür. Yukarıda söz edilen teorik bilgiler aşağıda verilen örneklerle daha anlaşılır bir duruma getirilir. Bu problemler, kesirli Euler yönteminin bir tahmin olarak kullanıldığı sayısal yöntem kullanılarak çözülür ve sonlu değeri elde etmek için düzeltme yapmak için değiştirilmiş trapezoidal kural kullanılır. Daha fazla detay için (Momani ve Odibat, 2007; Odibat ve Momani, 2008) bakılır. Kesirli mertebeden asimptotik kararlı bir sistem tamsayı mertebeden kararlı değildir.

Örnek 4.4 Kesirli mertebeden $0 < \alpha < 2$ için

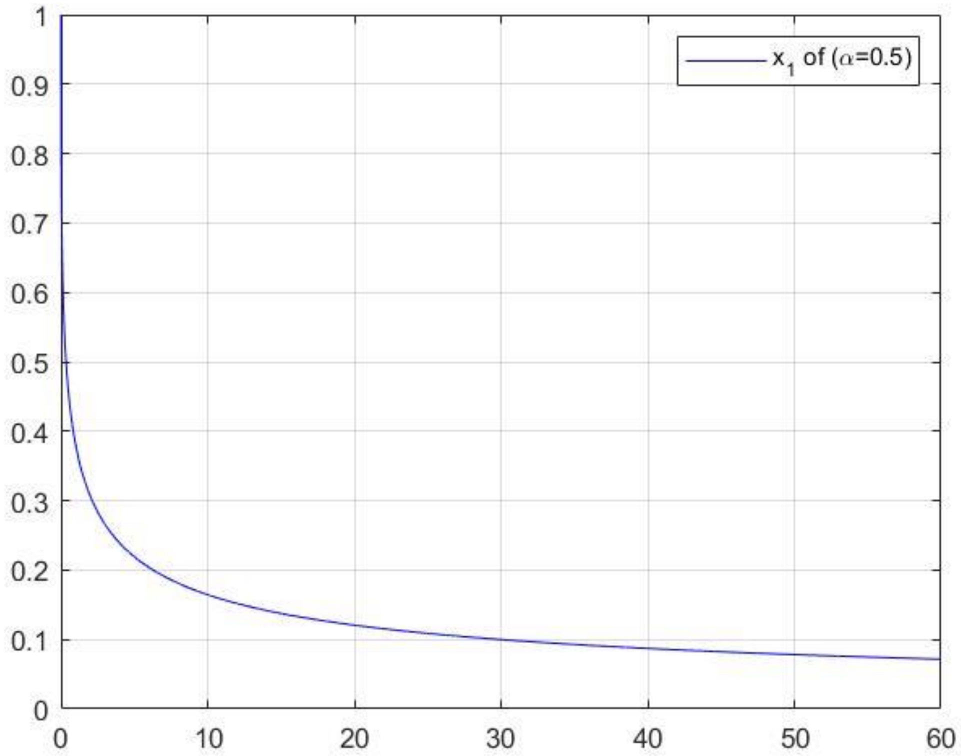
$${}^{C}D^{\alpha}x(t) = -x(t) - x(t)^3$$

duffing denklemini ele alalım.

$\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden duffing denklemi

$$\begin{gathered} {}^{C}D^{\frac{1}{2}}x(t) =- x(t) - x(t)^3 \\ x(0) = 1 \end{gathered} \tag{4.55}$$

olarak verilir. (4.55) denkleminin homojen hali ${}^{C}D^{\frac{1}{2}}x(t) =- x(t)$'dir. $|\arg(-1)| > \frac{\pi}{4}$ olduğu görülür. Burada $f(t,x) = -x^3$ ve $f(t,0) = 0$. Teorem 4.3 gereği (4.55) denklemi asimptotik kararlıdır.



Şekil 4.10 $\boldsymbol{\alpha}$=0,5 için (4.55) denkleminin çözüm grafiği

$\alpha = 3/2$ olduğunda; lineer olmayan ikinci mertebeden duffing denklemi

$$
\begin{gathered}
{}^{C}D^{\frac{3}{2}}x(t) =- x(t) - x(t)^3, \\
x(0) = 0, \;\; x'(0) = 1
\end{gathered}
\tag{4.56}
$$

olur.

Verilen denklem, yerine koyma kullanılarak kesirli diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebilir.

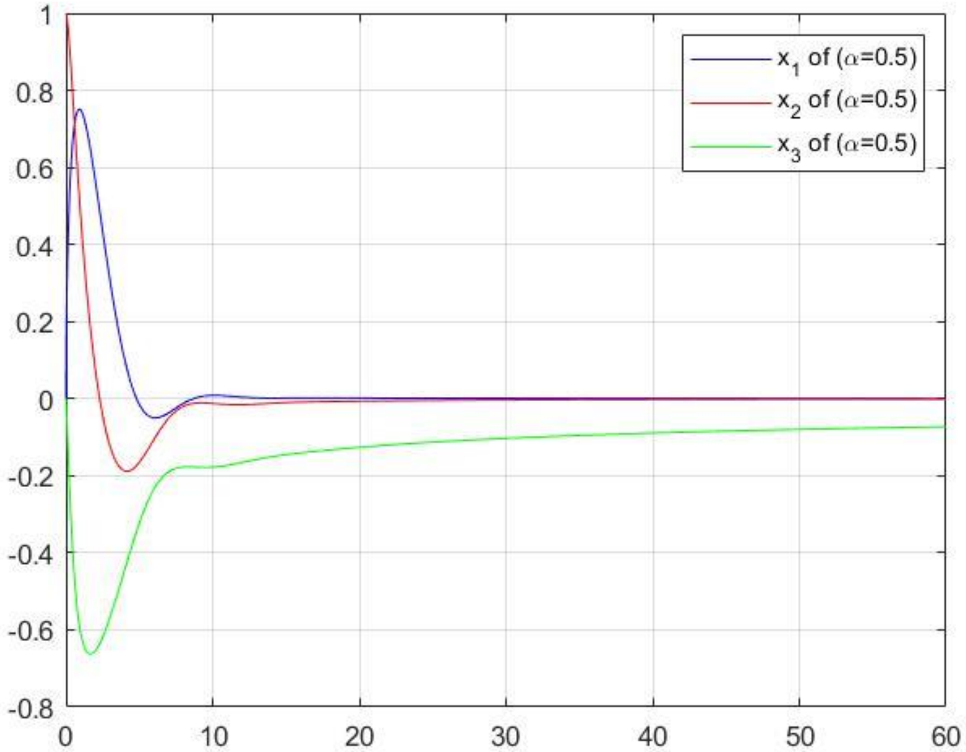
$$
\begin{gathered}
{}^{C}D^{\frac{1}{2}}x_1(t) = x_2(t) \\
{}^{C}D^{\frac{1}{2}}x_2(t) = x_3(t) \\
{}^{C}D^{\frac{1}{2}}x_3(t) =- x_1(t) - x_1^3(t)
\end{gathered}
\tag{4.57}
$$

$x_1(0) = 0,\; x_2(0) = 1,\; x_3(0) = 0$ başlangıç koşulu ile Burada $x_1(t) = x(t)$ dir. Bu standart biçimde yazılabilir, ${}^{C}D^{\frac{1}{2}}x(t) = Ax(t) + f(t,x)$ ve $f(t,x) = (0,0,x_1^3(t))^T$ burada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A'nın özdeğerleri olan $-1, 0.5 \mp 0.8660i$, $|\arg(spec(A))| > \frac{\pi}{4}$’ü karşılar.

Burada lineer olmayan $f(t,x)$ terimi $f(t,0) = 0$'ı karşılar. Teorem 4.3’ün tüm koşulları karşılanır. Dolayısıyla verilen (4.56) denklemi asimptotik olarak kararlıdır.



Şekil 4.11 $\boldsymbol{\alpha}$=0,5 için (4.56) denkleminin çözüm grafiği

Örnek 4.5 lineer olmayan (4.58) sistemin kararlılığını $x_1(0) = 0.14, x_2(0) = 0.125$ başlangıç koşulu ile $\alpha = 0.9$ olduğunda tartışacağız.

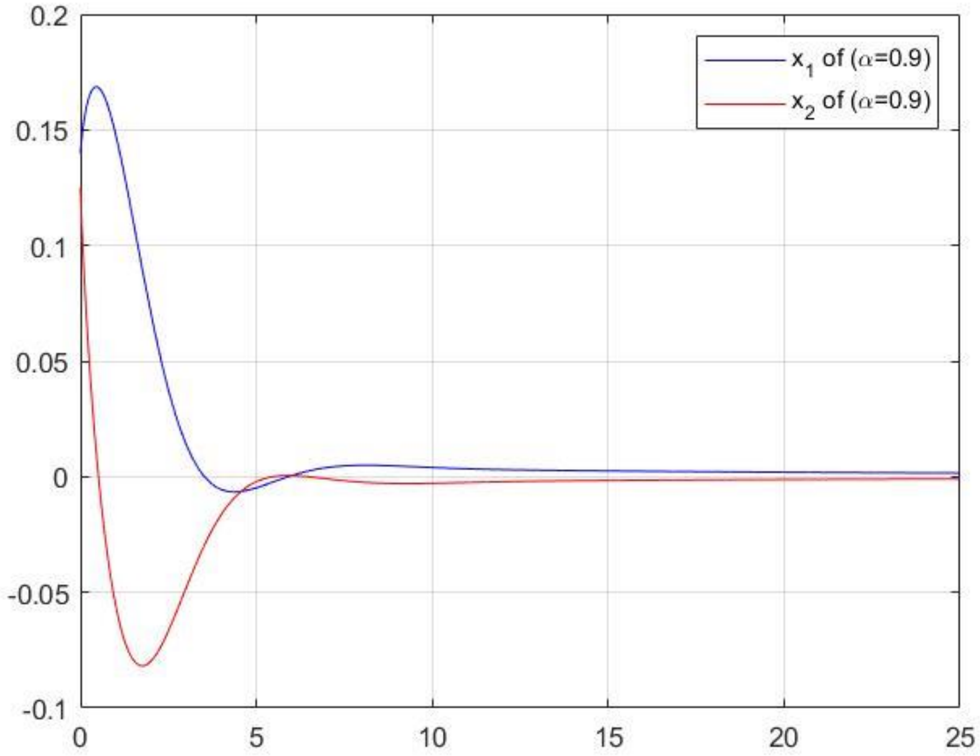
$$^{C}D^{\alpha} x_1(t) = x_2(t), \tag{4.58}$$

$$^{C}D^{\alpha} x_2(t) = -x_1(t) - \left(1 + x_2(t)\right)^2 x_2(t)$$

Bu standart biçimde yazılabilir, $^{C}D^{\alpha} x(t) = Ax(t) + f(t,x)$, burada $f(t,x) = (0, -(1 + x_2(t))^2 x_2(t))^T$, burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. A'nın öz değerleri $\pm i$'dir, bu da $|\arg(spec(A))| > \frac{0{,}9\pi}{2}$ karşılar. (4.58) denklemi Teorem 4.3'ün tüm koşullarını karşılamaktadır. Dolayısıyla asimptotik olarak kararlıdır.



Şekil 4.12 $\boldsymbol{\alpha}$=0,9 için (4.58) denkleminin çözüm grafiği

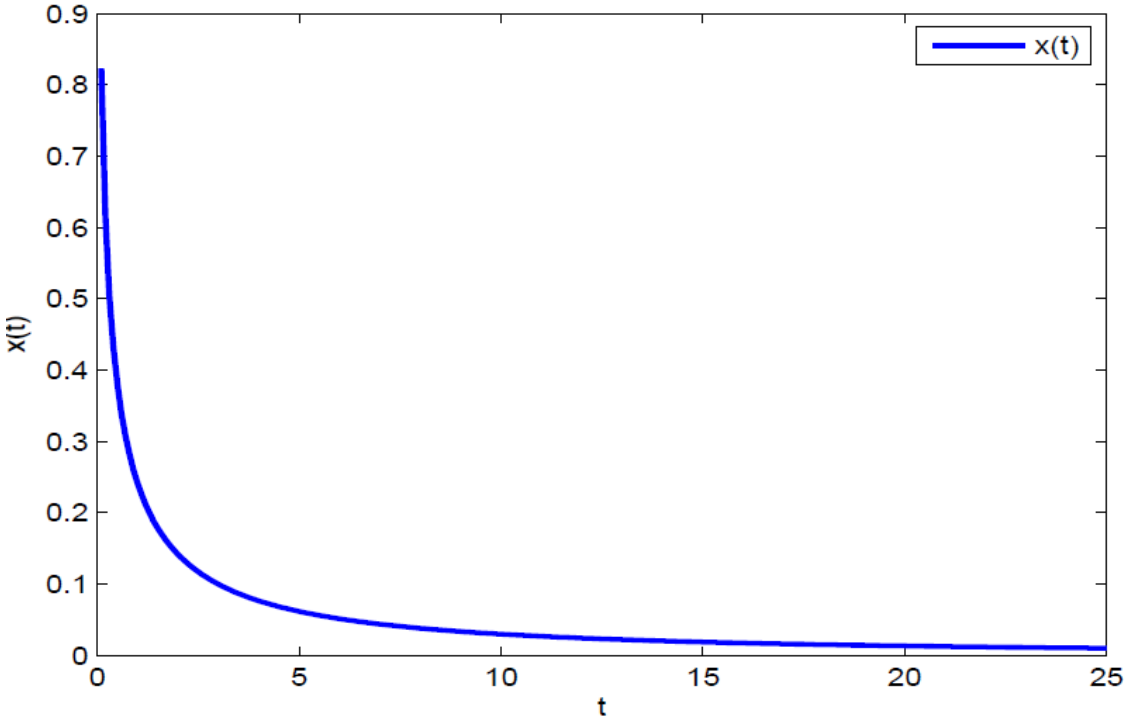
Örnek 4.6 Formun lineer integro diferansiyel sistemini düşünelim

$$ {}^{C}D^{\alpha}x(t) + 3x(t) = -I^{\alpha}x(t), \tag{4.59}$$

burada $\alpha = 1/2$ ve başlangıç koşulu $x(0) = 2$ ile verilir.

Bu standart ${}^{C}D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + I^{\alpha}g(t, x(t))$ biçimde yazılabilir. Burada $A = -3$ ve $g(t, x) = -x(t)$'dir.

Verilen (4.59) denklemi, Teorem 4.6'nın gerekli koşullarını karşılamaktadır. Dolayısıyla asimptotik olarak kararlıdır (Priyadharsini, 2016).



Şekil 4.13 $\boldsymbol{\alpha}$=0,5 için (4.59) denkleminin çözüm grafiği

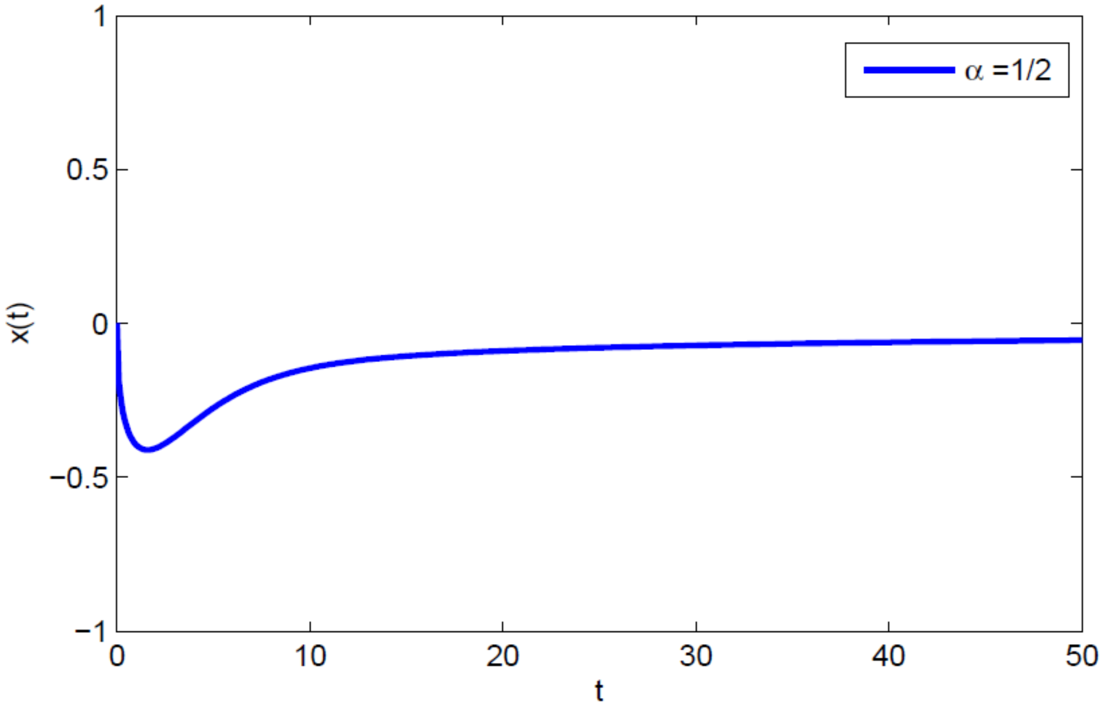
Örnek 4.7 Formun lineer integro diferansiyel sistemini dikkate alacağız

$$ {}^{C}D^{\alpha}x(t) + 2x(t) = -5\int_0^t x(s)ds + h(t), \tag{4.60}$$

$x(0) = 0$ başlangıç koşulu ile burada $\alpha = 1/2$ ve $h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1, \\ 0 & aksi\ takdirde \end{cases}$

Bu standart biçimde yazılabilir ${}^{C}D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f(t, x(t))$ burada $A = -2$ ve $f(t,x) = \int_0^t g\big(t, x(s)\big)ds + h(t)$ burada $g\big(t, x(t)\big) = -5x(t)$ ve $h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1, \\ 0 & aksi\ takdirde \end{cases}$

Verilen (4.60) denklemi Teorem 4.4 'ün gerekli koşullarını karşılamaktadır. Dolayısıyla asimptotik olarak kararlıdır (Priyadharsini, 2016).



Şekil 4.14 $\boldsymbol{\alpha}$=0,5 için (4.60) denkleminin çözüm grafiği

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Doğada birçok sistem kesirli mertebeden bir diferansiyel denklemle gerçekleşir. Buradan kesirli mertebeden bir sistemin tamsayı mertebeden bir sisteme göre daha çekici bir özelliğe sahip olduğu sonucuna varılmıştır. Bu çalışmada, 0 ile 1 arasında kesir mertebeye sahip lineer olmayan sistemin kararlılığı incelenmiştir. Bir matris ve lineer olmayan bir terim üzerinde bazı basit yeterli koşullar ile kesirli diferansiyel denklemlerin kararlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir. Ayrıca fraksiyonel nötr ve fraksiyonel integro diferansiyel denklem sistemlerin kararlılığı da tartışılmıştır. Elde edilen koşulların uygulanabilirliğini göstermek için bazı örnekler sunulmuştur.

5.2 Öneriler

Sonraki çalışmalar, özdeğerleri analiz ederek ve doğrusal olmayan terime koşullar uygulayarak gecikme eklenerek lineer olmayan kesirli nötr ve integro diferansiyel denklemlerin kararlılığını araştırmaktır. Ayrıca çalışmada kullanılan matrisler reel değerli matrislerdi acaba matrisin elemanları değişken alınırsa kararlılık nasıl etkilenir üzerine araştırma yapılabilir.

KAYNAKLAR

Ahmad, S., Rao, M.R.M. 1999. Theory of ordinary differential equations, With applications in biology and engineering. Affiliated East-West Press Pvt. Ltd., New Delhi.

Bocher, M. 1974. Integral equations, Cambridge university press, London.

Diethelm, K., Ford, N.J. 2002. Analysis of fractional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 265 (2), 229-248.

Hashim, I., Abdulaziz, O., Momani, S. 2009. Homotopy analysis method for fractional IVPs, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14 (3), 674-684.

He, J.-H. 1999a. Homotopy perturbation technique, Computer methods in applied mechanics and engineering, 178 (3-4), 257-262.

He, J.-H. 1999b. Variational iteration method–a kind of non-linear analytical technique: some examples, International journal of non-linear mechanics, 34 (4), 699-708.

Hilfer, R., 2000, Applications of fractional calculus in physics, *World scientific Singapore*,

Hu, T., Blanchini, F. 2010. Non-conservative matrix inequality conditions for stability/stabilizability of linear differential inclusions, Automatica, 46 (1), 190-196.

Jafari, H., Daftardar-Gejji, V. 2006. Solving linear and nonlinear fractional diffusion and wave equations by Adomian decomposition, Applied Mathematics and Computation, 180 (2), 488-497.

Khader, M. 2011. On the numerical solutions for the fractional diffusion equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16 (6), 2535-2542.

Khalil, H.K., Grizzle, J.W., 2002, Nonlinear systems, *Prentice hall Upper Saddle River, NJ*,

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., 2006, Theory and applications of fractional differential equations, *elsevier*,

Kimeu, J.M. 2009. Fractional calculus: Definitions and applications.

Lakshmikantham, V., 1995, Theory of integro-differential equations, *CRC press*,

Li, C., Deng, W. 2007. Remarks on fractional derivatives, Applied Mathematics and Computation, 187 (2), 777-784.

Li, C., Zhang, F. 2011. A survey on the stability of fractional differential equations, The European Physical Journal Special Topics, 193 (1), 27-47.

Li, Y., Chen, Y., Podlubny, I. 2009. Mittag–Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems, Automatica, 45 (8), 1965-1969.

Miller, K.S., Ross, B., 1993, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, *Wiley*,

Momani, S., Hadid, S. 2004. Lyapunov stability solutions of fractional integrodifferential equations, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2004.

Momani, S., Odibat, Z. 2007. Numerical approach to differential equations of fractional order, Journal of Computational and Applied Mathematics, 207 (1), 96-110.

Odibat, Z. 2006. Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives, Applied Mathematics and Computation, 178 (2), 527-533.

Odibat, Z., Momani, S. 2008. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order, J. Appl. Math. Inform, 26 (1-2), 15-27.

Odibat, Z.M. 2010. Analytic study on linear systems of fractional differential equations, Computers & Mathematics with Applications, 59 (3), 1171-1183.

Oldham, K., Spanier, J., 1974, The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, *Elsevier*,

Podlubny, I., 1998, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, *Elsevier*,

Priyadharsini, S. 2016. Stability of fractional neutral and integrodifferential systems, J. Fract. Calc. Appl, 7 (1), 87-102.

Qian, D., Li, C., Agarwal, R.P., Wong, P.J. 2010. Stability analysis of fractional differential system with Riemann–Liouville derivative, Mathematical and Computer Modelling, 52 (5-6), 862-874.

Radwan, A.G., Soliman, A., Elwakil, A.S., Sedeek, A. 2009. On the stability of linear systems with fractional-order elements, Chaos, Solitons & Fractals, 40 (5), 2317-2328.

Ran-Chao, W., Xin-Dong, H., Li-Ping, C. 2013. Finite-time stability of fractional-order neural networks with delay, Communications in Theoretical Physics, 60 (2), 189.

Samko, S., Kilbas, A., Marichev, O. 1993a. Fractional Integrals and Derivatives-Theory and Applications Gordon and Breach, Linghorne, PA.

Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., 1993b, Fractional integrals and derivatives, *Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland*,

Varol Bayram, D. 2019. Lineer kesirli integro-diferansiyel denklemlerin laguerre polinomları ile sayısal çözümleri.

Ye, H., Gao, J., Ding, Y. 2007. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 328 (2), 1075-1081.

Zeng, Q., Cao, G., Zhu, X. 2005. The asympototic stability on sequential fractional-Order systems, J. Shanghai JiaoTong Univ, 39, 346-348.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Fatma Aydemir
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Ahlat 08/08/1992
Telefon	**:**	
Faks	**:**	
e-mail	**:**	fatmaydemir13@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Sadullah Gencer Anadolu Lisesi, Ahlat, Bitlis	2010
Üniversite	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü	2015
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2015	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR