T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODULAR DİZİLERİ YARDIMIYLA TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Semih TEKDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2020
MUŞ

T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODULAR DİZİLERİ YARDIMIYLA TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Semih TEKDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICI TURAN

Ocak-2020
MUŞ

TEZ KABUL VE ONAYI

Semih TEKDEMİR tarafından hazırlanan "Modular Dizileri Yardımıyla Tanımlanan Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzaylarının Bazı Topolojik Özellikleri" adlı tez çalışması 26/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü	....
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICI TURAN Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	....
Üye Doç. Dr. Erdal KORKMAZ Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	....

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 30/12/2019 Tarih ve 38/III nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Semih TEKDEMİR

Tarih: 26/12/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODULAR DİZİLERİ YARDIMIYLA TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Semih TEKDEMİR

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICI TURAN

2020, 30 Sayfa

Jüri
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICI TURAN
Jüri Üyesi: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Bu çalışmada, Modular dizileri uzayları yardımıyla bazı genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanmış ve bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca dizi uzaylarının arasında bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

Üç bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde konuya ilişkin ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, tez boyunca kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca fark dizi uzayları, genelleştirilmiş fark dizi uzayları, Orlicz fonksiyonu, $\ell_M(p)$ dizi uzayı ve Modular dizi uzayı kavramları tanımlanmış ve bunlarla ilgili bazı teoremler ve topolojik özellikler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise her bir k için M_k ve N_k birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere $\mathcal{M} = (M_k)$ ve $\mathcal{N} = (N_k)$ Orlicz fonksiyon dizileri yardımıyla $\ell_\lambda^M(\Delta^m, u, p)$ ve $\ell_N^\lambda(\Delta^m, u, p)$ yeni fark dizi uzayları tanımlanmıştır. Ayrıca bu dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri ve bu dizi uzayları arasında bazı kapsama bağıntıları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark dizi uzayları, Modular dizi uzayı, Orlicz fonksiyon, Paranorm.

ABSTRACT

MS THESIS

ON SOME TOPOLOGICAL PROPERTIES OF GENERALIZED DIFFERENCE SEQUENCE SPACES DEFINED BY MODULAR SEQUENCE

Semih TEKDEMİR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS SCIENCE

Advisor: Asst. Prof. Dr. Gülcan ATICI TURAN

2020, 30 Pages

Jury
Advisor: Asst. Prof. Dr. Gülcan ATICI TURAN
Jury Member: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ
Jury Member: Assoc. Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

In this study, we define some generalized difference sequence spaces by Modular sequence spaces and we examine some properties of these sequence spaces. We also give some inclusion relations between these spaces.

In the first part of this thesis consisting of three chapters, some basic concepts related to the subject are given. In the second chapter, the basic concepts used throughout the thesis are given. Also, the concepts of difference sequence spaces, generalized difference sequences spaces, Orlicz function $\ell_M(p)$ sequences space and Modular sequence space are defined and some theorems related to these and their topological properties are examined.

In the third chapter, we define the new difference sequence spaces $\ell_\lambda^M(\Delta^m, u, p)$ and $\ell_N^\lambda(\Delta^m, u, p)$ where of Orlicz function $\mathcal{M} = (M_k)$ and $\mathcal{N} = (N_k)$ such that M_k and N_k be mutually complementary for each k. We also examine some topological properties of the sequence spaces and some inclusion relations between these spaces.

Keywords: Difference sequence spaces, Modular sequence space, Orlicz function, Paranorm.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın hazırlanmasında emeği bulunan başta ailem olmak üzere, bu tezin hazırlanması süresince, her anlamda benden desteğini eksik etmeyen, akademik gelişmemde bilgi ve becerilerini paylaşarak bana yardımcı olan, her daim bana yol gösteren değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICI TURAN' a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Semih TEKDEMİR
MUŞ-2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
ℓ_∞	:	Sınırlı diziler uzayı
$\lVert . \rVert$	:	Norm
$(X, \lVert . \rVert)$	:	Normlu uzay
c	:	Yakınsak diziler uzayı
$\forall$	:	Her
c_0	:	Sıfıra yakınsak diziler uzayı
BK	:	Banach koordinatsal süreklilik
Δ^m	:	Genelleştirilmiş fark operatörü
$\ell(M)$	:	Modular dizi uzayı
$\breve{\ell}(M)$	:	Modular dizi sınıfı
$\breve{\ell}_M$	:	Orlicz dizi sınıfı
ℓ_M	:	Orlicz dizi uzayı
M	:	Orlicz fonksiyonu
w	:	Bütün diziler uzayı

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

İlk olarak fark dizileri kavramı 1981 yılında Kızmaz tarafından tanımlandı. Kızmaz $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ ve $X = l_\infty$, c ve c_0 olacak şekilde

$$X(\Delta) = \{x = (x_k): \Delta x \ \in X\}$$

dizi uzaylarını tanımladı. Daha sonra Et ve Çolak (1995), $m \in N$,

$$\Delta^\circ x = (x_k),\ \Delta x = (x_k - x_{k+1}),\ \Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}) \text{ ve}$$

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$X(\Delta^m) = \{x = (x_k): \Delta^m x \ \in X\},$$

dizi uzaylarını tanımladılar.

Bir Orlicz fonksiyonu, sürekli, azalmayan, konveks, $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \to \infty$ iken $M(x) \to \infty$ şartlarını sağlayan bir $M: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonudur (Kamthan ve Gupta, 1981).

Bir M Orlicz fonksiyonu her zaman

$$M(x) = \int_0^x p(t)dt$$

integral formunda gösterilebilir. Burada M nin çekirdeği olarak bilinen p, azalmayan, $t > 0$ için sağdan türevlenebilir, $p(0) = 0$, $t > 0$ için $p(t) > 0$ ve $t \to \infty$ iken $p(t) \to \infty$ dur (Karanoselskii ve Rutitsky, 1961).

Bir $M(t)$ Orlicz fonksiyonu ile çekirdeği olan $p(t)$ yi göz önüne alalım ve $q(s) = \sup\ \{t: p(t) \le s\}$ olsun. Bu takdirde

$$N(x) = \int_0^x q(s)\, ds$$

şeklinde bir N fonksiyonu vardır. Burada $q(s)$ N nin bir çekirdeği olup $p(t)$ nin tüm özelliklerine sahiptir ki bu da N nin bir Orlicz fonksiyonu olduğunu gösterir. Bu şekilde M ve N fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olarak adlandırılır (Kamthan ve Gupta, 1981).

Lindenstrauss ve Tzafriri (1965) Orlicz fonksiyonu fikrini kullanarak

$$\ell_M = \left\{x \in w: \sum_{k=1}^{\infty} \left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right) < \infty, bazı\ \rho > 0\ için\right\}$$

Orlicz dizi uzayını tanımladılar ve bu dizi uzayının

$$\|x\| = inf\left\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right) \leq 1\right\}$$

normu ile bir Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

1973 te Woo $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olmak üzere

$$\ell(\mathcal{M}) = \left\{x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty \; en\ az\ bir\ \rho > 0\ için\right\}$$

şeklinde Modular dizi uzayını tanımlamış ve bu dizi uzayının

$$\|x\|_{\mathcal{M}} = \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1\right\}$$

normu ile bir Banach uzayı olduğunu göstermiştir.

$\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olmak üzere her bir k için M_k lar

$$M_k(x) = \int_0^x p_k(t)\, dt$$

integral formunda gösterilebilir. Buradan her bir k için M_k ların çekirdeği olarak bilinen p_k lar azalmayan, $t > 0$ için sağdan türevlenebilir, her bir k için $p_k(0) = 0$, $t > 0$ için $p_k(t) > 0$ ve $t \to \infty$ iken $p_k(t) \to \infty$ dur (Atıci, 2011).

Her bir k için M_k lar Orlicz fonksiyonu ve her bir M_k ya karşılık p_k lar da bu Orlicz fonksiyonlarının çekirdeği olmak üzere

$$q_k(s) = \sup\ \{t : p_k(t) \leq s\}$$

olsun. Bu takdirde her bir k için

$$N_k(x) = \int_0^x q_k(s)\, ds$$

integral formunda gösterilen N_k fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Burada her bir k için $q_k(s)$, N_k nın çekirdeği olup $p_k(t)$ nin tüm özelliklerine sahiptir. Yani (N_k) bir Orlicz fonksiyon dizisi olur. Bu şekildeki her bir k için M_k ve N_k birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olarak adlandırılır (Atıci, 2011).

Parashar ve Choudhary (1994), M bir Orlicz fonksiyonu ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olmak üzere

$$\ell_M(p) = \left\{x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leq \infty \; en\ az\ bir\ \rho > 0\ için\right\}$$

dizi uzayını tanımladılar ve bu dizi uzayının bazı cebirsel topolojik özelliklerini incelediler.

Modular dizi uzayları kullanılarak yeni genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanmış ve pek çok bilim adamı bu dizi uzayları üzerine çalışmalar yapmıştır (Alsaedi ve Bataineh, 2007; Bektaş ve Atıci, 2013; Gupta ve Pradhan, 2008; Atıci Turan, 2017; Jamwal ve Raj, 2015).

2. TEORİK ESASLAR

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$+: X \times X \to X\,, \qquad .: K \times X \to X$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine K cismi üzerinde vektör uzayı (lineer uzay) denir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

i. $x + y = y + x$

ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$

iii. Her $x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

iv. Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

v. $1.x = x$

vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

viii. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (Maddox, 1970).

Tanım 2.2 L, F cismi üzerindeki bir lineer uzay ve M, L nin bir alt kümesi olsun. Her $\alpha \in F$ ve her $x, y \in M$ için

1) $x + y \in M$
2) $\alpha x \in M$

şartları sağlanıyorsa M ye L nin alt uzayı denir (Bayraktar, 1994).

Tanım 2.3 X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (λ skaler)

N4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.4 $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ iken

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsak ise $\lim_n x_n = x$ veya $x_n \to x$ şeklinde yazılır (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.5 $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.6 N normlu lineer uzay olsun. N, norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzayı denir (Bayraktar, 1994).

Tanım 2.7 (x_n), $(X, \|.\|)$ de bir dizi olsun. Her n için $\|x_n\| \leq k$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ sayısı varsa x_n ye sınırlı dizi denir (Bayraktar, 1994).

Tanım 2.8 $(N, \|.\|)$ ve $(N', \|.\|)$ normlu iki uzay, $f: N \to N'$ bir dönüşüm ve $x_0 \in N$ olsun. Verilmiş herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa f dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir. f, N nin her noktasında sürekli ise f ye N de sürekli denir (Bayraktar, 1994).

Tanım 2.9 X,K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.$g: X \to R$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa g ye bir paranorm, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir.

$\forall\, x, y \in X$ için

$i.\, g(\theta) = 0$

ii. $g(x) = g(-x)$

iii. $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$

iv. $\mu \to \mu_0$, $x \to x_0$ iken $\mu x \to \mu_0 x_0$ dir

iv) şartını $\mu \to \mu_0$, $g(x - x_0) \to 0$ iken $g(\mu x - \mu_0 x_0) \to 0$ şeklinde ifade edebiliriz (Maddox, 1970).

Tanım 2.10 Bir (X, g) paranormlu uzayında, alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa (X, g) uzayına tam paranormlu uzay denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.11 Reel veya kompleks terimli tüm dizilerin cümlesini w ile gösterelim. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere w, $x + y = (x_k + y_k)$ ve $\alpha x = (\alpha x_k)$ şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. w nın her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir (Goes ve Goes, 1970).

Aşağıdaki dizi uzayları bu çalışmada sıklıkla kullanılacaktır.

$$\ell_\infty = \left\{x = (x_k): \sup_k |x_k| < \infty\right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{x = (x_k): \lim_k x_k \text{ mevcut}\right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{x = (x_k): \lim_k x_k = 0\right\}$$

sıfır dizileri uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır (Goes ve Goes, 1970).

Tanım 2.12 X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \to F \ (\mathbb{R} \text{ veya } \mathbb{C}), \ \ \tau_k(x) = x_k \ (k = 1,2,3, \dots)$$

dönüşümleri sürekli ise X e bir BK (Banach Coordinatewise)-uzayı denir (Goes ve Goes, 1970).

Tanım 2.13 X bir dizi uzayı olsun.

i. $|a_k| \leq 1$ olacak şekilde tüm (a_k) dizileri için $(x_k) \in X$ alındığında eğer $(a_k x_k) \in X$ ise solid (ya da normal) dir.

ii. X tüm basamak uzaylarının kanonik ön resimlerini kapsıyorsa, X e monotondur (Kamthan ve Gupta, 1981).

Önerme 2.1 λ perfektir $\Rightarrow$ λ normaldir $\Rightarrow$ λ monotondur (Kamthan ve Gupta, 1981).

Aşağıdaki eşitsizlik bu çalışmada sıklıkla kullanılacaktır.
$a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $H = \sup_k p_k$, ve $D = max(1{,}2^{H-1})$ olmak üzere

$$(|a_k + b_k|)^{p_k} \leq D\{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\} \tag{2.1}$$

dir.

2.2. Fark Dizi Uzayları, Orlicz Fonksiyonu, $\boldsymbol{\ell_M(P)}$ Dizi Uzayı ve Modular Dizi Uzayı

2.2.1. Fark Dizi Uzayları

Fark dizileri kavramı ilk olarak Kızmaz (1981) tarafından tanımlandı. Kızmaz $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \ \in \ell_\infty\}$$
$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \ \in c\}$$
$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \ \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların $\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdi.

Et ve Çolak (1995), $m \in N$,

$$\Delta^\circ x = (x_k),$$
$$\Delta x = (x_k - x_{k+1}),$$
$$\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$$

ve

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \ \in \ell_\infty\},$$
$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \ \in c\},$$
$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \ \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty}$$

ile Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

Teorem 2.1 $\Delta^m(\ell_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ dizi uzayları

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty} \tag{2.2}$$

normu ile birer normlu uzaydır (Et, 1992).

Teorem 2.2 $\Delta^m(\ell_\infty)$, $\|.\|_{\Delta}$ bir Banach uzayıdır (Et, 1992).

Teorem 2.3 $\Delta^m(\ell_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ uzayları (2.2) deki norm ile birer BK-uzayıdır (Et, 1992).

2.2.2. Orlicz Fonksiyonu

Tanım 2.14 Bir Orlicz fonksiyonu, sürekli, azalmayan, konveks, $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \to \infty$ iken $M(x) \to \infty$ şartlarını sağlayan bir $M: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonudur (Kamthan ve Gupta, 1981).

Bir M Orlicz fonksiyonu her zaman

$$M(x) = \int_0^x p(t)dt$$

integral formunda gösterilebilir. Burada M nin çekirdeği olarak bilinen p, azalmayan, $t > 0$ için sağdan türevlenebilir, $p(0) = 0$, $t > 0$ için $p(t) > 0$ ve $t \to \infty$ iken $p(t) \to \infty$ dur (Karanoselskii ve Rutitsky, 1961).

Bir $M(t)$ Orlicz fonksiyonu ile çekirdeği olan $p(t)$ yi göz önüne alalım ve $q(s) = \sup\ \{t: p(t) \leq s\}$ olsun. Bu takdirde

$$N(x) = \int_0^x q(s)\, ds$$

şeklinde bir N fonksiyonu vardır. Burada $q(s)$, N nin bir çekirdeği olup $p(t)$ nin tüm özelliklerine sahiptir ki bu da N nin bir Orlicz fonksiyonu olduğunu gösterir. Bu şekilde M ve N fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olarak adlandırılır (Kamthan ve Gupta, 1981).

Önerme 2.2 M ve N fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olsun. Bu takdirde
i) $x, y \geq 0$ için $xy \leq M(x) + N(y)$ (Young Eşitsizliği)
ii) $x \geq 0$ için $xp(x) = M(x) + N\big(p(x)\big)$ dir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Ayrıca M konveks ve $M(0) = 0$ olduğundan $x \geq 0$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ olmak üzere her μ için $M(\mu\, x) \leq \mu\, M(x)$ dir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Tanım 2.15 Her bir M Orlicz fonksiyonu için

$$\tilde{\ell}_M = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\ell}_M$ cümlesine Orlicz dizi sınıfı denir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Benzer şekilde N, M nin alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere $\tilde{\ell}_N$ cümlesi

$$\tilde{\ell}_N = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \sum_{k=1}^{\infty} N(|x_k|) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Lindestrauss ve Tzafiri (1965) Orlicz fonksiyonu fikrini kullanarak aşağıdaki dizi uzayını tanımladılar:

$$\ell_M = \left\{ x \in w \colon \sum_{k=1}^{\infty} \left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right) < \infty, bazı\ \rho > 0\ için \right\}$$

ve bu dizi uzayını

$$\|x\| = inf \left\{ \rho > 0 \colon \sum_{k=1}^{\infty} \left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right) \leq 1 \right\}$$

normu ile bir Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

Tanım 2.16 Her bir M Orlicz fonksiyonu için

$$\ell_M = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \leq \infty\ en\ az\ bir\ \rho > 0\ için \right\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye Orlicz dizi uzayı denir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Benzer şekilde N, M nin alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere

$$\ell_N = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \leq \infty\ en\ az\ bir\ \rho > 0\ için \right\}$$

de bir dizi uzayıdır. M ve N fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere ℓ_M Orlicz dizi uzayı

$$\ell_M = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \ yakınsak\ her\ y \in \tilde{\ell}_N\ için \right\} \tag{2.3}$$

şeklinde de verilebilir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Buradan açıkça görülebilir ki $\tilde{\ell}_M \subset \ell_M$ ve $\tilde{\ell}_N \subset \ell_N$ dir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Teorem 2.4 Her bir $x \in \ell_M$ için

$$\sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(|y_k|) \leq 1 \right\} < \infty$$

dur (Kamthan ve Gupta, 1981).

Böylece

$$\|x\|_m = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(|y_k|) \leq 1 \right\}$$

şeklinde ℓ_M üzerinde bir norm tanımlanabilir. ℓ_M, bu norm ile birlikte bir Banach uzayıdır (Kamthan ve Gupta, 1981).

Teorem 2.5 $(\ell_M, \|x\|_M)$ bir BK-uzayıdır (Kamthan ve Gupta, 1981).

$\|x\|_M$ normundan farklı olarak ℓ_M,

$$\|x\|_{(M)} = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

ile tanımlanan $\|x\|_M$ normuna denk olan $\|.\|_{(M)}$ normuyla da BK-uzayı yapılabilir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Teorem 2.6 $x \in \ell_M$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{(M)}}\right) \leq 1$$

dir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Önerme 2.3 $x \in \ell_M$ için

$$\sum_{k \geq 1} M\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_M}\right) \leq 1$$

dir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Teorem 2.7 $x \in \ell_M$ için $\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M \leq 2\|x\|_{(M)}$ dir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Sonuç 2.1 $(\ell_M, \|x\|_M)$ bir BK-uzayıdır (Kamthan ve Gupta, 1981).

2.2.3. $\boldsymbol{\ell_M(p)}$ Dizi Uzayı

Bu kısımda Parashar ve Choudhary (1994) tarafından tanımlanan ve bazı cebirsel-topolojik özellikleri incelenen $\ell_M(p)$ dizi uzayına yer verildi. Bu bölümde $p = (p_k)$ dizisini sınırlı kabul edeceğiz.

Şimdi bir M Orlicz fonksiyonu ve pozitif reel sayıların herhangi bir $p = (p_k)$ dizisi için

$$\ell_M(p) = \left\{x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leq \infty \; en \; az \; bir \; \rho > 0 \; için\right\}$$

şeklinde tanımlanan dizi uzayının bazı temel özelliklerini verelim.

Teorem 2.8 $H = sup_k \, p_k$ olsun. Bu durumda $\ell_M(p)$ dizi uzayı $\mathbb{C}$ sayılar cismi üzerinde bir lineer uzaydır (Parashar ve Choudhary, 1994).

Teorem 2.9 $H = sup_k \, p_k$ olsun. Bu durumda $\ell_M(p)$

$$g(x) = \inf\left\{\rho^{\frac{pn}{H}} > 0 \colon \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n = 1,2, \dots\right\} \tag{3.3}$$

paranormuyla total paranormlu uzaydır (Parashar ve Choudhary, 1994).

Teorem 2.10 Her bir k için $0 \leq p_k \leq q_k < \infty$ olacak şekilde p_k ve q_k dizilerini alalım. Bu takdirde $l_M(p) \subset l_M(q)$ dur (Parashar ve Choudhary, 1994).

2.2.4. Modular Dizi Uzayı

Woo (1973) modular dizi uzayını tanımlamıştır. Biz de bu bölümde M_k Orlicz fonksiyonlarının integral formundaki gösterimini, çekirdeğini, alışılmış tamamlayıcısını ve modular dizi sınıfını tanımlarına yer verdik ve bunların bazı özelliklerini inceledik.

$\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu takdirde her bir k için M_k lar

$$M_k(x) = \int_0^x p_k(t)\,dt$$

integral formunda gösterilebilir. Buradan her bir k için M_k ların çekirdeği olarak bilinen p_k lar azalmayan, $t > 0$ için sağdan türevlenebilir, her bir k için $p_k(0) = 0$, $t > 0$ için $p_k(t) > 0$ ve $t \to \infty$ iken $p_k(t) \to \infty$ dur (Atıci, 2011).

Her bir k için M_k lar Orlicz fonksiyonu ve her bir M_k ya karşılık p_k lar da bu Orlicz fonksiyonlarının çekirdeği olmak üzere

$$q_k(s) = \sup\ \{t: p_k(t) \leq s\}$$

olsun. Bu takdirde her bir k için

$$N_k(x) = \int_0^x q_k(s)\,ds$$

integral formunda gösterilen N_k fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Burada her bir k için $q_k(s)$, N_k nın çekirdeği olup $p_k(t)$ nin tüm özelliklerine sahiptir. Yani (N_k) bir Orlicz fonksiyon dizisi olur. Bu şekildeki her bir k için M_k ve N_k birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olarak adlandırılır (Atıci, 2011).

Önerme 2.4 Her bir k için M_k ve N_k birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olsun. Bu takdirde

i) $x, y \geq 0$ için $xy \leq M_k(x) + N_k(y)$ (Young Eşitsizliği)

ii) $x \geq 0$ için $xp_k(x) = M_k(x) + N_k\big(p_k(x)\big)$ dir.

Ayrıca M_k lar konveks ve her bir k için $M_k(0) = 0$ olduğundan $x \geq 0$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ olmak üzere her μ için $M_k(\mu\, x) \leq \mu\, M_k(x)$ dir (Atıci, 2011).

Tanım 2.17 $\mathcal{M} = (M_k\ )$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olmak üzere

$$\tilde{\ell}(\mathcal{M}) = \left\{x = (x_k) \in w: \sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|) < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\ell}(\mathcal{M})$ cümlesine Modular dizi sınıfı denir. Benzer şekilde her bir k için N_k, M_k nın alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere $\tilde{\ell}(\mathcal{N})$

$$\tilde{\ell}(\mathcal{N}) = \left\{x = (x_k) \in w: \sum_{k=1}^{\infty} N_k(|x_k|) < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır (Atıci, 2011).

Tanım 2.18 Bir $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyon dizisi için

$$\ell(\mathcal{M}) = \left\{x = (x_k) \in w: \sum_{k=1}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty \; en\ az\ bir\ \rho > 0\ için\right\}$$

şeklinde tanımlanan $\ell(\mathcal{M})$ cümlesine modular dizi uzayı denir (Woo, 1973). Bu dizi uzayı

$$\|x\|_{\mathcal{M}} = \inf\left\{\rho > 0: \sum_{k=1}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1\right\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Benzer şekilde her bir k için M_k, N_k nın alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere

$$\ell(\mathcal{N}) = \left\{x = (x_k) \in w: \sum_{k=1}^{\infty} N_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty \; en\ az\ bir\ \rho > 0\ için\right\}$$

şeklinde tanımlanan $\ell(\mathcal{N})$ cümlesine modular dizi uzayı denir. Bu dizi uzayı

$$\|x\|_{\mathcal{N}} = \inf\left\{\rho > 0: \sum_{k=1}^{\infty} N_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1\right\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Her bir k için M_k, N_k fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere

$$\ell(\mathcal{M}) = \left\{x = (x_k) \in w: \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \; yakınsak\ her\ y \in \tilde{\ell}(\mathcal{N})\ için\right\} \qquad (3.4)$$

olarak da verilebilir (Atıci, 2011).

Tanım 2.19 M_1 ve M_2 herhangi iki Orlicz fonksiyonu olsun. $0 \leq x \leq x_0$ şeklindeki her x için $M_1(\alpha x) \leq M_2(x) \leq M_1(\beta x)$ olacak şekilde x_0, α ve β pozitif sayıları varsa M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonlarına denktir denir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Benzer şekilde Orlicz fonksiyon dizilerinin denkliği aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 2.20 $\mathcal{M} = (M_k)$ ve $\mathcal{T} = (T_k)$ Orlicz fonksiyonlarının herhangi iki dizisi olsun. $0 \leq x \leq x_0$ şeklindeki her x ve her $k \in \mathbb{N}$ için $M_k(\alpha x) \leq T_k(x) \leq M_k(\beta x)$ olacak şekilde x_0, α ve β pozitif sayıları varsa M_k ve T_k Orlicz fonksiyon dizilerine denktir denir (Atıci, 2011).

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

3.1. Modular Dizileri Yardımıyla Tanımlanan Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzaylarının Bazı Topolojik Özellikleri

Tanım 3.1 Her $k \in N$ için M_k ve N_k birbirinin alışılmış tamamlayıcı fonksiyonları, $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi, $\lambda = (\lambda_k)$ kesin reel sayıların bir dizisi ve $u_k > 0$ olacak şekilde $u = (u_k)$ reel terimli bir dizi olsun. O halde aşağıdaki dizi uzaylarını

$$\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p) = \left\{x = (x_k) : \sum_{k \geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} < \infty \; bazı\; \rho > 0 \; için\right\}$$

ve

$$\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p) = \left\{x = (x_k) : \sum_{k \geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \infty \; bazı\; \rho > 0 \; için\right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu bölümde her $k \in \mathbb{N}$ için $M_k(1) = 1$ ve $N_k(1) = 1$ alınmaktadır.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k = 1$ alınırsa

$$\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, p) = \left\{x = (x_k) : \sum_{k \geq 1} \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} < \infty \; bazı\; \rho > 0 \; için\right\}$$

ve

$$\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, p) = \left\{x = (x_k) : \sum_{k \geq 1} \left[N_k\left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \infty \; bazı\; \rho > 0 \; için\right\}$$

dizi uzayları elde edilir.

Teorem 3.1 $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu takdirde $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ dizi uzayı bir lineer uzaydır.

İspat. $x, y \in \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k \geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho_1}\right)\right]^{p_k} < \infty \;\text{ ve }\; \sum_{k \geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m y_k|}{\lambda_k \rho_2}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 pozitif sayıları vardır. a ve b iki kompleks sayı olmak üzere $\rho_3 = max(2|a|\rho_1, 2|b|\rho_2)$ alalım. M_k lar azalmayan, konveks ve Δ lineer olduğundan

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m(ax_k+by_k)|}{\lambda_k\rho_3}\right)\right]^{p_k}$$

$$= \sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|a||\Delta^m x_k|}{\lambda_k\rho_3}+\frac{|b||\Delta^m y_k|}{\lambda_k\rho_3}\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|a||\Delta^m x_k|}{\lambda_k|2a|\rho_1}+\left(\frac{|b||\Delta^m y_k|}{\lambda_k|2b|\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \frac{1}{2^{p_k}}\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k\rho_1}+\left(\frac{|\Delta^m y_k|}{\lambda_k\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|a||\Delta^m x_k|}{\lambda_k\rho_1}\right)\right]^{p_k} + D\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|b||\Delta^m y_k|}{\lambda_k\rho_2}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

bulunur. Toplamının her ikisi de ayrı ayrı sonsuzdan küçük kaldığı için toplamı da sonsuzdan küçük kalır. O halde $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ bir lineer uzaydır.

Teorem 3.2 $\mathcal{N} = (N_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu takdirde $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ dizi uzayı bir lineer uzaydır.

İspat. $x, y \in \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, p)$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} < \infty \quad \text{ve} \quad \sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m y_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 pozitif sayıları vardır. a ve b iki kompleks sayı olmak üzere $\rho_3 = \max(2|a|\rho_1, 2|b|\rho_2)$ alalım. N_k lar azalmayan, konveks ve Δ lineer olduğundan

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m(ax_k+by_k)|}{\rho_3}\right)\right]^{p_k}$$

$$= \sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|a||\Delta^m x_k|}{\rho_3}+\frac{\lambda_k|b||\Delta^m y_k|}{\rho_3}\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|a||\Delta^m x_k|}{|2a|\rho_1}+\left(\frac{\lambda_k|b||\Delta^m y_k|}{|2b|\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \frac{1}{2^{p_k}}\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho_1}+\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m y_k|}{\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|a||\Delta^m x_k|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} + D\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|b||\Delta^m y_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

bulunur. Toplamının her ikisi de ayrı ayrı sonsuzdan küçük kaldığı için toplamı da sonsuzdan küçük kalır. O halde $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ bir lineer uzaydır.

Teorem 3.3 $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi ve $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde $\ell_{\lambda}^{M}(\Delta^m, u, p)$ uzayı $H = \max(1, \sup_k p_k)$ olmak üzere

$$g_{\lambda}^{\Delta}(x) = \inf\left\{\rho^{p_n/H} > 0 : \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0\right\}$$

paranormu ile bir paranormlu uzaydır.

İspat. Her $k \in N$ için $M_k(0) = 0$ olduğundan $x = \theta$ için $\inf\left\{\rho^{p_n/H}\right\} = 0$ olur. Tersine $g_{\lambda}^{\Delta}(x) = 0$ olduğunu varsayalım. O halde

$$\inf\left\{\rho^{p_n/H} > 0 : \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1 \right\} = 0$$

olur ki buradan $x = \theta$ olur. $g_{\lambda}^{\Delta}(x) = g_{\lambda}^{\Delta}(-x)$ olduğu aşikardır.

Teorem 3.1 den $a = b = 1$ alınırsa $g_{\lambda}^{\Delta}(x + y) \leq g_{\lambda}^{\Delta}(x) + g_{\lambda}^{\Delta}(y)$ elde edilir. Son olarak $g_{\lambda}^{\Delta}(\mu x)$ skaler çarpımının sürekli olduğunu ispatlayalım. μ sıfırdan farklı herhangi bir sayı olsun. Buradan $r = \rho/|\mu|$ olarak seçilirse

$$g_{\lambda}^{\Delta}(\mu x) = \inf\left\{\rho^{p_n/H} > 0 : \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m (\mu x_k)|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0\right\}$$

$$= \inf\left\{(|\mu| r)^{p_n/H} : \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k r}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0\right\}$$

elde ederiz. Bu takdirde $|\mu|^{p_k} \leq \max(1, |\mu|^H)$ olduğundan $|\mu|^{\frac{p_k}{H}} \leq \max(1, |\mu|^H)^{\frac{1}{H}}$ elde edilir. Böylece

$$g_{\lambda}^{\Delta}(\mu x) \leq \max(1, |\mu|^H)^{\frac{1}{H}} \inf\left\{r^{p_n/H} : \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k r}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0\right\}$$

$$\leq \max(1, |\mu|^H)^{\frac{1}{H}} g_{\lambda}^{\Delta}(x)$$

olur. Böylece $g_{\lambda}^{\Delta}(x)$, $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, p)$ sıfıra yakınsak iken $g_{\lambda}^{\Delta}(\mu x)$ de sıfıra yakınsaktır.

Şimdi $x, \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ uzayının sabit bir elemanı olsun. Bu takdirde

$$g_{\lambda}^{\Delta}(x)=\inf\left\{\rho^{p_n/_H}>0:\left(\sum_{k\geq 1}u_k\left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k r}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/_H}\leq 1, n\geq 1\ ,\rho>0\right\}$$

olacak şekilde $\rho>0$ sayısı vardır. $\mu\to 0$ iken

$$g_{\lambda}^{\Delta}(\mu x)=\inf\left\{\rho^{p_n/_H}>0:\left(\sum_{k\geq 1}u_k\left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/_H}\leq 1, n\geq 1,\rho>0\right\}\to 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4 $\mathcal{N}=(N_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi ve $p=(p_k)$ kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m,u,p)$ uzayı $H=\max(1,\sup_k p_k)$ olmak üzere

$$g_{\Delta}^{\lambda}(x)=\inf\left\{\rho^{p_n/_H}>0:\left(\sum_{k\geq 1}u_k\left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/_H}\leq 1, n\geq 1,\rho>0\right\}$$

paranormu ile bir paranormlu uzaydır.

İspat. Her $k\in\mathbb{N}$ için $N_k(0)=0$ olduğundan $x=\theta$ için $\inf\left\{\rho^{p_n/_H}\right\}=0$ olur. Tersine $g_{\Delta}^{\lambda}(x)=0$ olduğunu varsayalım. O halde

$$\inf\left\{\rho^{p_n/_H}>0:\left(\sum_{k\geq 1}u_k\left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/_H}\leq 1\right\}=0$$

olur ki buradan $x=\theta$ olur. $g_{\Delta}^{\lambda}(x)=g_{\Delta}^{\lambda}(-x)$ olduğu aşikardır.

Teorem 3.1 den $a=b=1$ alınırsa $g_{\Delta}^{\lambda}(x+y)\leq g_{\Delta}^{\lambda}(x)+g_{\Delta}^{\lambda}(y)$ elde edilir. Son olarak $g_{\lambda}^{\Delta}(\mu x)$ skaler çarpımının sürekli olduğunu ispatlayalım. μ sıfırdan farklı herhangi bir sayı olsun. Buradan $r=\rho/|\mu|$ seçilirse

$$g_{\Delta}^{\lambda}(\mu x)=\inf\left\{\rho^{p_n/_H}>0:\left(\sum_{k\geq 1}u_k\left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m \mu x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/_H}\leq 1, n\geq 1,\rho>0\right\}$$

$$=\inf\left\{(|\mu|r)^{p_n/_H}:\left(\sum_{k\geq 1}u_k\left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{r}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/_H}\leq 1, n\geq 1,\rho>0\right\}$$

elde ederiz. Bu takdirde $|\mu|^{p_k}\leq\max(1,|\mu|^H)$ olduğundan $|\mu|^{\frac{p_k}{H}}\leq\max(1,|\mu|^H)^{\frac{1}{H}}$ elde edilir. Böylece

$$g_{\Delta}^{\lambda}(\mu x) \leq \max(1,|\mu|^{H})^{\frac{1}{H}} \inf\left\{ r^{\frac{p_n}{H}}: \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{r}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0 \right\}$$

$$\leq \max(1,|\mu|^{H})^{\frac{1}{H}} \; g_{\Delta}^{\lambda}(x)$$

olur. Böylece $g_{\Delta}^{\lambda}(x), \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ sıfıra yakınsak iken $g_{\Delta}^{\lambda}(\mu x)$ de sıfıra yakınsaktır.

Şimdi $x, \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ uzayının sabit bir elemanı olsun. Bu takdirde

$$g_{\Delta}^{\lambda}(x) = \inf\left\{ \rho^{p_n/H} > 0: \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{r}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1 \;, \rho > 0 \right\}$$

olacak şekilde $\rho > 0$ sayısı vardır. $\mu \to 0$ iken

$$g_{\Delta}^{\lambda}(\mu x) = \inf\left\{ \rho^{p_n/H} > 0: \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0 \right\} \to 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.5 $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi ve $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ uzayı $H = \max(1, sup_k\, p_k)$ olmak üzere

$$g_{\lambda}^{\Delta}(x) = \inf\left\{ \rho^{p_n/H} > 0: \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0 \right\}$$

paranormu ile tanımlanmış bir tam paranormlu uzaydır.

İspat. $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ uzayının tam olduğunu gösterelim. (x^i) dizisi $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ uzayında $x^i = (x_k^i)_i = (x_k^1,\, x_k^2, \ldots)$ olmak üzere bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $\varepsilon > 0 \; ve \; \forall i, j > n_0$ için

$$g_{\Delta}^{\lambda}(x^i - x^j)$$

$$= inf\left\{ \rho^{p_n/H} > 0: \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m (x_k^i - x_k^j)|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0 \right\} < \varepsilon \qquad (3.1)$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Buradan her bir $k \in \mathbb{N}$ için $i, j \to \infty$ iken $|x_k^i - x_k^j| \to 0$ olur. Böylece $(x_k^i)_i = (x_k^1,\, x_k^2, \ldots)$ dizisi $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir ve $\mathbb{C}$ tam olduğundan yakınsaktır. $\lim_i x_k^i = x_k$ diyelim. (3.1) eşitliğinde $j \to \infty$ için limit alınırsa $i > n_0$ için

$$\inf\left\{\rho^{p_n/H} > 0: \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{\left|\Delta^m\left(x_k^i - x_k\right)\right|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0\right\} < \varepsilon$$

buluruz. Buradan $\left(x_k^i - x_k\right) \in \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ dir. $\left(x_k^i\right)$, $\left(x_k^i - x_k\right) \in \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, p)$ ve $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ uzayı lineer uzay olduğundan $x_k = \left(x_k^i\right) - \left(x_k^i - x_k\right) \in \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ uzayı tamdır.

Teorem 3.6 $\mathcal{N} = (N_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi ve $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde $\ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m, u, p)$ uzayı $H = \max(1, sup_k\, p_k)$ olmak üzere

$$g_\Delta^\lambda(x) = \inf\left\{\rho^{p_n/H} > 0: \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0\right\}$$

paranormu ile tanımlanmış bir tam paranormlu uzaydır.

İspat. $\ell_N^\lambda(\Delta^m, u, p)$ uzayının tam olduğunu gösterelim. $(x^i\,)$ dizisi $\ell_N^\lambda(\Delta^m, u, p)$ uzayında $x^i = \left(x_k^i\right)_i = (x_k^1,\, x_k^2, \dots)$ olmak üzere bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $\varepsilon > 0$ ve $\forall i, j > n_0$ için

$$g_\Delta^\lambda\left(x^i - x^j\right)$$

$$= \inf\left\{\rho^{p_n/H} > 0: \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k\left|\Delta^m\left(x_k^i - x_k^j\right)\right|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0\right\} < \varepsilon \tag{3.2}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Buradan her bir $k \in \mathbb{N}$ için $i, j \to \infty$ iken $\left|x_k^i - x_k^j\right| \to 0$ olur. Böylece $\left(x_k^i\right)_i = (x_k^1,\, x_k^2, \dots)$ dizisi $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir ve $\mathbb{C}$ tam olduğundan yakınsaktır. $\lim_i x_k^i = x_k$ diyelim. (3.2) eşitliğinde $j \to \infty$ için limit alınırsa $i > n_0$ için

$$\inf\left\{\rho^{p_n/H} > 0: \left(\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k\left|\Delta^m\left(x_k^i - x_k\right)\right|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n \geq 1, \rho > 0\right\} < \varepsilon$$

buluruz. Buradan $\left(x_k^i - x_k\right) \in \ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m, u, p)$ dir. $\left(x_k^i\right)$, $\left(x_k^i - x_k\right) \in \ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m, u, p)$ ve $\ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m, u, p)$ uzayı lineer uzay olduğundan $x_k = \left(x_k^i\right) - \left(x_k^i - x_k\right) \in \ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m, u, p)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m, u, p)$ uzayı tamdır.

Teorem 3.7 $\mathcal{M} = (M_k)$ ve $\mathcal{T} = (T_k)$ Orlicz fonksiyonlarının herhangi iki dizisi olsun. Bu takdirde

i. $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p) \cap \ell_\lambda^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p) \subset \ell_\lambda^{\mathcal{M}+\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p)$,

ii. Eğer $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{T}$ denk ise $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p) = \ell_\lambda^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p)$ dir.

İspat. i. $x \in \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p) \cap \ell_\lambda^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} < \infty \text{ ve } \sum_{k\geq 1} u_k \left[T_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olur. Burada (2.1) eşitsizliğini kullanırsak

$$\left[(M_k + T_k)\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} \leq D\left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} + D\left[T_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki yanı u_k ile çarpılır ve $k \geq 1$ için toplamı alınırsa

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[(M_k + T_k)\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} + D\sum_{k\geq 1} u_k \left[T_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}$$

elde edilmiş olur ve böylece ispat tamamlanır.

ii. $x \in \ell_\lambda^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[T_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olur. Tanım 2.20 deki eşitsizlikte $\alpha = 1$ alınırsa

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} \leq \sum_{k\geq 1} u_k \left[T_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Buradan

$$\ell_\lambda^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p) \subset l_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p) \tag{3.3}$$

olur. Şimdi de $x \in \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ alalım. Bu takdirde

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olur. Tanım 2.20 deki eşitsizlikte $\beta = 1$ alınırsa

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[T_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} \leq \sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Buradan

$$\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p) \subset \ell_\lambda^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p) \tag{3.4}$$

olur. (3.3) ve (3.4) eşitsizliklerinden $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p) = \ell_\lambda^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.8 $\mathcal{N} = (N_k)$ ve $\mathcal{T} = (T_k)$ Orlicz fonksiyonlarının herhangi iki dizisi olsun. Bu takdirde

i. $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p) \cap \ell_{\lambda}^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p) \subset \ell_{\lambda}^{\mathcal{N}+\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p)$

ii. Eğer $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{T}$ denk ise $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p) = \ell_{\lambda}^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p)$ dir.

İspat. i. $x \in \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p) \cap \ell_{\lambda}^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \infty \quad ve \quad \sum_{k\geq 1} u_k \left[T_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olur. Burada (2.1) eşitsizliğini kullanırsak

$$\left[(M_k + T_k)\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leq D\left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} + D\left[T_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki yanı u_k ile çarpılır ve $k \geq 1$ için toplamı alınırsa

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[(M_k + T_k)\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$
$$\leq D\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} + D\sum_{k\geq 1} u_k \left[T_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

elde edilmiş olur ve böylece ispat tamamlanır.

ii. $x \in \ell_{\lambda}^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[T_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olur. Tanım 2.20 deki eşitsizlikte $\alpha = 1$ alınırsa

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leq \sum_{k\geq 1} u_k \left[T_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Buradan

$$\ell_{\lambda}^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p) \subset \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p) \tag{3.5}$$

olur. Şimdi de $x \in \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ alalım. Bu takdirde

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olur. Tanım 2.20 daki eşitsizlikte $\beta = 1$ alınırsa

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[T_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leq \sum_{k\geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Buradan

$$l_N^{\lambda}(\Delta^m, u, p) \subset l_{\lambda}^{T}(\Delta^m, u, p) \tag{3.6}$$

olur. (3.5) ve (3.6) eşitsizliklerinden $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p) = \ell_{\lambda}^{\mathcal{T}}(\Delta^m, u, p)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.9 $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k < t_k$ olsun. Bu takdirde $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p) \subset \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, t)$ dir.

İspat. $x \in \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k \geq 1} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde en az bir $\rho > 0$ sayısı vardır. Örneğin k nın yeterince büyük değerleri ve en az bir sabit $k_0 \in \mathbb{N}$ için $k \geq k_0$ alınırsa $M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right) \leq 1$ sağlanır. M_k lar azalmayan olduğundan

$$\left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{t_k} \leq \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k}$$

olur ve böylece

$$\sum_{k \geq k_0} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{t_k} \leq \sum_{k \geq k_0} u_k \left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

elde edilir. O halde $x \in \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, t)$ olur.

Teorem 3.10 $\mathcal{N} = (N_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi ve her bir $k \in N$ için $0 < p_k < t_k$ olsun. Bu taktirde $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p) \subset \ell_{\lambda}^{\mathcal{N}}(\Delta^m, u, t)$ dir.

İspat. $x \in \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k \geq 1} u_k \left[N_k\left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde en az bir $\rho > 0$ sayısı vardır. Örneğin k nın yeterince büyük değerleri ve en az bir sabit $k_0 \in \mathbb{N}$ için $k \geq k_0$ alınırsa $N_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}\right) \leq 1$ sağlanır. N_k lar azalmayan olduğundan

$$\left[N_k\left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{t_k} \leq \left[N_k\left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

olur ve böylece

$$\sum_{k\geq k_0} u_k\left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{t_k} \leq \sum_{k\geq k_0} u_k\left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

elde edilir ki buradan $x \in \ell_\lambda^{\mathcal{N}}(\Delta^m, u, t)$ olur.

Teorem 3.11 $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu takdirde $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^{m-1}, u, p) \subseteq \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ dir.

İspat. $x \in \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^{m-1}, u, p)$ olsun. Bu takdirde en az bir $\rho > 0$ için

$$\sum_{k\geq 1} u_k\left[M_k\left(\frac{|\Delta^{m-1}x_k|}{\lambda_k 2\rho}\right)\right]^{p_k} \to 0$$

dır. M_k lar azalmayan ve konveks olduğundan

$$\sum_{k\geq 1} u_k\left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k 2\rho}\right)\right]^{p_k}$$

$$= \sum_{k\geq 1} u_k\left[M_k\left(\frac{|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}|}{\lambda_k 2\rho}\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\sum_{k\geq 1} u_k\left[\frac{1}{2}M_k\left(\frac{|\Delta^{m-1}x_k|}{\lambda_k\rho}\right)\right]^{p_k} + D\sum_{k\geq 1} u_k\left[\frac{1}{2}M_k\left(\frac{|\Delta^{m-1}x_{k+1}|}{\lambda_k\rho}\right)\right]^{p_k}$$

yazabiliriz. O halde $x \in \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ bulunur. Böylece $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^{m-1}, u, p) \subseteq \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ olur.

Teorem 3.12 $\mathcal{N} = (N_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu takdirde $\ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^{m-1}, u, p) \subseteq \ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m, u, p)$ dir.

İspat. $x \in \ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^{m-1}, u, p)$ olsun. Bu takdirde en az bir $\rho > 0$ için

$$\sum_{k\geq 1} u_k\left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^{m-1}x_k|}{2\rho}\right)\right]^{p_k} \to 0$$

dır. N_k lar azalmayan ve konveks olduğundan

$$\sum_{k\geq 1} u_k\left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{2\rho}\right)\right]^{p_k}$$

$$= \sum_{k\geq 1} u_k\left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}|}{2\rho}\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\sum_{k\geq 1} u_k\left[\frac{1}{2}N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^{m-1}x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} + D\sum_{k\geq 1} u_k\left[\frac{1}{2}N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^{m-1}x_{k+1}|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

yazabiliriz. O halde $x \in \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ bulunur. Böylece $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^{m-1}, u, p) \subseteq \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ olur.

Teorem 3.13 $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ dizi uzayı solid (normal) ve monotondur.

İspat. $x \in \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ ve (a_k), her $k \in \mathbb{N}$ için $|a_k| \leq 1$ olacak şekilde skaler bir dizi olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k\geq 1} u_k\left[M_k\left(\frac{|a_k||\Delta^m x_k|}{\lambda_k\rho}\right)\right]^{p_k} \leq \sum_{k\geq 1} u_k\left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k\rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

dir. Böylece $ax \in \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ olur. Ayrıca Önerme 2.1 den monoton olduğu görülür.

Teorem 3.14 $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ solid(normal) ve monotondur.

İspat. $x \in \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ ve (a_k), her $k \in \mathbb{N}$ için $|a_k| \leq 1$ olacak şekilde skaler bir dizi olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k\geq 1} u_k\left[N_k\left(\frac{|a_k|\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leq \sum_{k\geq 1} u_k\left[N_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \infty$$

dir. Böylece $ax \in \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ olur. Ayrıca Önerme 2.1 den monoton olduğu görülür.

Sonuç 3.1 (i) Her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \leq 1$ olsun. Bu takdirde $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, p) \subseteq \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ dir.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \geq 1$ olsun. Bu takdirde $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p) \subseteq \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, p)$ dir.

Sonuç 3.2 (i) Her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \leq 1$ olsun. Bu takdirde $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, p) \subseteq \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ dir.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \geq 1$ olsun. Bu takdirde $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p) \subseteq \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, p)$ dir.

3.2. $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ ve $\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ Dizi Uzayları Arasındaki İlişkiler

Tanım 3.2 $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi, $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi, $\lambda = (\lambda_k)$ kesin reel sayıların bir dizisi ve $u_k > 0$ olacak şekilde $u = (u_k)$ reel terimli bir dizi olsun. Bu takdirde

$$\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m,u,p)=\left\{x=(x_k):\sum_{k\geq 1}u_k\left[M_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\infty \; bazı\; \rho>0\; için\right\}$$

ve $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ dizi uzayında her $k\in\mathbb{N}$ için $\lambda_k=1$ alınırsa

$$\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)=\left\{x=(x_k):\sum_{k\geq 1}u_k\left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\infty \; bazı\; \rho>0\; için\right\}$$

dizi uzayları elde edilir.

Teorem 3.15 Eğer $\lambda=(\lambda_k)$ sınırlı ve $inf\lambda_k>0$ olacak şekilde bir dizi ise bu takdirde $\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m,u,p)=\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)=\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ dir.

İspat. İlk önce $\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)\subset\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m,u,p)$ olduğunu gösterelim. $x\in\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ olsun. Bu takdirde en az bir $\rho>0$ için

$$\sum_{k\geq 1}u_k\left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\infty$$

dur. $\lambda=(\lambda_k)$ sınırlı bir dizi olduğundan $a\leq\lambda_k\leq b$ alalım. $\rho_1=\rho b$ alınırsa bu takdirde her k için

$$\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho_1}=\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho b}=\frac{\lambda_k}{b}\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho}\leq\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho}$$

dir. M_k lar azalmayan olduğundan

$$\sum_{k\geq 1}u_k\left[M_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}<\sum_{k\geq 1}u_k\left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\infty$$

olup buradan $\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)\subset\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m,u,p)$ elde edilir.

Şimdi $\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m,u,p)\subset\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ olduğunu gösterelim. $x\in\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m,u,p)$ olsun. Bu takdirde en az bir $\rho>0$ için

$$\sum_{k\geq 1}u_k\left[M_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\infty$$

dur. Eğer $\rho_2={}^{\rho}/_{a}$ alınırsa bu takdirde her k için

$$\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho_2}=\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{{}^{\rho}/_{a}}=\frac{a|\Delta^m x_k|}{\rho}\leq\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}$$

dir. M_k lar azalmayan olduğundan

$$\sum_{k\geq 1}u_k\left[M_k\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}<\sum_{k\geq 1}u_k\left[M_k\left(\frac{\lambda_k|\Delta^m x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\infty$$

olup buradan $\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m,u,p) \subset \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ olur. O halde $\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p) = \ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m,u,p)$ dir.

Şimdi de $\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p) \subset \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ olduğunu gösterelim. $x \in \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ olsun. Bu takdirde en az bir $\rho > 0$ için

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty \text{ dur.}$$

Eğer $\rho_3 = {}^{\rho}/_{a}$ alınırsa M_k lar azalmayan olduğundan

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho_3} \right) \right]^{p_k} \leq \sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olup buradan $\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p) \subset \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ elde edilir.

Son olarak $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p) \subset \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ olduğunu gösterelim. $x \in \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ olsun. Bu takdirde herhangi bir $\rho > 0$ için

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \right]^{p_k} < \infty$$

dir. Eğer $\rho_4 = \rho b$ alınırsa M_k lar azalmayan olduğundan

$$\sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho_4} \right) \right]^{p_k} \leq \sum_{k\geq 1} u_k \left[M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olup buradan $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p) \subset \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ elde edilir.

O halde $\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m,u,p) = \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p) = \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m,u,p)$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Genelleştirilmiş fark dizi uzayı ve Modular dizi uzayı kavramlarını tanımlayıp bunların bazı topolojik özelliklerini verdik. Modular dizi uzayları ve genelleştirilmiş fark dizi uzayları alınarak $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m, u, p)$ ve $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m, u, p)$ dizi uzaylarını tanımladık. Ayrıca bu dizi uzaylarının bazı topolojik özelliklerini ve bu dizi uzayları arasında bazı kapsama bağıntılarını inceledik.

KAYNAKLAR

Alsaedi, R. S. and Bataineh, A. H. A., 2007. On a generalized difference sequence spaces defined by a sequence of Orlicz functions, International Mathematical Forum, 2, 167-177.

Atıci, G., 2011. Orlicz Fonksiyonları Yardımıyla Tanımlanmış Genelleştirlmiş Fark Dizi Uzayları, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ, Türkiye.

Atıci, Turan G., 2017. On Some Topological Properties of Generalized Difference Sequence Spaces Defined, International Journal of Applied Mathematics, 3(2), 151-161.

Bayraktar, M., 1994. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları, s314, Erzurum.

Bektaş, Ç. A. and Atıci G., 2013. On Some New Modular Sequence Spaces, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 31, 55, 65.

Et, M., 1992. Genelleştirlmiş Fark Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ, Türkiye.

Et, M. and Çolak, R., 1995. On generalized difference sequence spaces, Soochow Journal of Mathematics, 21, 377-386

Gupta, M. and Pradhan S., 2008. On Certain Type of Modular Sequence Spaces. Turkish Journal of Mathematics, 32, 293 303.

Goes, G. and Goes, S., 1970. Sequence of variation and sequence of fourier coefficients 1, Mathematische Zeitschrift ,118, 93-102.

Jamwal, S. and Raj K., 2015. An Orlicz Extension of Difference Modular Sequence Spaces, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 33(2), 31-57.

Kamthan, P. K. and Gupta, M., 1981. Sequence spaces and series, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 65, Marcel Dekker Incorporated, New York.

Kızmaz, H., 1981. On certain sequence spaces, Canadian Mathematical Bulletin, 24, 169-176.

Krasnoselskii, M. A. and Rutitsky, Y.B., 1961. Convex functions and Orlicz spaces, Groningen, Netherlands.

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.

Lindenstrauss, J. and Tzafiri, L., 1965. On Orlicz sequence spaces, Israel Journal of Mathematics, 10, 379-390.

Maddox, I. J., 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, London and New York.

Parashar, S. D. and Choudhary, B., 1994. Sequence Spaces defined by Orlicz functions, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 25, 419-428.

Woo, J. Y. T., 1973. On Modular Sequence spaces, Studia Mathematica, 48, 271-289.

Ek-9

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	✓	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	✓	
Denklem yazımları uygun mu?	✓	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	✓	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	✓	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	✓	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	✓	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	✓	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	✓	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	✓	
+Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	✓	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

	Unvanı Adı SOYADI	İmza
Öğrenci :	Semih TEKDEMİR	....
Danışman :	Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICI TURAN	....

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum /vermiyorum.**

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı
Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI	Tarih	İmza
Dr. Öğr. Üyesi Harun ÖNLÜ	06.01.2020	....

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Semih TEKDEMİR
Uyruğu	**:**	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Kulp 01/10/1989
Telefon	**:**	5317705018
Faks	**:**	
e-mail	**:**	semihtekdemir@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Güler Şevki Özbek Lisesi**	**2006**
Üniversite	:	**Muş Alparslan üniversitesi Fen Edebiyat Fakultesi Matematik Bölümü**	**2015**
Üniversite	:	**Muş Alparslan üniversitesi Eğitim Fakultesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği**	**2019**
Yüksek Lisans	:	**Muş Alparslan üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü /Matematik (Yl) (Tezli)**	**2019**
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2015-2016	**Suvaran Ortaokulu**	**Matematik Öğretmeni**
2016-2017	**Ahmedi Hani Anadolu lisesi**	**Matematik Öğretmeni**

YABANCI DİLLER

İngilizce