T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ SİNİR AĞLARINI MODELLENDİREN İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN GLOBAL ASİMTOTİK KARARLILIĞI

Saliha KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Ocak-2019
MUŞ

TEZ KABUL VE ONAYI

Saliha KORKMAZ tarafından hazırlanan "**Gecikmeli Sinir Ağlarını Modellendiren İntegro Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Global Asimtotik Kararlılığı**" adlı tez çalışması 07/12/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Murat KARAKAŞ Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	....
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Zeliha KÖRPINAR Muş Alparslan Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi İşletme Bölümü	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Murad Aydın ŞANDA
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Saliha KORKMAZ

Tarih : 07/12/2018

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GECİKMELİ SİNİR AĞLARINI MODELLENDİREN İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN GLOBAL ASİMTOTİK KARARLILIĞI

Saliha KORKMAZ

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeliha KÖRPINAR

2019, 29 Sayfa

Jüri
Dr. Öğr. Üyesi Zeliha KÖRPINAR
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ
Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Bu tez çalışmasında; gecikmeli sinir ağlarının denge noktasının global asimtotik kararlılığı ele alındı. Birinci bölümde; global asimtotik kararlılık ve sinir ağları hakkında genel bir bilgi verildi. İkinci bölümde; literatürde yapılan çalışmalar özetlendi. Üçüncü bölümde; çalışmada kullanılacak temel kavramlar verilerek Lyapunov metodu hakkında bilgi verildi. Dördüncü bölümde; gecikmeli sinir ağlarını modellendiren iki farklı diferansiyel denklem sisteminin denge noktasının global asimtotik kararlılığı için yeter şartlar Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak elde edildi. Son bölümde; araştırmacılar için bazı denklem modellerinin denge noktasının global asimtotik kararlılığının araştırılması tavsiye edildi.

Anahtar Kelimeler: Global asimptotik kararlılık, Kararlılık, Lyapunov fonksiyon, Zaman-değişken gecikme.

ABSTRACT

MS THESIS

GLOBAL ASYMTOTIC STABILITY OF INTEGRO DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS MODELING DELAYED NEURAL NETWORKS

Saliha KORKMAZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS SCIENCE

Advisor: Asst. Prof. Dr. Zeliha KÖRPINAR

2019, 29 Pages

Jury
Asst. Prof. Dr. Zeliha KÖRPINAR
Assoc. Prof. Dr. Murat KARAKAŞ
Asst. Prof. Dr. Muaz SEYDAOĞLU

In this thesis; the global asymptotic stability of the equilibrium point of delayed neural networks was studied. In the first chapter; the basic properties of the global asymptotic stability and the neural network were given. In the second chapter; some results which are in the literature were introduced. In the third chapter; the basic notions and main idea about Lyapunov method were exhibited. In the fourth chapter; it was shown that the global asymptotic stability of the equilibrium point of two different systems of differential equations that model delayed neural networks can be obtained by using the second method of Lyapunov. In the last chapter; for the reader to investigating the global asymptotic stability of the equilibrium point of some equation models was advised.

Keywords: Global asimptotic stability, Lyapunov function, Stability, Time-varying delays

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca her türlü bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, desteğini her zaman yanımda hissettiğim, mesleki açıdan her zaman benim için bir ufuk çizgisi olan ve özellikle bu süreçte bana büyük sabır gösteren çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Zeliha KÖRPINAR'a teşekür eder saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli anne ve babama, bu tez çalışmamda bir an olsun desteğini esirgemeyen eşime ve çocuklarıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Saliha KORKMAZ
MUŞ-2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

R : Reel sayılar kümesi.

$C^n[a,b]$: $[a,b]$ aralığında n. mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonların kümesi.

1. GİRİŞ

Bilgi işleme sistemlerinin yeni bir sınıfı hücresel sinir şebekesi olarak önerilmektedir. Bu sistem sinirsel şebeke (network) ağı benzeri, gerçek zamanlı sinyalleri işleyen büyük ölçekli doğrusal olmayan analog bir devredir. Hücresel bir robot benzeri, hücreler olarak adlandırılan, düzenli aralıklı devre klonlarının büyük bir kümesidir ve bunlar birbirleriyle sadece en yakın komşuları vasıtası ile doğrudan iletişim kurarlar (Chua ve Yang, 1988a). Her bir hücre doğrusal bir kapasitörden, doğrusal olmayan bir voltaj-kontrollü akım kaynağından ve bir kaç dirençli lineer devre elemanından oluşmaktadır. Hücresel sinir ağları her iki dünyanın en iyi özelliklerini paylaşır; sürekli zaman özelliği, gerçek zamanlı sinyal işleme istediğini dijital alanda tespit eder ve yerel ara bağlantı özelliğinin VLSI uygulaması için özel hale getirilmesini sağlar. Hücresel sinir ağları, yüksek hızlı paralel sinyalleri işleme için olağanüstü derecede uygundur. Görüntü işleme için hücresel sinir ağlarının etkileyici bazı uygulamaları bir araştırmada sunulmuştur (Chua ve Yang, 1988b).

Analog devreler, modern elektronik teknolojisinin geliştirilmesinde çok önemli bir rol oynamıştır. Dijital bilgisayar çağımızda bile analog devreler, gerçek zamanlı sinyal işleme yetenekleri nedeniyle iletişim, güç, otomatik kontrol, ses ve görüntü elektroniği gibi alanlara hâlâ hâkimdir. Geleneksel dijital hesaplama yöntemleri, seri doğaları nedeniyle ciddi bir hız darboğazı içine girmişlerdir. Bu problemin üstesinden gelmek için "sinir ağları" adı verilen nörobiyolojinin bazı yönlerine dayanan ve entegre devrelere uyarlanmış yeni bir hesaplama modeli önerilmiştir. Sinir ağlarının temel özellikleri asenkron paralel işlem, sürekli zaman dinamiği ve ağ elemanlarının küresel etkileşimidir. Çeşitli alanlar (optimizasyon, doğrusal ve doğrusal olmayan programlama, ilişkisel bellek, örüntü tanıma ve bilgisayar görüşü gibi) için etkileyici olmayan sinir ağları uygulamalarının teşvik edilmesi önerilmiştir (Hopfield, 1982; Hopfield, 1984).

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde, sinir ağlarının temel özelliklerinden bazılarına sahip olan ve görüntü işleme ve desen tanıma gibi alanlarda potansiyel uygulamalar için önemli olan hücresel sinir ağı adı verilen değişken gecikmeli sinir ağlarını modellendiren $i, j = 1,2, \dots n$ için

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) f_j\left(x_j\big(t-\tau(t)\big)\right) + J_i \,, \qquad (1.1)$$

diferansiyel denklem sistemi ele alınmıştır. Burada n, ağdaki sinir sayısını gösterir, $x_i(t)$, t zamanda i. siniri temsil eder $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right)^T \in R^n$ ve $f\left(x(t)\right) = \left(f_1\left(x_1(t)\right), f_2\left(x_2(t)\right), \dots, f_n\left(x_n(t)\right)\right)^T \in R^n$, t zamandaki j inci sinirin aktivasyon fonksiyonunu gösterir $C = diag(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$ bir pozitif köşegen matris $A = \left(a_{ij}(t)\right)_{nxn}$, $B = \left(b_{ij}(t)\right)_{nxn}$ değişkene bağlı ağırlık katsayılarını temsil eden geri bildirim matrisleri, $J = (J_1, J_2, \dots, J_n)^T \in R^n$ sabit dış girdi vektörü, ve τ pozitif bir sabit olmak üzere $\tau(t)$ değişkene bağlı gecikmesi $0 \le \tau(t) \le \tau$ sağlayan sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere (1.1) diferansiyel denklem sisteminin denge noktasının global asimptotik kararlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir. Sonra $i, j = 1,2, \dots n$ için

$$x_i'(t) = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) f_j\left(x_j\left(t - \tau(t)\right)\right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) f_j\left(x_j(s)\right) ds + J_i \qquad (1.2)$$

diferansiyel denklem sistemi ele alınmıştır. Burada n, ağdaki sinir sayısını gösterir, $x_i(t)$, t zamanda i. siniri temsil eder $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right)^T \in R^n$ ve $f\left(x(t)\right) = \left(f_1\left(x_1(t)\right), f_2\left(x_2(t)\right), \dots, f_n\left(x_n(t)\right)\right)^T \in R^n$, t zamandaki j inci sinirin aktivasyon fonksiyonunu gösterir $D = diag(d_1, d_2, \dots, d_n) > 0$ bir pozitif köşegen matris $A = \left(a_{ij}(t)\right)_{nxn}$, $B = \left(b_{ij}(t)\right)_{nxn}$ değişkene bağlı ağırlık katsayılarını temsil eden geri bildirim matrisleri ve $C = \left(c_{ij}\right)_{nxn}$ sabit ağırlık katsayısını temsil eden geri bildirim matrisi, $J = (J_1, J_2, \dots, J_n)^T \in R^n$ sabit dış girdi vektörü, $K_{ij}: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ çekirdekleri $\int_0^{+\infty} K_{ij}(s) ds = 1$ şartını sağlayan parçalı sürekli fonksiyonlar ve τ pozitif bir sabit olmak üzere $\tau(t)$ değişkene bağlı gecikmesi $0 \le \tau(t) \le \tau$ sağlayan sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere (1.2) diferansiyel denklem sisteminin denge noktasının global asimptotik kararlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir..

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Son zamanlarda; hareket içeren sistemlerin dinamik davranışlarını modellemek için yaygın olarak kullanılan zaman değişken gecikmeli yada gecikmesiz yapay sinir ağı modellerinin kararlılık, üstel kararlılık, asimtotik kararlılık ve global asimtotik karalılık gibi farklı kararlılık davranışları bir çok yazar tarafından ele alınmış ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir. Aynı zamanda sinir ağları; örüntü tanıma, görüntü işleme, bellek tasarımı gibi problemlerin çözümünde de çok önemli rol oynamaktadır. Uygulanacak problemin yapısına göre yapay sinir ağlarının dinamik davranışı farklılık gösterir. Örneğin; yapay sinir ağı, optimasyon problemlerinin çözümünde global asimtotik kararlı olan bir tek denge noktasına sahip olması gerekirken, çağrışımlı bellek olarak çalıştırıldığında birden çok denge noktasına sahip olması gerekir.

Literatürdeki yapay sinir ağlarının ilk hesaplama modelinin tanımlanması 1943 de yapay nöron tanımlaması ile ortaya çıkmıştır (Mcculloch ve Pitts, 1943). Biyolojik nöronlardan esinlenerek bu nöron yapay sinir ağının temel birimi olarak sunulmuştur. Özellikle son zamanların en çok çalışılan konuları arasında yerini almıştır. Şimdi kısaca literatürde yer alan bazı yapay sinir ağı modelleri hakkında genel bir inceleme sunacağız:

Literatürde yapay sinir ağı üzerine ortaya atılan ilk model

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + J_i, \;\; i = 1,2,\dots,n \tag{2.1}$$

diferansiyel denklem sistemidir (Hopfield, 1984). Yazar bu sistemin denge noktasının global kararlılığı için belli koşullar elde etmiştir. Daha önce Mcculloch ve Pitts (1943) bu sistemin sinirler üzerine dayandırılan stokastik modelle çok yakın benzer özelliklere sahip olduğunu göstermişlerdir.

Zaman gecikmeleri ise yapay sinir ağlarının osilasyon yapmasına çözümlerin kararlı durumdan karsız duruma geçmesine periyodik çözümler üretmesi gibi dinamik davranışlar göstermesinden dolayı Marcus ve Westerveld (1989), tarafından (2.1) diferansiyel denklem sistemine $\tau > 0$ zaman gecikmesi eklenerek

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(x_j(t-\tau)\right) + J_i, \;\; i = 1,2,\dots,n \tag{2.2}$$

modelinin davranışı ele alınmıştır. (2.2) yapay sinir ağı modelinin dinamik davranışlarını ele alan birçok çalışma yapılmıştır. Arik (2000) bu sistemin denge noktasının global asimtotik kararlılığının gecikmeden bağımsız olduğunu belli koşullar altında göstermiştir.

Gopalsamy ve He (1994) (2.2) diferansiyel denklem sistemindeki zaman gecikmeli yapay sinir ağı modelini farklı zaman gecikmeleriyle

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(x_j\left(t-\tau_{ij}\right)\right) + J_i, \;\; i = 1,2,\dots,n \qquad (2.3)$$

olarak düşünmüşler.

Arik ve Tavsanoglu (2000) gecikmeli sinir ağlarını modelleyen

$$x_i'(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\tau} y_j\left(x_j(t-\tau)\right) + u_i, i = 1,2,\dots,n \quad (2.4)$$

diferansiyel denklem sisteminin global asimtotik kararlılığı için yeter şartlar elde etmişlerdir. Arik (2002b) bu sisteminin denge noktasının global asimtotik kararlılığı ve sistemin çözümünün tekliği için yeni koşullar oluşturmuştur. Arik (2003b) (2.4) sisteminin global robust kararlılığını ele almıştır.

Arik (2002a)

$$\frac{du(t)}{dt} = -Au(t) + W_0 g\left(u(t)\right) + W_1 g\left(u(t-\tau)\right) + I \qquad (2.5)$$

sabit gecikmeli sinir ağlarının çözümlerinin tekliğini ve denge noktasının global asimtotik kararlılığını araştırmıştır. Arik (2003a) (2.5) sisteminin geniş bir sınıfının global asimtotik kararlılığını araştırmıştır. Arik (2004) (2.5) sistemindeki sabit gecikmeyi değişken gecikme alarak sistemin denge noktasının üstel kararlılığını belli koşullar altında incelemiştir.

Cao (2000) değişen zaman gecikmeli

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j\left(x_j\left(t-\tau(t)\right)\right) + J_i \qquad (2.6)$$

diferansiyel denklem sisteminin global eexponential kararlılığı için yeter şartlar elde etmiştir. Zhang, ve ark. (2005b) bu sistemin denge noktasının global asimtotik kararlılığı için yeter şartları Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak elde etmişlerdir. (Cao, 2001a; Cao, 2001b; Cao ve Wang, 2003; Zhang ve ark., 2005a) belli modellerin global asimtotik kararlılığını araştırmışlardır.

Guo (2010) değişken gecikmeli sinir ağlarını modelleyen

$$x_i'(t) = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j\left(x_j\left(t-\tau(t)\right)\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) f_j\left(x_j(s)\right) ds + J_i \qquad (2.7)$$

integro diferansiyel denklem sisteminin denge noktasının global asimtotik kararlılığı için yeter şartları Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak elde etmiştir.

(Khalil, 1988; Cao, 2001b; Chen, 2001; Guzelis ve Chua, 1993; Hou ve Qian, 1998; Joy, 2000; Li ve ark.,2003; Liang ve Wu, 1998; Liao ve Wang, 2003; Lu, 2000; Peng ve ark. 2002; Yu ve ark. 2003; Zhang ve ark. 2001; Zhang ve ark. 2003; Zhang, 2003; Zhou ve Cao, 2002) belli modellerin çeşitli kararlılık analizlerini yapmışlardır.

Bu tez çalışmasında yukarıdaki çalışmalardan esinlenerek özellikle Guo (2010) ve Zhang, Wei ve Xu (2005b) nin modellerindeki sabit katsayı matrislerini zamana bağlı sınırlı değişken fonksiyonlar alınarak

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) f_j\left(x_j\big(t-\tau(t)\big)\right) + J_i \qquad (2.8)$$

ve

$$x_i'(t) = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) f_j\left(x_j\big(t-\tau(t)\big)\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) f_j\left(x_j(s)\right) ds + J_i \qquad (2.9)$$

formundaki diferansiyel denklemlerinin denge noktasının global asimtotik kararlılığı için yeter şartlar verilmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde araştırma sonuçları ve tartışma kısmında kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

3.1. Temel kavramlar

$X \in R^n$, $I = [0, \infty)$ ve $f(t, X)$ fonksiyonu $\Omega \subset IxR^n$ bölgesinde tanımlanan ve (t_0, X_0) da sürekli bir vektör fonksiyon olmak üzere

$$X' = F(t, X) \tag{3.1}$$

diferansiyel denklem sistemi verilsin. (3.1) diferansiyel denklem sisteminin her bir (t_0, X_0) için

$$X(t_0; t_0, X_0) = X_0 \tag{3.2}$$

ve

$$X(t; t_0, X_0) = X \tag{3.3}$$

sağlayan bir $X(t; t_0, X_0)$ çözümü vardır. (3.1) denkleminin bir çözümü $X_0(t)$ olsun. (3.1) de $X = Y + X_0(t)$ alarak

$$Y' = F\big(t, Y + X_0(t)\big) - F\big(t, X_0(t)\big) \tag{3.4}$$

olur. $G(t, Y) = F\big(t, Y + X_0(t)\big) - F\big(t, X_0(t)\big)$ olsun o zaman $G(t, 0) = 0$ olur. $Y = 0$ (3.4) denkleminin bir çözümü olur. Yani (3.1) diferansiyel denkleminin herhangi bir çözümü sıfır çözüme dönüştürülebilir. Dolayısıyla (3.1) diferansiyel denkleminin bir $X_0(t)$ çözümünün periyodikliğini, sınırlılığını ve kararlılığını tartışmak (3.4) diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün periyodikliğini, sınırlılığını ve kararlılığını tartışmakla aynıdır. Bu sebepten dolayı $F(t, 0) = 0$ kabul ederiz.

Reel değerli bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ vektörünün normu $\|x\|$ ile gösterilir ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $\forall x \in R^n$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\forall x, y \in R^n$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- $\forall \alpha \in R$ ve $\forall x \in R^n$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

Tanım 3.1. (3.1) diferansiyel denkleminin (t_0, X_0) dan $X(t; t_0, X_0)$ geçen çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\|X_0\| < \delta$ iken $t \geq t_0$ için $\|X(t; t_0, X_0)\| < \varepsilon$ sağlayan $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ varsa (3.1) denkleminin $X(t_0, X_0) = 0$ sıfır çözümü kararlıdır denir.

Tanım 3.2. Tanım 3.1. deki δ sayısı t_0 dan bağımsız ise (3.1) denkleminin $X(t_0) = 0$ sıfır çözümü düzgün kararlıdır denir.

Tanım 3.3. Eğer (3.1) denkleminin $X(t_0, X_0) = 0$ sıfır çözümü kararlı ve her bir $t_0 \geq 0$ için $\|X_0\| < \eta$ sağlayan $\eta > 0$ var $t \to \infty$ iken $\|X(t; t_0, X_0)\| \to 0$ ise (3.1) denkleminin $X(t_0, X_0) = 0$ sıfır çözümü asimptotik kararlıdır denir.

Tanım3.4. Ω, R^n de sıfır vektörünü içeren açık bir küme olmak üzere $V: \Omega \to R^n$ ve $V(0) = 0$ olsun. Eğer $x \in \Omega \backslash \{0\}$ için $V(x) > 0$ ise V fonksiyonuna pozitif tanımlıdır, $V(x) < 0$ ise negatif tanımlıdır denir.

Tanım 3.5. Simetrik bir nxn tipinde bir A matrisinin bütün öz değerleri sıfırdan büyük ise A matrisi pozitif tanımlıdır denir. $A > 0$ ile gösterilir.

Tanım 3.6. Q, R^n de sıfır vektörünü içeren bir bölge olsun ayrıca $V: D = [0, \infty) x\Omega \to [0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $t \geq 0$ için $V(t, 0) = 0$, V pozitif tanımlı ve birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise bu takdirde V ye Lyapunov Fonksiyonu adı verilir.

Teorem 3.7. $\dot{x} = f(x)$ diferansiyel denklem sisteminin denge noktası $x = 0$ olsun. $V: R^n \to R$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $V(0) = 0$, $\forall x \neq 0$ için $V(x) > 0$ ve $\forall x \in R^n$ için $\dot{V}(x) \leq 0$ ise $\dot{x} = f(x)$ diferansiyel denklem sisteminin $x = 0$ denge noktası kararlıdır, eğer $\forall x \neq 0$ için $\dot{V}(x) < 0$ ise $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır. Diğer yandan $\forall x \neq 0$ için $\dot{V}(x) > 0$ ise $x = 0$ denge noktası kararsızdır.

Teorem 3.8. $\dot{x} = f(x)$ diferansiyel denklem sisteminin denge noktası $x = 0$ olsun. $V: R^n \to R$ sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $V(0) = 0$, $\forall x \neq 0$ için $V(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ için $\dot{V}(x) < 0$ ve $\|x\| \to \infty$ iken $V(x) \to \infty$ ise o zaman $\dot{x} = f(x)$ diferansiyel denklem sisteminin $x = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

3.2. Lyapunov'un ikinci metodu

Bu çalışmada Hadock ve Terjki (1983) tarafından geliştirilen Lyapunov-Razumikhin yöntemi kullanıldı. Lyapunov'un ikinci metodu, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin kararlılık davranışlarını incelemede kullanılan, en iyi sonuçları veren metotlardan biridir (Lyapunov, 1892). Bu metodun özelliği, çözümlere yönelik herhangi bir ön bilgi sahibi olmaksızın çözümlerin kararlılığı hakkında bilgi elde etmektir. Bu metodu 1892 de kullanan Lyapunov, bu metodu sadece basit kararlılık teoremlerini kurmak için kullanmasına rağmen onun bu basit düşünceleri son 40 yıl boyunca fizik ve mühendislikteki yeni problemlere etkili bir şekilde uygulanmaktadır. Bugün bu metod sadece diferansiyel denklemler teorisinde değil aynı zamanda kontrol sistemler teorisinde, dinamik sistemlerde, kuvvet sistemler analizinde ve feedback sistemlerde etkili bir araç olarak kullanılmaktadır.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

4.1. Zaman Değişken Gecikmeli Sinir Ağlarının Global Asimtotik Kararlılığı

Bu bölümde Lyapunov-Razumikhin tekniği (Hadock ve Terjki, 1983) kullanılarak değişken gecikmeli sinir ağlarının denge noktasının global asimptotik kararlılığı için bazı yeni şartlar verilmiştir. Bu yeni şartlarda gecikme fonksiyonunun diferansiyellenebilir olması gerekmez ve aktivasyon fonksiyonlarının sınırlı ve monoton azalmayan olmasına ihtiyaç yoktur. Değişken gecikmeli bir sürekli zaman sinir ağının dinamik davranışı aşağıdaki $i = 1,2,\dots,n$ için

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) f_j\left(x_j\big(t-\tau(t)\big)\right) + J_i \qquad (4.1)$$

diferansiyel denklem ile tanımlanabilir, burada n, ağdaki sinir sayısını gösterir, $x_i(t)$, t zamanda i. siniri temsil eder $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)^T \in R^n$ ve $f\big(x(t)\big) = \Big(f_1\big(x_1(t)\big), f_2\big(x_2(t)\big), \dots, f_n\big(x_n(t)\big)\Big)^T \in R^n$, t zamandaki j inci sinirin aktivasyon fonksiyonunu gösterir $C = diag(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$ bir pozitif köşegen matris $A = \big(a_{ij}(t)\big)_{nxn}$, $B = \big(b_{ij}(t)\big)_{nxn}$ değişkene bağlı ağırlık katsayılarını temsil eden geri bildirim matrisleri, $J = (J_1, J_2, \dots, J_n)^T \in R^n$ sabit dış girdi vektörü, ve τ pozitif bir sabit olmak üzere $\tau(t)$ değişkene bağlı gecikmesi $0 \le \tau(t) \le \tau$ sağlayan sınırlı ve sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca (4.1) diferansiyel denklem sistemindeki f_i $(i = 1,2,\dots,n)$ fonksiyonlarını sınırlı ve aşağıdaki şartı sağlayacak şekilde inşa edilecektir.

$$\forall \eta_1, \eta_2 \in R \text{ için } |f_i(\eta_1) - f_i(\eta_2)| \le L_i |\eta_1 - \eta_2|, \qquad \eta_1 \ne \eta_2. \qquad (4.2)$$

Bu fonksiyonların sınıfı, (Chua ve Yang, 1988) de kullanılan $f_i(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$ fonksiyonları hem genel sigmoid aktivasyon fonksiyonlarından hem de parçalı lineer fonksiyonlardan daha geneldir. (4.1) diferansiyel denklem sisteminin başlangıç şartı $s \in [-\tau, 0]$ için $\phi_i(s)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$x_i(s) = \phi_i(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad i = 1,2,\dots,n$$

olsun.

Kabul edelim ki $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$, (4.1) diferansiyel denklem sisteminin bir denge noktasıdır. (4.1) diferansiyel denklem sistemine $g_j\left(y_j(t)\right) = f_j\left(y_j(t) + x_j^*\right) - f_j\left(x_j^*\right)$ olmak üzere $i = 1,2, \dots, n$ için $y_i = x_i - x_i^*$ dönüşümü yapılarak

$$y_i'(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) g_j\left(y_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) g_j\left(y_j\left(t - \tau(t)\right)\right), \qquad (4.3)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

Her bir $f_j(.)$ fonksiyonu (4.2) şartını sağladığından her bir $g_j(.)$ fonksiyonu da

$\forall \eta_j \in R$ için

$$\left|g_j(\eta_j)\right| \leq L_j\left|\eta_j\right|,$$
$$g_j(0) = 0 \qquad (4.4)$$

sağlar.

(4.1) diferansiyel denklem siteminin $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ denge noktasının kararlılığını ispatlamak için (4.3) diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararlılığını ispatlamak yeterlidir. Bunun için (Hadock ve Terjki, 1983) tarafından geliştirilen Lyapunov-Razumikhin tekniği verilir.

$C = C([-\tau, 0], R^n)$ olmak üzere $f: C \to R^n$ ve $s \in [-\tau, 0]$ için $x_t(s) = x(t + s)$ ile tanımlanan $x_t \in C$ olmak üzere

$$x'(t) = f(x_t), \qquad (4.5)$$

gecikme argümanlı diferansiyel denklem sistemi verilsin. C^1 de tanımlanan $V: R^n \to R$ Lyapunov Fonksiyonu verilsin.

Lemma 4.1. $f(0) = 0$ olmak üzere kabul edelim ki f fonksiyonu C deki sınırlı kümeleri R^n deki sınırlı kümelere dönüştürür ve süreklidir.

$V(0) = 0, \forall\, 0 \neq |x| < N$ için $V(x) > 0$, $V'(0) = 0$ olacak şekilde bir N sabiti ve bir $V(x)$ Lyapunov Fonksiyonu vardır ve $\max_{-\tau \leq s \leq 0} V\left(\phi(s)\right) = V\left(\phi(0)\right)$ olacak şekilde $\forall\, 0 \neq \|\phi\| < N$ için $V'(\phi) < 0$. Burada $V'(\phi)$ (4.5) gecikmeli diferansiyel denkleminin bir $x(t, \phi)$ çözümü boyunca V nin sağ üst türevini gösterir. O zaman (4.5) diferansiyel denkleminin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır. Buna ilaveten her $t \geq 0$ için $\|x_t(\phi)\| < N$ sağlayan her bir çözüm için $t \to \infty$ iken C de $x_t(\phi) \to 0$ olur (Guo, 2010).

Teorem 4.2 $|a_{ij}(t)| \leq \mu_{ij}$ ve $|b_{ij}(t)| \leq \sigma_{ij}$ olmak üzere μ_{ij} ve σ_{ij} pozitif sabitler var ve eğer

$$\min_{1\leq i\leq n}\left\{c_i - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{L_j\mu_{ij}}{4\varepsilon_1} + \frac{L_j\sigma_{ij}}{4\varepsilon_2} + \varepsilon_1 L_i \mu_{ji}\right)\right\} > \max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2 L_i \sigma_{ji}\right\} \tag{4.6}$$

sağlayan ε_1 ve ε_2 pozitif sabitleri varsa (4.1) diferansiyel denkleminin denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat Teoremi ispatlamak için temel araç olarak

$$V(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t)$$

Lypunov Fonksiyonu kullanılır. (4.3) diferansiyel denklem sisteminin bir çözümü boyunca V nin üst sağ türevini hesaplayarak

$$V'(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t).\, y_i'(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\left(-c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) g_j\left(y_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) g_j\left(y_j\left(t-\tau(t)\right)\right)\right)$$

elde edilir. Böylece

$$V'(y) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(-c_i y_i^2(t) + \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)| L_j |y_i(t)|\,|y_j(t)|\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}(t)||y_i(t)|\, L_j \left|y_j\left(t-\tau(t)\right)\right|\right) \tag{4.7}$$

yazılabilir.

Her $a, b \in R$ ve her $\varepsilon > 0$ için $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$ eşitsizliğini kullanarak

$$|y_i(t)||y_j(t)| \leq \frac{1}{4\varepsilon_1} y_i^2(t) + \varepsilon_1 y_j^2(t),$$

$$|y_i(t)|\left|y_j(t-\tau(t))\right| \leq \frac{1}{4\varepsilon_2} y_i^2(t) + \varepsilon_2 y_j^2\left(t-\tau(t)\right) \tag{4.8}$$

yazılabilir. (4.8) eşitsizliklerini ve $|a_{ij}(t)| \leq \mu_{ij}$ ve $|b_{ij}(t)| \leq \sigma_{ij}$ eşitsizliklerini (4.7) de yerine yazarak

$$V'(y) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(-c_i y_i^2(t) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\mu_{ij}\,L_j}{4\varepsilon_1}y_i^2(t) + \sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}\,L_j\varepsilon_1 y_j^2(t) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_{ij}L_j}{4\varepsilon_2}y_i^2(t)\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}L_j\varepsilon_2 y_j^2(t-\tau(t))\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left(c_i - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu_{ij}\,L_j}{4\varepsilon_1} + \frac{\sigma_{ij}L_j}{4\varepsilon_2} + \varepsilon_1 L_i\mu_{ji}\right)\right)y_i^2(t) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2 L_\mathrm{i}\sigma_{ji}\right)y_i^2(t-\tau(t))$$

$$\leq -\underbrace{min}_{1\leq i\leq n}\left\{c_i - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu_{ij}\,L_j}{4\varepsilon_1} + \frac{\sigma_{ij}L_j}{4\varepsilon_2} + \varepsilon_1 L_i\mu_{ji}\right)\right\}\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t)$$

$$+ \max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2 L_\mathrm{i}\sigma_{ji}\right\}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\big(t-\tau(t)\big)$$

sahip olunur. Böylece $y(t) \neq 0$ ve $\max_{s\in[-\tau,0]}\|y(t+s)\|_2 = \|y(t)\|_2$ sağlayan t ler için

$$V'(y) \leq -\left(\min_{1\leq i\leq n}\left\{c_i - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu_{ij}\,L_j}{4\varepsilon_1} + \frac{\sigma_{ij}L_j}{4\varepsilon_2} + \varepsilon_1 L_i\mu_{ji}\right)\right\}\right.$$

$$\left. - \underset{1\leq i\leq n}{max}\left\{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2 L_\mathrm{i}\sigma_{ji}\right\}\right)\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t) < 0.$$

elde edilir. Lemma 4.1 den (4.3) diferansiyel denkleminin sıfır çözümü global asimptotik kararlıdır dolayısıyla (4.3) denkleminin $x^* = [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*]^T$ çözümü global asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.3 $|a_{ij}(t)| \leq \mu_{ij}$ ve $|b_{ij}(t)| \leq \sigma_{ij}$ olmak üzere μ_{ij} ve σ_{ij} pozitif sabitler var ve eğer

i. $$\min_{1\leq i\leq n}\left\{c_i - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{L_j^2\mu_{ij}}{4\varepsilon_1} + \frac{L_j^2\sigma_{ij}}{4\varepsilon_2} + \varepsilon_1\mu_{ji}\right)\right\} > \max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2\sigma_{ji}\right\},$$

ii. $$\min_{1\leq i\leq n}\left\{c_i - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu_{ij}}{4\varepsilon_1} + \frac{\sigma_{ij}}{4\varepsilon_2} + \varepsilon_1 L_i^2\mu_{ji}\right)\right\} > \max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2 L_i^2\sigma_{ji}\right\},$$

iii. $$\min_{1\leq i\leq n}\left\{c_i - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{L_j^2\mu_{ij}}{4\varepsilon_1} + \frac{\sigma_{ij}}{4\varepsilon_2} + \varepsilon_1\mu_{ji}\right)\right\} > \max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2 L_i^2\sigma_{ji}\right\},$$

iv. $$\min_{1\leq i\leq n}\left\{c_i - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu_{ij}}{4\varepsilon_1} + \frac{L_j^2\sigma_{ij}}{4\varepsilon_2} + \varepsilon_1 L_i^2\mu_{ji}\right)\right\} > \max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2\sigma_{ji}\right\}$$

sağlayan ε_1 ve ε_2 pozitif sabitleri varsa o zaman (4.1) diferansiyel denkleminin denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat İspat için Teorem 4.2 nin ispatında kullanılan Lyapunov Fonksiyonundan yararlanılarak benzer bir yol izlenir. Her $a, b \in R$ ve her $\varepsilon > 0$ için $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$ eşitsizliğini kullanarak

$$L_j|y_i(t)||y_j(t)| \leq \frac{1}{4\varepsilon_1}L_j^2 y_i^2(t) + \varepsilon_1 y_j^2(t),$$
$$L_j|y_i(t)||y_j(t-\tau(t))| \leq \frac{1}{4\varepsilon_2}L_j^2 y_i^2(t) + \varepsilon_2 y_j^2\big(t-\tau(t)\big).$$

eşitsizlikleri yazılabilir bu eşitsizlikleri (4.7) eşitsizliğinde yerine yazarak Teorem 4.3 ün i. şartından

$$V'(y) < 0$$

elde edilir.

$$L_j|y_i(t)||y_j(t)| \leq \frac{1}{4\varepsilon_1}y_i^2(t) + \varepsilon_1 L_j^2 y_j^2(t),$$
$$L_j|y_i(t)||y_j(t-\tau(t))| \leq \frac{1}{4\varepsilon_2}y_i^2(t) + \varepsilon_2 L_j^2 y_j^2\big(t-\tau(t)\big)$$

eşitsizliklerini (4.7) de yazarak Teorem 4.3 ün ii. şartından

$$V'(y) < 0$$

elde edilir.

$$L_j|y_i(t)||y_j(t-\tau(t))| \leq \frac{1}{4\varepsilon_2}y_i^2(t) + \varepsilon_2 L_j^2 y_j^2\big(t-\tau(t)\big)$$

eşitsizliği (4.7) de yazarak Teorem 4.3 ün iii. şartından

$$V'(y) < 0$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$L_j|y_i(t)||y_j(t-\tau(t))| \leq \frac{1}{4\varepsilon_1}L_j^2 y_i^2(t) + \varepsilon_2 y_j^2\big(t-\tau(t)\big).$$

eşitsizliği (4.7) de yazarak Teorem 4.3 ün iv. şartından

$$V'(y) < 0$$

elde edilir. Yani i-iv şartlarından herhangi biri sağlarsa (4.1) diferansiyel denkleminin denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Örnek 4.4 $n = 2$ için (4.1) diferansiyel denklem sisteminde A, B ve C matrisleri

$$A = (a_{ij}(t))_{2\times2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^t} - \frac{2}{5} & \frac{3sint}{10} \\ \frac{-4}{e^t + 9} & \frac{-sint}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{ij}(t))_{2\times2} = \begin{pmatrix} \frac{sint}{2} & \frac{-cost}{2} \\ \frac{1}{2e^t} & \frac{-1}{2e^t} \end{pmatrix}$$

$$C = (c_{ij})_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

olsun. Aktivasyon fonksiyonunu $f_i(x) = \frac{1}{2}(|x+1| + |x-1|)$ ve gecikme fonksiyonunu $\tau(t) = |t+1| - |t-1|$ alarak

$$(\mu_{ij})_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad (\sigma_{ij})_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = 2, \qquad c_2 = 2,$$

$$L_1 = L_2 = 1$$

olur. Teorem 4.2. deki $\varepsilon_1 = 0.5$ ve $\varepsilon_2 = 0.5$ olsun.

$$\min_{1\le i\le n} \left\{ c_i - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{L_j \mu_{ij}}{4\varepsilon_1} + \frac{L_j \sigma_{ij}}{4\varepsilon_2} + \varepsilon_1 L_i \mu_{ji} \right) \right\} = 0.55 > \max_{1\le i\le n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_2 L_i \sigma_{ji} \right\} = 0.5$$

olduğundan Teorem 4.2. den (4.1) diferansiyel denklem sisteminin denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Örnek4.5 $n = 2$ için (4.1) diferansiyel denklem sisteminde A, B ve C matrisleri

$$A = (a_{ij}(t))_{2\times2} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{t^2 + 10} & \frac{1}{t^2 + 10} \\ \frac{1}{t^2 + 10} & \frac{7}{t^2 + 10} \end{pmatrix},$$

$$B = (b_{ij}(t))_{2\times2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2 + 10} & \frac{-1}{t^2 + 10} \\ \frac{1}{t^2 + 10} & \frac{-1}{t^2 + 10} \end{pmatrix}$$

$$C = (c_{ij})_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

olsun. Aktivasyon fonksiyonunu $f_i(x) = \frac{1}{2}(|x+1| + |x-1|)$ ve gecikme fonksiyonunu $\tau(t) = |t+1| - |t-1|$ alarak

$$(\mu_{ij})_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}, \qquad (\sigma_{ij})_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = 2, \qquad c_2 = 2,$$

$$L_1 = L_2 = 1$$

olur. Teorem 4.3. deki $\varepsilon_1 = 0.5$ ve $\varepsilon_2 = 0.5$ olsun.

$$\min_{1\le i\le n}\left\{c_i-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{L_j^2\mu_{ij}}{4\varepsilon_1}+\frac{\sigma_{ij}}{4\varepsilon_2}+\varepsilon_1\mu_{ji}\right)\right\}=1.15>\max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2L_i^2\sigma_{ji}\right\}=0.1$$

olduğundan Teorem 4.3. ün (3) şartından (4.1) diferansiyel denklem sisteminin denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Örnek4.6 $n=2$ için (4.1) diferansiyel denklem sisteminde A, B ve C matrisleri

$$A=(a_{ij}(t))_{2\times2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{t^2+10} & \frac{3}{e^t+9}\\ \frac{1}{e^t+9} & \frac{-1}{e^t+9}\end{pmatrix},$$

$$B=(b_{ij}(t))_{2\times2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{e^t+1} & \frac{4}{e^t+9}\\ \frac{-1}{t^2+10} & \frac{-1}{e^t+1}\end{pmatrix}$$

$$C=(c_{ij})_{2\times2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

olsun. Aktivasyon fonksiyonu $f_i(x)=\tanh(0.1x)$ alınır. Bu durumda

$$(\mu_{ij})_{2\times2}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3\\ 0.1 & 0.1\end{pmatrix},\qquad (\sigma_{ij})_{2\times2}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.5\end{pmatrix},$$

$$c_1=1,\qquad c_2=1,$$

$$L_1=L_2=0.1$$

olur. Teorem 4.3. deki $\varepsilon_1=0.5$ ve $\varepsilon_2=0.5$ olsun.

$$\min_{1\le i\le n}\left\{c_i-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu_{ij}}{4\varepsilon_1}+\frac{\sigma_{ij}}{4\varepsilon_2}+\varepsilon_1L_i^2\mu_{ji}\right)\right\}=0.349>\max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2L_i^2\sigma_{ji}\right\}=0.0045$$

olduğundan Teorem 4.3. ün (2) şartından (4.1) diferansiyel denklem sisteminin denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Örnek4.7 $n=2$ için (4.1) diferansiyel denklem sisteminde A, B ve C matrisleri

$$A=(a_{ij}(t))_{2\times2}=\begin{pmatrix}\frac{sint}{5} & \frac{2cost}{5}\\ \frac{sint}{10} & \frac{cost}{10}\end{pmatrix},$$

$$B=(b_{ij}(t))_{2\times2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{e^t+1} & \frac{2}{e^t+9}\\ \frac{-1}{t^2+10} & \frac{-1}{e^t+1}\end{pmatrix}$$

$$C=(c_{ij})_{2\times2}=\begin{pmatrix}1.5 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

olsun. Aktivasyon fonksiyonu $f_i(x)=\tanh(x)$ alınır. Bu durumda

$$(\mu_{ij})_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad (\sigma_{ij})_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = 1.5, \qquad c_2 = 2,$$

$$L_1 = L_2 = 1$$

olur. Teorem 4.3. deki $\varepsilon_1 = 0.5$ ve $\varepsilon_2 = 0.5$ olsun.

$$\min_{1\le i\le n}\left\{c_i - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu_{ij}}{4\varepsilon_1} + \frac{L_j^2\sigma_{ij}}{4\varepsilon_2} + \varepsilon_1 L_i^2\mu_{ji}\right)\right\} = 0.7 > \max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2\sigma_{ji}\right\} = 0.35$$

olduğundan Teorem 4.3. ün (4) şartından (4.1) diferansiyel denklem sisteminin denge noktası global asimtotik kararlıdır.

4.2. Gecikmeli İntegro Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Global Asimtotik Kararlılığı

Bu bölümde, Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak zaman değişken gecikmeli sinir ağlarını modellendiren belli diferansiyel denklem sistemlerinin denge noktasının global asimptotik kararlılığı için yeter şartlar elde edilir. Söz konusu integro-diferensiyel denklem sistemi $i, j = 1,2,\dots,n$ için

$$x_i'(t) = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) f_j\left(x_j\big(t-\tau(t)\big)\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) f_j\left(x_j(s)\right) ds + J_i \qquad (4.9)$$

burada n, ağdaki sinir sayısını gösterir, $x_i(t)$, t zamanda i. siniri temsil eder $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)^T \in R^n$ ve $f\big(x(t)\big) = \Big(f_1\big(x_1(t)\big), f_2\big(x_2(t)\big), \dots, f_n\big(x_n(t)\big)\Big)^T \in R^n$, t zamandaki j inci sinirin aktivasyon fonksiyonunu gösterir $D = diag(d_1, d_2, \dots, d_n) > 0$ bir pozitif köşegen matris $A = \big(a_{ij}(t)\big)_{nxn}$, $B = \big(b_{ij}(t)\big)_{nxn}$ değişkene bağlı ağırlık katsayılarını temsil eden geri bildirim matrisleri ve $C = \big(c_{ij}\big)_{nxn}$ sabit ağırlık katsayısını temsil eden geri bildirim matrisi, $J = (J_1, J_2, \dots, J_n)^T \in R^n$ sabit dış girdi vektörü, $K_{ij}: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ çekirdekleri $\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)ds = 1$ şartını sağlayan parçalı sürekli fonksiyonlar ve τ pozitif bir sabit olmak üzere $\tau(t)$ değişkene bağlı gecikmesi $0 \le \tau(t) \le \tau$ sağlayan sınırlı ve sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca (4.9) diferansiyel denklem sistemindeki f_i $(i = 1,2,\dots,n)$ fonksiyonlarını sınırlı ve (4.2) şartını sağlayacak şekilde inşa edilir. Bu fonksiyonların sınıfı (Chua ve Yang, 1988) de kullanılan $f_i(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$ fonksiyonları hem genel sigmoid aktivasyon fonksiyonlarından hem de parçalı lineer fonksiyonlardan daha geneldir.

(4.9) diferansiyel denklem sisteminin başlangıç şartı $s \in [-\tau, 0]$ için $\phi_i(s)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$x_i(s) = \phi_i(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad i = 1,2,\dots,n$$

olsun.

Kabul edelim ki $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$, (3.1) diferansiyel denklem sisteminin bir denge noktasıdır. (4.9) diferansiyel denklem sistemine $g_j\left(y_j(t)\right) = f_j\left(y_j(t) + x_j^*\right) - f_j\left(x_j^*\right)$ olmak üzere $y_i = x_i - x_i^*$ dönüşümü yapılarak

$$y_i'(t) = -d_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j\left(y_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j\left(y_j\left(t - \tau(t)\right)\right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) g_j\left(y_j(s)\right) ds, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{4.10}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Her bir $f_j(.)$ fonksiyonu (4.2) şartını sağladığından her bir $g_j(.)$ fonksiyonu da

$\forall \eta_j \in R$ için

$$\left|g_j(\eta_j)\right| \leq L_j \left|\eta_j\right|,$$
$$g_j(0) = 0 \tag{4.11}$$

sağlar.

(4.9) diferansiyel denklem siteminin $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ denge noktasının kararlılığını ispatlamak için (4.10) diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün karalılığını ispatlamak yeterlidir. Bunun için (Hadock ve Terjki, 1983) tarafından geliştirilen Lyapunov-Razumikhin tekniği verilir.

Teorem 4.8 $\left|a_{ij}(t)\right| \leq \mu_{ij}$ ve $\left|b_{ij}(t)\right| \leq \sigma_{ij}$ olmak üzere μ_{ij} ve σ_{ij} pozitif sabitler var ve aşağıdaki şart

$$\min_{1 \leq i \leq n}\left(2d_i - \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mu_{ij} + \sigma_{ij} + \left|c_{ij}\right|\right) + \left(\mu_{ji} + \left|c_{ji}\right|\right)L_{\mathrm{I}}^2\right]\right) > \max_{1 \leq i \leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji} L_i^2\right)$$

sağlanırsa o zaman (4.9) diferansiyel denklem siteminin denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat Teoremi ispatlamak için temel araç olarak aşağıdaki

$$V(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \int_{0}^{+\infty} K_{ij}(s) \left(\int_{t-s}^{t} g_j^2\big(y_i(\xi)\big) d\xi \right) ds$$

Lyapunov Fonksiyonu düşünülür. (4.11) diferansiyel denklem sisteminin bir çözümü boyunca V nin üst sağ türevini hesaplayarak

$$V'(y) = 2\sum_{i=1}^{n} y_i(t) y_i'(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \int_{0}^{+\infty} K_{ij}(s) \left[g_j^2\left(y_j(t)\right) - g_j^2\big(y_j(t-s)\big)\right] ds$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} y_i(t) \left(-d_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) g_j\left(y_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) g_j(y_j\big(t-\tau(t)\big) \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) g_j\left(y_j(s)\right) ds \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \int_{0}^{+\infty} K_{ij}(s) \left[g_j^2\left(y_j(t)\right) - g_j^2\left(y_j(t-s)\right)\right] ds$$

elde edilir. Böylece

$$V'(y) \le \sum_{i=1}^{n} \left(-2d_i y_i^2(t) + 2\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \left| y_i(t) g_j\left(y_j(t)\right)\right| \right.$$

$$+2\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}(t)| |y_i(t) g_j(y_j\big(t-\tau(t)\big))|$$

$$\left. +2|y_i(t)| \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \int_{0}^{+\infty} K_{ij}(s) \left| g_j\left(y_j(t-s)\right)\right| ds \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \int_{0}^{+\infty} K_{ij}(s) \left[g_j^2\left(y_j(t)\right) - g_j^2\left(y_j(t-s)\right)\right] ds$$

yazılabilir.

Her $a, b \in R$ için $2ab \leq a^2 + b^2$ eşitsizliği kullanılarak

$$V'(y) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}\left[y_i^2(t) + g_j^2\big(y_j(t)\big)\right]\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\left[y_i^2(t) + g_j^2\big(y_j(t-\tau(t))\big)\right] - 2d_i y_i^2(t)$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\int_{0}^{+\infty} K_{ij}(s)\left[y_i^2(t) - g_j^2\left(y_j(t-s)\right)\right]ds\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\int_{0}^{+\infty} K_{ij}(s)\left[g_j^2(y_j(t)) - g_j^2\left(y_j(t-s)\right)\right]ds$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}\left[y_i^2(t) + g_j^2\big(y_j(t)\big)\right]\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\left[y_i^2(t) + g_j^2\big(y_j(t-\tau(t))\big)\right] - 2d_i y_i^2(t)$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\int_{0}^{+\infty} K_{ij}(s)\left[y_i^2(t) - g_j^2\left(y_j(t-s)\right)\right]ds\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}\left[y_i^2(t) + L_j^2 y_j^2(t)\right]\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\left[y_i^2(t) + L_j^2 y_j^2(t-\tau(t))\right] - 2d_i y_i^2(t)$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\int_{0}^{+\infty} K_{ij}(s)\left[y_i^2(t) + L_j^2 y_j^2(t)\right]ds\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(-2d_i y_i^2(t) + \sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{ij} + \sigma_{ij} + |c_{ij}|\right)y_i^2(t) + \sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{ij} + |c_{ij}|\right)L_j^2 y_j^2(t)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}L_j^2\right)y_j^2(t-\tau(t))$$

$$\leq -\sum_{i=1}^{n}\left(2d_i - \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mu_{ij} + \sigma_{ij} + |c_{ij}|\right) + \left(\mu_{ji} + |c_{ji}|\right)L_i^2\right]\right)y_i^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_{ji}L_i^2)y_i^2(t-\tau(t))$$

$$\leq -\min_{1\leq i\leq n}\left(2d_i - \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mu_{ij} + \sigma_{ij} + |c_{ij}|\right) + \left(\mu_{ji} + |c_{ji}|\right)L_i^2\right]\right)$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) + \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ji}L_i^2\right)\sum_{i=1}^{n} y_i^2\left(t-\tau(t)\right)$$

$y(t) \neq 0$ ve $\underbrace{max}_{-\tau\leq s\leq 0}\ \|y(t+s)\|_2 = \|y(t)\|_2$ sağlayan t ler için

$$V'(y) \leq -\left\{\min_{1\leq i\leq n}\left(2d_i - \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mu_{ij} + \sigma_{ij} + |c_{ij}|\right) + (\mu_{ji} + |c_{ji}|)L_i^2\right]\right)\right.$$

$$\left. - \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ji}L_i^2\right)\right\}\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t)$$

$$< 0.$$

sahip olunur. Lemma 4.1 den (4.11) diferansiyel denkleminin sıfır çözümü global asimptotik kararlıdır. Böylece (4.9) diferansiyel denkleminin $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ çözümü global asimptotik kararlıdır. Bu da ispatı tamamlar.

(4.9) denkleminde $C = 0$ alındığında aşağıdaki

$$x_i'(t) = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) f_j(x_j\left(t-\tau(t)\right) + J_i, \qquad (4.12)$$

diferansiyel denklem sistemi yazılır.

Sonuç 4.9. $|a_{ij}(t)| \leq \mu_{ij}$ ve $|b_{ij}(t)| \leq \sigma_{ij}$ olmak üzere μ_{ij} ve σ_{ij} pozitif sabitler var ve aşağıdaki şart

$$\min_{1\leq i\leq n}\left(2d_i - \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mu_{ij} + \sigma_{ij}\right) + \mu_{ji}L_i^2\right]\right) > \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ji}\, L_i^2\right)$$

sağlarsa o zaman (4.12) diferansiyel denkleminin denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.10. $\left|a_{ij}(t)\right| \leq \mu_{ij}$ ve $\left|b_{ij}(t)\right| \leq \sigma_{ij}$ olmak üzere μ_{ij} ve σ_{ij} pozitif sabitler var ve aşağıdaki şart

$$\min_{1\leq i\leq n}\left(2d_i - \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mu_{ij} + \left|c_{ij}\right| + \sigma_{ij}\right)L_j + \left(\mu_{ji} + \left|c_{ji}\right|\right)L_i\right]\right) > \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ji}\, L_i^2\right)$$

şart sağlarsa o zaman (4.9) denkleminin denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat Teoremin ispatı için temel araç olarak

$$V(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|L_j \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)\left(\int_{t-s}^{t} y_j^2(\xi)d\xi\right)ds$$

Lyapunov Fonksiyonu alınır. (4.10) diferansiyel denkleminin bir çözümü boyunca $V(y)$ nin üst sağ türevi alınarak

$$V'(y) = 2\sum_{i=1}^{n} y_i(t)y_i'(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right| L_j \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)\left(y_j^2(t) - y_j^2(t-s)\right)ds$$

$$= 2\sum_{i=2}^{n} y_i(t)\left(-d_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)g_j\left(y_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)g_j\left(y_j\left(t-\tau(t)\right)\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)g_j\left(y_j(s)\right)ds\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|L_j \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)\left(y_j^2(t) - y_j^2(t-s)\right)ds$$

elde edilir. Böylece

$$V'(y) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(2\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}(t)\right|\left|y_i(t)\right|L_j\left|y_i(t)\right| + 2\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}(t)\right|\left|y_i(t)\right|L_j\left|y_i(t-\tau(t))\right|\right.$$

$$\left. - 2d_i y_i^2(t) + 2\left|y_i(t)\right|\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)L_j\left|y_j(t-s)\right|ds\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right| L_j \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)\left(y_j^2(t) - y_j^2(t-s)\right)ds,$$

yazılabilir. Her $a, b \in R$ için $2ab \leq a^2 + b^2$ eşitsizliğini kullanarak

$$V'(y) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}L_j\left[y_i^2(t)+y_j^2(t)\right]\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}L_j\left[y_i^2(t)+y_j^2(t-\tau(t))\right]-2d_iy_i^2(t)$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|\int_{0}^{+\infty}K_{ij}(s)L_j\left[y_i^2(t)-y_j^2(t-s)\right]ds\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|L_j\int_0^{+\infty}K_{ij}(s)\left[y_j^2(t)-y_j^2(t-s)\right]ds$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij}+\left|c_{ij}\right|+\sigma_{ij})L_jy_i^2(t)+\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij}+\left|c_{ij}\right|)L_jy_j^2(t)\right)$$

$$-2d_iy_i^2(t)+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\,L_j\right)y_j^2(t-\tau(t))$$

$$\leq -\sum_{i=1}^{n}\left(2d_i-\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mu_{ij}+\sigma_{ij}+\left|c_{ij}\right|\right)L_j+\left(\mu_{ji}+\left|c_{ji}\right|\right)L_i\right]\right)y_i^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ji}L_i\right)y_i^2(t-\tau(t))$$

$$\leq -\min_{1\leq i\leq n}\left(2d_i-\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\left|a_{ij}\right|+\left|b_{ij}\right|+\left|c_{ij}\right|\right)L_j+\left(\left|a_{ji}\right|+\left|c_{ji}\right|\right)L_i\right]\right)\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t)$$

$$+\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ji}\right|L_i\right)\sum_{i=1}^{n}y_i^2\big(t-\tau(t)\big),$$

$y(t)\neq 0$ ve $\underbrace{max}_{-\tau\leq s\leq 0}\ \|y(t+s)\|_2=\|y(t)\|_2$ sağlayan t ler için

$$V'(y)\leq -\left\{\min_{1\leq i\leq n}\left(2d_i-\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\left|a_{ij}\right|+\left|b_{ij}\right|+\left|c_{ij}\right|\right)L_j+\left(\left|a_{ji}\right|+\left|c_{ji}\right|\right)L_i\right]\right)\right.$$

$$\left.-\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ji}\right|L_i\right)\right\}\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t)$$

$$<0$$

sahip olunur. Lemma 4.1. den (4.10) diferansiyel denklem sisteminin sıfır çözümü global asimtotik kararlıdır. Böylece (4.9) diferansiyel denkleminin $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ çözümü global asimptotik kararlıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.11. $|a_{ij}(t)| \leq \mu_{ij}$ ve $|b_{ij}(t)| \leq \sigma_{ij}$ olmak üzere μ_{ij} ve σ_{ij} pozitif sabitler var ve aşağıdaki şart

$$\min_{1\leq i\leq n}\left(2d_i - \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mu_{ij}+\sigma_{ij}\right)L_j + \mu_{ji}L_i\right]\right) > \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ji}\,L_i\right)$$

sağlarsa o zaman (4.12) diferansiyel denkleminin denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Örnek 4.12. $n = 2$ için (4.9) diferansiyel denklem sisteminde A, B, C ve D matrisleri

$$A = (a_{ij}(t))_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^t} - \frac{2}{5} & \frac{1}{e^t+4} \\ \frac{-3}{e^t+9} & \frac{-sint}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{ij}(t))_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} \\ \frac{1}{2e^t} & \frac{-1}{2e^t} \end{pmatrix},$$

$$C = (c_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2.4 & 0 \\ 0 & 2.7 \end{pmatrix},$$

olsun. Aktivasyon fonksiyonunu $f_i(x) = \frac{1}{2}(|x+1| + |x-1|)$ ve gecikme fonksiyonu $\tau(t) = |t+1| - |t-1|$ alınarak

$$(\mu_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad (\sigma_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$d_1 = 2.4, \qquad d_2 = 2.7,$$

$$L_1 = L_2 = 1$$

olur.

$$\min_{1\leq i\leq n}\left(2d_i - \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mu_{ij}+\sigma_{ij}+|c_{ij}|\right) + \left(\mu_{ji}+|c_{ji}|\right)L_i^2\right]\right) = 1.1$$

$$> \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ji}\,L_i^2\right) = 1$$

olduğundan Teorem 4.8. den (4.9) denklem sisteminin denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Örnek 4.13. $n = 2$ için (4.9) diferansiyel denklem sisteminde A, B, C ve D matrisleri

$$A = (a_{ij}(t))_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^t+4} & \frac{3}{e^t+9} \\ \frac{-3}{e^t+9} & \frac{sint}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{ij}(t))_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^t+4} & \frac{-3sint}{5} \\ \frac{-2}{e^t+4} & \frac{3sint}{5} \end{pmatrix},$$

$$C = (c_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ -0.3 & 0.7 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

olsun. Aktivasyon fonksiyonlarını $f_1(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$, $f_2(x) = \tanh(0.3x)$ ve gecikme fonksiyonu $\tau(t) = |t+1| - |t-1|$ alınarak

$$(\mu_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, \ (\sigma_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 \\ -0.4 & 0.6 \end{pmatrix},$$
$$L_1 = 1,\ L_2 = 0.3,\ d_1 = 3,\ d_2 = 2$$

olur.

$$\min_{1\le i\le n}\left(2d_i - \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mu_{ij} + \sigma_{ij} + |c_{ij}|\right)L_j + \left(\mu_{ji} + |c_{ji}|\right)L_i\right]\right) = 1.92$$
$$> \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ji}\, L_i\right) = 0.8$$

olduğundan Teorem 4.10. den (4.9) denklem sisteminin denge noktası global asimtotik kararlıdır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Hadock ve Terjki (1983) tarafından geliştirilen Lyapunov-Razumikhin tekniği kullanılarak değişken gecikmeli sinir ağlarını modellendiren $i,j = 1,2,\dots n$ için

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) f_j\left(x_j\left(t-\tau(t)\right)\right) + J_i\ , \qquad (5.1)$$

ve

$$x_i'(t) = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) f_j\left(x_j\left(t-\tau(t)\right)\right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) f_j\left(x_j(s)\right) ds + J_i \qquad (5.2)$$

diferansiyel denklem sistemlerinin denge noktasının global asimptotik kararlılığı için yeter şartlar elde edildi.

5.2 Öneriler

(5.1) ve (5.2) diferansiyel denklem sistemlerinde J dış girdi vektörünün bileşenlerinin zamana bağlı değişken olması durumunda denge noktalarının global asimptotik kararlılığının nasıl etkileneceğini araştırmaktır.

KAYNAKLAR

Arik, S., 2000, Stability analysis of delayed neural networks, *IEEE Transaction Circuits System1,* 47, 1089–1092.

Arik, S. and Tavsanoglu, V., 2000, On the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks, *IEEE Transaction Circuits System 1*, 47, 571–574.

Arik, S., 2002a, An improved global stability result for delayed cellular neural networks, *IEEE Transaction Circuits System 1*, 49, 1211–1214.

Arik, S., 2002b, An analysis of global asymptotic stability of delayed cellular neural networks, *IEEE Transaction Neural Networks*, 13, 1239–1242.

Arik, S., 2003a, Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant time delay. *Physics Letters A*, 311 (6), 504-511.

Arik, S., 2003b, Global robust stability of delayed neural networks, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 50 (1), 156–160.

Arik, S., 2004, An analysis of exponential stability of delayed neural networks with time varying delays. Neural Networks, 17 (7), 1027-1031.

Cao, J., 2000, On exponential stability and periodic solutions of CNNs with delays, *Physical Letters A*, 267, 312–318.

Cao, J., 2001a, Global stability conditions for delayed CNNs, *IEEE Transaction Circuits System 1*, 48, 1330–1333.

Cao, J., 2001b, A set of stability criteria for delayed cellular neural networks, *IEEE Transaction Circuits System 1*, 48, 494–498.

Cao, J. and Wang, J., 2003, Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays, *IEEE Transaction Circuits Systems I*, 50, 34–44.

Chen, T., 2001, Global exponential stability of delayed hopfield neural networks, *Neural Networks*, 14, 977–980.

Chua, L.O. and Yang, L., 1988a, Cellular neural networks: Theory, *IEEE Transaction on Circuits and Systems* , 35, 1257–1290.

Chua, L. O., and Yang, L., 1988b. Cellular neural networks: Applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35 (10), 1273-1290.

Guo, Y., 2010, Global asymptotic stability analysis for integro-differential systems modeling neural networks with delays, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 61 (6), 971-978.

Guzelis, C., and Chua, L.O. 1993. Stability analysis of generalized cellular neural networks. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 21 (1), 1-33.

Gopalsamy, K. and He, X., 1994, Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays, *Physica D*, 76, 344-358.

Haddock, J.R., Terjki, J.,1983, Liapunov–Razumikhin functions and an invariance principle for functional differential equation, *J. Differ. Equ.*, 48, 95–122.

Hopfield, J.J., 1982, Neural networks and physical systems with emergent computational abilities, *Proc. Nat. Acad. Sci*. 79, 2554-2558.

Hopfield, J.J., 1984, Neuron with graded response have collective computational properties like those of two state neurons, *Proc. Nat. Acad. Sci. I*, 81 (5), 3088-3092.

Hou, C. and Qian, J., 1998, Stability analysis for neural dynamics with time-varying delays, *IEEE Transaction Neural Networks*, 9, 221–223.

Joy, M., 2000, Results concerning the absolute stability of delayed neural networks, *Neural networks*, 13, 613–616.

Khalil, H.K., 1988, Nonlinear Systems, *Mcmillan Publishing Company*, New York.

Li, X.M., Huang, L.H. and Zhu, H., 2003, Global stability of cellular neural networks with constant and variable delays, *Nonlinear Analysis*, 53, 319–333.

Liang, X.B. and Wu, L.D., 1998, New sufficient conditions for absolute stability of neural networks, *IEEE Transaction Circuits System 1*, 45, 584–586.

Liao, T.L. and Wang, F.C., 2000, Global stability for cellular neural networks with time delay, *IEEE Transaction Neural Networks*, 11, 1481–1484.

Liao, X.X. and Wang, J., 2003, Algebraic criterua for global exponential stability of cellular neural networks with multiple time delays, *IEEE Transaction Circuits System I*, 50, 268–275.

Lu, H., 2000, On stability of nonlinear continuous-time neural networks with delays, *Neural Networks I*, 3, 1135–1143.

Lyapunov, A.M., 1892, The general problem of motion stability. *Annals of Mathematics Studies*, 17.

Marcus, C.M. and Westerveld, R.M., 1989, Stability of analogy neural networks with delay, *Phys. Rev. A*, 39 (2), 347-359.

McCulloch, W.S. and Pitts, W., 1943, A Logical Calculus of Ideas Immanent in Nervous Activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115-133.

Peng, J., Qiao, H. and Xu, Z.B., 2002, A new approach to stability of neural networks with time-varying delays, *Neural Networks*, 15, 95–103.

Yu, G.J., Lu, C.Y., Tsai, J.S.H., Su, T.J. and Liu B.D., 2003, Stability of cellular neural networks with time-varying delays, *IEEE Transaction Circuits Systems I*, 50, 677–679.

Zhang, Q., Ma, R. and Xu, J., 2001, Stability of cellular neural networks with delay, *Electronics Letters*, 37, 575–576.

Zhang, Q., Ma, R. Wang, C. and Xu, J., 2003, On the global stability of delayed neural networks, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48, 794–797.

Zhang, Q., Wei, X. and Xu, J., 2005a, Global asymptotic stability of cellular neural networks with infinite delay. *Neural Netw. World*, 15, 579–589.

Zhang, Q., Wei, X. and Xu, J., 2005b, Global asymptotic stability analysis of neural networks with time-varying delays. *Neural Processing Letters*, 21, 61–71.

Zhang, J., 2003, Globally exponential stability of neural networks with variable delays, *IEEE Transaction Circuits Systems I*, 50, 288–290.

Zhou, D. and Cao, J., 2002, Globally exponentially stability conditions for cellular neural networks with time-varying delays, *Applied Mathematical and Computers*, 131, 487–496.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Saliha KORKMAZ
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Muş-06/01/1981
Telefon	**:**	505 573 12 66
Faks	**:**	
e-mail	**:**	skorkmaz49@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Anadolu Öğretmen Lisesi, Muş	1999
Üniversite	:	Yüzüncü Yıl Üniversitesi	2003
Yüksek Lisans	:	Muş Alparslan Üniversitesi	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2004-2019	Milli Eğitim	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER

İngilizce, Üds Puan:52.5