T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

f-CEBİRİ TARAFINDAN NORMLANDIRILMIŞ UZAYLARDA YAKINSAMA

Şamil SAATCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Nisan-2020

MUŞ

T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

f-CEBİRİ TARAFINDAN NORMLANDIRILMIŞ UZAYLARDA YAKINSAMA

Şamil SAATCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman:Dr. Öğr. Üyesi Abdullah AYDIN

Nisan-2020

MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Şamil SAATCI tarafından hazırlanan "f-Cebiri Tarafından Normlandırılmış Uzaylarda Yakınsama" adlı tez çalışması 28/04/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Harun POLAT Muş Alparslan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Abdullah AYDIN Muş Alparslan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	A. Aydın
Üye Dr. Öğr. Üyesi Fatih KUTLU Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 05../05../2020 Tarih ve ..13...../..I...... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Şamil SAATCI

28/04/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

f-CEBİRİ TARAFINDAN NORMLANDIRILMIŞ UZAYLARDA YAKINSAMA

Şamil SAATCI

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Abdullah AYDIN

Bir E kafes uzayındaki $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ağı için başka bir $(y_\beta)_{\beta\in B} \downarrow 0$ ağı var ve her $\beta \in B$ indisi için en az bir $\alpha_0 \in A$ indisi bulunabilir ki $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ şartı tüm $\alpha \leq \alpha_0$ indisleri için sağlanırsa $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ağı $x \in E$ elemanına sıra (order) yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ile gösterilir. Eğer bir E kafes uzayı için, E üzerinde çarpma işlemi birleşmeli bir cebir ve aynı zamanda E'deki herhangi x ve y pozitif elemanları için $x \cdot y \in E_+$ sağlarsa E'ye Riesz Cebiri denir. Eğer bir E Riesz cebiri için; $x \wedge y = 0$ iken $(x \cdot z) \wedge y = (z \cdot x) \wedge y = 0$ şartı tüm pozitif $z \in E_+$ elemanları için sağlanırsa E'ye f-cebiri denir. Bir E f-cebiri üzerinde alınan herhangi bir $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ağı için $|x_\alpha - x| \cdot u \xrightarrow{o} 0$ yakınsaması tüm $u \in E_+$ pozitif elemanları için sağlanırsa $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ağı $x \in E$ elemanına çarpımsal sıra (multiplicative order) yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{mo} x$ ile gösterilir. Bu çalışmamızda, verilen bu tanımlar ışığında kafes normlu uzaylar üzerinde u_f-yakınsaklık kavramını tanımlayarak onun yukarda verilen yakınsaklıklarla ilişkilerini inceleyerek temel özelliklerini verdik.

2020, 30 Sayfa

Anahtar Kelimeler: f-cebiri, Banach kafes uzayı, kafes normlu uzay, kafes uzayı

ABSTRACT

MS THESIS

CONVERGENCE IN LATTICE NORMED SPACES NORMED BY f-ALGEBRAS

Şamil SAATCI

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Assist. Prof. Abdullah AYDIN

A net $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in a vector lattice E is said to be order convergent to a vector $x \in E$ if there exists another net $(y_\beta)_{\beta\in B} \downarrow 0$ such that for every β, there is an index α_β such that $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ for all indices $\alpha \geq \alpha_\beta$ and abbreviated by $x_\alpha \xrightarrow{o} x$. A vector lattice E under an associative multiplication is said to be a Riesz algebra whenever the multiplication makes E an algebra (with the usual properties), and in addition, it satisfies the following property: $x, y \in E$ implies $x \cdot y \in E_+$. A Riesz algebra E is called f-algebra if E has additionally property that $x \wedge y = 0$ implies $(x \cdot z) \wedge y = (z \cdot x) \wedge y = 0$ for all $z \in E_+$. A net $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in E is said to be multiplicative order convergent to $x \in E$ if $|x_\alpha - x| \cdot u \xrightarrow{o} 0$ for all $u \in E_+$. Abbreviated as $x_\alpha \xrightarrow{mo} x$. In this study, in the light of this given way, we basically defined the concept of the u_f-convergence on lattice norms and by examining its relations with the convergences given above.

2020, 30 Pages

Keywords: f-algebra, Banach lattice, lattice normed space, vector lattice

ÖNSÖZ

Bu çalışmamda, değerli zamanlarını ayırarak bilgi ve deneyimlerini paylaşan değerli danışman Sayın Dr. Öğr. Üyesi Abdullah AYDIN'na saygılarımı sunarım.

Şamil SAATCI
MUŞ-2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

E_+	:E'nin pozitif kısmı
E_-	:E'nin negatif kısmı
$x \vee y$	:x ve y'nin supremumu
$x \wedge y$	:x ve y'nin infumumu
x_+	:x ve 0'ın (vektör uzayının sıfırı) supremumu
x_-	:x ve 0'ın supremumu
$\|x\|$	:x ve $-x$'nin supremumu
$L(E,F)$	:E'den F'ye tüm operatörlerin uzayı
$L_b(E,F)$	:Sıra sınırlı operatörlerin uzayı
$(x_\alpha) \downarrow x$	: $\{x_\alpha\}$ aşağı yönlendirilmiş olup infumumu x dir
$(x_\alpha) \uparrow x$	: $\{x_\alpha\}$ yukarı yönlendirilmiş olup supremumu x dir

1. GİRİŞ

Kafes (vektör lattice) değerli normlar fonksiyonel analizde önemli bir yere edinmekle beraber değişik uygulamalara sahiptir. Ancak, f-cebirleri ve kafes normlar üzerine f-cebirleri tarafından üretilen bir norm ilk defa Aydın tarafından (2020b) de tanımlanmıştır. Bu çalışmamızda Kafes normlu uzaylar ile f-cebirini birleştirerek burada daha önce Aydın'nın (2019c, 2019d, 2020a, 2020b) ve Aydın ile Çınar'ın (2019) çalışmalarında f-cebirlerinde tanımladıkları yakınsaklıkları kullanarak kafes normlu uzaylarda yakınsaklığı ve bu yakınsaklığın temel özelliklerini inceleyeceğiz. Bunlarla ilgili bilgi vermeden önce, kafes uzaylarında sıra (order) yakınsamasının genel olarak topolojik olmadığını vurgulamakta yarar vardır. Fakat sıra yakınsamadan yararlanılarak sıra süreklilik gibi bazı tanımlamalar yapılmıştır, okuyucular detaylı bilgi için (Abramovich ve Aliprantis, 2002; Aliprantis ve Burkinshaw, 2003 ve 2006; Kusraev, 2000; Kusraev ve Kutateladze, 1999; Luxemburg ve Zaanen, 1971; Meyer-Nieberg, 1991; Vulikh, 1967; Zaanen, 1983) eserleri inceleyebilirler.

Bir X kümesi üzerinde tanımlanan " $\leq$ " bağıntısı yansıyan, ters simetrik ve geçişken özelliğini sağlarsa X kümesine sıralı küme denir. Bir E vektör uzayı üzerinde bir " $\leq$ " sıralama bağıntısı tanımlanmış olsun eğer her $x, y \in E$ için;

(i) $x \leq y$ iken her $z \in E$ için $x + z \leq y + z$,

(ii) $x \leq y$ iken $\alpha \in R$ için $\alpha x \leq \alpha y$,

şartları sağlanırsa, E uzayına sıralı vektör uzayı denir. E sıralı vektör uzayının $0 \leq x$ bağıntısını sağlayan elemanlarına pozitif elemanlar denir ve E_+ ile gösterilir. E ve F iki sıralı vektör uzayı olmak üzere bir $T : E \to F$ doğrusal dönüşümü kısaca operatör olarak adlandırılır. Ayrıca her bir $x \in E_+$ için $0 \leq T(x)$ oluyorsa T dönüşümüne pozitif dönüşüm denilir ve $0 \leq T$ şeklinde gösterilir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006; Luxemburg ve Zaanen, 1971; Vulikh, 1967; Zaanen, 1983).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu çalışma temel olarak kafes uzaylarında tanımlı olan sınırsız sıra yakınsaklı kavramının genişletilmesi hedeflenerek yapılmıştır. Sınırsız sıra yakınsaklık (unbounded order convergence) kavramı ilk olarak Nakano tarafından (1948)'de "individual convergence" olarak tanımlandı. Fakat sınırsız sıra yakınsaklık kavramı ismi De Marr tarafından (1964)'de "unbounded order convergence" ismi ile tanımlandı. Bu çalışmada De Marr, Banach kafes uzaylarındaki zayıf yakınsaklık ile sınırsız sıra yakınsaklık arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Wickstead ve Kaplan sınırsız sıra yakınsaklığın Dedekind tam kafes uzaylarındaki çalışmalarını sırasıyla (Wickstead, 1977) ve (Kaplan, 1998) çalışmaların da ortaya koymuşlardır. Daha sonra Troitsky ise (2004) çalışmasında sınırsız sıra yakınsaklığı "d-convergence" ismiyle Banach kafes uzaylarında tanımlayarak sınırsız sıra norm yakınsaklık kavramını tanımlamıştır.

Gao (2014) çalışmasında sınırsız sıra yakınsaklığı dual uzaylarda incelemiştir. Sonrasında, Gao ve Xantos (2014) de sınırsız sıra yakınsaklığı Cesaro anlamında Banach kafes uzaylarındaki durumunu incelemişlerdir. Hong (2016) çalışmasında yerel solid kafes uzaylarında önemli çalışmalar yapmıştır. Gao ve ark., (2017) çalışmalarında sınırsız sıra yakınsaklığı Martingleye olasılıksız olarak uygulamışlardır.

Aydın (2018) çalışmasında sınırsız sıra yakınsaklığı kullanarak sınırlı operatörlerin cebirsel yapılarını incelemiştir. Daha sonrasında Aydın ve ark., (2018a) de sınırsız sıra yakınsaklığı standart olmayan analiz çalışmalarına uyarlamışlardır. Sonrasında Aydın ve ark., (2018b) de yine bu yakınsaklık kullanarak kompakt benzeri operatörleri tanımlamıştır.

Aydın (2019a) çalışmasında sınırsız sıra yakınsaklık kavramı kullanılarak kafes normlu uzaylar da sınırsız p_τ-yakınsaklık (unbounded p_τ-convergence) kavramı tanımlanmıştır. Daha sonra Aydın (2019b) çalışmasında bu yakınsaklığı filter yakınsaklık ile birleştirmişti. Aydın ve ark., (2019) da sınırsız sıra yakınsaklığı kafes normlu uzaylara taşıyarak burada önemli sonuçlar elde etmişlerdir..

Aydın f-cebiri üzerinde çarpma işlemini kullanarak (2019c) çalışmasında çarpımsal sıra yakınsaklık (multiplicative order convergence) tanımını yapmıştır. Sonrasında (Aydın, 2019d) çalışması ile f-cebiri üzerinde çarpımsal yakınsaklık ile norm yakınsaklığı birleştirmiştir. Aydın ve Çınar (2019) da çarpımsal norm yakınsaklığı kullanarak kompakt operatörleri tanımlamıştır ve Aydın (2020a) da f-altcebirleri kullanarak klasik Hahn-Banach teoreminden daha farklı bir genişlemeye sahip bir genişleme elde etmiştir.

Aydın (2020b) çalışmasında çarpımsal sıra yakınsaklık kavramını kafes normlu uzaylar üzerinde tanımlayarak diğer yakınsaklıklar arsındaki ilişkiyi incelemiştir. Biz de bu çalışmada bu son yapılan çalışmanın üzerine bazı sonuçlar ekleyerek kafes normlu uzaylardaki çarpımsal yakınsamayı irdeleyeceğiz.

3. KAFES UZAYLARINA GİRİŞ

3.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar verilecektir. Aynı zamanda diğer bölümlerde kullanılan bazı teorem ve önermeler verilmiştir. Bu bölümde yazacağımız tanım, teoremler, semboller ve notasyonlar kafes uzaylarının temel argümanlarıdır ve bunlar (Abramovich ve Aliprantis, 2002; Aliprantis ve Burkinshaw, 2003 ve 2006; Bukhvalov, 1996; Kusraev, 2000; Kusraev ve Kutateladze, 1999; Luxemburg ve Zaanen, 1971; Meyer-Nieberg, 1991; Vulikh, 1967; Zaanen, 1983) çalışmalardan alınmışlardır.

Tanım 3.1. E bir sıralı küme ve E'nin boştan farklı bir alt kümesi A olsun. Eğer her $a \in A$ için $a \leq x$ olacak şekilde $x \in E$ varsa A'ya üsten sınırlı, eğer her $a \in A$ için $x \leq a$ olacak şekilde $x \in E$ varsa A'ya alttan sınırlı küme denir. A kümesi hem alttan hem de üsten sınırlı ise A'ya sıra sınırlı küme denir.

Tanım 3.2. E bir sıralı vektör uzayı, A da bu uzayın herhangi bir alt uzayı olsun. Eğer

(i) her $x \in A$ için $x \leq z$,

(ii) her $x \in A$ için $x \leq y$ olacak şekildeki her $y \in E$ için $z \leq y$ koşullarını sağlayacak şekilde bir $z \in E$ var,

şartları sağlanırsa, z elemanına A kümesinin supremumu denir ve $sup(A) = z$ biçiminde gösterilir. Özel olarak $A = \{x, y\} \subseteq E$ ise $z = sup\{x, y\} = x \vee y$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde; eğer

(i) her $x \in A$ için $z \leq x$,

(ii) her $x \in A$ için $y \leq x$ olacak şekildeki her $y \in E$ için $y \leq z$ koşullarını sağlayacak şekilde bir $z \in E$ var,

şartları sağlanırsa, z elemanına A kümesinin infumumu denir ve $inf(A) = z$ biçiminde gösterilir. Özel olarak $A = \{x, y\} \subseteq E$ ise $z = inf\,\{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.3. E sıralı bir küme olsun. Eğer E üzerindeki sıralamaya göre her x, y elemanın supremumu ve infumumu var ve E'ye ait ise E uzayına bir kafes uzayı (ya da, örgü) denir. Eğer ek olarak E vektör uzayı ise E'ye vektör örgüsü veya Riesz uzayı veya vektör lattice adı verilir.

E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun. $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$ ve $x = (-x) \vee x$ elemanlarına sırası ile $x \in E$ elemanının pozitif kısmı, negatif kısmı ve modülü (mutlak değeri) denir. Eğer $x, y \in E$ için $x \wedge y = 0$ ise x ile y elemanları birbirine diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. A, E'nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere, $\{x \in E : her\, y \in A\, için\, x \perp y\}$ kümesine A kümesinin dik tümleyeni denir ve A^d ile gösterilir. Aşağıda verilen sonuçlar Aliprantis ve Burkinshaw (2006) çalışmasındaki Teorem 1.3., Teorem 1.5. ve Teorem 1.7.'den alınmıştır.

Teorem 3.4. E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur.

i. $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$;

ii. $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$;

iii. $x + y = x \vee y + x \wedge y$;

iv. $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$;

v. $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$;

vi. $a \in \mathbb{R}$ için $a.(x \vee y) = a.x \vee a.y$ ve $a.(x \wedge y) = a.x \wedge a.y$;

vii. $x = x^+ + x^-$;

viii. $|x| = x^+ + x^-$;

ix. $x^+ \wedge x^- = 0$;

x. $x = (x-y)^+ + x \wedge y$;

xi. $|x - y| = \vee\, y - x \wedge y$;

xii. $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$;

xiii. $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$;

xiv. $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$;

xv. $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|)$;

xvi. $|x - y| \vee |x - y| = |x| + |y|$;

xvii. $|x - y| \wedge |x - y| = \big||x| - |y|\big|$.

E bir kafes uzayı olsun. E'de alınan tüm pozitif elemanlarının kümesi $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ olarak alınacaktır. E_+ kümesine E'nin pozitif konisi denir. İki vektör uzayı arasında tanımlanan doğrusal fonksiyona operatör denir. Yani E ve F iki vektör uzayı olsun. Eğer $T: E \to F$ fonksiyonu için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ şartı tüm $x, y \in E$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ elemanları için sağlanırsa T fonksiyonuna operatör denir. Bundan sonra $T(x)$ yerine Tx ifadesini kullanacağız.

Tanım 3.5. Eğer iki sıralı vektör uzay arasında tanımlanan $T: E \to F$ operatörü için $Tx \geq 0$ şartı tüm $x \geq 0$ elemanları için sağlanırsa T'ye pozitif operatör denir ve $T \geq 0$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 3.6. E sıralı vektör uzayı ve $A \subseteq E$ olsun.

(i) Eğer, her $x, y \in A$ için $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A'ya yukarı yönlendirilmiş küme denir ve $A \uparrow$ biçiminde gösterilir. A yukarı yönlendirilmiş küme ve E içinde $\sup(A) = a$ varsa $A \uparrow a$ biçiminde gösterilir.

(ii) Eğer her $x, y \in A$ için $z \leq x$ ve $z \leq y$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A'ya aşağı yönlendirilmiş küme denir ve $A \downarrow$ biçiminde gösterilir. A aşağı yönlendirilmiş küme ve E içinde $\inf(A) = a$ varsa $A \downarrow a$ biçiminde gösterilir.

Yönlendirilmiş bir A kümesinden herhangi bir E kümesine tanımlanmış bir fonksiyona ağ (net) denir. A yerine herhangi bir (x_α) ağı alındığında benzer şekilde $x_\alpha \uparrow$, $x_\alpha \uparrow$ a , $x_\alpha \downarrow$ ve $x_\alpha \downarrow b$ tanımları verilebilir.

Tanım 3.7. E Riesz uzayında her $x \in E_+$ için $n \in \mathbb{N}_+$ olmak üzere $n^{-1}.x \downarrow 0$ şartı sağlanırsa E'ye Arşimediyan Riesz uzayı denir.

Bu çalışmada aksi söylenmedikçe, tüm kafes uzayları gerçel değerli Arşimediyan özelliğine sahip olduğu kabul edilecektir. Tüm kafes uzayları Arşimediyan özelliğini sağlamayabilirler. Bunu aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 3.8: $\mathbb{R}^2$ üzerinde, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ ancak ve ancak $x_1 \leq y_1$ ya da $x_1 = x_2$ iken $y_1 \leq y_2$ sıralama bağıntısını tanımlarsak. $(\mathbb{R}^2, \leq)$ bir kafes uzayı olur. Ancak Arşimedyan değildir. Bunu görebilmek için $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ elemanını ele alalım. Tanımladığımız sıralamaya göre $\frac{1}{n}(1,1) \downarrow$ fakat $\frac{1}{n}(1,1) \downarrow 0$ değildir. Dolayısıyla bu sıralama bağıntısıyla $\mathbb{R}^2$ Arşimediyan özelliğine sahip değildir.

Tanım 3.9. E bir kafes uzayı olsun. Herhangi $a, b \in E$ iki elaman ve $a \leq b$ olmak üzere $\{x \in E : a \leq x \leq b\}$ kümesine E'de bir sıralı aralık denilir ve $[a, b]$ ile gösterilir. Bir $A \subseteq E$ alt kümesi için eğer $A \subseteq [a, b]$ olacak şekilde $a, b \in E$ varsa A'ya E de sıra sınırlı bir küme denir.

E bir Riesz uzayı olsun. E'nin boştan farklı ve üsten sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir altkümesinin) supremumu ya da altan sınırlı her altkümesinin (sayılabilir altkümesinin) infumumu varsa E Riesz uzayına Dedekind tam (σ-Dedekind tam) Riesz uzayı denir. Her dizi aynı zamanda bir ağ olduğundan E uzayı Dedekind tam ise σ-Dedekind tamdır. E Riesz uzayının Dedekind tam olması için gerekli ve yeterli koşul

$0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve üsten sınırlı olacak şekilde her ağın E içinde supremumunun var olmasıdır.

Tanım 3.10. E, gerçel vektör uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. $0 \leq \lambda \leq 1$ koşulunu sağlayan her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $x, y \in A$ için $\lambda . x + (1-\lambda)\, y \in A$ oluyorsa A kümesine konveks (dışbükey) küme denir.

Tanım 3.11. E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun.

(i) Her $y \in E$ ve $x \in A$ için $y \leq x$ iken $y \in A$ oluyor ise A'ya solid küme denir. Aynı zamanda solid alt uzaya ideal denir.

(ii) A, E de bir ideali olmak üzere A'nın E de supremumu olan her alt kümesinin A da supremumu varsa A'ya band denir. Başka bir deyişle, A'nın band olması için yeteri ve gerekli şart keyfi her $(x_\alpha) \subseteq A$ ağı için $0 \leq x_\alpha \uparrow |x|$ şartı sağlanırken $x \in A$ olmasıdır.

Tanım 3.12. Hatırlanacağı gibi yönlendirilmiş bir I kümesinden herhangi bir E kümesine tanımlanmış bir fonksiyona ağ denir. Eğer bir E kafes uzayındaki $(x_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ ağı için; başka bir $(y_\beta)_{(\beta \in B)} \downarrow 0$ ağı var ve her $\beta \in B$ indisi için en az bir $\alpha_0 \in I$ var öyle ki $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ her $\alpha \geq \alpha_0$ için sağlanırsa $(x_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ ağı $x \in E$'ye sıra (order convergent) yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ ile gösterilir.

Eğer bir E kafes uzayındaki $(x_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ ağı için, tüm pozitif $u \in E_+$ elemanı için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{0} x$ yakınsaması sağlanırsa $(x_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ ağı $x \in E$ elemanına sınırsız sıra (unbounded ordered convergent) yakınsaktır denir. Bu yakınsaklığın detayları için (Nakano, 1948; Troitsky, 2004; Gao, 2014; Deng ve ark., 2017; Aydın ve ark., 2019) çalışmalarına bakabilirsiniz.

3.2. f-Cebiri ve Çarpımsal Sıra Yakınsaklık

Bu bölümde f-cebirlerinin temel özellikleri hakkında bilgi verilecektir. Bu bölümde yazacağımız tanım, teoremler, semboller ve notasyonlar (Aliprantis ve Burkinshaw 2006; Aydın 2019c ve 2019d; Aydın ve Çınar, 2019; Aydın, 2020a ve 2020b; Bukhvalov, 1996; Zaanen, 1983) eserlerinden alıntılanmışlardır ve detaylar için bu eserler incelenebilir.

Tanım 3.13. Eğer bir kafes uzayı olsun. Eğer E üzerinde çarpma işlemi birleşmeli bir cebir olur ve aynı zamanda E'deki herhangi iki pozitif $x, y \in E_+$ elemanları için $x \cdot y \in E_+$ şartı sağlarsa E'ye Riesz Cebiri denir.

Eğer E bir Riesz cebiri ve eğer $x \cdot y = y \cdot x$ şartı tüm $x, y \in E$ elemanları için sağlanırsa E' ye değişmeli (comutative ya da abelian) Riesz cebiri denir.

Tanım 3.14. Kabul edelim ki E bir Riesz cebiri olsun. Böylece eğer

1. $u \cdot (x \wedge y) = (\mathrm{u} \cdot x) \wedge (\mathrm{u} \cdot \mathrm{y})$ ve $u \cdot (x \vee y) = (\mathrm{u} \cdot x) \vee (\mathrm{u} \cdot \mathrm{y})$ şartını tüm $x, y, u \in E_+$ için sağlarsa E'ye d-cebiri denir,
2. $x \wedge y = 0$ iken $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 0$ şartı tüm $x, y \in E_+$ için sağlarsa E'ye hemen hemen (almost) f-cebiri denir,
3. $x \wedge y = 0$ iken $(z \cdot x) \wedge y = (x \cdot z) \wedge y = 0$ şartı tüm pozitif $z \in E_+$ elemanları için sağlanırsa E'ye bir f-cebiri denir,
4. sadece nilpotent elemanı sıfır ise E'ye bir semiprime denir, burada bir $x \in E$ elemanı için $x^n = 0$ şartı bazı n doğal sayıları için sağlanırsa x'e nilpotent eleman denir,
5. çarpımsal birime sahip ise E'ye birimli denir,
6. aldığın keyfi bir x elemanı için $x = u \cdot v$ olacak şekilde $u, v \in E$ elemanları buluna bilir ise E'ye parçalanmalıdır denir,

Bir f-cebirinin d-cebiri ve aynı zamanda hemen hemen f-cebiri olduğu görülebilir. Zaanen'nin (1983) çalışmasındaki Teorem 140.10. göz önüne alınırsa, Arşimediyan f-cebirlerinin değişmeli olduğu görülür. Dolayısıyla bu çalışmada alınan tüm kafes uzaylarının Arşimediyan olduğu kabülümüzden dolayı tüm f-cebirleri de değişmeli olarak alınacaktır.

Kabul edelim ki E çarpımsal e birim vektörüne sahip bir f-cebiri olsun. Böylece, eğer Teorem 142.1.(v) (Zaanen, 1983) uygulanırsa, $e = e \cdot e = e^2 \geq 0$ eşitliği elde edilir ki bu da çarpımsal birim elemanın olan e'nin pozitif olduğu sonucuna varılır. Hatırlanacağı gibi bir E kafes uzayında alınan pozitif e elemanı tarafından üretilen band E'nin kendisine eşit olursa e'ye E'nin zayıf sıra birimi denir. Buna denk olarak, pozitif e elemanı E'nin zayıf sıra birimi olması için gerek ve yeteri şart $(x \wedge ne) \uparrow x$ şartı tüm $x \in E_+$ elemanları için sağlamasıdır. Şimdi, eğer e çarpımsal birim elemanı ise $x \wedge e = 0$ eşitliği $x = x \wedge x = (x \cdot e) \wedge x = 0$ olmasını gerektirdiğinden, e aynı zamanda E'nin zayıf sıra birim vektörü olur. Aşağıda veriren tanımın detayli bilgileri için Tanım 1.1. (Aydın, 2019c) incelenebilir.

Tanım 3.15. E bir f-cebiri ve $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ da E'de bir ağ olsun. Eğer $x \in E$ elemanı için

$$|x_\alpha - x| \cdot u \xrightarrow{o} x$$

yakınsaması tüm $u \in E_+$ pozitif elemanları için sağlanırsa $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağı x elemanına çarpımsal sıra yakınsaktır (multiplicative order convergent) denir ve $x_\alpha \xrightarrow{mo} x$ ile gösterilir.

Aşağıda veriren tanımlar ve notasyonlar Tanım 2.11. (Aydın, 2019c) çalışmasından alınmıştır.

Tanım 3.16. E bir f-cebiri ve $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ de E'de bir ağ olsun. Eğer

1. $(x_\alpha - x_{\alpha'})_{(\alpha,\alpha') \in A \times A} \xrightarrow{mo} 0$ sağlanırsa $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağına çarpımsal sıra Cauchy ağı,
2. E'de her çarpımsal sıra Cauchy ağı çarpımsal sıra yakınsak ise E'ye çarpımsal sıra tam uzayı,
3. $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken $x_\alpha \xrightarrow{mo} 0$ olursa E'ye çarpımsal sıra sürekli,
4. E'de her sıra sınırlı ve artan $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ çarpımsal sıra yakınsak ise E'ye çarpımsal sıra KB-uzayı denir.

Bir f-cebiri aynı zamanda bir Banach kafes uzayı iken eğer $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ şartı tüm elemanlar için sağlanırsa uzayımıza Banach f-cebiri denir. Aşağıda veriren notasyon Tanım 1.1. (Aydın, 2019d) çalışmasından alınmıştır.

Tanım 3.17. E bir f-cebiri ve $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ da E'de bir ağ olsun. Eğer $x \in E$ elemanı için

$$\||x_\alpha - x| \cdot u\| \to x$$

norm yakınsaması tüm $u \in E_+$ pozitif elemanları için sağlanırsa (x_α) ağı x elemanına çarpımsal norm yakınsaktır (multuplicative norm convergent) denir ve $x_\alpha \xrightarrow{mn} x$ ile gösterilir.

3.3. Kafes Normlu Uzaylar

Bilindiği üzere bilinen klasik norm bir vektör uzayından reel sayılara tanımlı bir fonksiyondur. Ancak, vektör normlar ise bir vektör uzayından kafes uzayına tanımlı bir fonksiyondur. Bu bölümde kafes normlu uzayların temel özellikleri hakkında bilgi verilecektir ve bu bölümde yazacağımız tanımlar, teoremler, semboller ve notasyonlar (Kusraev, 2000; Kusraev ve Kutateladze, 1999) kitaplarından ve (Aydın ve ark., 2018a ve 2018b; Aydın, 2019a; Aydın ve ark., 2019) makalelerinden alıntılanmışlardır ve detaylar için bu eserler incelenebilir.

Tanım 3.18. X bir vektör uzayı ve E bir kafes uzayı olsun. Eğer $\mu: X \to E_+$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa μ'ye X üzerinde bir vektör norm ya da E değerli norm denir. Keyfi $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ elemanları için

1) $\mu(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2) $\mu(\alpha x) = |\alpha|\mu(x)$,

3) $\mu(x + y) \leq \mu(x) + \mu(y)$.

Bu durumda (X, μ, E) sıralı üçlüsüne de kafes normlu uzay denir.

Eğer bu özelliklere ek olarak, $\mu(x) = e_1 + e_2$ şartını sağlayan tüm $x \in X$ ve $e_1, e_2 \in E_+$ elemanları için, başka bir $x_1, x_2 \in X$ var öyle ki; $\mu(x_1) = e_1$ ve $\mu(x_2) = e_2$ şartlarını sağlarsa (X, μ, E) uzayına ayrıştırılabilir (decomposable) kafes normlu uzay denir. Eğer özel olar bu şart dik (disjoint) olan e_1, e_2 elemanları için sağlanırsa (X, μ, E) uzayına d-ayrıştırılabilir (d-decomposable) uzay denir.

Bir (X, μ, E) kafes normlu uzayı olsun. X'de alınan bir $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağı ve x elemanı için $\mu(x_\alpha - x) \xrightarrow{o} 0$ yakınsaması E'de sağlanırsa $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağı ve x elemanına μ-yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{\mu} x$ ile gösterilir. (X, μ, E) kafes normlu uzay ve Y de X'in bir alt kümesi olsun. Eğer Y'de alınan ve $y_\alpha \xrightarrow{\mu} x$ şartını sağlayan bir $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağı için $x \in Y$ oluyorsa Y kümesi X içinde μ-kapalıdır denir.

Tanım 3.19. Bir (X, μ, E) kafes normlu uzayından alınan bir $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağı için

(i) eğer $(x_\alpha - x_{\alpha'})_{(\alpha, \alpha') \in A \times A}$ ağı μ-yakınsak ise $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağına μ-Cauchy ağıdır,

(ii) eğer X'de alınan her μ-Cauchy ağı μ-yakınsak ise (X, μ, E)'ye μ-tam kafes normlu uzayıdır,

(iii) eğer $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ iken $x_\alpha \xrightarrow{\mu} x$ oluyorsa (X, μ, E) uzayına $o\mu$-sürekli kafes normlu uzayıdır,

(iv) eğer X'de alınan keyfi artan ve μ-sınırlı her ağ μ-yakınsak ise (X, μ, E) uzayına μ-KB uzayıdır,

eğer X'de alınan tüm $x, y \in X$ için $\mu(x + y) = \mu(x) + \mu(y)$ şartı sağlanırsa μ'ye X üzerinde toplamsaldır denir.

4. f-CEBİRİ TARAFINDAN NORMLANDIRILMIŞ UZAYLAR

Bu bölümde, f-cebirleri tarafından normlandırılmış kafes normlu uzayda yeni bir yakınsama kavramı incelenmektedir. Aslında bu bölüm temel olarak Aydın tarafından (2020b) de yapılan çalışması ele alınarak yapılmıştır. Dolayısıyla burada yer alan tanım ve semboller (Aydın, 2020b) çalışmasından alınmıştır. Temel olarak kafes normlu uzaylar ile f-cebirleri bir araya getirilerek burada vektör norm kullanılarak çarpımsal yakınsaklık tanımlanmıştır. Şimdi çarpımsal sıra yakınsaklık ve çarpımsal norm yakınsaklık tanımlarından yola çıkılarak aşağıdaki notasyonlar verilebilir.

Tanım 4.1. (X, μ, E), E üzerinde bir kafes normlu uzay olsun. Eğer X bir kafes uzayı, E bir f-cebiri ve vektör norm olan μ monoton ($|x| \leq |y|$ ise $\mu_x \leq \mu_y$) olma şartları sağlanırsa (X, μ, E) kafes normlu uzayına f-cebiri tarafından normlandırılış kafes normlu uzay denir. Aynı zamanda, (X, μ, E) üçlüsünü $LNFA$ olarak sembolize edeceğiz.

f-cebiri tarafından normlandırılış kafes normlu uzaylar için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 4.2. X bir f-cebir ise $(X, |.|, X)$ bir $LNFA$ uzayıdır.

Örnek 4.3. $(X, \|.\|)$ normlu bir kafes uzayı ise $(X, \|.\|, \mathbb{R})$'de bir $LNFA$'dır.

E bir kafes uzayı olsun. $Orth(E) = \{T \in L_b(E){:}\, x \perp y \; iken \; Tx \perp y\}$ kümesini göz önünde bulunduralım. Bu küme aslında E üzeinde tanımlanan ortomorfizmaların kümesi olarak da adlandırılır, ortomorfizmalar için detaylı bilgilere (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006; Zaanen, 1983) kitapları incelenebilir. Buradaki $L_b(E)$ kümesi E'den E'ye tanımlı sıra sınırlı operatörlerin kümesi olsun. Bu kümenin sadece bir kafes uzayı olmadığı aynı zamanda bir f-cebiridir olduğunu Teorem 140.9. (Zaanen, 1983) de görülebilir. Şimdi bundan yararlanarak aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 4.4. E bir kafes uzayı ve E'deki ortomorfizmaların kümesi $Orth(E)$'yi göz önüne alalım. Böylece $\mu{:}\, X \to Orth(E)$, $\mu(x)(f) = |f|(|x|)$ olacak şekilde bir μ dönüşümü tanımlanırsa; $(X, \mu, Orth(E))$ bir $LNFA$ uzayı olur.

Şimdi bu çalışmamızın temel tanımını aşağıda verebiliriz.

Tanım 4.5. (X, μ, E) bir $LNFA$ uzayı olsun. Eğer bütün $u \in E_+$ ve bir $x \in E$ vektörü için;

$$\mu(x_\alpha - x) \cdot u \xrightarrow{o} 0$$

yakınsaması sağlanırsa, X'deki $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağı x elemanına μ_f-yakınsaktır denir ve kısaca $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x$ şeklinde gösterilir.

Açıkça görülebilir ki $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x$ ile $\mu(x_{\alpha-x}) \xrightarrow{mo} 0$ aynı yakınsaklığı ifade etmektedir. Ayrıca bir E f-cebiri için μ-yakınsaklık ile $LNFA$ uzayı olan $(X, |.|, X)$ üzerindeki μ_f-yakınsaklık aynı yakınsamayı ifade etmektedir. Ayrıca normlu kafes olan X uzayındaki norm yakınsama ile $LNFA$ uzayı olan $(X, \|.\|, \mathbb{R})$'deki μ_f-yakınsama aynı yakınsamayı vermektedir. Aşağıda verilen ve f-cebirinin özellikleri kullanılarak elde edilir ve bu çalışmada çok sık olarak kullanılan sonucu akılda tutmakta yarar vardır. Bu sonuç Lemma 1.2. (Aydın, 2019c)'den yararlanılarak elde edildiği gözlemlenebilir.

Önerme 4.6. Eğer bir E f-cebirinceki herhangi iki x ve y elemanları için $x \leq y$ sağlanırsa $u \cdot y \leq \mathrm{u} \cdot \mathrm{z}$ eşitsizliği tüm pozitif $u \in E_+$ elemanları için sağlanır.

Başlangıç olarak μ_f-yakınsaklığının aşağıdaki temel özelliklerini verebiliriz. Bu özellikler doğrudan Önerme 4.6'dan ve Teorem 3.1.4 de yer alan ve kafes uzaylarında $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$ sağlanan eşitsizliğinden yararlanılarak direk elde edilir. Bundan dolayı ispatı verilmeyecek.

Önerme 4.7. (X, μ, E) bir $LNFA$ uzayı olsun. Eğer X'de alınan $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ve $(y_\beta)_{\beta\in B}$ ağları için $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x$ ve $y_\beta \xrightarrow{\mu_f} y$ yakınsamaları verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x \Leftrightarrow (x_{\alpha-x}) \xrightarrow{\mu_f} 0 \Leftrightarrow \mu(x_{\alpha-x}) \xrightarrow{o} 0$;

ii. $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$'nın her (x_{α_γ}) alt ağı için $x_{\alpha_\gamma} \xrightarrow{\mu_f} x$ sağlanır;

iii. $\varphi x_\alpha + \sigma y_\beta \xrightarrow{\mu_f} \varphi x + \sigma y$ yakınsaması bütün $\varphi, \sigma \in \mathbb{R}$ değerleri için sağlanır;

iv. eğer $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x$ ve $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} y$ ise $x = y$'dir;

v. $|x_\alpha| \xrightarrow{\mu_f} |x|$.

Önerme 2.2. (Aydın, 2019c) göz önünde bulundurularak $LNFA$'larda kafes operatörlerin (bu operatörler $x \to x^+, x \to x^-\ ve\ x \to |x|$ operatörledir) sürekliliğini de benzer bir şekilde aşağıda verebiliriz.

Önerme 4.8. (X, μ, E) bir $LNFA$ uzayı olsun. Aynı zamanda X'de $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ve $(y_\beta)_{\beta\in B}$ ağlarını alalım. Eğer $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x$ ve $y_\beta \xrightarrow{\mu_f} y$ sağlanır ise $(x_\alpha \vee y_\beta)_{(\alpha,\beta)\in AXB} \xrightarrow{\mu_f} x \vee y$ olur. Aynı zaman özel olarak $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x$ ise $x_\alpha^+ \xrightarrow{\mu_f} x^+$ sağlandığı görülür.

İspat: Kabulümüzden dolayı $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x$ ve $y_\beta \xrightarrow{\mu_f} y$ olduğundan, E'de alınan herhangi bir pozitif bir u elemanı için $\mu(x_\alpha - \mathrm{x}) \cdot u \xrightarrow{o} 0$ ve $\mu(y_\beta - \mathrm{y}) \cdot u \xrightarrow{o} 0$ sağlanır. Böylece, sıra yakınsaklığın tanımından E'de $(t_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \downarrow 0$ ve $(z_\partial)_{\partial\in\Lambda} \downarrow 0$ olacak şekilde iki ağ var ve öyle ki; keyfi $(\gamma, \partial) \in \Gamma x \Lambda$ elemanı için $\alpha_\gamma \in A$ ve $\beta_\partial \in$B elamanları vardır ki; $\mu(x_{\alpha-x}) \cdot u \leq z_\gamma$ ve $\mu(x_{\alpha-x}) \cdot u \leq \omega_\partial$ şartları tüm $\alpha \geq \alpha_\gamma$ ve $\beta \geq \beta_\partial$ ve tüm pozitif u vektörleri için sağlanır. Teorem 1.9.(2) (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006)'deki $|x \vee y - x \vee z| \leq |y - z|$ eşitsizliğini kullanacak olursak aşağıdaki eşitsizliğini görebiliriz;

$$\begin{aligned}\mu(x_\alpha \vee y_\beta - x \vee y) \cdot u &= \mu(|x_\alpha \vee y_\beta - x_\alpha \vee y + x_\alpha \vee y - x \vee y|) \cdot u \\ &\leq \mu(|x_\alpha \vee y_\beta - x_\alpha \vee y|)u + \mu(|x_\alpha \vee y - x \vee y|) \cdot u \\ &\leq \mu(|y_\beta - y|) \cdot u + \mu(|x_\alpha - x|) \cdot u \leq \omega_\partial + z_\gamma\end{aligned}$$

tüm $\alpha \geq \alpha_\gamma$ ve $\beta \geq \beta_\partial$ ve her $u \in E_+$ için sağlanır. Bu eşitsizlikten

$$\mu(x_\alpha \vee y_\beta - x \vee y) \xrightarrow{0} 0$$

Yakınsaklığı elde edilebilir çünkü $(\omega_\partial + z_\gamma) \downarrow 0$ yakınsaması vardır. Sonuç olarak $(x_\alpha \vee y_\beta)_{(\alpha,\beta)\in AXB} \xrightarrow{\mu_f} x \vee y$ elde edilir.

E bir kafes uzay G'de E'nin alt vektör uzayı olsun. Eğer E'deki her keyfi x elemanı için G'de bir y elemanı var öyle ki $x \leq y$ sağlanırsa G alt uzayı E kafes uzayını majorize eder denir. Benzer şekilde eğer G'de E'nin alt kafes uzayı ve keyfi $0 < x \in E$ elemanı için G'de $0 < y \leq x$ şartını sağlayan bir y elemanı varsa G alt uzayı E kafes uzayını sıra yoğun alt uzayı denir. Bu tanımların detayları için (Luxemburg ve Zaanen, 1971) incelenebilir.

Şimdi kabul edelim ki E^δ Dedekind tam kafes uzayı ve E de keyfi bir kafes uzayı olsun. Eğer E, E^δ'nin majorize olarak sıra yoğun kafes alt uzayına izomorfik olur ise E^δ'ye E'nin sıra tamlaması denir. Teorem 2.24. Eğer (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006) göz önününde bulundurursak, E Arşimedyan özelliğine sahip olduğundan tek bir sıra tamlamaya sahip olduğu görülür. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 4.9. $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ bir $LNFA$ (X, μ, E) uzayında bir ağ olsun. Eğer E^δ, E'nin sıra tamlaması ve $\mu^\delta_{(x)} = sup\{y \in E : y \leq \mu_{(x)}\}$ supremumu tüm $x \in X$ için varsa E'de $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ yakınsamasının olması için gerek ve yeter şart $LNFA$ $(X, \mu^\delta, E^\delta)$ uzayında $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ yakınsamasının sağlanmasıdır.

İspat: Farzedelim ki (X, μ, E)'de $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ yakınsak olsun. Buna göre tüm $u \in E_+$ için E'de $\mu(x_\alpha) \cdot u \xrightarrow{o} 0$ olur. Böylece Sonuç 2.9. (Gao, 2017) uygulayacak olursak; E^δ'de $(x_\alpha) \cdot u \xrightarrow{0} 0$ yakınsaması tüm $u \in E_+$ için sağlanır. E^δ'de keyfi bir pozitif ω elemanını ele alalım. E^δ, E'nin Dedekind tamlaması olduğundan dolayı E, E^δ'yı majorize eder.

Dolayısıyla E'de öyle bir pozitif u_ω elemanı vardır ki; $\omega \leq u_\omega$ sağlanır. $\mu^\delta(x_\alpha) \leq \mu(x_\alpha)$ şartı sağlandığından $\mu^\delta(x_\alpha) \cdot w \leq \mu(x_\alpha) \cdot u_\omega$ sağlandığını elde ederiz. Böylece $\mu^\delta(x_\alpha) \cdot w \xrightarrow{0} 0$ yakınsaması E^δ de sağlandığını görürüz. Bu da $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ yakınsamasının E'nin sıra tamlaması olan E^δ'de sağlanmasıdır çünkü $\omega \in E_+^\delta$ keyfi seçilmişti.

Tersine, kabul edelim ki $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ yakınsaması E^δsağlanmış olsun. Böylece $u \in E_+^\delta$ için $\mu^\delta(x_\alpha) \cdot u \xrightarrow{0} 0$ yakınsaması E^δ sağlanır. Özel olarak $v \in E_+$ alınırsa $\mu^\delta(x_\alpha) \cdot v \xrightarrow{0} 0$ yakınsaması E^δ'de yine sağlanır. Böylece Sonuç 2.9. (Gao, 2017)'yi kullanarak tüm $v \in E_+$ için $\mu^\delta(x_\alpha) \cdot v \xrightarrow{0} 0$ elde ederiz. Bundan dolayı tüm $v \in E_+$ için $\mu(x_\alpha) \cdot v \xrightarrow{0} 0$ olur ve E'de $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x$ yakınsaması vardır.

Tanım 4.10. (X, μ, E) bir $LNFA$ uzayı ve Y'de X'in alt kümesi olsun. Eğer Y'deki herhangi bir $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağı için; $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x$ yakınsaması $x \in X$ için sağlanırken $x \in Y$ olursa, Y'ye μ_f-kapalı küme denir.

Önerme 4.11. Bir $LNFA$ uzayında her band μ_f-kapalıdır. Gerçekten, $LNFA$ uzayı olan (X, μ, E)'de bir B bandini alalım. B'de $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x$ olacak şekilde keyfi bir yakınsak $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağını alalım. Önerme 4.8. kullanacak olursak, her hangi bir $z \in B^\perp$ için $|x_\alpha| \wedge |z| \xrightarrow{\mu_f} |x| \wedge |z|$ olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağı B'de bir ağ ve $z \in B^\perp$ olduğundan dolayı, tüm α indeksleri için $|x_\alpha| \wedge |z| = 0$ olduğu elde edilir. Böylece $|x| \wedge |z| = 0$ olduğu görülür ki; sonuç olarak $x \in B^{\perp\perp} = B$ dir.

Aşağıda verilen sonuçları Önerme 4.8.'nin bir sonucu olarak doğrudan elde edebiliriz.

Önerme 4.12. Bir $LNFA$ (X, μ, E) uzayını ele alalım. X'in pozitif konisi X_+, X'de bir μ_f-kapalı alt kümedir.

Önerme 4.13. Bir $LNFA$ uzayında her monoton μ_f-yakınsak ağ μ_f-limit noktasına aynı zamanda sıra yakınsaktır.

İspat: Bir $LNFA$ (X, μ, E) uzayında artan bir $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağını alalım. İstenilen sonuca ulaşmak için $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x$ iken $x_\alpha \uparrow x$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için keyfi bir α indeksini alalım. $\beta \geq \alpha$ için $x_\beta - x_\alpha \in X_+$ olduğu açıktır. Önerme 4.12'den $x_\beta - x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} x - x_\alpha \in X_+$ vardır. Her bir α için $x \geq x_\alpha$ yazılabilir. Böylece, x'in $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ için bir üst sınırıdır olduğu görülür çünkü α keyfi seçilmişti. Kabul edelim ki $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$'nın başka bir üst sınırı y olsun. Yine Önerme 4.12 den $y - x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} y - x \in X_+$ olduğu görülür. Bu da bize $y \geq x$ olduğunu verir. Sonuç olarak $x_\alpha \uparrow x$ olduğunu elde ederiz.

(X, μ, E) bir $LNFA$ uzayı ve F'de E f-cebirinin bir alt f-cebiri olsun. X'de alınan bir (x_α) neti için (X, μ, E)'de $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ yakınsaması (X, μ, F)'de $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ yakınsamasını gerektirir. Bunu tersi için aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 4.14. Bir $LNFA$ uzayı ve F'de E f-cebirinin bir alt f-cebiri olsun. Kabul edelim ki $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ağı X'de $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ şatını (X, μ, F) içinde sağlayan bir ağ olsun. Böylelikle $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ (X, μ, E) içindeki yakınsaması aşağıdaki durumların her birinin sağlanması durumunda sağlanır: F, E'yi majöre eder; F, E'de projeksiyon band; her bir $u \in E$ için öyle $f_1, f_2 \in F$ elemanları vardır ki $|u - f_1| \leq |f_2|$ şartı sağlanıyor olsun.

İspat: Keyfi bir $u \in E_+$ elemanını alalım. Diyelim ki (X, μ, F)'de $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ yakınsaması sağlansın. İlk olarak F, E'de majorizing olduğunu kabul edelim. Böylece öyle bir $f \in F_+$var ki $u \leq f$ şartı sağlanır. Yani aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz

$$\mu(x_\alpha) \cdot u \leq \mu(x_\alpha) \cdot f.$$

$\mu(x_\alpha) \cdot f \xrightarrow{0} 0$ olduğundan dolayı $\mu(x_\alpha) \cdot u \xrightarrow{0} 0$ elde edilir ki; bu da $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ yakınsamasının (X, μ, E) uzayında sağlandığı anlamına gelir.

İkinci olarak F, E'de projeksiyon band olsun. Teorem 1.41.(1) (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006) kullanılır ise $E = F \oplus F^\perp$ ve $F = F^{\perp\perp}$ olduğu elde edilir. Yani $u_1 \in F_+$ ve $u_2 \in F_+^\perp$ pozitif vektörleri alabiliriz ki $u = u_1 + u_2$ sağlansın. Biliyoruz ki $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ F'de bir ağ ve $u_2 \in F^\perp$, ve böylece $x_\alpha \wedge u_2 = 0$ tüm α indeksleri için sağlanır. Böylece her bir α için $x_\alpha \cdot u = 0$ sağlanırdığını Teorem 142.1(iii) (Zaanen, 1983)'den yazabiliriz. Sonuç olarak $\mu(x_\alpha) \cdot u = \mu(x_\alpha) \cdot (u_1 + u_2) = \mu(x_\alpha) \cdot u_1 \xrightarrow{0} 0$ eşitsizliğinden $\mu(x_\alpha) \cdot u \xrightarrow{0} 0$ olduğunu elde ederiz ki bu da (X, μ, E) uzayında $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ olduğunu bize verir.

Son olarak, $f_1, f_2 \in F$ şeklinde iki elemanın bulunduğunu varsayalım. Böylece aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz;

$$\mu(x_\alpha) \cdot u \leq \mu(x_\alpha) \cdot |u - f_1| + \mu(x_\alpha) \cdot |f_1| \leq \mu(x_\alpha) \cdot |f_2| + \mu(x_\alpha) \cdot |f_1|.$$

Bu nedenle, (X, μ, E)'de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$'nın yakınsaklığını kullanarak, $\mu(x_\alpha) \cdot |f_1| \xrightarrow{0} 0$ ve $\mu(x_\alpha) \cdot |f_2| \xrightarrow{0} 0$, ve böylece $\mu(x_\alpha) \cdot u \xrightarrow{0} 0$ olduğunu elde ederiz. $u \in E_+$ keyfi seçildiğinden (X, μ, E) uzayında $x_\alpha \xrightarrow{\mu_f} 0$ olduğu sonucuna varılır.

Tanım 4.15. (X, μ, F) bir $LNFA$ uzayı, A, X'in bir alt kümesi olsun ve z, X'teki bir vektör olmak üzere;

1) Herhangi bir $x \in X_+$ için $\mu(x - x \wedge nz) \cdot u$ tüm $u \in E_+$ için sıfıra sıra yakınsar ise z'ye μ_f-birimi denir;
2) Herhangi bir $a \in A$ ve herhangi bir $0 \neq \omega \in \mu(X)$ elemanı için eğer bir $y \in X$ var ve öyle ki $\mu(a - y) \cdot u \leq \omega$ şartı tüm $u \in E_+$ sağlanırsa A'ya μ_f-yoğun alt küme denir.

Teorem 4.16. (X, μ, E) bir $LNFA$ uzayı, $z \in X_+$ ve X'teki z'in ürettiği sıra ideal I_z olsun. Eğer I_z, X'te μ_f-yoğun ise z'de μ_f-birim olur.

İspat: Sıfır olmayan bir $\omega \in \mu(x)$ elemanını alalım. Aynı zamanda $x \in X_+$ elemanını ele alalım. Öyleyse, $y \in I_z$ elemanı var ve öyle ki tüm $u \in E_+$ için $p(x - y) \cdot \mathrm{u} \leq \omega$ olur çünkü I_z, X'te μ_f-yoğundur. Teoremi 1.9.(2) (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006)'yi göz önüne alarak aşağıdakileri gözlemleyebiliriz;

$$|y^+ \wedge x - x \wedge x| \leq |y^+ - x| = |y^+ - x^+| \leq |y - x|.$$

Dolayısıyla, y'yi $y^+ \wedge x$ ile değiştirebiliriz. Bu nedenle, genelliği kaybetmeden herhangi bir $k \in N$ için $y_k \in I_z$ bulunabilir ki $0 \leq \mathrm{y} \leq \mathrm{x}$ ve her $u \in E_+$ için $\mu(x - y_k) \cdot u \leq \frac{1}{k}\omega$ olur. Böylece $j = \mathrm{j(k)} \in \mathbb{N}$ vardır ki $y_k \in I_z$'den dolayı $0 \leq y_k \leq j_z$ olur. Yani, $0 \leq y_k \leq j_z \wedge \mathrm{x}$ sağlanmış olur. Sonuç olarak, $n \geq j$ için, $x - x \wedge nz \leq x - x \wedge j_z \leq \mathrm{x} - y_k$ ve böylece $\mu(x - x \wedge nz) \cdot u \leq \mu(x - y_k) \cdot u \leq \frac{1}{k}\omega$ her bir $u \in E_+$ için sağlanır. Bu nedenle, her bir $u \in E_+$ için $\mu(x - x \wedge nz) \cdot u \xrightarrow{o} 0$ ise z bir μ_f-birimidir.

Önerme 4.17. (X, μ, E) bir $LNFA$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler mevcuttur.

i. z, X'te bir μ_f-birim olsun. Bir γ sayısı ve $y \in X_+$ vektörü alalım. $x \in X_+$ için $\mu(x - n\alpha z \wedge x) = \alpha\mu(\frac{x}{\alpha} - nz \wedge \frac{x}{\alpha})$ ve $\mu(x - n(z + y) \wedge x) \leq \mu(x - x \wedge nz)$. eşitsizliğinde de kolaylıkla αe ve $e + z$ μ_f-birimi oldukları elde edilir.

ii. X kafes uzayındaki bir pozitif z vektörü güçlü sıra birim olması için her bir $x \in X$ için, bir m tamsayısı vardır öyleki $|x| \leq mz$ sağlanmalı. Eğer $z \in X$ güçlü birim ise z de bir μ_f-birimdir. Gerçekten, $x \in X_+$ iken başka bir $j \in N$ var öyleki $x \leq j_z$, yani herhangi $n \geq j$ ve tüm $u \in E_+$ için $\mu(x - x \wedge nz) \cdot u = 0$'dır.

iii. Bir X kafes uzayındaki pozitif bir z tarafından üretilen band $B_z = E$'yi olursa z'ye zayıf sıra birim denir. Eğer bir $z \in X$ μ_f-birimi ise z aynı zamanda bir zayıf sıra birim olur. Varsayalım ki $x \wedge z = 0$ olsun. Böylece herhangi $k \in N$

için $x \wedge kz = 0$. Yani $\mu(x - x \wedge kz) \cdot u = \mu(x) \cdot u = 0$ olur çünkü z μ_f-birimdir. Bundan dolayı $x = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. $e > 0$ vektörü zayıf sıra birim olması için gerek ve yeter şart $x \wedge z = 0$ olduğunu (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006)'nın 39. sayfasındaki izlenimden $x = 0$ olur. Yani z bir zayıf birimdir.

Bu bölümü aşağıda verilecek önerme ile tamamlayacağız.

Önerme 4.18. (X, μ, E) bir $LNFA$ olsun. $X \neq \{0\}$'deki herhangi bir z μ_f-birimi için $z > 0$ olur.

İspat: Varsayalım ki $X \neq \{0\}$ ve $z \neq 0$ μ_f-birim olsun. $z = z^+ - z^-$'den dolayı $z^- = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $e^- > 0$ olduğunu kabul edelim. $x := z^-$ için aşağıda verileni elde ederiz;

$$\mu(x - x \wedge nz) \cdot u = \mu\left(z^- - \left(z^- \wedge n(z^+ - z^-)\right)\right) \cdot u = \mu(z^- - (-nz)) \cdot u$$

$$= \mu((n+1)z^-) \cdot u$$

$$= (n+1)\mu(z^-) \cdot u \nrightarrow o$$

tüm $u \in E_+$ için sağlanır. Bu imkânsızdır çünkü z bir μ_f-birimdir. Bundan dolayı $z^- = 0$ olduğu yani $z > 0$ olması açıktır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada Aydın tarafında tanımlanmış f-cebiri üzerindeki çarpımsal sıra yakınsaklık kavramı ile kafes normlu uzaylar üzerindeki μ_f-yakınsaklık kavramları ele alınarak incelenmiştir. Bu yakınsaklıktan yararlanarak bazı temel kavramlar tanımlanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmanın devamında μ_f-yakınsaklık ile sıra sınırlı yakınsaklık üzerine çalışmalar yapılabileceği öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

Abramovich, Y.A., Aliprantis, C. D., 2002, An invitation to operator theory, 50, *American Mathematical Society*, Rhoda Island.

Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 2003, Locally solid Riesz spaces with applications to economics, sec. edt., 105, *Pure and Applied Mathematics*, Indianapolish.

Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 2006, Positive operators, *Springer*, 119, Dordrecht.

Aydın, A. 2018. Topological algebras of bounded operators with locally solid Riesz spaces, *Journal of Science and Technology of Erzincan University*, 11 (3), 543-549.

Aydın, A., Gorokhova, S.G., Gül, H. 2018a. Nonstandard hulls of lattice-normed ordered vector spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 42 (1), 155-163.

Aydın, A., Emel'yanov, E., Özcan, N.E. and Marabeh, M.A.A. 2018b, Compact-like operators in lattice-normed spaces, *Indagationes Mathematicae*, 2, 633-656.

Aydın, A. 2019a. Unbounded p_τ-convergence in vector lattices normed by locally solid lattices: Academic studies in mathematic and natural sciences, *IVPE*, Cetinje-Montenegro, 118-134.

Aydın, A. 2019b. Convergence via filter in locally solid Riesz spaces, *International Journal of Science and Research*, 8 (9), 351-353.

Aydın, A. 2019c. Multiplicative order convergence in f-algebras, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, doi.org/10.15672/hujms.512073.

Aydın, A., 2019d, Multiplicative norm convergence in normed Riesz algebras, to apear, *Hacettepe Journal of* Mathematics and Statistics.

Aydın, A., Çınar, M. 2019. Multiplicative norm compact operators on Banach lattice f-algebras, *International Journal on Mathematics, Engineering&Natural Science*, 9 (3), 8-13.

Aydın, A., Emel'yanov, E., Özcan, N.E., Marabeh, M.A.A. 2019. Unbounded p-convergence in lattice-normed vector lattices, *Siberian Advances in Mathematics*, 29 (3), 164-182.

Aydın, A. 2020a. Hahn-Banach theorem for operators on the lattice normed f-algebras, *arXiv:2001.04714v1.*

Aydın, A. 2020b. Convergence in Lattice Normed Spaces Normed by f-Algebras, submitted.

Bukhvalov, A.V., Gutman, A.E., Korotkov, V.B., Kusraev, A.G., Kutateladze, S.S., Makarov, B.M., 1996, Vector lattices and integral operators, *Mathematics and its Applications*, 358, Dordrecht.

De Marr, R. 1964. Partially ordered linear spaces and locally convex linear topological spaces, *Illinois Journal of Mathematics*, 8 (4), 601-606.

Deng, Y., O'Brien, M., Troitsky, V.G. 2017. Unbounded norm convergence in Banach lattices, *Positivity*, 21 (1), 963-974.

Gao, N. 2014. Unbounded order convergence in dual spaces, *Journal of Mathhematical. Analysis and Applications*, 419 (1), 347-354.

Gao, N., Troitsky, V.G., Xanthos, F. 2017. Uo-convergence and its applications to Cesaro means in Banach lattices, *Israel Journal of Mathematics*, 220 (1), 649–689.

Gao, N., Xanthos, F. 2014. Unbounded order convergence and application to martingales without probability, *Journal of Mathhematical. Analysis and Applications*, 415 (2), 931-947.

Kaplan, S. 1998. On unbounded order convergence, *Real Analysis Exchange,* 23 (1), 175-184.

Kusraev, A.G., 2000, Dominated operators, *Mathematics and its Applications*, Dordrecht, 141-186.

Kusraev, A.G., Kutateladze, S.S., 1999, Boolean valued analysis, *Mathematics and its Applications,* Dordrecht.

Hong, L. 2016. On order bounded subsets of locally solid Riesz spaces, *Quaestiones Mathematicae*, 39 (3), 381-389.

Luxemburg, W.A.J., Zaanen, A.C., 1971, Riesz spaces I, *North-Holland Publishing Company*, London.

Meyer-Nieberg, P., 1991, Banach lattices, *Springer-Verlag*, Berlin.

Nakano, H. 1948. Ergodic theorems in semi-ordered linear spaces, *Annalysis of Mathematics*, 49 (3), 538-556.

Troitsky, V.G. 2004. Measures of non-compactness of operators on Banach lattices, *Positivity*, 8 (1), 165-178.

Wickstead, A.W. 1977. Weak and unbounded order convergence in Banach lattices, *Journal of Australian Mathematics*, 24 (3), 312-319.

Vulikh, B.Z., 1967, Introduction to the theory of partially ordered spaces, *Wolters-Noordhoff Scientific Publications*, Groningen.

Zaanen, A.C., 1983, Riesz spaces II, *North-Holland Mathematical Library*, 30, Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Şamil SAATCI
Uyruğu	:	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Bulanık,1988
Telefon	:	05465494983
Faks	:	
e-mail	:	Samilsaatci21@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Arapgir Anadolu Teknik Lisesi, Arapgir,Malatya	2011
Üniversite	:	Bitlis Eren Üniversitesi,Merkez,Bitlis	2015
Yüksek Lisans	:	Muş Alparslan Üniversitesi,Merkez,Muş	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2015-2018	Milli Eğitim	Öğretmen
2019-2020	Cebeci çözüm özel kişisel gelişim kursu	Öğretmen