



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CONFORMABLE TÜREV OPERATÖRLERİ
YARDIMIYLA KESİRLİ
GENELLEŞTİRİLMİŞ RLW DENKLEMİNİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN
ARAŞTIRILMASI

Zehra AYDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran -2020
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CONFORMABLE TÜREV OPERATÖRLERİ
YARDIMIYLA KESİRLİ
GENELLEŞTİRİLMİŞ RLW DENKLEMİNİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN
ARAŞTIRILMASI

Zehra AYDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR

Haziran-2020
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Zehra AYDEMİR tarafından hazırlanan “**Conformable Türev Operatörleri Yardımıyla Kesirli Genelleştirilmiş RLW Denkleminin Yaklaşık Çözümlerinin Araştırılması**” adlı tez çalışması 30/06/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Mustafa İNÇ
Fırat Üniversitesi
Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Danışman

Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR
Muş Alparslan Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü

.....

Üye

Doç. Dr. Erdal KORKMAZ
Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 09/07/2020 Tarih ve 21/1 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Zehra AYDEMİR

30/06/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CONFORMABLE TÜREV OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA KESİRLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ RLW DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

Zehra AYDEMİR

**Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR

Bu çalışmada, doğrusal olmayan zaman kesirli Genelleştirilmiş RLW denklemini çözmek için Residual kuvvet seri metodu (RPSM) kullanılmaktadır. Çalışmanın temel amacı, conformable türevler yardımıyla RPSM kullanılarak conformable türevler yardımıyla, doğrusal olmayan zaman kesirli Genelleştirilmiş RLW denkleminin sayısal çözümlerini bulmaktır. Ayrıca elde edilen çözümlerin güvenilirliğini göstermek amacıyla α ifadesinin farklı değerleri için grafikler çizilmiştir.

2020, 31 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Caputo kesirli türevi, Gamma fonksiyonu, Kesirli Diferansiyel Denklemler, Residual Kuvvet Serisi Metodu, Conformable Türev, RLW Denklemi.

ABSTRACT

MS THESIS

INVESTIGATION OF THE APPROXIMATE SOLUTIONS OF FRACTIONAL GENERALIZED RLW EQUATIONS BY CONFORMABLE DERIVATIVE OPERATORS

Zehra AYDEMİR

**Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Mathematic Programme**

Advisor: Assoc. Prof. Zeliha KÖRPINAR

In this study, Residual power series method(RPSM) is used to solve the nonlinear time fractional Generalized RLW equation. The main purpose of the study is to find numerical solutions of nonlinear time fractional Generalized RLW equation by using RPSM with the help of conformable derivatives. Additionally, in order to show the reliability of the solutions obtained, graphs were drawn for different values of the α expression.

2020, 31 Pages

Keywords: Caputo fractional derivative, Gamma function, Fractional differential equations, Residual power series method, Conformable derivative, RLW equation.

ÖNSÖZ

Bu çalışmamda, değerli zamanlarımı ayırarak bilgi ve deneyimlerini paylaşan, çalışmaya olan ilgimi ve motivasyonumu yüksek tutmak için her türlü gayreti gösteren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR'a teşekkür eder, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Her anımda yanımda hissettiğim, sevgisiyle bana güç veren, desteklerini benden esirgemeyen değerli aileme sonsuz teşekkür ederim.

Zehra AYDEMİR
MUŞ-2020



İÇİNDEKİLER

| | |
|--|-----------|
| ÖZET | iv |
| ABSTRACT..... | v |
| ÖNSÖZ | vi |
| İÇİNDEKİLER | vii |
| SİMGELER VE KISALTMALAR | viii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | ix |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 1.1. Solitary Dalgalar ve Soliton | 3 |
| 1.2. Solitary dalgalar ve Soliton arasındaki farklar | 4 |
| 2. MATERYAL VE YÖNTEM..... | 6 |
| 2.1. Temel Tanım ve Teoremler | 6 |
| 2.2. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller | 10 |
| 2.3. Conformable Türev | 13 |
| 2.4. Residual Kuvvet Serisi Metodu | 16 |
| 3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI..... | 18 |
| 3.1. RPSM'nun Sayısal Uygulamaları | 18 |
| 4. GRAFİKSEL İFADELER | 25 |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER..... | 27 |
| KAYNAKLAR | 28 |
| ÖZGEÇMİŞ | 31 |

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

| | | |
|------------|---|--------------------|
| Δ | : | Diskriminant |
| Γ | : | Gamma |
| ∂ | : | Kısmi türev |
| Λ | : | Lambda |
| Z | : | Tam sayılar kümesi |
| Σ | : | Sigma |
| D | : | Türev |
| α | : | Alfa |
| β | : | Beta |
| Δ | : | Delta |
| μ | : | Mu |
| ∞ | : | Sonsuz |
| $!$ | : | Faktöriyel |

Kısaltmalar

| | | |
|---------|---|-------------------------------------|
| RPSM | : | Residual Kuvvet Serisi Metodu |
| Res_k | : | k. Residual fonksiyon |
| RLW | : | Düzenli Uzun Dalga |
| GRLW | : | Genelleştirilmiş Düzenli Uzun Dalga |
| KdV | : | Korteweg-de Vries |

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 a) Kesirli GRLW denkleminin gerçek çözümünün yüzey grafiği, b) Kesirli GRLW denkleminin RPS yaklaşık çözümünün yüzey grafiği ($\alpha = 1$ ve $a = 0.1$)..... 25

Şekil 4.2 Kesirli GRLW denkleminin RPS yaklaşık çözümünün yüzey grafiği ($a = 0.1$), a) $\alpha = 0.3$, b) $\alpha = 0.5$, c) $\alpha = 0.7$, d) $\alpha = 0.9$ 25

Şekil 4.3 Kesirli GRLW denkleminin RPS yaklaşık çözümünün α 'nın farklı değerleri için iki boyutlu grafiği ($a = 0.1$ ve $t = 0.3$)..... 26



1. GİRİŞ

Son yıllarda, bilim ve mühendislik alanındaki geniş kullanımları nedeniyle kesirli diferansiyel denklemler önem kazanmıştır. Malzeme bilimi, visko elastisite, elektromanyetik, elektrokimya, akustik ve plazma fiziği gibi birçok olay, kesirli kısmi diferansiyel denklemlerle modellenebilir. Kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ilgi çekicidir. Bu çözümler seri çözüm yöntemleri uygulanarak ya da doğrusallaştırma ile elde edilebilir (Odibat ve Momani, 2008; Srivastava ve ark., 2017; Singh ve ark., 2017b; Kumar ve ark., 2018; Ferdous ve Hafez, 2018b; Ferdous ve Hafez, 2018a). Kesirli diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerinin bulunması için çeşitli metotlar vardır. Bazı doğrusal olmayan fiziksel sistemlerin küçük parametreleri olmadığından bu yöntemlerin bazı sınırlamaları vardır. Bu nedenle, bazen karmaşıklığı gösteren küçük parametreler yaklaşık çözüm için temel gereksinimdir. Çoğu durumda, küçük parametrelerin uygun olmayan seçimleri, çözümlerde ciddi etkiler yaratmaktadır. Burada bu parametrelere ihtiyaç duyulmayan bir analitik yaklaşım verilmiştir. Geçtiğimiz yıllarda araştırmacılar, uygulamada çok basit ve düşük maliyetli bazı yeni yöntemler geliştirmişlerdir. Bu yöntemler doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemleri çok kesin ve etkili bir şekilde çözer. Örneğin Homotopi analiz tekniği, Adomian ayrışım metodu, Homotopi pertürbasyon tekniği, Laplace ayrışma metodu, varyasyonel yineleme yaklaşımı, Tanh metodu, Backlund dönüşüm tekniği, vb. (Ganji ve ark., 2007; Kumar ve ark., 2015; Goswami ve ark., 2016; Singh ve ark., 2017a; Goswami ve ark., 2018; Yavuz ve ark., 2018; Yavuz ve Özdemir, 2018a; Yavuz ve Özdemir, 2018b). Bu çalışmada Genelleştirilmiş düzenli uzun dalga (GRLW) denkleminin sayısal çözümlerini araştırdık. GRLW denklemi şu şekilde yazılabilir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \rho}{\partial x} + \beta \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^2 \partial t} = 0, \quad (1.1)$$

burada α , β , μ ve δ negatif olmayan sabitlerdir. Düzensiz bir dalganın davranışı, negatif olmayan β ve δ sabitleriyle tanımlanır. Doğrusal olmayan $\beta \rho \frac{\partial \rho}{\partial x}$ terimi dalga formunun dikleşmesine neden olur. Bununla birlikte, dispersiyon etkisi $\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^2 \partial t}$ terimi dalga formunun yayılmasını sağlar. Solitonlar bu zayıf doğrusal olmama ve dağılım arasındaki dengenin bir sonucu olarak ortaya çıkar. α , β , μ ve δ sabitlerinin farklı değerleri için, (1.1) denklemi farklı denklemler olarak adlandırılır. Örneğin;

$\alpha = \mu = 0$, $\beta = 1$ ve $\delta \neq 0$ için Eşit Genişlik (EW) denklemi ve $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$ ve $\mu = 0$ için Düzenli Uzun Dalga (RLW) olarak adlandırılır. GRLW denklemi, su yüzeyinde küçük genlikli uzun dalgalar için modellenen ve soliton olgularını inceleyen KdV denkleminin alternatif olarak ilk kez RLW denklemini ortaya çıkaran Peregrine tarafından oluşturulmuştur (Peregrine, 1966). Bu model, soliton çözümünü incelemek için KdV denkleminin yerine geçmiştir. Bu denklem, sıg suda doğrusal olmayan enine dalgalar, plazmada iyon-akustik ve manyeto hidrodinamik dalgalar ve doğrusal olmayan kristallerde fonon paketleri gibi çeşitli olguları modellemek için de kullanılmıştır. GRLW denklemi üzerinde daha önce yapılmış bazı çalışmalar vardır. Örneğin Zhang (2005)'de bu denklem için sonlu fark yöntemini kullanarak zaman ve uzay türevlerini incelemiştir. Fourier psödo-spektral yaklaşımlarla mekansal türevler (Durán ve López-Marcos, 2002), Fourier spektral yöntemi (Bona ve ark., 2000) ve doğrusallaştırılmış bir örtülü sahte-spektral yöntemi (Djidjeli ve ark., 2003) ele alınmıştır. Ayrıca spektral yöntem (Ben-Yu ve Manoranjan, 1985), en küçük kareye dayalı sonlu elemanlar yöntemi (Gardner ve ark., 1996; Dağ, 2000; Dağ ve Özer, 2001), Galerkin'e dayalı sonlu elemanlar yöntemleri, Petrov – Galerkin yöntemi (Dogan, 2001), radyal temel fonksiyon kollokasyon yöntemi (Haq ve Ali, 2009; Shokri ve Dehghan, 2010), Sinc-kollokasyon yöntemi (Mokhtari ve Mohammadi, 2010), quintic B-spline (Gardner ve ark., 1997) ile kollokasyon yöntemi ve kübik B-spline sonlu eleman yöntemi özel tür GRLW denklemlerinin sayısal çözümlerini bulmak için tasarlanmıştır (Dağ ve ark., 2004; Khalifa ve ark., 2008).

RLW denklemleri, plazmadaki manyeto-hidrodinamik dalgalar, plazma içindeki iyon-akustik dalgalar, elastik çubuklarda uzunlamasına yayılma dalgaları ve sıvı gaz kabarcığı karışımlarında basınç dalgaları gibi birçok kullanım alanına sahiptir. RLW denklemleri, uygulamalı fizik ve mühendislikteki birçok önemli fiziksel sistem için değerli modeller olarak sunulmaktadır. Viskoz veya şok salınımının önemli bir nokta olduğu akışkan akışlı doğadaki birçok problemi modellemektedir. Aynı zamanda yayılım ile ilgili herhangi bir doğrusal olmayan dalga yayılım problemini modellemek için de kullanılabilir. Örneğin kimyasal reaksiyon, termal radyasyon, kütle difüzyonu, ısı iletimi, viskozite gibi diğer problemlerin modellenmesinde kullanılabilir (Khan ve ark., 2013; Bota ve Căruntu, 2014).

RLW denklemleri için sayısal teori, 1972'de Benjamin tarafından verildi. Bu RLW denklemleri, kütle korunum yasası, momentumun korunum yasası, enerjinin korunum yasası gibi fiziksel koruma yasalarına bağlıdır (Benjamin ve ark., 1972;

Achouri ve Omrani, 2009; Saberi-Nadjafi ve Ghorbani, 2009). Kesirli düzenli uzun dalga (RLW) denklemleri, mühendislik ve bilim alanında uzun dalga boylu ve küçük genlikli sığ su dalgaları gibi çeşitli önemli olayları da tarif eder. Kesirli RLW denklemleri ile modellenen lineer olmayan dalgalar, okyanuslardaki sığ su dalgaları konusunda birçok araştırmacının büyük ilgisini çekmektedir. Okyanustaki lineer olmayan dalgalar, kesirli RLW denklemleriyle matematiksel olarak modellenmiştir. Ayrıca, Tsunami olarak bilinen dev okyanus dalgaları da kesirli RLW denklemleriyle tanımlanmaktadır. Okyanusun içindeki tahrip olan deniz gemilerindeki sıcaklık farkından kaynaklanan dev iç dalgalar, aynı zamanda RLW denklemleriyle tanımlanabilir. Peregrine, ilk önce düzgün olmayan bir dalganın gelişimini modellemek için RLW denklemlerini kullandı. Daha sonra Benjamin ve ark., RLW denklemlerinin okyanuslardaki büyük bir fiziksel olay sınıfını yorumlamak için daha klasik KdV denklemlerine bir alternatif olarak kullandılar (Benjamin ve ark., 1972).

1.1 Solitary Dalgalar ve Soliton

Su, hava ve boşluk vb. uygun olan ortamlarda ilerleyen bir dağılışa dalga denir (Howard ve Vaughan, 1998). Matematiksel anlamda bakılacak olursa dalga, hareket eden herhangi bir fonksiyon olarak tanımlanabilir (Mawlood, 2016).



Şekil 1 Matematiksel dalga modeli (Howard ve Vaughan, 1998).

Dalgaları, duran dalgalar ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabiliriz. Duran dalgalar, sabit pozisyonda kalan dalgalardır. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır (soliton).

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliğe sahip doğrusal olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir (Wadati, 2001):

1. Yerleşik dalga, özelliklerini değiştirmeden yayılır (şekil, hız vb.),
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdır ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

Solitary dalgalar, çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bundan dolayı bu dalgalar solitonumsu dalgalar olarak ta bilinir.

1.2 Solitary dalgalar ve Soliton arasındaki farklar

Birçok benzerliklerine rağmen solitary dalgaları ve solitonlar arasında bazı farklılıklar vardır. Solitonlar, integrallenebilir denklemlerin yerelleştirilmiş çözümleridir, solitary dalgalar ise bütünleştirilemez denklemlerin yerelleştirilmiş çözümleridir. Solitonların bir diğer ayırt edici özelliği ise diğer solitonlar ile zıt yönlü çarpışma sonrasında bile kendi şekillerini korumalarıdır. Solitary dalgalar, aynı yönlü çarpışmalarda özelliklerini korusalar da zıt yönlü çarpışmalarda farklılık gösterirler. Bu nedenle, solitary dalgaların çeşitliliği gerçek solitonların çeşitliliğinden çok daha geniştir. Bazı solitary dalgaları, örneğin, girdapları ve kasırgaları dalga olarak ayırt etmek zordur. Bu nedenle, solitary dalgalar bazen soliton benzeri hareketlilikler gösteren uyarılar olarak bilinir denir (Yousefi ve Muminov, 2012).

Soliton dalga olgusu, okyanus dalgalarının gelişimi ile ilgilidir. İki ya da üç soliton dalga etkileşime girdiğinde, bazı çalışmalarda çarpışmadan sonra küçük kuyruk görünümü oluşmasına rağmen, genellikle soliton dalgaların etkileşimden sonra şeklini koruduğu anlaşılmaktadır. Bundan dolayı son yıllarda okyanus dalgaları ile ilgili denklemlerin hem sayısal hem de analitik çözümleri daha fazla araştırmaya konu olmuştur. Böylece, kesirli RLW denklemleri, soliton dalga çözümleri veren ve okyanus dalgaları arasındaki etkileşimi açıklayan evrimsel denklemlerdir. Bu kesirli RLW denklemleri birçok okyanus mühendisliği problemlerini basitleştirerek karakterize edebilir.

İkincil soliton dalgalar, sinüzoidal solitonlar olarak da bilinen iki soliton dalğanın çarpışmasıyla oluşturulur. Bu, RLW denkleminin önemli bir özelliğidir. Bu özellik Fizikte parçacık çarpışmalarına benzerdir. RLW denklemlerinin soliton dalgalarının çarpışması, KdV denkleminin soliton dalgalarının çarpışmasından farklıdır. KdV denkleminde elde edilen solitonların çarpışması, bir faz kaymasıdır.

Bu çalışmada, doğrusal olmayan zaman kesirli Genelleştirilmiş RLW denklemini çözmek için RPSM (residual kuvvet serisi metodu) kullanılmıştır. Çalışmanın temel amacı, conformable türevler yardımıyla RPSM kullanılarak, doğrusal olmayan zaman kesirli GRLW denkleminin sayısal çözümlerini bulmaktır. Bu yöntem, doğrusal olmayan zaman kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için çok iyi bilinen yöntemleri çok etkili ve kesin olarak birleştirme kapasitesine

sahiptir. Bu yaklaşım, sayısal sonuçlarda büyük doğruluk ve minimum hata sağlarken, hesaplama işinin boyutunu minimuma indirmek için çok etkilidir (He, 1999; Belgacem ve ark., 2003; Belgacem ve Karaballi, 2006).



2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1

Bir fonksiyonu ve onun muhtelif mertebeden türevlerini içeren matematiksel denklemler diferansiyel denklemler olarak isimlendirilir. Tek bir bağımsız değişkene göre türev içeren diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklemler denir. Bir diferansiyel denklemin mertebesi denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. n . mertebeden bir adi diferansiyel denklem genel olarak,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

kapalı formunda gösterilebilir (DuChateau ve Zachmann, 1986).

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonunun $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türeve sahip fonksiyonu,

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0$$

ise Φ fonksiyonuna $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ denkleminin çözümüdür denir.

Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit değeri parametre olarak kabul eden bir eğri ailesi olarak ortaya çıkar. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de özel çözüm denir (Cerit, 1997).

Tanım 2.2

İçinde en az iki bağımsız ve bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini kapsayan denklemlere kısmi türevli diferansiyel denklemler denir. z bağımlı ; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli diferansiyel denklem genel olarak,

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$$

şeklinde dir.

n tane bağımsız ve bir tane bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad Z = Z(X)$$

olmak üzere,

$$F = (x_1, x_2, \dots, x_n, z, z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_n}, z_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

formundadır. Burada x_1, x_2, \dots, x_n bağımsız değişkenleri; z ise bağımlı değişkenli göstermekte ve

$$z_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}, z_{x_i y_i} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial y_i}; i, j = 1, 2, \dots, n$$

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre içermeyen bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin bir özel çözümü denir. Diğer taraftan bir kısmi türevli denklemin mertebesi kadar (sürekli türetilebilir) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemini özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin genel çözümü denir (DuChateau ve Zachmann, 1986).

Tanım 2.3

Eğer bir kısmi türevli diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken (veya bağımlı değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineer diferansiyel denklemler denir. Aksi halde lineer olmayan diferansiyel denklem denir.

Tanım 2.4

Bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü, denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon içerir. Bu nedenle, adi diferansiyel denklemlere kıyasla kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak daha zordur. Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

i) Sınır Şartları: Sınır şartları kısmi diferansiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin T sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α, β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleriyle şu şekildedir :

$$\text{Dirichlet Şartı: } u_{\Gamma} = g,$$

$$\text{Neumann Şartı: } \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma}} = g,$$

$$\text{Karışık (mixed) veya Robin Şartı: } \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g,$$

ii) Başlangıç Şartları: Başlangıç şartları sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevinin kombinasyonu şeklindedir.

Başlangıç şartlarıyla birlikte verilmiş diferansiyel denkleme ‘Cauchy problemi’ denir. İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem,

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

Genel şekliyle verilebilir. Burada A, B, C, D, E, F, G katsayı fonksiyonları ve G fonksiyonu da sabit veya değişken içeren fonksiyondur. Bu denklem, $\Delta = B^2 - 4AC$ diskriminantının işaretine göre şu şekilde sınıflandırılır;

$\Delta > 0$ ise Hiperbolik,

$\Delta = 0$ ise Parabolik,

$\Delta < 0$ ise Eliptik,

Herhangi bir tipteki problemin çözümü, klasik Hadamard testi gereğince aşağıdaki üç şartı sağlarsa problem ‘iyi durumda’, en az bir şartı sağlamaz ise ‘kötü durumda’ olarak adlandırılır. Bu şartlar aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

- 1) Varlık
- 2) Teklik
- 3) Kararlılık

Pratikte bir denklemin çözümünün varlığını ifade etmenin en iyi yolu problemdeki bütün şartları sağlayan ve problemde yerine konduğunda denklemini sağlayan bir çözüm yapılandırılmaktadır. Eğer çözümün tekliği gösterilirse denklemin çözümü bulunmuş demektir. Adi diferansiyel denklemlere göre kısmi diferansiyel denklemlerde çözüm tasvirleri seri veya integraller gibi limit yöntemleri içerir ve çözümler her zaman elementer fonksiyonların kapalı şekillerinde ifade edilemez. Bu durumda, bir yaklaşık çözüm ele alınır, eğer başlangıç şartındaki küçük bir değişim, çözüme küçük bir değişiklik olarak yansırsa bu çözüme kararlıdır denir ve çözüm kararlı kabul edilir (Gustafson, 2012).

Tanım 2.5

Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyonu ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine başlangıç değer problemi, verilen şartlara da başlangıç şartları adı verilir (Denness, 1968).

Tanım 2.6

Kompleks değişkenli bir f fonksiyonu, bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda differansiyellenebiliyorsa f , z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer kompleks değişkenli bir f fonksiyonu, bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse f , S üzerinde analitiktir denir. Bir f fonksiyonu C kompleks sayılar kümesinin tüm noktalarında analitikse, f 'e tam fonksiyon denir.

Tanım 2.7

Diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (2.3)$$

başlangıç değer problemini ele alalım. D bölgesi merkezi (x_0, y_0) noktasında olan

$$|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanan bir dikdörtgensel bölge olsun. Ayrıca (2.3) denklemindeki f fonksiyonu ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevi D de y 'ye göre Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda $|f(x, y)| \leq m$ ve $h = \min\left\{a, \frac{b}{m}, \frac{1}{K}\right\}$ olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahip olan bir $F(x)$ fonksiyonu y ve $|x - x_0| \leq h$ aralığı vardır.

- i) $y = F(x)$, (2.3) denkleminin $|x - x_0| \leq h$ aralığında bir çözümdür.
- ii) $F(x)$ fonksiyonu $|x - x_0| \leq h$ aralığında $|F(x) - y_0| \leq b$ eşitsizliğini sağlar.
- iii) $F(x_0) = y_0$ dır.
- iv) (i),(ii),(iii), özelliklerinin hepsini birden sağlayan, $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı olan $F(x)$ fonksiyonu bir tanedir (Özer ve Eser, 2002).

Tanım 2.8

D kapalı bölgesinde $f(x, y)$ fonksiyonu tanımlı olsun. Eğer her $(x, y_1) \in D$ ve $(x, y_2) \in D$ çiftleri için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \quad (2.5)$$

olacak şekilde bir K sayısı bulunabiliyorsa, $f(x, y)$ fonksiyonu D üzerinde Lipschitz koşulunu sağlıyor denir (Özer ve Eser, 2002).

Tanım 2.9

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. X 'den alınan f fonksiyonuna Y 'de bir g fonksiyonunu karşılık getiren kurala operatör denir.

Tanım 2.10

X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A: X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. X_0 cümlesi X uzayının bir alt uzayı olsun. Eğer $\forall x, y \in X_0$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$

İse A operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.11

$L, D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere, $Ly = \lambda y$ eşitsizliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ 'ya L operatörünün öz değeri, $y(x, y)$ fonksiyonuna ise λ 'ya karşılık gelen öz fonksiyon denir (Levitan ve ark., 1975).

Tanım 2.12

$a \in R$ ve $\forall k = 0, 1, 2 \dots$ için $c_k \in R$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \dots + c_n (x - a)^n + \dots$$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir. Buradaki c_k sayılarına serinin katsayıları adı verilir.

2.2 Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller**Tanım 2.13**

Gama fonksiyonu, $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-1} du$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gama fonksiyonunun bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir (Kannappan, 2009).

$$1) \Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!$$

$$2) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1$$

Tanım 2.14

f fonksiyonu her sonlu (α, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in Z^+, m - 1 \leq \alpha < m$ olmak üzere $x > a$ için reel bir f fonksiyonunun α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x f(t)(x-t)^{m-\alpha-1} dt \quad (2.6)$$

şeklindedir.

α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, x > 0 \quad (2.7)$$

$$J^0 f(x) = f(x).$$

olarak tanımlanır (Podlubny, 1998).

Tanım 2.15

Riemann-Liouville (2.6) kesirli türev tanımı, kesirli türev ve integral teorisinin gelişmesinde ve bunların matematikteki uygulamalarında önemli bir rol oynar.

Uygulama problemleri, başlangıç koşulları fiziksel olarak yorumlanabilir kesirli türev tanımları gerektirir. Bu açıdan bakıldığında, Riemann-Liouville yaklaşımının problemlerin yayınlanmasında yetersiz kaldığı ortaya konmuştur. Çünkü Riemann-Liouville yaklaşımı $t = 0$ noktasında Riemann-Liouville kesirli türevinin limit değerleri biçiminde tanımlanan başlangıç koşullarına sahiptir. Örneğin; b_1, b_2, \dots, b_m keyfi sabitler olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(z) = b_1$$

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(z) = b_2$$

... = ...

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-m} f(z) = b_m$$

biçiminde tanımlanan başlangıç koşulları meydana gelir. Bu tipteki başlangıç koşullarına sahip başlangıç-değer problemleri matematiksel olarak başarılı bir şekilde çözümlenmesine rağmen, bunların sonuçları kullanışlı değildir. Çünkü bu tipteki başlangıç koşullarının bilinen fiziksel yorumu yoktur.

Kesirli diferansiyel tekniğinde başlangıç koşullarını fiziksel yorumlara en uygun şekilde veren M. Caputo olmuştur. Caputo'nun tanımı; m pozitif tam sayı olmak üzere $m - 1 < \alpha < m$ için

$${}_a D_z^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^z (z-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \quad (2.8)$$

şeklindedir.

$f(z)$ fonksiyonunun normal koşullar altında $\alpha \rightarrow m$ için Caputo türevi, $f(z)$ fonksiyonunun m . basamaktan klasik türevine eşittir.

Caputo türevi için,

$$D^\alpha x^\beta = 0, \beta < \alpha$$

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} x^{\beta - \alpha}, \beta \geq \alpha.$$

özellikleri geçerlidir.

Tanım 2.16

n , α 'dan büyük en küçük tam sayı olmak üzere $u(x, t)$ fonksiyonunun α .mertebeden Caputo zaman-kesirli türev operatörü şu şekilde tanımlanır (Podlubny, 1998).

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial t^n} d\tau, \quad (2.9)$$

$$n - 1 < \alpha < n,$$

$$D_t^n u(x, t) = \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n}, n \in N$$

Tanım 2.17

$t = t_0$ noktasında bir kesirli kuvvet serisi açılımı

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (t - t_0)^{m\alpha} = c_0 + c_1 (t - t_0)^\alpha + c_2 (t - t_0)^{2\alpha} + \dots,$$

$$0 \leq m - 1 < \alpha \leq m, \quad t \geq t_0, \quad (2.10)$$

şeklinde verilir (Podlubny, 1998).

Tanım 2.18

$t = t_0$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun bir kesirli kuvvet serisi açılımı

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x) (t - t_0)^{m\alpha} = f_0(x) + f_1(x) (t - t_0)^\alpha + f_2(x) (t - t_0)^{2\alpha} + \dots,$$

$$0 \leq m - 1 < \alpha \leq m, \quad t \geq t_0, \quad (2.11)$$

şeklinde verilir (Podlubny, 1998).

Tanım 2.19

$t = t_0$ noktasında $u(x, t)$ fonksiyonunun kesirli kuvvet serisi açılımı

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_t^{m\alpha} u(x, t_0)}{\Gamma(m\alpha + 1)} (t - t_0)^{m\alpha}, \quad (2.12)$$

$$0 \leq m - 1 < \alpha \leq m, \quad x \in I, \quad t_0 \leq t < t_0 + R,$$

şeklinde. Burada Genelleştirilmiş Taylor seri formülleri kullanılmıştır.

$\alpha = 1$ iken (2.12) denklemi klasik Taylor serisine eşittir.

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^m u(x, t_0)}{\partial t^m} \frac{(t - t_0)^m}{m!}, x \in I, t_0 \leq t < t_0 + R, \quad (2.13)$$

2.3 Conformable Türev

Son yıllarda, araştırmacılar gerçek dünya problemlerini modellemek için çok sayıda kesirli türev tanımı önermişlerdir. Bilinen kesirli türevlerden biri Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevdir. Bu tanım gerçek dünya problemlerini modellemek için her zaman uygun değildir. Bir başka tanım ise Caputo türevidir. Caputo tanımı, fiziksel alan problemlerini modellemekte ve çözmekte oldukça avantajlıdır fakat yeterli değildir. Bununla birlikte, kompleks sistemlerin dinamiklerini daha iyi modelleyebilmek için kısa bir süre önce Khalil ve arkadaşları önerdikleri yeni türev tanımının klasik türevin özelliklerini sağladığını göstermişlerdir. Khalil ve arkadaşları conformable türev tanımının, diğer kesirli türev tanımlarının aksine Çarpım kuralını, Bölüm kuralını, Zincir kuralını sağladığını göstermişlerdir. Klasik türevin sağladığı bu özelliklerin, önerilen yeni kesirli türevin de sağlaması bu yeni tanımın bilinen kesirli türev tanımlarına göre çok daha avantajlı olduğunu göstermektedir.

Tanım 2.20

Bir $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Burada bütün $t > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için f fonksiyonunun α . mertebeden conformable türevi,

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır (Khalil ve ark., 2014).

Burada $a > 0$ olmak üzere $(0, a)$ aralığındaki bazı değerler için f fonksiyonu, α -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ mevcut ise

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

olduğu görülür.

Bazen, $T_{\alpha}(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(0)$ yazarak, α . mertebeden f fonksiyonunun, conformable türevleri gösterilebilir. Buna ek olarak, α . mertebeden f 'nin conformable türevi varsa, o zaman f , α -türevlenebilirdir denir (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 2.1

Eğer $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha \in (0,1]$ aralığında tanımlı ve $t_0 > 0$ da α differansiyellenebilen bir fonksiyon ise f fonksiyonu t_0 da süreklidir (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 2.2

$\alpha \in (0,1]$ ve f, g bir $t > 0$ noktasında α - differansiyellenebilen iki fonksiyon olsun. O zaman T_α aşağıda verilen bütün özellikleri sağlar (Khalil ve ark., 2014).

- $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g), \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}, \forall p \in \mathbb{R}$ için,
- Bütün sabit $f(t) = \lambda$ için, $T_\alpha(\lambda) = 0$ dır.
- $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$
- $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$
- Eğer f differansiyellenebilen bir fonksiyon ise, $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ dır.

Tanım 2.21

$f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun bütün $t > a$ ve $\alpha \in (0,1]$ için α mertebeden (sol) conformable türevi,

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.15)$$

olarak tanımlanır. Burada $a = 0$ olduğu zaman notasyon T_α şeklinde yazılır. Eğer $(T_\alpha^a f)(t)$, (a,b) aralığında oluşursa o zaman

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_\alpha^a f)(t)$$

dır. (Abdeljawad, 2015).

Ayrıca Teorem 2.2 de verilen bütün özellikler t yerine $(t-a)$ yazılırsa Tanım 2.21 için de sağlanır. Tanım 2.21 için bazı fonksiyonların conformable türevi aşağıdaki gibidir (Ünal ve Gökdoğan, 2017).

- $T_\alpha^a((t-a)^p) = p(t-a)^{p-\alpha}$ bütün $p \in \mathbb{R}$ için,
- $T_\alpha^a\left(e^{\lambda \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}\right) = \lambda e^{\lambda \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}$
- $T_\alpha^a\left(\sin\left(\omega \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c\right)\right) = \omega \cos\left(\omega \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c\right), \omega, c \in \mathbb{R}$
- $T_\alpha^a\left(\cos\left(\omega \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c\right)\right) = -\omega \sin\left(\omega \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c\right), \omega, c \in \mathbb{R}$
- $T_\alpha^a\left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}\right) = 1$

Tanım 2.22

$f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun bütün $t < b$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için α mertebeden (sağ) conformable türevi,

$$({}^b_{\alpha}Tf)(t) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.16)$$

olarak tanımlanır. Eğer $({}^b_{\alpha}Tf)(b)$, (a, b) aralığında oluşursa o zaman,

$$({}^b_{\alpha}Tf)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} ({}^b_{\alpha}Tf)(t)$$

biçiminde elde edilir (Abdeljawad, 2015).

Yüksek mertebeden conformable diferansiyel denklemler için aşağıdaki genelleme yapılabilir.

Tanım 2.23

$\alpha \in (n, n + 1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. Bir $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun a ' dan başlayarak α - mertebeden (sol) kesirli türevi, $f^{(n)}(t)$ vardır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$T_{\alpha}^a(f)(t) = T_{\beta}^a(f)^n(t)$$

Burada $a = 0$ olduğu zaman notasyon T_{α} şeklinde yazılır. f ' nin b 'de sona eren sıralı α - mertebeden (sağ) kesirli türevi,

$$({}^b_{\alpha}Tf)(t) = (-1)^{n+1} ({}^b_{\alpha}Tf)(t)$$

şeklinde olur.

$\alpha = n + 1$ ise $\beta = 1$ ve f 'nin kesirli türevi $f^{(n+1)}(t)$ olur. Ayrıca $n = 0$ olduğunda (veya $\alpha \in (0, 1)$) $\beta = \alpha$ olur ve Tanım 2.21' dekiyle aynı durum oluşur (Abdeljawad, 2015).

Bazı fonksiyonların conformable türevleri aşağıda verilmiştir (Khalil ve ark., 2014).

- a) $T_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha}$, bütün $p \in \mathbb{R}$ için.
- b) $T_{\alpha}(1) = 0$
- c) $T_{\alpha}(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}$, $c \in \mathbb{R}$
- d) $T_{\alpha}(\sin bx) = bx^{1-\alpha} \cos bx$, $b \in \mathbb{R}$.
- e) $T_{\alpha}(\cos bx) = -bx^{1-\alpha} \sin bx$, $b \in \mathbb{R}$.
- f) $T_{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right) = 1$
- g) $T_{\alpha}\left(\sin \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right) = \cos \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$
- h) $T_{\alpha}\left(\cos \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right) = -\sin \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$

$$i) T_{\alpha} \left(e^{\frac{1}{\alpha} t^{\alpha}} \right) = e^{\frac{1}{\alpha} t^{\alpha}}$$

Teorem 2.3 f , bir t_0 komşuluğunda bazı $0 < \alpha \leq 1$ için, sonsuz α -türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu varsayalım. f fonksiyonunun kesirli kuvvet serisi açılımı,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}, t_0 < t < t_0 + R^{\frac{1}{\alpha}}, \quad R > 0 \quad (2.17)$$

şeklinde olur. Burada $(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(k)}(t_0)$ ifadesi kesirli türevin k kez uygulanması anlamına gelir (Ünal ve Gökdoğan, 2017).

2.4 Residual Kuvvet Serisi Metodu

RPSM'nin temel amacını açıklamak için,

$$f_0(x) = u(x, 0) = f(x) \quad (2.18)$$

başlangıç şartıyla verilen,

$$D_t^{\alpha} u(x, t) + R(x)u(x, t) + N(x)u(x, t) = g(x, t), \quad t > 0, \quad x \in R,$$

lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

Burada $R(x)$ lineer operatör ve $N(x)$ lineer olmayan bir operatör ve $g(x, t)$ sürekli fonksiyonlardır.

RPSM aşağıda verilen denklemin çözümünü $t = 0$ civarında kuvvet serisi açılımı olarak ifade etmekten oluşur.

$$f_{n-1}(x) = D_t^{(n-1)\alpha} u(x, 0) = h(x)$$

Conformable kesirli türev operatörü kullanılarak çözümün seriye açılımı şöyledir:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\alpha^n n!}, \quad x \in I, \quad 0 \leq t \leq R \quad (2.19)$$

Bir sonraki adımda, k . kesik $u(x, t)$ serisi yani $u_k(x, t)$ şu şekilde yazılır:

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\alpha^n n!}, \quad x \in I, \quad 0 \leq t \leq R, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

1.RPS yaklaşık çözümü,

$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^{\alpha}}{\alpha 1!}$ şeklinde yazılırsa, $u_k(x, t)$ yeniden formüle edilebilir.

$$u_k(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^{\alpha}}{\alpha 1!} + \sum_{n=2}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\alpha^n n!}, \quad x \in I, 0 \leq t \leq R, \quad k = 2, 3, \dots$$

Şimdi residual fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$Res(x, t) = D_t^{\alpha} u(x, t) + R(x)u(x, t) + N(x)u(x, t) - g(x, t) \quad (2.21)$$

ve k .residual fonksiyon olarak,

$$Res_k(x, t) = D_t^\alpha u_k(x, t) + R(x)u_k(x, t) + N(x)u_k(x, t) - g(x, t), k = 1, 2, 3, \dots$$

yazılır,

Her $x \in I$ ve $t \geq 0$ için $Res(x, t) = 0$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} Res_k(x, t) = Res(x, t)$ 'dir. Aslında bu,

$n = 1, 2, 3, \dots, k$ için $D_t^{(n-1)\alpha} Res_k(x, 0) = 0$ 'a yol açar.

$D_t^{(n-1)\alpha} Res_k(x, 0) = 0$ denklemini çözerek istenilen $f_n(x)$ katsayıları bulunur.

Böylece, sırasıyla $u_n(x, t)$ yaklaşık çözümleri elde edilebilir.



3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI

3.1 RPSM'nun Sayısal Uygulamaları

Kesirli GRLW denklemi,

$$D_t^\alpha \rho + \rho_x + \rho \rho_x + \rho_{xxt} = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in R, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.1)$$

(3.1) denklemini aşağıdaki başlangıç şartıyla ele alalım.

$$\rho(x, 0) = 3a \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} x \right), \quad \alpha > 0$$

(3.1) denkleminin gerçek çözümü

$$\rho(x, t) = 3a \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (x - (1 + \alpha)t) \right)$$

ile verilmiştir.

Verilen başlangıç koşullarına tabi olan zaman kesirli GRLW denklemini kesilmiş residual fonksiyonuyla yazalım.

Varsayalım ki bu denklemin çözümü, conformable türevler yardımıyla

$$\rho(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\alpha^n n!}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t < R \quad (3.2)$$

şeklinde olsun.

Burada, ρ 'nun k .inci kesik serisi ρ_k :

$$\rho_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\alpha^n n!}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t < R \quad (3.3)$$

şeklinde dir.

$$\rho_0 = f_0(x) = \rho(x, 0) = f(x)$$

başlangıç şartını kullanarak (3.3) eşitliğini şu şekilde yazabiliriz,

$$\rho_k(x, t) = f(x) + \sum_{n=1}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\alpha^n n!}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t < R \quad (3.4)$$

İlk olarak (3.3) denkleminin seri açılımındaki $f_n(x), n=1, 2, \dots, k$ katsayıların değerini bulmak için residual fonksiyonu,

$$Res(x, t) = D_t^\alpha \rho + \rho_x + \rho \rho_x + \rho_{xxt}$$

olarak tanımlayalım.

O halde k . residual fonksiyonu Res_k aşağıdaki gibidir,

$$Res_k = \frac{\partial^\alpha \rho_k(x, t)}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial \rho_k(x, t)}{\partial x} + \rho_k(x, t) \frac{\partial \rho_k(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 \rho_k(x, t)}{\partial x^2 \partial t}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

$f_1(x)$ 'i belirlemek için (3.5) eşitliğinde $k = 1$ yazalım,

$$Res_1 = \frac{\partial^\alpha \rho_1(x, t)}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial x} + \rho_1(x, t) \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 \rho_1(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \quad (3.6)$$

fonksiyonu yazılır. Bu denklemde

$$\rho_1(x, t) = f(x) + \frac{t^\alpha}{\alpha 1!} f_1(x)$$

alınır ve $t = 0$ da $Res_1 = 0$ olduğu düşünülürse

$$f_1(x) = \frac{3}{2} a \sqrt{\frac{a}{1+a}} \left(1 + 6a + \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}} x\right) \right) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{1+a}} x\right)^4 \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{1+a}} x\right) \quad (3.7)$$

bulunur. O halde

$$\rho_1(x, t) = 3a \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{1+a}} x\right) + \frac{t^\alpha}{\alpha 1!} \frac{3}{2} a \sqrt{\frac{a}{1+a}} \left(1 + 6a + \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}} x\right) \right) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{1+a}} x\right)^4 \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{1+a}} x\right) \quad (3.8)$$

1.RPS yaklaşık çözümü bulunur.

Benzer şekilde; ikinci bilinmeyen $f_2(x)$ katsayısını bulmak için Res_2 fonksiyonunu yazalım,

$$Res_2 = \frac{\partial^\alpha \rho_2(x, t)}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial \rho_2(x, t)}{\partial x} + \rho_2(x, t) \frac{\partial \rho_2(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 \rho_2(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \quad (3.9)$$

Burada

$$\rho_2(x, t) = 3a \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{1+a}} x\right) + \frac{t^\alpha}{\alpha 1!} \frac{3}{2} a \sqrt{\frac{a}{1+a}} \left(1 + 6a + \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}} x\right) \right) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{1+a}} x\right)^4 \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{1+a}} x\right) + \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} f_2(x),$$

çözümünü Res_2 fonksiyonunda yerine yazıp

$$D_t^\alpha Res_2 = 0, \quad (t = 0)$$

eşitliği uygulanırsa,

$$f_2(x) = \frac{3a^2(-8 - 96a - 576a^2 + (-9 - 48a + 432a^2) \cosh(\sqrt{\frac{a}{1+a}} x))}{32(1+a)}$$

$$+ \frac{48a \cosh(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) + \cosh(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^8}{32(1+a)} \quad (3.10)$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \rho_2(x, t) &= 3a \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + \frac{t^\alpha}{\alpha} \frac{3}{1!2} a \sqrt{\frac{a}{1+a}} \left(1 + 6a + \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)\right) \\ &\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^4 \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\ &+ \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} \frac{3a^2 \left(-8 - 96a - 576a^2 + (-9 - 48a + 432a^2) \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)\right)}{32(1+a)} \\ &+ \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} \frac{48a \cosh(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) + \cosh(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^8}{32(1+a)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

2.RPS yaklaşık çözümü bulunur.

Bu şekilde devam edilerek, üçüncü bilinmeyen $f_3(x)$ katsayısını bulmak için

$$\begin{aligned} \rho_3(x, t) &= 3a \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + \frac{t^\alpha}{\alpha} \frac{3}{1!2} a \sqrt{\frac{a}{1+a}} \left(1 + 6a + \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)\right) \\ &\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^4 \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\ &+ \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} \frac{3a^2 \left(-8 - 96a - 576a^2 + (-9 - 48a + 432a^2) \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)\right)}{32(1+a)} \\ &+ \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} \frac{48a \cosh(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) + \cosh(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^8}{32(1+a)} + \frac{t^{3\alpha}}{\alpha^3 3!} f_3(x) \end{aligned}$$

alınır ve $t = 0$ da $\operatorname{Res}_3=0$ olduğu düşünülürse,

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{3}{256} a \left(\frac{a}{1+a}\right)^{3/2} \left(-85 - 1800a - 12528a^2 - 50112a^3 + 4(-31 - 540 - \right. \\ &2160a^2 + 6912a^3) \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 4(-11 - 54a + 972a^2) \cosh\left(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - \\ &4 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 144 a \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + \end{aligned}$$

$$\cosh(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^{10} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \quad (3.12)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \rho_3(x, t) = & 3asech^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + \\ & \frac{t^\alpha}{\alpha} \frac{3}{1!2} a \sqrt{\frac{a}{1+a}} \left(1 + 6a + \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)\right) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^4 \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\ & + \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} \frac{3a^2(-8 - 96a - 576a^2 + (-9 - 48a + 432a^2)\cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right))}{32(1+a)} \\ & + \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} \frac{48a \cosh\left(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^8}{32(1+a)} \\ & + \frac{t^{3\alpha}}{\alpha^3 3!} \frac{3}{256} a \left(\frac{a}{1+a}\right)^{3/2} (-85 - 1800a - 12528a^2 - 50112a^3 + 4(-31 - 540a \\ & + 6912a^3) \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 4(-11 - 54a + 972a^2) \cosh\left(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\ & - 4 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 144 a \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\ & + \cosh(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^{10} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.RPS yaklaşık çözümü bulunur. Bu şekilde devam edilirse,

$$\begin{aligned} f_4(x) = & \frac{1}{2048(1+a)^2} a^3 (1 + 6a + \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)) (276 + 10380a + 139392a^2 \\ & + 1294272a^3 + 6(55 + 1252a + 312a^2 - 242496a^3) \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\ & + 192a(-32 - 618a + 1125a^2) \cosh\left(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 75 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\ & - 2904a \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 18864a^2 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 20 \cosh\left(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\ & + 372a \cosh\left(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + \cosh\left(5\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^{14} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
\rho_4(x, t) = & 3asech^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + \\
& \frac{t^\alpha}{\alpha!} \frac{3}{2} a \sqrt{\frac{a}{1+a}} \left(1 + 6a + \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)\right) sech\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^4 \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} \frac{3a^2(-8 - 96a - 576a^2 + (-9 - 48a + 432a^2)\cosh(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x))}{32(1+a)} \\
& + \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} \frac{48a \cosh(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) + \cosh(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) sech(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x)^8}{32(1+a)} \\
& + \frac{t^{3\alpha}}{\alpha^3 3!} \frac{3}{256} a \left(\frac{a}{1+a}\right)^{3/2} (-85 - 1800a - 12528a^2 - 50112a^3 + 4(-31 - 540a \\
& + 6912a^3) \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 4(-11 - 54a + 972a^2) \cosh\left(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& - 4 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 144 a \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + \cosh(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) sech\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^{10} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + \frac{t^{4\alpha}}{\alpha^4 4!} \frac{1}{2048(1+a)^2} a^3 (1 + 6a + \cosh(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x))(276 + 10380a + 139392a^2 \\
& + 1294272a^3 + 6(55 + 1252a + 312a^2 - 242496a^3)\cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + 192a(-32 - 618a + 1125a^2)\cosh\left(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 75\cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& - 2904a \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 18864a^2 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 20\cosh\left(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + 372a \cosh(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) + \cosh(5\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) sech\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^{14} \tag{3.15}
\end{aligned}$$

ve,

$$\begin{aligned}
f_5(x) = & \frac{1}{163840(1+a)^2} a^3 \sqrt{\frac{a}{1+a}} (1 + 6a + \cosh(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x))(5502 + 290448a \\
& + 4545360a^2 + 35182080a^3 + 212709888a^4 - 72(-116 - 5225a - 57452a^2 \\
& - 113160a^3 + 2962368a^4)\cosh(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) + 9(375 + 6400a - 157312a^2 \\
& - 2652672a^3 + 2985984a^4)\cosh(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) + 400\cosh(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -42300a \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 901728a^2 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + 3160512a^3 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 174 \cosh\left(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 13200a \cosh\left(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + 105264a^2 \cosh\left(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 48 \cosh\left(5\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 948a \cosh\left(5\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + \cosh\left(6\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^{16} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \tag{3.16}
\end{aligned}$$

buradan

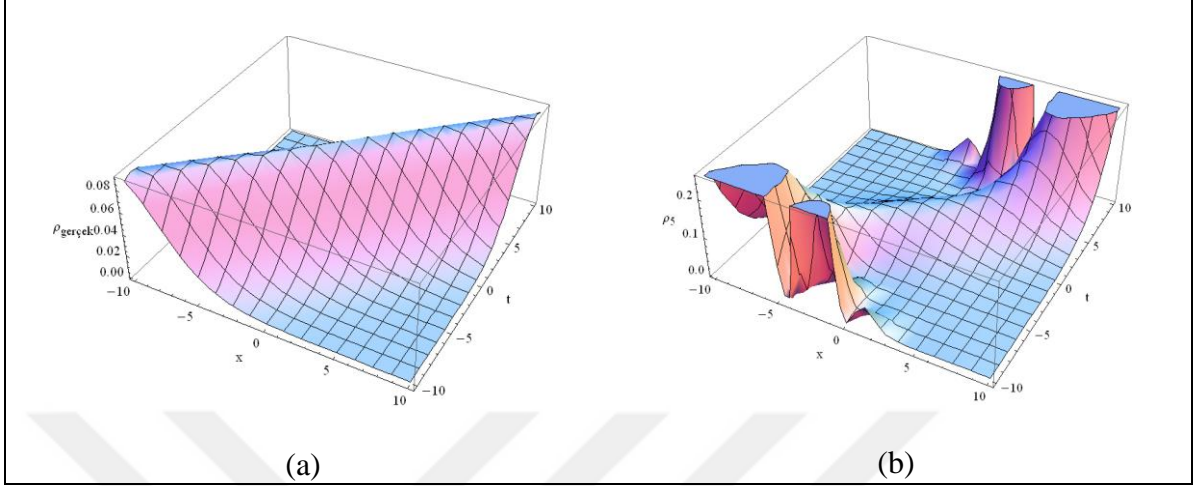
$$\begin{aligned}
\rho_5(x, t) &= 3a \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + \\
& \frac{t^\alpha}{\alpha!} \frac{3}{2} a \sqrt{\frac{a}{1+a}} \left(1 + 6a + \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)\right) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^4 \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} \frac{3a^2(-8 - 96a - 576a^2 + (-9 - 48a + 432a^2)\cosh(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x))}{32(1+a)} \\
& + \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2 2!} \frac{48a \cosh(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) + \cosh(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) \operatorname{sech}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x)^8}{32(1+a)} \\
& + \frac{t^{3\alpha}}{\alpha^3 3!} \frac{3}{256} a \left(\frac{a}{1+a}\right)^{3/2} (-85 - 1800a - 12528a^2 - 50112a^3 + 4(-31 - 540a \\
& + 6912a^3) \cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 4(-11 - 54a + 972a^2) \cosh\left(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& - 4 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 144a \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + \cosh\left(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^{10} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + \frac{t^{4\alpha}}{\alpha^4 4!} \frac{1}{2048(1+a)^2} a^3 (1 + 6a + \cosh(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x))(276 + 10380a + 139392a^2 \\
& + 1294272a^3 + 6(55 + 1252a + 312a^2 - 242496a^3)\cosh\left(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + 192a(-32 - 618a + 1125a^2)\cosh\left(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 75 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& - 2904a \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 18864a^2 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 20 \cosh\left(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +372a \cosh\left(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + \cosh\left(5\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^{14} \\
& + \frac{t^{5\alpha}}{\alpha^{55!}} \frac{1}{163840(1+a)^2} a^3 \sqrt{\frac{a}{1+a}} (1+6a + \cosh(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x)) (5502 + 290448a \\
& + 4545360a^2 + 35182080a^3 + 212709888a^4 - 72(-116 - 5225a - 57452a^2 \\
& - 113160a^3 + 2962368a^4) \cosh(\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) + 9(375 + 6400a - 157312a^2 \\
& - 2652672a^3 + 2985984a^4) \cosh(2\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) + 400 \cosh(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) \\
& - 42300a \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 901728a^2 \cosh\left(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + 3160512a^3 \cosh(3\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) - 174 \cosh(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x) - 13200a \cosh\left(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + 105264a^2 \cosh\left(4\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) - 48 \cosh\left(5\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) + 948a \cosh\left(5\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \\
& + \cosh\left(6\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right)^{16} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1+a}}x\right) \tag{3.17}
\end{aligned}$$

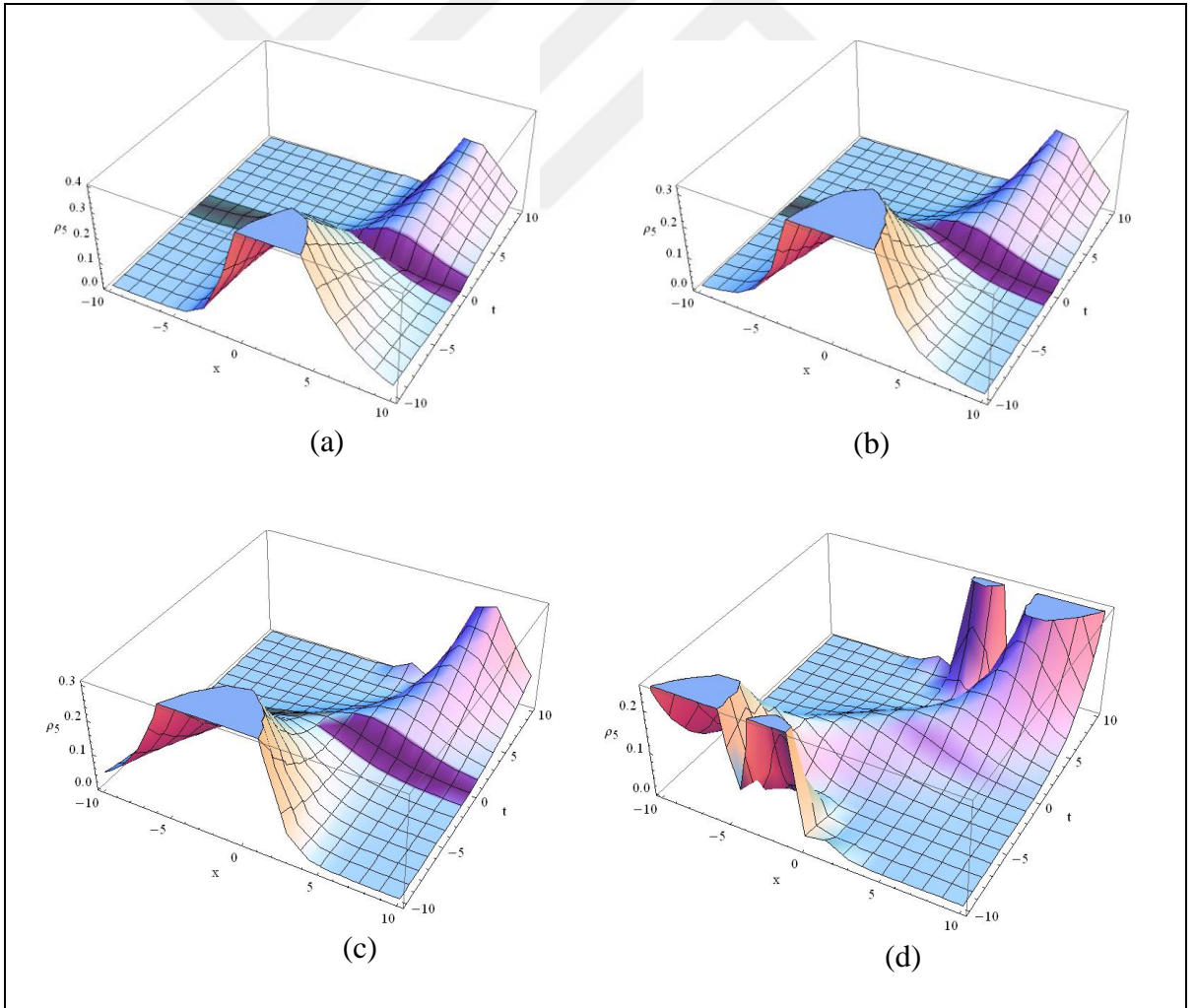
elde edilir.

4. GRAFİKSEL İFADELER

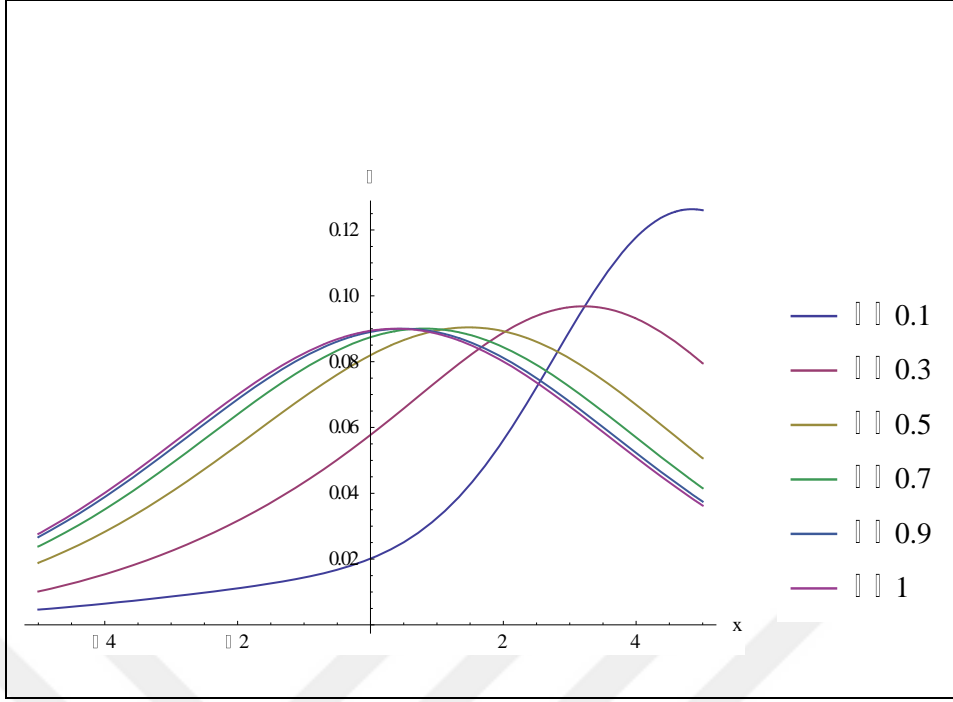
Bu bölümde, yukarıdaki çözümlerin güvenilirliği ve etkinliğini göstermek için grafikler çizdik.



Şekil 4.1 a) Kesirli GRLW denkleminin gerçek çözümünün yüzey grafiği, b) Kesirli GRLW denkleminin RPS yaklaşık çözümünün yüzey grafiği ($\alpha = 1$ ve $a = 0.1$)



Şekil 4.2 Kesirli GRLW denkleminin RPS yaklaşık çözümünün yüzey grafiği ($a = 0.1$), a) $\alpha = 0.3$, b) $\alpha = 0.5$, c) $\alpha = 0.7$, d) $\alpha = 0.9$.



Şekil 4.3 Kesirli GRLW denkleminin RPS yaklaşık çözümünün α 'nın farklı değerleri için iki boyutlu grafiği ($a = 0.1$ ve $t = 0.3$)

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada conformable türev operatörleri yardımıyla kesirli GRLW probleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için RPSM kullanılmıştır. Çalışmanın temel amacı RPSM yardımıyla bir başlangıç şartından hareketle denklemin seri çözümlerini elde etmektir. Adım sayısını arttırdıkça gerçek çözüme daha yakın sonuçlar elde edilebilir. Burada işlem kolaylığı olması açısından seri çözüm beş adım ilerletilmiştir. Bulunan çözümün gerçek çözüme yakınsaklığını grafiksel olarak ifade ettik. Bu amaçla çözümlerin güvenilirliğini göstermek için çözümde α kesirli mertebesi 1 alınarak gerçek çözümle karşılaştırıldı ve α kesirli mertebesinin 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 değerleri için grafik sonuçları incelendi. Ayrıca bu değerler için iki boyutlu grafik çizilerek kesirli mertebe değişikçe çözümdeki değişiklikler gözlemlendi. Bu değerler keyfi olarak seçildi. Bu grafiklere bakıldığında α kesirli mertebesi 1'e yaklaştıkça bulunan seri çözümün bilinen gerçek çözüme yakınsadığı görülmektedir. Sonuç olarak RPSM'nin conformable türev operatörleri yardımıyla kesirli GRLW problemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmakta güçlü ve etkili bir metot olduğu sonucuna varıldı.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T. 2015. On conformable fractional calculus, *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Achouri, T., Omrani, K. 2009. Numerical solutions for the damped generalized regularized long-wave equation with a variable coefficient by Adomian decomposition method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14 (5), 2025-2033.
- Belgacem, F.B.M., Karaballi, A.A. 2006. Sumudu transform fundamental properties investigations and applications, *International Journal of Stochastic Analysis*, 2006.
- Belgacem, F.B.M., Karaballi, A.A., Kalla, S.L. 2003. Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations, *Mathematical problems in Engineering*, 2003.
- Ben-Yu, G., Manoranjan, V. 1985. Spectral method for solving the RLW equation, *Journal of Computational Mathematics*, 3 (3), 228-237.
- Benjamin, T.B., Bona, J.L., Mahony, J.J. 1972. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 272 (1220), 47-78.
- Bona, J.L., McKinney, W.R., Restrepo, J.M. 2000. Stable and unstable solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation, *Journal of Nonlinear Science*, 10 (6), 603-638.
- Bota, C., Căruntu, B. 2014. Approximate analytical solutions of the regularized long wave equation using the optimal homotopy perturbation method, *The Scientific World Journal*, 2014.
- Cerit, C., 1997, Bilgisayar Uygulamalı Diferensiyel Denklemler (Çeviri), *Beta Yayıncılık*, İstanbul,
- Dağ, İ. 2000. Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182 (1-2), 205-215.
- Dağ, İ., Özer, M.N. 2001. Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, *Applied Mathematical Modelling*, 25 (3), 221-231.
- Dağ, İ., Saka, B., Irk, D. 2004. Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 159 (2), 373-389.
- Dennemeyer, R., 1968, Introduction to partial differential equations and boundary value problems, *McGraw-Hill*, New York,
- Djidjeli, K., Price, W., Twizell, E., Cao, Q. 2003. A linearized implicit pseudo-spectral method for some model equations: the regularized long wave equations, *Communications in numerical methods in engineering*, 19 (11), 847-863.
- Dogan, A. 2001. Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov–Galerkin method, *Communications in numerical methods in engineering*, 17 (7), 485-494.
- DuChateau, P., Zachmann, D.W., 1986, Schaum's outline of theory and problems of partial differential equations, *McGraw-Hill*, New York,
- Durán, A., López-Marcos, M. 2002. Numerical behaviour of stable and unstable solitary waves, *Applied numerical mathematics*, 42 (1-3), 95-116.
- Ferdous, F., Hafez, M. 2018a. Nonlinear time fractional Korteweg-de Vries equations for the interaction of wave phenomena in fluid-filled elastic tubes, *The European Physical Journal Plus*, 133 (9), 384.

- Ferdous, F., Hafez, M. 2018b. Oblique closed form solutions of some important fractional evolution equations via the modified Kudryashov method arising in physical problems, *Journal of Ocean Engineering and Science*, 3 (3), 244-252.
- Ganji, D., Tari, H., Jooybari, M.B. 2007. Variational iteration method and homotopy perturbation method for nonlinear evolution equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 54 (7-8), 1018-1027.
- Gardner, L., Gardner, G., Ayoub, F.a., Amein, N. 1997. Approximations of solitary waves of the MRLW equation by B-spline finite elements, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 22 (2 A), 183-193.
- Gardner, L., Gardner, G., Dogan, A. 1996. A least-squares finite element scheme for the RLW equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12 (11), 795-804.
- Goswami, A., Singh, J., Kumar, D. 2018. Numerical simulation of fifth order KdV equations occurring in magneto-acoustic waves, *Ain Shams Engineering Journal*, 9 (4), 2265-2273.
- Goswami, A., Singh, J., Kumar, D. 2016. A reliable algorithm for KdV equations arising in warm plasma, *Nonlinear Engineering*, 5 (1), 7-16.
- Gustafson, K.E., 2012, Introduction to partial differential equations and Hilbert space methods, *Courier Corporation*,
- Haq, S., Ali, A. 2009. A meshfree method for the numerical solution of the RLW equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223 (2), 997-1012.
- He, J.-H. 1999. Homotopy perturbation technique, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 178 (3-4), 257-262.
- Howard, R.S., Vaughan, H.D., 1998, Navy Electricity and Electronics Training Series, *Naval Education and Training Professional Development and Technology Center*, United States Navy,
- Kannappan, P., 2009, Functional equations and inequalities with applications, *Springer Science & Business Media*,
- Khalifa, A., Raslan, K., Alzubaidi, H. 2008. A collocation method with cubic B-splines for solving the MRLW equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212 (2), 406-418.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M. 2014. A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- Khan, Y., Taghipour, R., Falahian, M., Nikkar, A. 2013. A new approach to modified regularized long wave equation, *Neural Computing and Applications*, 23 (5), 1335-1341.
- Kumar, D., Agarwal, R.P., Singh, J. 2018. A modified numerical scheme and convergence analysis for fractional model of Lienard's equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 339, 405-413.
- Kumar, D., Singh, J., Kumar, S. 2015. Numerical computation of fractional multi-dimensional diffusion equations by using a modified homotopy perturbation method, *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 17, 20-26.
- Levitan, B.M., Sargsian, I.S., Sargsjan, I.S., 1975, Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators: Selfadjoint Ordinary Differential Operators, *American Mathematical Soc.*,
- Mawlood, R.M. 2016. "Sonlu farklar yöntemi ile KdV denkleminin nümerik çözümleri", *Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*,

- Mokhtari, R., Mohammadi, M. 2010. Numerical solution of GRLW equation using Sinc-collocation method, *Computer Physics Communications*, 181 (7), 1266-1274.
- Odibat, Z., Momani, S. 2008. Applications of variational iteration and homotopy perturbation methods to fractional evolution equations, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 31 (2), 227-234.
- Özer, M.N., Eser, D., 2002, Diferansiyel Denklemler Teori ve Uygulamaları, *Birlik ofset*, Eskişehir,
- Peregrine, D.H. 1966. Calculations of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics*, 25 (2), 321-330.
- Podlubny, I., 1998, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, *Elsevier*,
- Saberi-Nadjafi, J., Ghorbani, A. 2009. He's homotopy perturbation method: an effective tool for solving nonlinear integral and integro-differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 58 (11-12), 2379-2390.
- Shokri, A., Dehghan, M. 2010. A meshless method using the radial basis functions for numerical solution of the regularized long wave equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 26 (4), 807-825.
- Singh, J., Kumar, D., Al Qurashi, M., Baleanu, D. 2017a. A new fractional model for giving up smoking dynamics, *Adv, Difference Equ*, 2017, 16.
- Singh, J., Kumar, D., Nieto, J.J. 2017b. Analysis of an El Nino-Southern Oscillation model with a new fractional derivative, *Chaos, Solitons & Fractals*, 99, 109-115.
- Srivastava, H., Kumar, D., Singh, J. 2017. An efficient analytical technique for fractional model of vibration equation, *Applied Mathematical Modelling*, 45, 192-204.
- Ünal, E., Gökdoğan, A. 2017. Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method, *Optik*, 128, 264-273.
- Wadati, M. 2001. Introduction to solitons, *Pramana*, 57 (5-6), 841-847.
- Yavuz, M., Ozdemir, N., Baskonus, H.M. 2018. Solutions of partial differential equations using the fractional operator involving Mittag-Leffler kernel, *The European Physical Journal Plus*, 133 (6), 215.
- Yavuz, M., Özdemir, N. 2018a. A different approach to the European option pricing model with new fractional operator, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 13 (1), 12.
- Yavuz, M., Özdemir, N. 2018b. Numerical inverse Laplace homotopy technique for fractional heat equations.
- Yousefi, Y., Muminov, K.K. 2012. A Simple Classification of Solitons, arXiv preprint arXiv:1206.1294.
- Zhang, L. 2005. A finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation, *Applied Mathematics and Computation*, 168 (2), 962-972.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Zehra AYDEMİR
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Bitlis/Ahlat, 01.06.1991
Telefon : 05453980685
Faks :
e-mail : zehraydemir13@hotmail.com

EĞİTİM

| Derece | Adı, İlçe, İl | Bitirme Yılı |
|-----------------|----------------------------------|--------------|
| Lise | : Selçuklu Lisesi, Ahlat, Bitlis | 2009 |
| Üniversite | : Fırat Üniversitesi, Elazığ | 2014 |
| Yüksek Lisans : | | |
| Doktora : | | |

İŞ DENEYİMLERİ

| Yıl | Kurum | Görevi |
|------|-------|----------|
| 2015 | MEB | Öğretmen |