T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKINSAK KÜME DİZİLERİNİN ÖLÇÜMÜ

Arzu POLAT(KOYUNCU)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Nisan-2020
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKINSAK KÜME DİZİLERİNİN ÖLÇÜMÜ

Arzu POLAT (KOYUNCU)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Harun POLAT

Nisan-2020
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Arzu (POLAT) KOYUNCU tarafından hazırlanan "Yakınsak Küme Dizilerinin Ölçümü" konulu bu çalışma 28/04/2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Dr. Öğr. Üyesi Abdullah AYDIN
Muş Alparslan Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Danışman
Prof. Dr. Harun POLAT
Muş Alparslan Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Fatih KUTLU
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 05./05./2020 Tarih ve ..13.../....11..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

İmza

Arzu POLAT (KOYUNCU)

Tarih: 28/04/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

YAKINSAK KÜME DİZİLERİNİN ÖLÇÜMÜ

Arzu POLAT (KOYUNCU)

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Harun POLAT

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde küme dizileri ve küme dizilerinin (K) Kuratowski, (W) Wijsman, (H) Hausdorff, (M) Mosco, (F) Fisher yakınsaklık çeşitleri anlatıldı. Üçüncü bölümde küme dizilerinin cebiri anlatıldı. Dördüncü bölümde kümelerin ölçümü ve adı geçen yakınsak küme dizilerinin ölçümünün olup-olmadığı araştırıldı.

2020, 39 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Küme Dizileri, Ölçüm, Yakınsak Küme Dizilerin Ölçümü.

ABSTRACT

MS THESIS

MEASUREMENT OF CONVERGENT SET SEQUENCES

Arzu POLAT (KOYUNCU)

Muş Alparslan University
Institute of Science
Division of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Harun POLAT

This study consists of four parts. In the first chapter, basic definitions and theorems are given. In the second chapter sets sequences and of convergence sets sequences (K) Kuratowski, (W) Wijsman, (H) Hausdorff, (M) Mosco, (F) Fisher convergence types were explained. In the third chapter, the algebra of the sets arrays was explained. In the fourth chapter, it was searched whether the measurement of sets and measurement of said convergent sets sequences were available.

2020, 39 Pages

Keywords: Set Sequences, Measurement, Measurement of Convergent Set Sequences.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmanın konusu yüksek lisans dönemi içerisinde yapılan araştırma ve çalışmaların neticesinde ortaya konulmuştur. Bu çalışma, Muş Alparslan Üniversitesi Matematik Bölümü Ana Bilim Dalı Başkanlığı bünyesinde gerçekleştirilmiştir.

Yüksek Lisans eğitimim boyunca yardımlarını benden esirgemeyen aileme ve bu tez çalışması süresince, danışman hocam Sayın Prof. Dr. Harun POLAT 'a teşekkür ederim.

Arzu POLAT (KOYUNCU)
MUŞ-2020

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ve SİMGELER

Simgeler

$\subset$	:	Alt Küme
$\cup$	:	Birleşim
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar
$\mu(E)$	:	E'nin Ölçüsü
$\forall$	:	Her
$CC(X)$	:	Kapalı Konveks Kümeler
$\cap$	:	Kesişim
$\{A_k\}$	:	Küme dizisi
(X, d)	:	Metrik Uzay
$(X, \mathcal{A}, \mu)$	:	Ölçü Uzayı
$\|.\|$	:	Norm
$(X, \|.\|)$	:	Normlu Uzay
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel Sayılar
(x_n)	:	Reel sayı dizisi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar Kümesi
σ	:	Sigma
$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar Kümesi
$P(X)$	:	X kümesinin kuvvet kümesi
$d(x, A)$	:	x noktasının A kümesine uzaklığı

Kısaltmalar

$F - limA_k$	:	$\{A_k\}$ dizisinin Fisher limiti
$H - \lim A_k$	:	$\{A_k\}$ dizisinin Hausdorff limiti
$K - \lim A_k$	:	$\{A_k\}$ dizisinin Kuratowski limiti
$M - limA_k$	:	$\{A_k\}$ dizisinin Mosco limiti

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu çalışmada Yakınsak Küme Dizileri ve Yakınsak Küme Dizisi çeşitlerinin ölçümü araştırıldı. Metrik uzaylarda küme dizilerinin yakınsaklığı, küme dizilerinin yakınsaklık türleri incelendi. Artan ve azalan küme dizilerinin yakınsaklık çeşitleri ile ilişkisi açıklandı. Son olarak bu yakınsak küme dizisi çeşitlerinin ölçümü incelendi.

Ölçüm ilk olarak bir çubuğun veya bir ipin reel düzlemde ki uzunluğunun ölçümünün belirlenmesi için kullanılmıştır. Daha sonra bir tarlanın alanını hesaplamak veya bir evin hacmini hesaplamak için basit anlamda ölçümler yapılmıştır. Ancak bu basit anlamdaki ölçümler daha sonraları yetersiz kalmıştır. Örneğin bir ağacın hacminin hesaplanmasında veya bir yaprağın yüzey alanının hesaplanmasında birçok problemle karşılaşılmıştır. Cisim veya kümelerin ölçümü için matematiğin gelişmesiyle birçok çalışma yapılmıştır. Ölçüm teorisindeki toplamsallık özelliğinden dolayı bu ölçüme toplamsal ölçüm de denilmektedir.

Biz ise adı geçen yakınsak küme dizilerinin ölçümlerine çalıştık.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

İlk olarak küme dizilerinin yakınsaklığı 1902 de Painleve' in öğrencisi Zoretti tarafından matematiksel yöntem ve sosyal bilimler adlı kitabında bahsetmiştir. Daha sonra Effros (1965) bir topolojik uzayda kapalı alt kümelerin yakınsaklığını, Wijsman 1966 da konveks küme dizilerinin yakınsaklığına çalıştı. Kuratowski 1966 da topoloji adlı kitabında küme dizilerinin yakınsaklık çeşitleri olan; "Hausdorf Yakınsaklık (H)", "Kuratowski Yakınsaklık (K)" ve "Wijsman Yakınsaklık (W)" dan bahsetti. Salinetti ve Wets (1979) sonlu boyutlu konveks küme dizilerinin yakınsaklığına, Lucchetti (1985) kapalı konveks kümelerde küme dizilerinin yakınsaklığına, Beer (1985) metrik uzaylarda kapalı kümelerin yakınsaklığına, Blasi ve Myjak (1986) Banach uzayında konveks kümelerin zayıf yakınsaklığına çalıştılar. Baronti ve Papini (1986) küme dizilerinin yakınsaklığını ve küme dizileri için (K), (H) ve (W) yakınsaklık arasındaki ilişkileri incelediler. Lechicki ve Levi (1987) metrik uzayda hiper uzayların wijsman yakınsaklığını inceledi.

Ölçüm teorisinin kurucusu olarak bilinen A.L. Cauchy (1789-1857) integrali bir toplamın limiti olarak tanımlayan ilk matematikçi oldu. Daha sonra Riemann (1826-1865), Cauchy'nin çalışmalarını sürdürmüştür. Ayrıca G. Cantor (1845-1918) integral ile ölçüm arasındaki ilişkiyi inceledi. Yapılan çalışmalar arasında özellikle de Fransız matematikçiler Emile Borel (1871-1956) ve Henri Lebesque (1875-1941) in yapmış olduğu çalışmalar bugünkü ölçüm teorisinin temelini oluşturmaktadır. Daha sonra Paul R.Halmos (1950) 'Ölçüm Teorisi' kitabında ölçülebilir kümeleri işlemiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Kaynakçada geçen çalışmalarla ilgili literatür taraması yapıldı. Kaynaklar temin edildi. Küme Dizilerinin Yakınsaklık Çeşitleri ve Ölçüm ile ilgili şimdiye kadar yapılan çalışmalar incelendi. Yakınsak Küme Dizilerinin Yakınsaklık Çeşitlerinin Ölçümü çalışıldı.

Bu bölümde çalışmamız boyunca kullandığımız bazı temel tanım ve teoremler verildi.

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1 Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümesine göre çeşitli adlar alırlar. Mesela dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli dizi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ise diziye kompleks terimli dizi adı verilir (Maddox, 1969).

Tanım 3.2 Bir (x_n) dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için $m, n > N_0$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n = N_0(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (Maddox, 1969).

Tanım 3.3 M, X metrik uzayının bir altkümesi olsun. Bu takdirde X' in bir x_0 noktasının her bir $\varepsilon -$civarı x_0'dan farklı bir $y \in M$ noktasını içeriyorsa bu x_0 noktasına M'nin yığılma (veya limit) noktası denir (Bayraktar,1982).

Tanım 3.4 Her $\varepsilon > 0$, her $n > n_0$ için $|x_n - x| < \varepsilon$ olacak şekilde ε' a bağlı bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, (x_n) dizisine x'e yakınsaktır denir. $x_n \longrightarrow x$ ya da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir (Maddox, 1969).

Tanım 3.5 X bir metrik uzay olsun. X'deki her bir dizi yakınsak bir alt diziye sahipse X'e kompakt denir. X'in M altkümesi X'in bir alt uzayı olarak kompakt ise yani M'deki her bir dizi M'de yakınsak bir alt diziye sahipse M'ye de kompakt denir (Bayraktar, 1982).

Tanım 3.6 X boş olmayan bir küme ve F reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X' e F üzerinde vektör uzayı denir (Maddox, 1969).

A. X, + işlemine göre bir değişmeli gruptur. Her x, y, z $\in X$ için,

A1. $x + y \in X$ olmalı,

A2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ olmalı,

A3. $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ olmalı,

A4. $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $(-x) \in X$ olmalı,

A.5. $x + y = y + x$ olmalıdır.

B. Her $\alpha, \beta \in F$ için;

B1. $\alpha x \in X$ olmalı,

B2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ olmalı,

B3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ olmalı,

B4. $(\alpha\beta)\, x = \alpha(\beta x)$ olmalı,

B5. $1.x = x$ olacak şekilde $1 \in X$ olmalıdır.

Tanım 3.7 X bir vektör uzayı olsun. Her $x,\ y \in X$ için $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $\|.\|$ ye bir norm ve $(X, \|.\|)$'ye de bir normlu uzay denir (Ocak, 1998).

N1. $\|x\| \geq 0$

N2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3. $\|ax\| = |a|\|x\|$ $(a \in \mathbb{R})$

N4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

Tanım 3.8 X boş olmayan bir küme ve $d: X$ x $X \longrightarrow R$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için,

i. $d(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x; y) = d(y; x)$

iii. $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$

şartları sağlanıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ye de bir metrik uzay denir (Maddox, 1969).

Tanım 3.9 Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi verilsin. Bir m reel sayısı, her $x \in A$ için $x \geq m$ olursa A kümesi alttan sınırlıdır denir. Bu durumda, m sayısına A kümesinin bir alt sınırı denir. Eğer m, A kümesinin bir alt sınırı ise herhangi bir $m' \leq m$ sayısı da A kümesinin bir alt sınırıdır.

Her $x \in A$ için $x \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa A kümesine üstten sınırlıdır denir. Bu durumda M sayısına A kümesinin bir üst sınırı denir. Eğer M, A kümesinin bir üst sınırı ise $M' \geq M$ sayısıda A kümesinin bir üst sınırıdır.

Eğer A kümesi hem üstten hem de alttan sınırlı, yani her $x \in A$ için $|x| \leq k$ olacak şekilde bir k sayısı varsa bu kümeye sınırlıdır denir (Jain ve ark., 1986).

Tanım 3.10 A boştan farklı bir küme olmak üzere bir M sayısı için;

i. Her $x \in A$ için $x \leq M$

ii. Her $\varepsilon > 0$ için bir $x_0 \in A$ sayısı vardır öyle ki $M - \varepsilon < x_0$

şartları sağlanırsa M sayısına A kümesinin en küçük üst sınırı yada supremumu denir. Eküs(A), sup(A) veya $\sup_{x \in A} x$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Benzer şekilde, bir m sayısı için;

i. Her $x \in A$ için $x \geq m$

ii. Her $\varepsilon > 0$ için bir $x_0 \in A$ vardır öyle ki $x_0 < m + \varepsilon$

şartları sağlanırsa m sayısına A kümesinin en büyük alt sınırı ya da infimumu denir. A kümesinin en büyük alt sınırı ebas(A), inf(A) veya $\inf_{x \in A} x$ sembollerinden biri ile gösterilir (Jain ve ark., 1986).

Tanım 3.11 L bir vektör uzayı ve $X \subset L$ olsun. Her $x, y \in X$ ve a skaleri için;

$$B = \{z \in L : z = ax + (1-a)y, 0 \leq a \leq 1\} \subset X$$

oluyorsa X'e konveks küme denir. Başka bir ifadeyle boş olmayan ve herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasını içeren küme konveks bir kümedir (Maddox, 1969).

Tanım 3.12 Bir vektör uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya normlu vektör uzayı denir. Normlu vektör uzayları $(\mathrm{N}, \|.\|)$ veya N ile gösterilir (Knopp, 1956).

Tanım 3.13 X normlu vektör uzay olsun. X uzayı norm metriğine göre tam ise X e bir Banach uzayı denir (Maddox, 1969).

Tanım 3.14 Bir uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir (Maddox, 1969).

Tanım 3.15 Bir X kümesinin tüm alt kümelerinin kümesine X in kuvvet kümesi denir. $P(X)$ ile gösterilir (Balcı, 2012).

Tanım 3.16 X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\langle , \rangle : X\mathrm{x}X \longrightarrow F$ fonksiyonu aşağıdaki şartlar sağlıyorsa bu fonksiyonu iç çarpım (veya iç çarpım fonksiyonu) denir.

a. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

b. $\langle a.x, y\rangle = a\langle x, y\rangle$

c. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

d. $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

üzerinde iç çarpımın tanımlandığı vektör uzayına iç çarpım uzayı denir. İç çarpım uzayı $(X, \langle\, ,\rangle)$ ya da kısaca X ile gösterilir (Bayraktar, 1982).

Tanım 3.17 İç çarpım yardımıyla tanımlanan d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise X'e Hilbert uzayı denir. Hilbert uzayları iç çarpım metriğine göre tam olan Banach uzaylarıdır (Bayraktar, 1982).

Tanım 3.18 L, F üzerinde sıfırdan farklı bir vektör uzayı olsun. L nin herhangi bir bazındaki vektör sayısına L nin (F üzerindeki) boyutu denir. BoyL veya $\mathrm{Boy}_F L$ ile gösterilir. $L = \{0\}$ ise $\mathrm{BoyL} = 0$ olarak tarif edilir. $\mathrm{BoyL} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $L = \{0\}$ olmasıdır. Bir vektör uzayının boyutu 0 veya pozitif bir tamsayı ise vektör uzayına sonlu boyutlu aksi halde sonsuz boyutlu denir (Bayraktar,1982).

Tanım 3.19 X boştan farklı bir küme ve τ da X in elemanlarından oluşan alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa τ ya X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine ise bir topolojik uzay denir.

T1. $\emptyset, X \in \tau$ dır.

T2. $G_{k_1}, G_{k_2}, \dots, G_{k_n} \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} G_{k_i} \in \tau$.

T3. Her $i \in \mathbb{N}$ için $G_{k_i} \in \tau$, yani τ sınıfı$\bigcup_{i\in I} G_{k_i} \in \tau$, yani τ sınıfı keyfi birleşime göre kapalıdır (Mucuk, 2010).

Tanım 3.20 (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $\mathcal{G} = \{G_i | i \in I\}$ de X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{G}$ deki her bir G_i kümesi açık ise $\mathcal{G}$ ye açık örtü denir. $\mathcal{G}$ sınıfının A yı örten sonlu adette kümesi varsa yani, $A \subseteq G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$olacak şekilde $G_{i_1}, \dots, G_{i_n} \in \mathcal{G}$ varsa $\mathcal{G}' = \{G_{i_1}, \dots, G_{i_n}\}$ sınıfına $\mathcal{G}$ nin sonlu bir alt örtüsü denir (Mucuk, 2010).

Tanım 3.21 (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya bir kompakt küme denir.X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına bir kompakt uzay denir (Mucuk, 2010).

Tanım 3.22 (X, τ) bir topolojik uzayı verilmiş olsun.d metriğine göre açık kümelerin ailesi τ olacak şekilde X de bir d metriği tarif edilebilirse (X, τ) uzayına metriklenebilir denir (Bayraktar, 1994).

Tanım 3.23 (X, d) bir metrik uzay,$x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

a) $D_r(x_0) = D(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ (Açık yuvar)

b) $\overline{D}_r(x_0) = \overline{D}\,(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ (Kapalı yuvar)

Burada x_0 merkezli r yarıçaplı açık bir yuvar, merkeze olan uzaklığı r den daha küçük olan X e ait noktaların kümesidir (Bayraktar, 1994).

Tanım 3.24 A boş olmayan bir küme olmak üzere bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$f : A \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

birebir ve örten dönüşümü varsa A ya sonlu küme denir. A kümesi n elemanlı olup $\emptyset$ boş küme sonlu küme olarak kabul edilir. Sonlu olmayan kümeye sonsuz küme denir (Jain ve ark., 1986).

Tanım 3.25 Bir sonsuz küme $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesine denk ise numaralanabilirdir. Sonlu ya da numaralanabilir kümeye sayılabilir küme denir (Jain ve ark., 1986).

Teorem 3.26 Bir kümenin supremumu veya infimumu kümeye ait değilse kümenin bir yığılma noktasıdır (Balcı, 2011).

Teorem 3.27 Yakınsak bir dizinin her alt dizisi de yakınsaktır (Balcı, 2011).

3.2. Küme Dizileri

Tanım 3.28 X boştan farklı bir küme ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere $f: \mathbb{N} \longrightarrow P(X)$ şeklinde tanımlı fonksiyona her $k \in \mathbb{N}$ için $P(X)$ de bir

$f(k) = A_k \in P(X)$ kümesi belirler. Bu fonksiyonun değer kümesini oluşturan A_k kümelerinin oluşturduğu diziye küme dizisi denir. Burada $P(X)$ kümesi elemanları X kümesinden oluşan alt kümelerin sınıfıdır (Nuray ve Rhoades, 2012).

Mesela; her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{I}_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{n}\right\} = (0, \frac{1}{n})$ olsun. Buradan $\{\mathrm{I}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir küme dizisidir.

$\mathrm{I}_1 = (0,1)$, $\mathrm{I}_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{I}_3 = \left(0, \frac{1}{3}\right)$, … , $\mathrm{I}_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ bir küme dizisidir.

3.3. Küme Dizilerinin Yakınsaklığı

Tanım 3.29 X bir küme, $\{A_n\}$ de X kümesinin elemanlarından oluşan alt kümelerinin bir küme dizisi olsun.

$$\lim sup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_n\right)$$

$$\lim inf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_n\right)$$

kümelerine sırası ile, $\{A_n\}$ küme dizisinin üst limiti ve alt limiti denir. Eğer

$$\lim sup A_n = \lim inf A_n = A$$

ise $\{A_n\}$ küme dizisi A kümesine yakınsak ve limiti A dır denir (Kuratowski, 1966).

Örnek 3.30 Genel terimi $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ ile verilen küme dizisi her $n \in N$ için

$-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ olduğundan $\{A_n\}$ dizisi azalan bir dizisidir. O halde,

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots = [-1,1] \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \ldots \cap \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \cap \ldots = \{0\}$

yani $\lim_{n\to\infty} A_n = \{0\}$ olur.

Örnek 3.31 Genel terimi $A_n = \{1,2,3, \ldots, n\}$ ile verilen küme dizisi,

$\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=m}^{\infty}\{1,2,\ldots,n\} = \{1,2,\ldots,m\} \cup \{1,2,\ldots,m,m+1\} \cup \ldots$

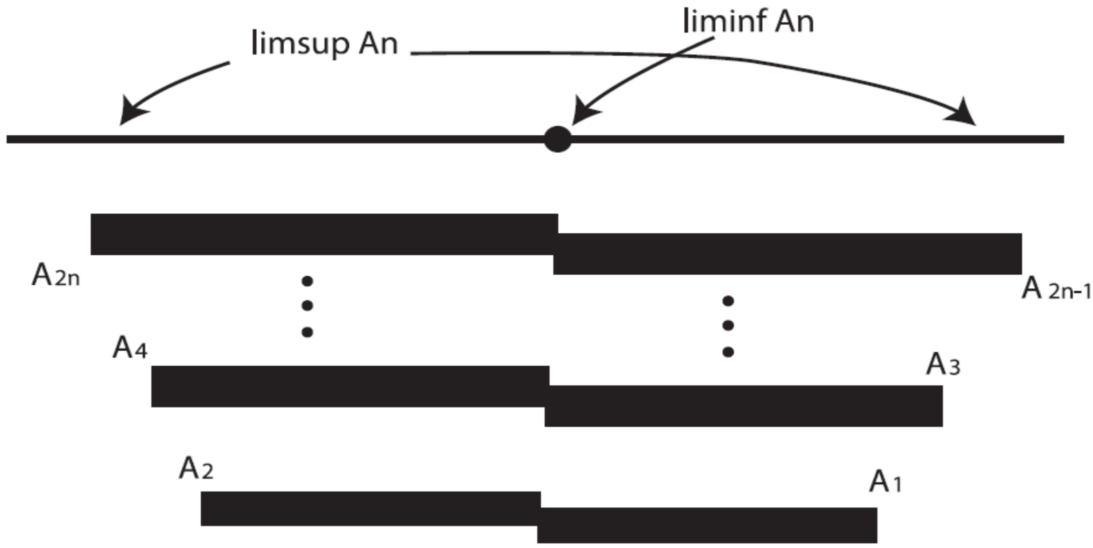
= {1,2,3, …,m,m+1,…}= ℕ.

limsup$A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

$\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n = \{1,2,\ldots,m\} \cap \{1,2,\ldots,m,m+1\} \cap \{1,2,\ldots,m,m+1,m+2\} \cap \ldots$

={1,2,3,…,m}= ℕ.

liminf$A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\{1,2,\ldots,m\}$= $\{1\} \cup \{1,2\} \cup \ldots \cup \{1,2,\ldots,m\} \cup \{1,2,\ldots,m,m+1\} \cup \ldots$ = {1, 2 ,...,n}= ℕ.



Şekil 3.1. Yakınsak olmayan küme dizileri için iç ve dış limitler

3.4. Küme Dizilerinin Yakınsaklık Çeşitleri

3.4.1. Kuratowski yakınsaklık (X,d) bir metrik uzay ve $\{A_k\}$ küme dizisi X kümesinin elemanlarından oluşan X in alt kümeleri olsun. Eğer;

liminf$A_k =$ limsup$A_k = A$ ise $\{A_k\}$ küme dizisi A ya Kuratowski anlamından yakınsaktır denir. $A_k \longrightarrow A$ veya $A_k \xrightarrow{k} A$ ya da $K - limA_k = A$ ile gösterilir. Burada;

$$liminf A_k = \{x \in X\colon her\ k \in \mathbb{N}\ ve\ x_k \in A_k\ için$$

$$lim x_n = X\ olacak\ şekilde\ bir\ \{x_k\}\ dizisi\ vardır.\}$$

$$limsup A_k = \{x \in X\colon her\ n \in \mathbb{N}\ ve\ x_{k_n} \in A_{k_n} için$$

$$limx_{k_n} = X\ olacak\ şekilde\ bir\ \{x_{k_n}\}\ dizisi\ ve\ bir\ \{A_{k_n}\}\ alt\ dizisi\ vardır.\}$$

(Baronti ve Papini, 1986).

Örnek 3.32 Genel terimi $A_n = \left(-\infty, -1 - \left(\frac{1}{n}\right)\right] \cup [2 + \left(\frac{1}{n}\right), \infty)$ ile verilen bir küme dizisi ise, $\{A_n\}$ küme dizisi $A = (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ kümesine Kuratowski anlamında yakınsaktır. Yani, $A = K - \lim A_n$ dir.

Burada;

$A_1 = (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$,

$A_2 = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$,

$A_3 = (-\infty, -\frac{4}{3}] \cup \left[\frac{7}{3}, \infty\right), \ldots,\ A_n = \left(-\infty, -1 - \left(\frac{1}{n}\right)\right] \cup [2 + \left(\frac{1}{n}\right), \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} A = (-\infty, -1] \cup [2, \infty) = A$$

Örnek 3.33 $\boldsymbol{E_n} = \begin{cases} \left(0, \frac{1}{\mathrm{n}}\right); \text{n tek ise} \\ \left[\frac{1}{\mathrm{n}}, 1\right); \text{n çift ise} \end{cases}$

Şeklinde tanımlanan $(\mathrm{E_n})$ dizisinin yakınsaklık durumu;

$\mathrm{A_n} = \left(0, \frac{1}{2\mathrm{n}-1}\right)$ ve $B_n = \left[\frac{1}{\mathrm{n}}, 1\right)$ olmak üzere (A_n) ve (B_n) dizileri (E_n) dizisinin alt dizileridir. $\{A_n\}$ küme dizisi $\mathrm{A}_{n+1} \subseteq \mathrm{A}_n$ olduğundan azalan bir dizidir. Öyleyse;

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

(B_n) küme dizisi $\mathrm{B}_n \subseteq \mathrm{B}_{n+1}$ olduğundan artan bir dizidir. Öyleyse;

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n = (0,1)$$

(E_n) dizisinin alt dizilerinin limiti birbirinden farklı olduğundan (E_n) dizisinin limiti mevcut değildir. Yani;

$$limsup\mathrm{E_n} = \cap_{m=1}^{\infty}(\cup_{n=m}^{\infty} \mathrm{E_n}) = \cap_{m=1}^{\infty}(E_m \cup E_{m+1} \cup \ldots) = A \cup B$$

$$liminf E_n = \cup_{m=1}^{\infty}(\cap_{n=m}^{\infty} E_n) = \cup_{m=1}^{\infty}(E_m \cap E_{m+1} \cap ...) = A \cap B$$

olup $limsupE_n \neq liminf\ E_n$ dir.

3.4.2. Wijsman yakınsaklık (X,d) bir metrik uzay A ve A_k, X kümesinin elemanlarından oluşan X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için,

$$\lim_k d(x, A_k) = d(x, A)$$

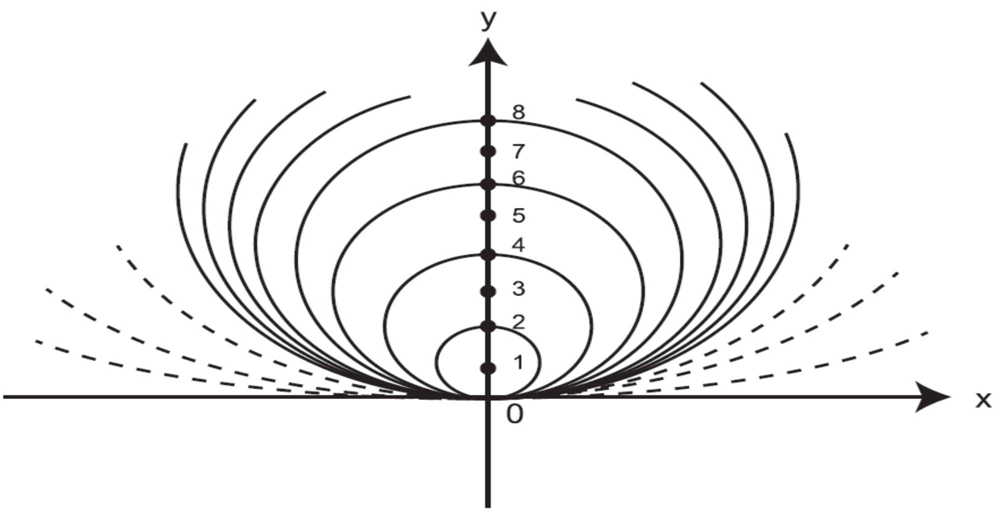
oluyorsa $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman anlamında yakınsaktır denir.

$A_k \xrightarrow{w} A$ veya $W - limA_k = A$ ile (Baronti ve Papini, 1986).

Örnek 3.34 Genel terimi,

$$A_k = \{(x,y): x^2 + y^2 - 2ky = 0\}$$

ile verilen $\{A_k\}$ küme dizisi $k \to \infty$ iken x- eksenine ($A = \{(x,y): y = 0\}$ Wijsman anlamında yakınsaktır. Yani $W - limA_k = A$ dır.



Şekil 3.2. Wijsman yakınsaklık grafiği

3.4.3. Hausdorff yakınsaklık (X,d) bir metrik uzay, A kümesi X in kapalı bir altkümesi ve $\{A_k\}$, X kümesinin elemanlarından oluşan kapalı alt kümelerinin bir küme dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x \in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Hausdorff yakınsaktır denir.

$A_k \xrightarrow{H} A$ veya $H - limA_k = A$ ile gösterilir (Salinetti ve Wets, 1979).

Örnek 3.35 Genel terimi $A_n = \left(-\infty, -1 - \frac{1}{n}\right] \cup [2 + \frac{1}{n}, +\infty)$ ile verilen $\{A_n\}$ dizisi $A = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ kümesine Hausdorff anlamında yakınsaktır denir.

$$d(x, A_n) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1 - \dfrac{1}{n} \ ise \\ min\left\{\left|x - \left(-1 - \dfrac{1}{n}\right)\right|, \left|x - (2 + \dfrac{1}{n})\right|\right\} & , \quad -1 - \dfrac{1}{n} < x < 2 + \dfrac{1}{n} \ ise \\ 0 & , \quad x \geq 2 + \dfrac{1}{n} \ ise \end{cases}$$

$$d(x, A) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1 \\ min\{|x+1|, |x-2|\} & , \quad -1 < x < 2 \\ 0 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

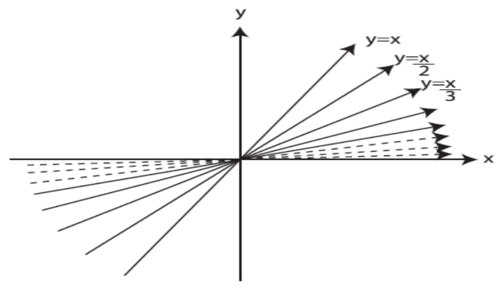
olduğu için $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |d(x, A_n) - d(x, A)| = 0$ elde edilir. Bu da $\{A_n\}$ dizisinin A kümesine Hausdorff anlamında yakınsak olduğunu gösterir.

3.4.4. Mosco yakınsaklık Eğer liminf $A_n = w -$ limsup $A_n = A$ ise $\{A_n\}$ küme dizisi A kümesine Mosco anlamında yakınsaktır denir. ($A_n \xrightarrow{M} A$) ile gösterilir. Burada;

$W - \limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X: k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} \to x$ olacak şekilde $x_{n_k} \in A_{n_k}$dizisi ve $\{A_{n_k}\}$ alt dizisi vardır} (Baronti ve Papini, 1986).

Örnek 3.36 Genel terimi $A_n = \left\{(x, y): y = \frac{x}{n}, x \in R\right\}$ ile verilen küme dizisi

$A = \{(x, 0): x \in R\}$ ya Mosco anlamında yakınsaktır. Yani, $A = M - \lim_{n\to\infty} A_n$ dır.



Şekil 3.3. Mosco yakınsaklık grafiği

3.4.5. Fisher yakınsaklık $\{A_n\}$ küme dizisi aşağıdaki şartları sağlarsa A kümesine Fisher anlamında yakınsaktır denir. $A_n \xrightarrow{F} A$ ile gösterilir.

i. Her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n > n_\varepsilon$ için $d(A_n, A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_ε sayısı vardır.

ii. Her $\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ için, $d(x, A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n > n_{(\varepsilon,x)}$ sayısı vardır (Baronti ve Papini, 1986).

Örnek 3.37 $\mathbb{R}$ de genel terimi $A_n = [-n, n]$ olarak verilen küme dizisi $A_n \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ olduğundan A_n küme dizisi $\mathbb{R}$ ye Fisher anlamında yakınsaktır denir (Baronti ve Papini, 1986).

Not 3.38 Aksi belirtilmedikçe A kümesini ve A_n küme dizisini eğer yakınsak ise, Conveks ya da boştan farklı ya da sınırlı bir normlu uzayda düşünebiliriz (Baronti ve Papini, 1986).

Not 3.39 Elbette $A_n \xrightarrow{k} A$ limiti de bazen belirsizliğe sahiptir. Böyle durumlarda daha güçlü bir yakınsama kavramı kullanıldığında kapalı olmayan küme dizileri için $\overline{A}_n \longrightarrow \overline{A}$ iken $A_n \to A$ tanımlarız. Fakat bu yolla limitin tekliği tamamen kaybolur (Baronti ve Papini, 1986).

Not 3.40 Fisher ve Hausdorff yakınsaklıkları yeterli derecede n ‘ler için, $A_n = \emptyset$ ise $A_n \to \emptyset$ dir. Tersi de her zaman doğrudur. Eğer boştan farklı bir kümenin limiti varsa yakınsaklığın tüm türlerini, dizinin genel yakınsaklığına indirgendiğinde A_n tektir (Baronti ve Papini, 1986).

Teorem 3.41 Hausdorff anlamından yakınsak her küme dizisi, Fisher anlamında, Wijsman anlamında, Kuratowski anlamında her zaman yakınsaktır. Ayrıca bazı normlu uzaylar da Mosco anlamında yakınsak ise Kuratowski anlamında da yakınsak olur (Baronti ve Papini, 1986).

İspat: Hausdorff $\Rightarrow$ Fisher*:* (A_n) küme dizisinin hausdorff anlamında yakınsak olduğunu kabul edelim. Yani, $\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} |d(x,A_k) - d(x,A)| = 0$ olduğunu kabul edelim. Fisher yakınsaklığının (ii) şartından; her $\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ için, $d(x,A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n > n_{(\varepsilon,x)}$ sayısı var olduğundan sağlanır.

Fisher $\Rightarrow$ Wijsman*:* (A_n) küme dizisinin Fisher anlamında yakınsak olduğunu kabul edelim. Yani, her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n > n_\varepsilon$ için $d(A_n, A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_ε ve $x \in A$ için, $d(x,A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n > n_{(\varepsilon,x)}$ sayısının olduğunu kabul edelim. Eğer $A = \emptyset$ ise her n için $A_n = \emptyset$ dir. Şimdi $A \neq \emptyset$ olsun; $\varepsilon > 0$ olsun $d(x,A) = d$ kümesi için $x \in X$ verilsin. Her $n > n_\varepsilon$ için $A_n \subset A^\varepsilon$ vardır. Böylece $d(x,A_n) \geq d(x,A^\varepsilon)$ dır.

Her A için $d(x,A^\varepsilon) = \max(0, d(x,A) - \varepsilon)$ ve her $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ dir. Bu nedenle $n > n_\varepsilon$ için $d \leq d(x,A_n) + \varepsilon$ olur. Bunun anlamı $d \leq liminf\ d(x,A_n)$ dır. $y \in A$: $d(x,y) < d + \varepsilon$ eşitsizliğini yakınsak seçersek $\overline{n}$ ifadesi her $n > \overline{n}$ için

$d(x,A_n) < \varepsilon$ vardır. Böylece $d(x,A_n) \leq d(x,y) + d(y,A_n) < d + 2\varepsilon$. Sonuç olarak $\limsup d(x,A_n) \leq d + 2\varepsilon\ dır.$ Ayrıca ε keyfi olduğundan $\limsup d(x,A_n) \leq d$ dır. Bunlardan $\lim d(x,A) = d$ olduğu görülür.

Wijsman $\Rightarrow$ Kuratowski*:* (A_n) küme dizisinin Wijsman anlamında yakınsak olduğunu kabul edelim. Yani, $\lim_n d(x,A_n) = d(x,A)$ sağlansın. Eğer $A = \emptyset$ ise her x için $\lim_{n\to\infty} d(x,A_n) = \infty$ dır. Buradan $\limsup_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ ya da $A_n \xrightarrow{k} A$ anlamına gelir. Şimdi $A \neq \emptyset$ osun $x \in A$ yani $0 = d(x,A) = \lim d(x,A_n)$ alabiliriz. Bunun anlamı $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ yani $A \subset limA_n$ dir. Şimdi $x \in limsupA_n$ ya da $\lim d(x,A_n) = 0$ alalım. $A_n \xrightarrow{w} A$ olduğundan $d(x,A) = \lim d(x,A_n) = 0$ böylece $x \in A$.

$limsup\ A_n \subset A \subset liminf\ A_n$ den, $A_n \xrightarrow{k} A$ olur. Kabul edelim ki X normlu lineer uzay ise Mosco anlamında yakınsak ise Kuratowski yakınsaklığını gerektirir. Bu

$liminf\ A_n \subset limsup\ A_n \subset W - limsupA_n = A = liminfA_n$ olduğu açıktır.

Teorem 3.42 (C_n), X normlu uzayında konveks altkümelerinin bir alt dizisi olsun. Fisher yakınsaklığı tanımından (i) koşulu yani Her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n > n_\varepsilon$ için $d(A_n, A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_ε sayısı var ve $\mathrm{C_n} \xrightarrow{\mathrm{k}} \mathrm{C}$ sağlanırsa $\mathrm{C_n} \xrightarrow{\mathrm{M}} \mathrm{C}$ olur. Buradan eğer Fisher anlamında yakınsak ise Mosko anlamında da yakınsaktır (Baronti ve Papini, 1986).

İspat: $\{\mathrm{C_n}\}$ küme dizilerinin C kümesine Kuratowski anlamında yakınsak olduğunu kabul edelim. Yani liminfC_k =limsup$C_k = C$ olsun. O zaman $\{x_{n_k}\}$ dizisini alalım, $k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} \in C_{n_k}$, böylece $x_{n_k} \to x$ dır. $\varepsilon > 0$, yeterince büyük k için $x_{n_k} \in \overline{C^\varepsilon}$ vardır. Buradan Fisher yakınsaklığın (i) koşulu sağlanır. Yani her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n > n_\varepsilon$ için $d(C_n, C) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_ε sayısı vardır. Fakat $\overline{C^\varepsilon}$ kapalı ve konvekstir. Bunun anlamı $x \in \overline{C^\varepsilon}$ dır. Böylece $x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{C^\varepsilon} = \mathrm{C}$. Bu nedenle;

$$w - limsup C_n \subset C = liminf\, C_n$$

dir. Öyleyse C_n dizisi C kümesine Mosco anlamında yakınsaktır.

Sonuç 3.43 $\{C_n\}$, X normlu uzayında konveks kümelerin bir alt dizisi olsun ve C kümesi için Fisher yakınsaklığının (i) şartının sağlandığını kabul edelim. O halde C kümesine yakınsaklığı ile ilgili; Fisher anlamında yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart Kuratowski anlamında yakınsak olması, Kuratowski anlamında yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart Mosco anlamında yakınsak olması, Mosco anlamında yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart Wijsman anlamında yakınsak olmasıdır.

3.5. Artan ve Azalan Monoton Küme Dizileri

Tanım 3.44 {$\mathrm{A}_n\}$, X kümesinin elemanlarından oluşan altkümelerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{A}_{n+1} \subseteq \mathrm{A}_n$ oluyorsa $\{\mathrm{A}_n\}$ dizisi azalan bir küme dizisidir.

$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ ise $\mathrm{A}_n \downarrow A$ ile gösterilir (Papadimitrakis, 2004).

Mesela; $I_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ küme dizisi, $\mathrm{I}_{n+1} \subseteq \mathrm{I}_n$ olduğundan I_n azalan bir küme dizisi ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$ dır.

Tanım 3.45 $\{\mathrm{A}_n\}$, X kümesinin elemanlarından oluşan altkümelerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{A}_n \subseteq \mathrm{A}_{n+1}$ oluyorsa $\{\mathrm{A}_n\}$ dizisi artan küme dizisi olur. Bu durumda; $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ ise $\mathrm{A}_n \uparrow A$ ile gösterilir (Papadimitrakis, 2004).

Mesela; $I_n = \left[1 + \frac{1}{n}, 5 - \frac{2}{n}\right]$ küme dizisi, $\mathrm{I}_n \subseteq \mathrm{I}_{n+1}$ olduğundan I_n dizisi artan bir küme dizisi ve $\bigcup_{\mathrm{n}=1}^{\infty} I_n = I_n$ dır.

Teorem 3.46 $\{A_n\}$ küme dizilerinin azalan bir dizisi olsun, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \supset A_{n+1}$ ise $\mathrm{A_n} \xrightarrow{\mathrm{K}} \mathrm{A} = \bigcap_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{A_n}$ dir. Genellikle $\mathrm{A_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathrm{A}$ değildir (Baronti ve Papini, 1986).

İspat: $\mathrm{X} = \ell^2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{e_n, e_{n+1}, \dots\}$ alalım. Ayrıca A_n küme dizisinin kapalı örtüsü C_n olarak tanımlansın. $\theta \in w - limsupA_n$, $\theta \notin liminf A_n$ dır.

Elbette Mosco anlamında $A_n \nrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ dır. Çünkü $x = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \dots, \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}, \dots\right\}$, ise

$d(x, A_n) = 2\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right) \to 2 \neq d(x, \emptyset)$ dır. Tersine , $C_n \xrightarrow{M} \{\theta\}$ ise

($C_n$küme dizisi C kümesine Fisher anlamında yakınsak değildir) aynı kümeleri $\mathrm{X} = \ell^1$ alırsak $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ ve $d(\theta, C_n) = 1 < d(\theta, \emptyset) = \infty$ dır. Buradan Wijsman anlamında $C_n \nrightarrow \emptyset$ iken Mosco anlamında $C_n \to \emptyset$ dır.

Teorem 3.47 Azalan konveks dizilerin, sınırlı ve boştan farklı $\{C_n\}$ kümeleri için, $\mathrm{C_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathrm{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ dır (Baronti ve Papini, 1986).

İspat: Önermenin ispatını adım adım açıklayalım;

i. Eğer $\dim(x) = \infty$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için bir (x_n) dizisi seçebiliriz. Öyle ki her n ve m için $\|x_n\| = \mathrm{I} = \|x_n - x_m\|$ dir.

ii. $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ bir küme ve (x_n) dizisi yukarıdaki gibi verilsin.

$\overline{x} \in X - B(\theta, 1)$ alalım. O zaman $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\overline{x}\}$ olur. Burada A_n, $s\left(\overline{x}, \frac{1}{n}\right) \cup \{x_i; i > n\}$ kümelerinin kapalı konveks örtüsüdür. Eğer (i) doğru değilse; zaten $B(\theta, 1)$ de $\{x_n\}$ seçmek mümkün. Öyle ki her n ve m için $\|x_n - x_m\| \in [1,2]$ dır. Bu ispatın doğru olmadığını gösterir. Tersine ii. Şartı doğru değilse X reflexivedir.

iii. X'in bir reflexive Banach uzayı olması için gerekli ve yeterli şart boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks dizilerinin azalan olmasıdır.

Teorem 3.48 Eğer X normlu ve $\{A_n\}$ konveks kümelerin artan bir dizisi ise o zaman $A_n \xrightarrow{M} (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ dir (Baronti ve Papini, 1986).

İspat: Konveks olma şartının gerekli olduğunu kabul edersek konveks kümelerin monoton dizisi için bunu göstermek mümkündür. Buradaki A_n küme dizisi için her n için $A \subset A_n$ yeterlidir. Eğer bu sağlanırsa A_n dizisi Fisher ve Hausdorff anlamında da A kümesine yakınsaktır.

Teorem 3.49 $\mathrm{A_n} \xrightarrow{\mathrm{F}} \mathrm{A}$ yakınsak ve A kompakt bir küme ise $\mathrm{A_n} \xrightarrow{\mathrm{H}} \mathrm{A}$ dır. $\mathrm{A_n} \xrightarrow{\mathrm{k}} \mathrm{A}$, Fisher yakınsaklığının (i) şartı sağlanır ve A kompakt ise $\mathrm{A_n} \xrightarrow{\mathrm{M}} \mathrm{A}$ dır. Özellikle $\mathrm{A_n} \xrightarrow{\mathrm{F}} \mathrm{A}$ ve A kompakt ise $\mathrm{A_n} \xrightarrow{\mathrm{M}} \mathrm{A}$ dır (Baronti ve Papini, 1986).

İspat: İlk olarak $\varepsilon > 0$, yeterince büyün n' ler için $d(A_n, A) < \varepsilon$ Fisher anlamındaki yakınsaklığın (i). Şartının sağlandığını kabul edelim. Yeterince büyük en'ler için $A \not\subset (A_n)^{\varepsilon}$ olsun. Öyleyse her n$\in \mathbb{N}$ için $d(x_n, A_n) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x_n \in A$ seçebiliriz. $x \in A$ için $x_{n_k} \to x$ seçelim; böylece yeterince büyük k'lar için $d(x, A_{n_k}) > \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Bu ise Fisher anlamında yakınsaklığın (ii) şartı ile çelişir. Böylece yeterince büyük n ler için $A \subset (A_n)^{\varepsilon}$ olur. Bu ise A_n küme dizisinin A kümesine Hausdorff anlamında yakınsak olduğunu gösterir.

İkinci olarak da $x_{n_k} \in A_{n_k}$ olduğunu kabul edelim. Yeterince büyük n'ler için $(\varepsilon > 0)$ $A_{n_k} \subset A^{\varepsilon}$ aynı zamanda $\|x_{n_k} - a_{n_k}\| \to 0$ olacak şekilde $(a_{n_k}) \in A$ seçebiliriz. Eğer a, (a_{n_k}) dizisi için nokta kümesi ise aynı zaman (x_{n_k}) da nokta kümesidir. Böylece $w - limsupA_n \subset limsupA_n = A$, olacağından A_n küme dizisi A kümesine Mosco anlamında yakınsaktır.

Çizelge 3.1. Küme dizilerinin yakınsaklık çeşitleri arasındaki ilişki

	Normal Kümeler	Konveks kümeler
Genel durum	————	Fisher $\Rightarrow$ Mosco
Hilbert uzaylar	Mosco $\Rightarrow$ Wijsman	Wijsman $\Rightarrow$ Mosco
$\dim(x) < \infty$ (Hilbert gerekli değil)	Kuratowski $\Rightarrow$ Mosco	————
$\lim d(A_n, A)$	Fisher$\Leftrightarrow$Kuratowski$\Leftrightarrow$Wijsman	Kuratowski$\Leftrightarrow$ Mosco
$A_n \nearrow (\dim(x) < \infty)$ (veya X Hilbert olmasın)	Kuratowski, Wijsman, Fisher şartları sağlanır.	Mosko şartı sağlanır.
$A_n \searrow (\dim(x) < \infty)$ (veya X Hilbert olmasın)	Kuratowski şartı sağlanr.	Mosko şartı sağlanır.
$A_n \to A$ (Kompakt)	Hausdorff $\Leftrightarrow$ Fisher $\Rightarrow$Mosco	————
$A_n \subset Kn > \overline{n}$ için kompakt	Kuratowski $\Leftrightarrow$ Hausdorff	————

3.6. Kümelerin Cebiri

Bu kısımda bir X kümesinin elemanlarından oluşan X in alt kümelerinin σ −cebirini inceleyeceğiz.

Tanım 3.50 X kümesinin elemanlarından oluşan alt kümelerinin herhangi bir kümesi $\mathcal{A}$ olsun. Öyleyse $\mathcal{A}$ ya X in alt kümelerinin bir sınıfı denir (Papadimitrakis, 2004).

Tanım 3.51 X boştan farklı bir küme olsun. X in elemanlarından oluşan bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir.

i. $X \in \mathcal{A}$

ii. Her $A \in \mathcal{A}$ için $A^c = X \backslash A \in \mathcal{A}$

iii. $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ olursa $\mathcal{A}$ cebirine bir σ −cebiri denir

(Papadimitrakis, 2004).

Örnek 3.52 $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,3,5, \dots, 2n-1, \dots\}, \{2,4,6, \dots, 2n, \dots\}, \mathbb{N}\}$ alınırsa $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ-cebiridir (Balcı, 2012).

Örnek 3.53 $\{\emptyset, \mathrm{X}\}$ kümesi, X in alt kümelerinin bir σ −cebiridir (Balcı, 2012).

Örnek 3.54 Eğer boştan ve X den farklı A ∈ X için $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ kümesi X in altkümelerinin bir σ-cebiridir(Balcı, 2012).

Örnek 3.55 P(X), X in tüm altkümelerinin ailesi ise, X in altkümelerinin bir σ −cebiridir (Balcı, 2012).

Teorem 3.56 En az X ve $\emptyset$ kümelerini içeren X in her σ-cebir ise;

i. Sonlu birleşimi altında kapalıdır.

ii. Sayılabilir kesişimleri altında kapalıdır.

iii. Sonlu kesişimleri altında kapalıdır.

iv. Ayrık kümeler altında kapalıdır. (Papadimitrakis, 2004).

İspat: $\mathcal{A}$, X in altkümelerinin σ-cebiri olsun. Her $n \geq 2$ için A ∈ $\mathcal{A}$, $A_1 = A$ ve $A_n = A^c$ alalım. Öyleyse $X = A \cup A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ve ayrıca

$\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$ dir.

i. $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{N} \in \mathcal{A}$ olsun. $\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ verilirse her $n > N$ için $A_n = A_N$ düşünebiliriz.

ii. Her n$\in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{A}$ olsun. Öyleyse $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} {A_n}^c)^c \in \mathcal{A}$.

iii. $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ olsun. $\bigcap_{n=1}^{N} A_n = (\bigcup_{n=1}^{N} {A_n}^c)^c \in \mathcal{A}$ dır.

iv. $A, B \in \mathcal{A}$ olsun $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ dır.

Örnek 3.57 X sayılamayan bir küme olsun.

$$A_1 = \{A \subset X: \text{A sayılabilir}\}$$

$$A_2 = \{A \subset X: \text{A sayılabilir veya } X \setminus A \text{ sayılabilir}\}$$

sınıfları X üzerinde σ-cebiri midir inceleyelim; $X \in A_1$ olduğundan A_1 sınıfı X üzerinde σ-cebiri değildir. $X^c = \emptyset$ sayılabilir olduğundan $X \in A_2$ dir.

Keyfi $A \in A_2$ için $X \setminus A \in A_2$ olduğunu gösterelim.

$A \in A_2 \Longrightarrow A$ sayılabilir $((X \setminus A)^c = A$ yani $X \setminus A \in A_2)$.

$A \in A_2 \Longrightarrow X \setminus A$ sayılabilir ve $(X \setminus A \in A_2)$.

Her n $\in \mathbb{N}$ için $A_n \in A_2$ olsun$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A_2$ olduğunu gösterelim burada üç durum söz konusudur;

i. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in A_2$ sayılabilir olsun. Bu durumda $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ sayılabilirdir. Yani $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A_2$ olur.

ii. Her $n \in \mathbb{N}$ için ${A_n}^c \in A_2$ sayılabilir olsun.

Bu durumda $\bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^c = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$ sayılabilirdir. Dolayısıyla $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A_2$ dır.

iii. $B = \{A_n; A_n \text{sayılabilir}\}$

$A = \{A_n; {A_n}^c \text{sayılabilir}\}$ ile tanımlayalım.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

yazılabilir.

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = (\bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^c) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^c) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^c$$

dur. C sınıfına ait olan A_n kümelerinin $\mathrm{A_n}^c$ tümleyenler sayılabilir olduğundan $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{A_n}^c$ sayılabilirdir. Sayılabilir bir kümenin her alt kümesi sayılabilir olacağından $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$ sayılabilirdir. Dolayısıyla $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A_2$ sağlanır. Dolayısıyla A_2 sınıfı X üzerinde σ-cebiridir.

3.7. Kümelerin Ölçümü

Tanım 3.58 X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir $\sigma -$ cebir olsun. Bir μ fonksiyonu $\mathcal{A}$ sigma cebiri üzerinde ve $[0, +\infty]$ aralığında değerli sayılabilir toplamsal ise $\mathcal{A}$ daki ayrık kümelerin her sonsuz $\{A_i\}$ küme dizisi için;

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

dir. Öyleyse $\mu(A_i)$ her i için negatif değildir. $\mathcal{A}$ da bir ölçüm olan $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ fonksiyonu $\mu(\emptyset) = 0$ ve sayılabilir toplamsaldır. Diyelim ki $\mathcal{A}$, X kümesi üzerinde bir cebir olsun ($\sigma -$ cebir olmasın). Bir μ fonksiyonu, $\mathcal{A}$ cebiri ve $[0, +\infty]$ aralığında değerli sonlu toplamsal ise $\mathcal{A}$ daki her ayrık kümenin her sonlu $A_1, \dots, A_n$ dizisi için;

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

olur. $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir sonlu toplamsal ölçü $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ fonksiyonu ise $\mu(\emptyset) = 0$ ve sonlu toplamsaldır. Her sayılabilir toplamsal ölçüm sonlu toplamsaldır.

$A_1, \dots, A_n$ sonlu dizisini $i > n$ ise $A_i = \emptyset$ verilirse sonsuz bir $\{A_i\}$ dizisine genişletmemiz yeterlidir. O zaman $\mu(\emptyset) = 0$ dır. Bununla birlikte sonlu toplamsal ölçüler sayılabilir değildir. Sonlu toplamsallık ilk başta sayılabilir toplamsallıktan daha genel bir özellik gibi görünebilir. Ancak sayılabilir toplamsal ölçüler bir yandan neredeyse tüm uygulamalar için yeterlidir. Diğer yandan sonlu toplamsal ölçülere göre çok daha güçlü bir integrasyon teorisini destekler (Cohn, 2010).

Tanım 3.59 X bir küme, $\mathcal{A}$ ise X üzerinde bir $\sigma -$ cebir ve μ, $\mathcal{A}$ da bir ölçüm ise $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne ölçü uzayı denir. Aynı şekilde, X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma -$ cebir ise $(X, \mathcal{A})$ çiftine bir ölçülebilir uzay denir. Eğer $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ise o zaman söyleyebiliriz ki μ, $(X, \mathcal{A})$ üzerinde bir ölçüdür (Cohn, 2010).

Örnek 3.60 $\mathcal{A} = P(X) = 2^x$ olsun. Her $A \in \mathcal{A}$ için;

$$\mu(A) = \begin{cases} A\ daki\ küme\ sayısı\,, & Eğer\ A\ sonlu\ ise \\ \infty \qquad\qquad\qquad\qquad , & Eğer\ A\ sonsuz\ ise \end{cases}$$

tarafından tanımlanan μ bir ölçümdür (Mukherjea ve Pathoven, 1984).

Yani; $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\mathcal{A} = P(X)$ olduğundan $A \in P(X)$ dir. Eğer $A = \emptyset$ ise A sayılabilir olduğundan $\mu(A) = 0$ dır. Eğer $A \neq \emptyset$ ise ; A sonlu ise $s(A) > 0$ dır. A sonsuz ise $s(A) = \infty$ olduğundan $\mu(A) = \infty \geq 0$ dır.

i. $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere $A = \emptyset$ ise $\mu(A) = \mu(\emptyset) = 0$ dır.

ii. $(A_k)_{k=1}^{n} = \mathcal{A}$**,** $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde ikişer ikişer ayrık olan sonlu bir küme dizisi olsun. Bu durumda her $k = 1,2,3, \ldots .n - 1$ için $A_k \cap A_{k+1} = \emptyset$ dır.

$s(A_k \cup A_{k+1}) = s(A_k) + s(A_{k+1}) - s(A_k \cap A_{k+1}) = s(A_k) + s(A_{k+1})$ olur.

Daha genel olarak, $s(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} s(A_k)$ olmak üzere $\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ dır. $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde ikişer ikişer ayrık olsun. $A_n \cap A_{n+1} = \emptyset$ olmak üzere $s(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} s(A_n)$ olduğundan $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ olur ki bu durumda μ bir ölçümdür.

Tanım 3.61 $\mathbb{R}$ de her E kümesinin ölçüsü sonlu ise μ ye bir sonlu ölçü denir

(Halmos, 1950).

Mesela; $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A} = P(X)$ olsun. Her $E \in \mathcal{A}$ için $\mu(E) = 0$ biçiminde tanımlanan μ fonksiyonu bir sonlu ölçü veya σ-sonlu ölçüdür.

Teorem 3.62 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülebilir bir uzay ise;

i. Eğer $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, ikili gruplar halinde ayrık ve $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ olur. (Bu μ nin sonlu toplamsal olduğunu gösterir)

ii. Eğer $A, B \in \mathcal{A}$ için $A \subseteq B$ olursa $\mu(A) \leq \mu(B)$ sağlanır. Bu μ nün monoton olduğunu gösterir (Aliprantis, 1998).

İspat:

i. Eğer $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ ikili ayrık kümeler ise $i > n$ için $A_i = \emptyset$ olur. O zaman $\{A_i\}$ küme dizisi $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ sağlayan $\mathcal{A}$ nın ayrık küme dizisi olur. Böylece μ nün σ −toplamı ile,

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

ise $\mu(\emptyset) = 0$ olduğunu gösterir.

ii. $A, B \in \mathcal{A}$ için $A \subseteq B$ olur. $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ gibi $\mathcal{A}$ nın $C_1, \dots, C_n$ ayrık kümelerinin bir sonlu koleksiyonu seçelim. Buradan,

$B = A \cup (B \setminus A) = A \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$, $\mathcal{A}$ nın ayrık kümelerinin sonlu birleşimidir. Böylece $\mu(B) = \mu(A) + \mu(C_1) + \cdots + \mu(C_n) \geq \mu(A)$ olur.

Teorem 3.63 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülebilir bir uzay ve $A \subseteq B$ olmak üzere $\mathcal{A}$ ya ait olan X in alt kümeleri A ve B olsun. O zaman $\mu(A) \leq \mu(B)$ dir. Eğer $\mu(A) < \infty$ ise $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$ dır.

İspat A ve $B - A$ kümeleri ayrık olduğundan $B = A \cup (B - A)$ olur. Böylece μ nın toplanabilirliğinden, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$ olur. $\mu(B - A) \geq 0$ olduğundan, $\mu(A) \leq \mu(B)$ dur. $\mu(A) < \infty$ durumundan, $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B - A)$ olur.

μ, $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzayı üzerinden bir ölçüm olsun. Eğer $\mu(x) < \infty$ ise μ sonlu bir ölçüdür. Eğer $\forall\, i$ için $\mu\ (A_i) < \infty$ ve $\mathcal{A}$ ya ait $A_1, A_2, \dots$ küme dizilerinin bir birleşimi ise σ −sonlu ölçümdür. Daha genel olarak $\mathcal{A}$ dan alınan bir küme μ altında sonlu ölçüme sahip ve $\mathcal{A}$ daki küme dizilerinin birleşimi ise μ altında σ −sonludur. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı eğer σ −sonlu veya sonlu ise σ −sonlu veya sonlu olarak adlandırılır. Bu yapıların çoğu ve temel özellikleri her ölçüm için geçerlidir.

Birkaç önemli teorem için, ancak ilgili ölçümlerin sonlu ve σ −sonlu olduğunu kabul etmemiz gerekir.

Eğer $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı σ −sonlu ise $\mathcal{A}$ ya ait ayrık kümelerin $\{B_i\}$ küme dizilerinin birleşimi ve μ ölçümü altında sonludur. $\{B_i\}$ küme dizisi σ −sonlu olarak tanımlandığından $\{A_i\}$ küme dizisini oluşturabiliriz. Buradan $B_1 = A_1$ ve eğer $i > 1$ ise $B_i = A_i - \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$ dir (Cohn, 2010).

Teorem 3.64 $\mathcal{A}$ bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir cebir olsun. $\{A_i\}$, $\mathcal{A}$ içinde bir küme dizisi ise $\mathcal{A}$ içinde ikişer ayrık olan bir $\{B_i\}$ küme dizisi vardır ve

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

olur.

İspat $\{A_i\}$, $\mathcal{A}$ içinde bir dizi olsun. $A_1 = B_1$ ve her $n \geq 2$ için

$$B_n = A_n - \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c$$

olarak tanımlansın;

i. Her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \in \mathcal{A}$ olur çünkü, $\mathcal{A}$, tümleyen ve sonlu kesişim altında kapalıdır.

ii. Her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \subset A_n$.

iii. B_n kümeleri ikişer ayrıktır yani $m < n$ olduğunu varsayalım. $B_m \subset A_m$ olduğundan,

$B_m \cap B_n \subset A_m \cap B_n$

$= A_m \cap [A_n \cap A_1^c \cap \dots \cap A_m^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c]$

$= (A_m \cap A_m^c) \cap \dots$

$= \emptyset \cap \dots$

$= \emptyset$

iv. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ her $i \in \mathbb{N}$ için $B_i \subset A_i$ olduğundan, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ dır.

Tersini ispatlayalım, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ olsun. Açıktır ki x, A_i kümelerinin en az birinde olmalıdır. $n, x \in A_i$ olan en küçük i değeri olsun. Bu durumda $x \in B_n$ ve böylece $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ dir. Buradan $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ olur (Jain ve ark., 1986).

Teorem 3.65 $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$, ölçülebilir kümelerin artan bir küme dizisi ve $A_i \subset A_{i+1}$ ise $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ dir.

$\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$, ölçülebilir kümelerin azalan bir küme dizsi ise $A_i \supset A_{i+1}$ ve $\mu(A_1) < \infty$ olur. Bu durumda $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ dır (John K. Hunter, 2011)

İspat $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$, ölçülebilir kümelerin artan bir küme dizisi ve $B_i = A_{i+1} \setminus A_i$ ise $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$, benzer birleşimleri ile ayrık bir küme dizisidir. Böylece μ nün sayılabilir toplamı ile;

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$$

dir. Üstelik $A_i = \bigcup_{i=1}^{j} B_i$ olduğundan,

$$\mu(A_j) = \sum_{i=1}^{j} \mu(B_i)$$

olur. Bunun anlamı ise $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$ dir. Böylece $A_i \subset A_{i+1}$ ise

$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ olduğu ispatlanır.

$\mu(A_1) < \infty$ ve $\{A_i\}$ küme dizisi azalan ise $\{B_i = A_1 \setminus A_i\}$ artan ve

$\mu(B_i) = \mu(A_1) - \mu(A_i)$ olur. Bir önceki sonucu takip edersek,

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu(A_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

olur. Bundan dolayı,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\,, \quad \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

olur.

Örnek 3.66 Genel terimi her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n = (n, \infty)$ ile verilen küme dizisi ölçülebilir kümelerin bir azalan dizisidir yani öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(E_n) = \infty$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$ dir. Böylece $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ olur. (Jain ve ark., 1986)

Örnek 3.67 Bazı n değerleri için $\mu(A_n) < \infty$ şartı sağlanmazsa $A_n \supset A_{n+1}$ olduğunda $1 \leq n < \infty$ için $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_1) < \infty$ ve

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \text{ ise } \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} (A_n)$$

eşitliğinin sağlanmadığını gösterelim (Mukherjea ve Pathoven, 1984).

$X = R$ ve $A_n = (n, \infty)$ için $\mathcal{A} = P(X)$ ve μ sayılabilir bir ölçüm olsun.

Her n∈ ℕ için $A_1 = (1, \infty)$, $A_2 = (2, \infty)$, $A_3 = (3, \infty)$ ... olmak üzere $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ olduğunda $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ olur. Fakat her n için, $\mu(A_n) = \infty$ olduğundan dolayı $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ olur. Bu da $A_n = (n, \infty)$ kümelerinden bazı A_n ler için $\mu(A_1) < \infty$ olmadıkça bu eşitlik sağlanmaz.

Teorem 3.68 $\{E_i\}$ ölçülebilir kümelerin bir dizisi ise

$$\mu(\lim inf E_i) \leq \lim inf \mu(E_i).$$

Ayrıca, bir $p \in \mathbb{N}$ için $\mu(\bigcup_{i=p}^{\infty} E_i) < \infty$ ise,

$$\mu(\lim sup E_i) \geq \lim sup \mu(E_i)$$

(Jain ve ark., 1986).

İspat $F_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ olsun. Tanımdan,

$$\lim inf E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Dikkat edilirse $\{F_n\}$ ölçülebilir kümelerin bir artan küme dizisidir. Dolayısıyla,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$$

$$\mu(\lim inf E_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$$

$n \in \mathbb{N}$ sabitlensin. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $F_n \subset F_{n+1}$ ve böylece $\mu(F_n) \leq \mu(E_{n+k})$ dır. O halde

$$\mu(F_n) \leq \lim inf_{k\to\infty} \mu(E_{n+k}) = \lim inf E_i.$$

Bu her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) \leq \lim inf \mu(E_i)$$

yani,

$$\mu(\lim inf E_i) \leq \lim inf \mu(E_i)$$

olur. Şimdi bir $p \in \mathbb{N}$ için $\mu(\bigcup_{i=p}^{\infty} E_i) < \infty$, $\mu(\lim sup E_i) \geq \lim sup \mu(E_i)$ olduğunu gösterelim. $F_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$ olsun,

$$\lim sup E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

olur. Dikkat edilirse $\{F_n\}$ ölçülebilir kümelerin bir azalan küme dizisidir. $n \in \mathbb{N}$ sabitlensin, dolayısıyla

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$$

$$\mu(\lim sup E_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$$

olur. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $F_{n+1} \subset F_n$ ve böylece $\mu(F_{n+k}) \leq \mu(E_n)$ olur. O halde

$$\mu(F_n) \geq \lim_{\text{k}\to\infty} sup\, \mu(E_n) = \lim sup E_i$$

dir. Bu her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) \geq \lim sup \mu(E_i)$$

yani,

$$\mu(\lim sup E_i) \geq \lim sup \mu(E_i).$$

Örnek 3.69 $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde sonlu toplamsal bir ölçüm μ olsun. $A, B \in \mathcal{A}$ için,

i. $A \subset B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$ olur. Yani,

$A, B \in \mathcal{A}$ ve $A \subset B$ olmak üzere $B = A \cup (B - A)$ olarak yazarsak $A_1 = \mathcal{A}$,

$A_2 = B - A$, $n > 2$ için $A_n = \emptyset$ ise o zaman μ sayılabilir toplamsal olur öyleyse $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$ ifadesinden $\mu(A) \leq \mu(B)$ elde edilir.

ii. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ olduğunu gösterelim, ölçümün iii. özelliğinden dolayı $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi ikişerli ayrık olacağından toplamsal olarak yazabiliriz. Yani, $k = 1,2,\dots,n-1$ için $A_k \cap A_{k+1} = \emptyset$ ve

$A_1 = \mathcal{A}, A_2 = B$ olmak üzere $\mu(A_1 \cup A_2) = \sum_{k=1} A_k = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ olur. Buradan da $\mu(A \cup B) = \mu(A_1) + \mu(B)$ olduğu açıktır.

iii. Eğer $A \subset B$ ve $\mu(A)$ ise $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$ dır. Gösterecek olursak, $A \subset B$ ise $B = A \cup (B - A)$ ve $\mu(A) < \infty$ olmak üzere $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$ ifadesinden $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B - A)$ elde edilir (Mukherjea ve Pathoven, 1984).

Örnek 3.70 Sonlu toplanabilir μ ölçümü için, eğer $A_n \supset A_{n+1}$, $1 \leq n < \infty$ olacak şekilde $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_1) < \infty$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ise o zaman $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ nin sayılabilir bir ölçüm olmadığını gösterelim (Mukherjea ve Pathoven, 1984).

$X = \mathbb{Z}^+ = \{1,2,\dots\}$ ve $A \subset X$ alalım. $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ olmak üzere $A_1 = \{1,2,3,\dots\}$, $A_2 = \{2,3,4\dots\}$, $A_3 = \{3,4,5\dots\}\dots$ için $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ olduğundan $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ olur. Ayrıca A_n kümesi sonsuz olduğundan $\mu(A_n) = \infty$ olduğundan ölçümü sayılabilir bir ölçüm değildir.

Örnek 3.71 $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir ölçüm μ ve $A \in \mathcal{A}$, her $E \in \mathcal{A}$ için,

$\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$ olmak üzere $\{E \in A: E \subset A\}$ cebiri üzerinde μ_A bir ölçümdür. Yani,

i. $E \in A$ olmak üzere $E \subset A$ olduğunu biliyoruz. O halde $E = \emptyset$ için

$\mu_A(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0.$

ii. $E \in A$ ve $E \subset A$ için $A \cap E = E$ olduğundan,

$\mu_A(E) = \mu(A \cap E) = \mu(E) \geq 0$ olur.

iii. μ bir ölçüm olduğundan $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ olduğunu biliyoruz. O halde $\mu_A(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu\big(A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)\big)$

$\mu_A(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu_A(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap E_n))$, (her n için $E_n \subset A$ olduğundan)

$= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$,

o halde μ_A bir ölçümdür (Mukherjea ve Pathoven, 1984).

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

4.1. Yakınsak Küme Dizilerinin Ölçümü

Tanım 4.1 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ sınıfı üzerinde tanımlı negatif olmayan, genişletilmiş reel değerli ve sayılabilir bir μ fonksiyonu;

i. $\mu(\emptyset) = 0$

ii. $\mathcal{A}$ nın ikişer ikişer ayrık ve yakınsak her $\{A_n\}$ artan küme dizisi için $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ iken $A \in \mathcal{A}$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mu(A)$$

özellikleri sağlanırsa bu fonksiyona ölçülebilir yakınsak küme dizisi denir.

Tanım 4.2 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ sınıfı üzerinde tanımlı negatif olmayan, genişletilmiş reel değerli ve sayılabilir bir μ fonksiyonu;

i. $\mu(\emptyset) = 0$

ii. $\mathcal{A}$ nın ikişer ikişer ayrık ve yakınsak her $\{A_n\}$ azalan küme dizisi için $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ iken $A \in \mathcal{A}$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mu(A)$$

özellikleri sağlanırsa bu fonksiyona ölçülebilir yakınsak küme dizisi denir.

Teorem 4.3 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $\{A_n\}$, $\mathcal{A}$'daki konveks kümelerin yakınsak artan bir dizisi ve

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

şartı sağlanırsa $\{A_n\}$ küme dizisi ölçülebilirdir.

İspat: $\{A_n\}$ Artan küme dizisinin $A_n \to (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ olduğunu göstermiştik. Şimdi bu kümenin ölçülebilir olduğunu gösterelim;

Bazı n'ler için $\mu(A_n) = +\infty$ ise $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = +\infty$ olur. Her n için

$\mu(A_n) < \infty$ olduğunu kabul edelim.

$$M_1 = A_1 \text{ ve } n > 1 \text{ için } M_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

Burada M_n dizi $\mathcal{A}$ daki kümelerin ikişerli ayrık dizisi olur. Ayrıca

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} M_k \text{ ve } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

olduğunu söyleyebiliriz. μ bir ölçü fonksiyonu olduğundan

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(M_n) =$$

$$= \mu(M_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \mu(M_n) = \mu(M_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \mu(A_n \setminus A_{n-1})$$

$$= \mu(M_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \mu(A_n) - \mu(A_{n-1}) = \mu(A_1) + \lim_{m\to\infty} [\mu(A_m) - \mu(A_1)]$$

$$= \lim_{m\to\infty} \mu(A_m) = A$$

bulunur. Öyleyse μ ölçü foksiyonu üzerinde tanımlı A kümesine yakınsak olan $\{A_n\}$ küme dizisi ölçülebilirdir.

Örnek 4.4 $X = \mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ve $\mathcal{A} \subset P(X)$ olsun

$B_n = \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$ genel terimi ile verilen yakınsak küme dizisi

$\mathcal{A} = \{\{-n, \dots, -1, ,0, 1, \dots, n\}, \emptyset, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k', (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)'\}$ sınıfı üzerinde bir σ −cebirdir. Yani;

I. $X = \{B_n\}$ alırsak, $\{B_n\} \in \mathcal{A}$ olur.
II. Her $E_k \in \mathcal{A}$ için $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$ dir.

$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ için;

$E_1 = \{-1, 0, 1\} = B_1$,

$E_1 \cup E_2 = \{-1, 0, 1\} \cup \{-2, -1, 0, 1, 2\} = B_2$,

…

$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = B_n$ dir.

III. Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = B_n \setminus E \in \mathcal{A}$ dir.

$\{B_n \setminus B_1\} = \{-n, \dots, -1, ,0,1, \dots, n\} \setminus \{-1,0,1\}$

$\{B_n \setminus B_2\} = \{-n, \dots, -1, ,0,1, \dots, n\} \setminus \{-2, -1,0,1,2\}$

$\{B_n \setminus B\} = \{-n, \dots, -1, ,0,1, \dots, n\} \setminus \{-3, -2, -1,0,1,2,3\}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \{B_n\}' = B_1' \cap B_2' \cap B_3' \cap \dots = \emptyset$ dir. Böylece $\sigma -$cebir olma şartları sağlanmış olur. Öyleyse (B_n) küme dizisi ölçülebilirdir.

Şimdi yakınsak (B_n) küme dizisinin ölçümünü gösterelim;

Her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \subset B_{n+1}$ olduğundan (B_n) artan bir küme dizisidir. O halde

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{-1,0,1\} \cup \{-2, -1,0,1,2\} \cup \dots \cup \{-n, \dots - 1,0,1, \dots n\}$

$\lim\limits_{n \to \infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \mathbb{Z}$ olur.

$E_1 = B_1$ ve $n > 1$ olmak üzere $E_n = B_n \setminus B_{n-1}$ küme dizisini alalım (burada E_n küme dizisi $\mathcal{A}$ daki kümelerin ikişer ikişer ayrık küme dizisidir).

$E_1 = B_1 = \{-1,0,1\}$

$E_2 = B_2 \setminus B_1 = \{-2, -1,0,1,2\} \setminus \{-1,0,1,\} = \{-2,2\}$

$E_3 = B_3 \setminus B_2 = \{-3, -2, -1,0,1,2,3\} \setminus \{-2, -1,0,1,2\} = \{-3,3\}$

...

$E_n = B_n \setminus B_{n-1} = \{-n, \dots, -1,0,1, \dots, n\} \setminus \{-(n-1), \dots, -1,0,1, \dots (n-1)\} = \{-n, n\}$ olur. Buradan,

$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n)$

$= \mu(\{-1,0,1\} \cup \{-2,2\} \cup \dots \cup \{-n, n\}) = \mu(\{-1,0,1\} + \{-2,2\} + \cdots + \{-n, n\})$

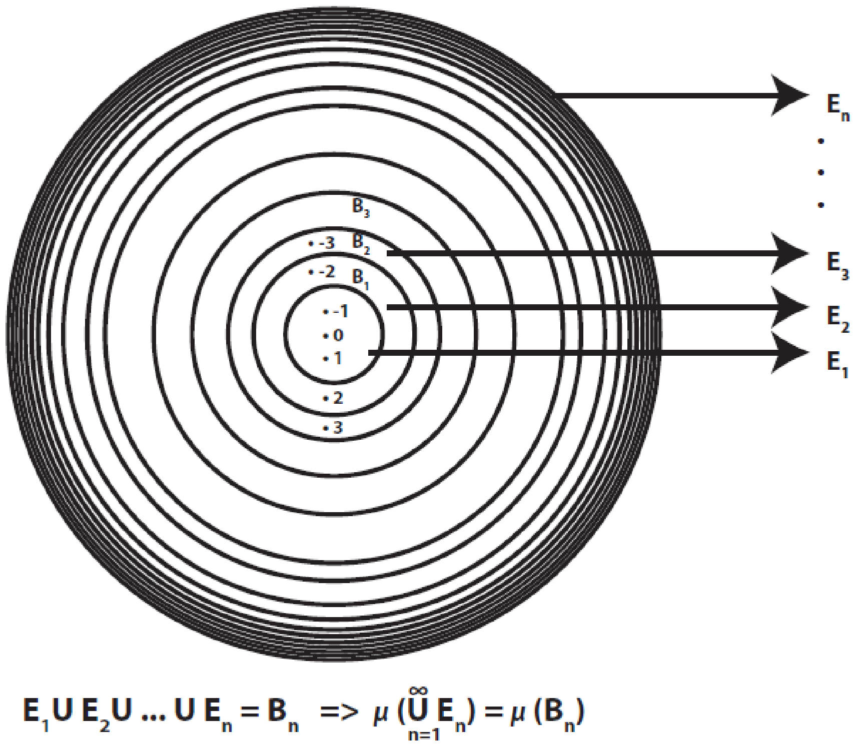
$= \mu\{-1,0,1\} + \lim\limits_{n \to \infty} (\mu\{-2,2\} + \mu\{3,3\} + \cdots + \mu\{-n, n\})$

$$= \mu\{-1,0,1\} + \lim_{n \to \infty} (\mu\{-2, -1,0,1,2\} - \mu\{-1,0,1\} + \cdots + \mu\{-n, \dots, -1,0,1, \dots, n\} - \mu\{-(n-1), \dots, -1,0,1, \dots, (n-1)\})$$

$$= \mu(B_1) + \lim_{n\to\infty}\left(\mu(B_2) - \mu(B_1) + \mu(B_3) - \mu(B_2) + \cdots + \mu(B_n) - \mu(B_{n-1})\right)$$

$$= \mu(B_1) - \mu(B_1) + \lim_{n\to\infty}\mu(B_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(B_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \mu(\mathbb{Z}) = \mu(B_n)$$

dir. (B_n) küme dizisi sonsuz bir küme olduğundan $\mu(B_n)$=∞ olur. Öyleyse μ ölçümü sayılabilir bir ölçüm değildir.



Şekil 4.1. Yakınsak artan küme dizisi

Teorem 4.5 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Yakınsak $\{C_n\}$ küme dizisi, $\mathcal{A}$'daki konveks kümelerin sınırlı ve azalan bir dizisi ise

$$\mu(\cap_{n=1}^{\infty} C_n) = \lim_{k\to\infty}\mu(E_k) = \mu(C_n)$$

şartını sağlayan $\{C_n\}$ küme dizisi ölçülebilirdir.

İspat: p, $\mu(C_p) < \infty$ koşulunu sağlayan en küçük doğal sayı olsun. Bu durumda

her $m \geq p$ için $\mu(C_m) < \infty$ dir.

$$C = \cap_{m=1}^{\infty} C_m \quad \text{ve} \quad K_m = C_m - C_{m+1}$$

burada K_m küme dizisi $\mathcal{A}$ kümesinde ölçülebilir ve ikişerli ayrıktır; ayrıca

$$C_p - C = \bigcup_{m=p}^{\infty} K_m$$

eşitliği doğrudur. Buradan

$$\mu\big(C_p - C\big) = \sum_{m=p}^{\infty} \mu(K_m) = \sum_{m=p}^{\infty} \mu(C_m - C_{m+1})$$

$C \subset C_p$ ve $C_{m+1} \subset C_m$ olduğundan, her $m \geq p$ için $\mu\big(C_p\big) = \mu(C) + \mu(C_p - C)$ ve $\mu(C_m) = \mu(C_{m+1}) + \mu(C_i - C_{m+1})$. Ayrıca, her $m \geq p$ için $\mu(C_m) < \infty$ olduğundan $\mu\big(C_p - C\big) = \mu\big(C_p\big) - \mu(C)$ ve her $m \geq p$ için,

$$\mu(C_m - C_{m+1}) = \mu(C_m) - \mu(C_{m+1})$$

olur. Buradan,

$$\mu\big(C_p\big) - \mu(C) = \sum_{m=p}^{\infty}(\mu(C_m) - \mu(C_{m+1}))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=p}^{n}(\mu(C_m) - \mu(C_{m+1}))$$

$$= \lim_{n\to\infty}\{\mu\big(C_p\big) - \mu(C_n)\}$$

$$= \mu\big(C_p\big) - \lim_{n\to\infty} \mu(C_n)$$

$\mu(C_p) < \infty$ olduğundan $\mu(C) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n)$bulunur.

Örnek 4.6 $X = \mathbb{Z}^+ = \{1,2,3, \dots\}$ ve $\mathcal{A} \subset P(X)$ olsun.

$C_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ genel terimi ile verilen yakınsak küme dizisi;

$C_1 = \{1,2,3, \dots\}$

$C_2 = \{2,3,4 \dots\}$

$C_3 = \{3,4,5 \dots\}\dots$ $C_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ için $C_n \supset C_{n+1}$olduğundan azalan bir küme dizisidir. Öyleyse; $\lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ olur.

(C_n) küme dizisi $\mathcal{A} = \{(C_n), \emptyset, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k', (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)'\}$ sınıfı üzerinde bir cebir oluşturur. Yani;

I. $X = (C_n)$ olarak alınırsa, $(C_n) \in \mathcal{A}$ dır.

II. Her $E_k \in \mathcal{A}$ için $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$ dır.

III. Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = C_n \setminus E \in \mathcal{A}$ dır.

- $B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ olarak alırsak;

  $B_1 = E_1$

  $B_2 = E_1 \cup E_2 = \{1,2,3,\dots\} \cup \{2,3,4,\dots\} = C_1,$

  $B_3 = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{1,2,3,\dots\} \cup \{2,3,4,\dots\} \cup \{3,4,5,\dots\} = C_1,$

  $\dots$

  $B_n = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n = C_1$ dir.

- $(C_1 \cup C_2)' = C_1' \cap C_2' = \emptyset,$

  $(C_1 \cup C_2 \cup C_3)' = C_1' \cap C_2' \cap C_3' = \emptyset$

  $\dots.$

  $(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots \cup C_n)' = C_1' \cap C_2' \cap C_3' \cap \dots \cap C_n' = \emptyset$

- $C_1 = \{1,2,3,\dots\} = E_1,$
  $C_2 = \{2,3,4,\dots\} = E_2,$
  $C_3 = \{3,4,5,\dots\} = E_3,$
  $\dots$
  $C_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} = E_n$
  C_1 evrensel küme olarak alırsak $C_1' = \emptyset$ dir.
  $C_2' = \{1\},\ C_3' = \{1,2\}, \dots, C_k' = \{1,2,3,\dots,k-1\}$

Azalan bir küme dizisinde $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ olduğundan,

$\lim\limits_{n\to\infty} (C_n)' = \{1,2,3,\dots\} \setminus \{\emptyset\}$ olur.

$\lim\limits_{n\to\infty} (C_n)' = (\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n)' = (C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n)'$

$C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n = \{\emptyset\}$ dır. Evrensel kümemiz $\{1,2,3,\dots\}$ olduğundan $\{1,2,3,\dots\} \setminus \{\emptyset\}$ dır. Buradan $\{C_n\}$ küme dizisi üzerinde $\mathcal{A}$ sınıfı bir $\sigma -$cebirdir. Öyleyse yakınsak $\{C_n\}$ küme dizisi ölçülebilirdir.

Şimdi ölçümünü inceleyelim;

I. $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(C_n) = \mu(\cap_{n=1}^{\infty} C_n) = \mu(\emptyset) = 0 \text{ şartı sağlanır.}$$

II. $(E_k)_{k=1}^{n} \in \mathcal{A}$ sınıfı üzerinde $(E_k) = C_{k+1} - C_k$ ile tanımlı ikişerli ayrık olan sonlu bir küme dizisi olsun. Burada;

$E_1 = C_2 - C_1 = \{1\}$

$E_2 = C_3 - C_2 = \{2\}$

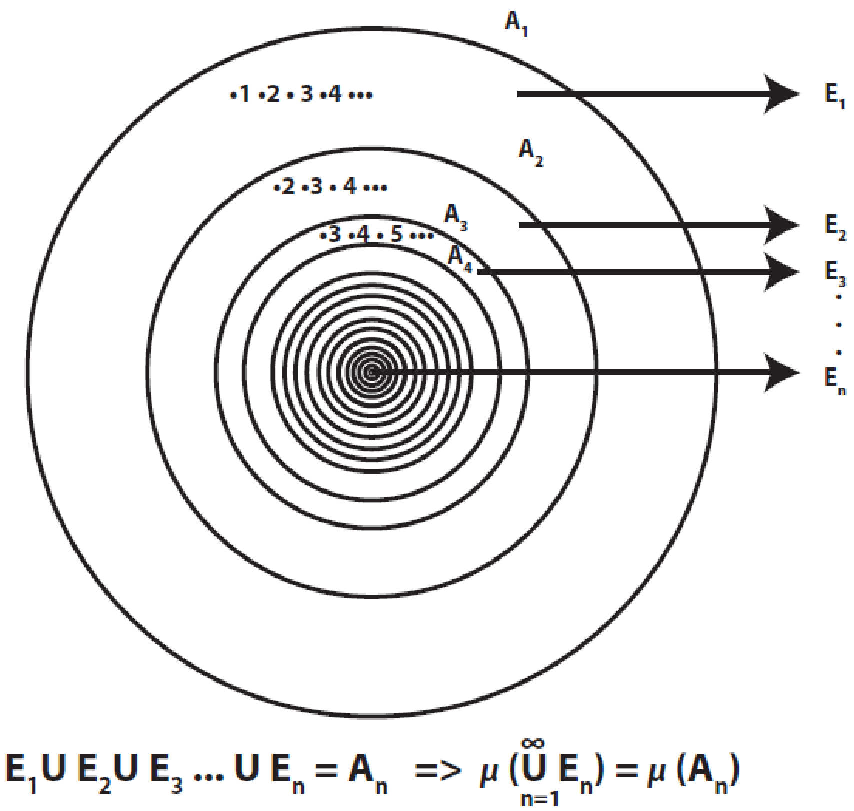
$E_3 = C_4 - C_3 = \{3\} \ldots \; E_n = C_{n+1} - C_n = \{n\}$

$\mu(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$

$\mu(E_1) \cup \mu(E_2) \cup \mu(E_3) \cup \ldots \cup \mu(E_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$

$$\mu(\cup_{k=1}^{n} E_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = \mu(k)$$

$(E_k) = \{k\}$ oluğundan $\cup_{k=1}^{n} E_k = (C_n)$ ve $\mu(\cup_{k=1}^{n} E_k) = \mu(C_n)$ dir. Burada yakınsak (C_n) küme dizisi sonsuz olduğundan ölçümü $\mu(C_n) = \infty$ olduğundan teorem 4.1.1. için sayılabilir ölçüm değildir. (C_n) küme dizisi yakınsadığı kümenin ölçümü ise $\mu(\emptyset) = 0$ dır.



Şekil 4.2. Yakınsak azalan küme dizisi

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Yakınsak küme dizileri tanıtıldı. Küme dizilerinin yakınsaklık çeşitleri olan Kuratowski, Wijsman, Hausdorff, Mosco ve Fisher anlamındaki yakınsaklıklar incelenerek bunların arasındaki ilişkiler açıklandı. Küme dizileri incelenerek bunların ölçülebilir olup olmadığı araştırıldı.

5.2. Öneriler

Bu çalışmadan yola çıkılarak yakınsak küme dizilerinin Lebesque ölçümü üzerine çalışabilir.

KAYNAKLAR

A. Mukherjea and K.pathoven, 1984. Real And Functional Analysis *Part A Real* Analysis, University of Floriada, Florida: *Plenum Press*, New York and London, 79-86.

Balcı M., 2011. Analiz, *Balcı Yayınları*, Ankara, 77-102.

Balcı M., 2012. Reel Analiz, *Balcı Yayınları*, Ankara, 1-30.

Baronti M., Papini P.L., 1986. Convergence of sequence of sets., Methods of Functional Analysis in Approximation Theory (Bombay, 1985), *İnternational*

Bayraktar M., 1987. Fonksiyonel Analiz. *Atatürk Üniversitesi Yayınları*, Erzurum, 16-20.

Beer, G., 1985. On convergence of closed sets in a metric space and distance Functions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, (31), 421-432.

Donald L.Cohn, 2010. Measure Theory, *Birkhauser*, New York, 7-16.

Evans L. C. ve Gabriepy R. F., 2015. Measure Theory And Fine Properties of Funcions, *cyclic Redundancy Check*, 1-15.

Fasciculi Mathematici, (49), 87-99.

Halmos R.B., 1950. Measure Theory, *The University of Michigan*, 9-95.

John K. Hunter, 2011. Measure Theory, Department of Mathematics, *University Of California At Davis*, 5-10.

Kuratowski, K., 1966. Topology, Vol. I. *Academic Pres*, New York, 1-10.

M. Papadimitrakis, 2004. Measure Theory, *Department of Mathematics*, University of Crete, (7-28).

Maddox, I, J., 1969. Elemants Of Functional Analysis, *Cambridge Universty*, Cambridge, London, New York Melbourne, 206.

Maddox, I.J., 1967. Spaces Of Strongly Summable Sequences, *The Quarterly Journal of Mathematics*, (18), 345-355.

Maddox, I.J., 1979. On Strongly Almost Convergence, *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, (85), 345-350.

Mucuk O., 2010. Topoloji ve Kategori, *Nobel Yayınları*, Ankara, 200-350.

Nuray, F. ve Rhoades, B. E., 2012. Statistical convergence of sequences of sets.

Ocak R., 1998. Reel Analiz, *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Yayınları,* Erzurum, 25-30.

P.K. Jain-V.P. Gupta-Pankaj Jain, 1986. Lebesque Measure And Integration, *Anshan*, 19-100.

Schriftenreihe Numeration Mathematics, Birkhauser-Verlag Basel, (76), 135-155.

Wijsman, R. A., 1966. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 123(1), 32–45.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Arzu POLAT (KOYUNCU)
Uyruğu	:	TC
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Şahinbey- 01/04/1990
Telefon	:	05453535901
e-mail	:	arzu_polatt@outlook.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Hacı Muzaffer Bak Bak Anadolu Kız Meslek-Gaziantep-Şahinbey	2009
Üniversite	:	Muş Alparslan Üniversitesi-Muş-Merkez	2016
Yüksek Lisans	:	Muş Alparslan Üniversitesi-Muş-Merkez	2020

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2016-2017	Hatice Karslıgil Ortaokulu	Öğretmen
2017-2018	Yaygın ÇPL	Öğretmen
2019-2020	Özel Final Okulları	Öğretmen