T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKME ARGÜMANLI FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

Aydın ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2020
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKME ARGÜMANLI FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

Aydın ÇELİK

YÜKSEK LİSANS

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Haziran-2020
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Aydın ÇELİK tarafından hazırlanan "**Gecikme Argümanlı Fraksiyonel Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Kararlılığı**" adlı tez çalışması 29/05/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Yılmaz ALTUN Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..
Danışman Doç. Dr. Erdal KORKMAZ Muş Alparslan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..
Üye Doç. Dr. Kenan YILDIRIM Muş Alparslan Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi	…………………..

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu …../……/……. Tarih ve ………/……….. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Aydın ÇELİK

Tarih: 29.05.2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GECİKME ARGÜMANLI FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

Aydın ÇELİK

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fraksiyonel kalkülüs hakkında kısa bir bilgi verilerek çalışmanın önemi hakkında bahsedilmektedir. İkinci bölümde literatürde yapılan çalışmalar özetlendi. Üçüncü bölümde tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilerek uygulanacak yöntemin öneminden söz edildi. Dördüncü bölümde fraksiyonel diferansiyel denklemler üzerine bazı teoremler verilerek gecikme argümanli fraksiyonel diferansiyel denklemlerin kararlılığı için yeter şartları veren bir teorem ispatlanarak iki örnekle desteklendi. Son bölümde elde edilen sonuçlar ve literatüre katkısından bahsedilerek okuyucuya bazı önerilerde bulunuldu.

2020, 26 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Asimptotik kararlılık, Fraksiyonel Diferansiyel Denklemler, Kararlılık, Lyapunov Metodu.

ABSTRACT

MS THESIS

STABILITY OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS WITH DELAY

Aydın ÇELİK

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematic

Advisor: Assoc. Prof. Erdal KORKMAZ

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the brief information on fractional calculus to be used in the later chapters. In the second chapter, related researches on the literatüre are given. In the third chapter, fundamental definitions and theorems are considered and it is also stated the importance of the selected method to be applied. In the fourth chapter, a stating sufficient conditions for the stability of the fractional differential equations with delay arguments is proved. This fact is also supported by verified two example. The last section is devoted to the suggestions and conclusions.

2020, 26 Pages

Keywords: Asymtotically Stability, Fractional Differential Equations, Lyapunov Method, Stability.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca her türlü kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan mesleki açıdan her zaman benim için bir ufuk çizgisi olan ve özellikle bu süreçte bana büyük sabır gösteren bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, desteğini her zaman yanımda hissettiğim çok değerli danışman hocam, Doç. Dr. Erdal KORKMAZ'a teşekkür eder saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli aileme, bu tez çalışmamda bir an olsun desteğini esirgemeyen eşime ve biricik kızım Zeynep Lorin'e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Aydın ÇELİK
MUŞ-2020

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv

ABSTRACT v

ÖNSÖZ vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER ve KISALTMALAR viii

ŞEKİLLER DİZİNİ ix

1. GİRİŞ 1

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI 2

3. MATERYAL ve YÖNTEM 4

3.1. Kararlılık ve fraksiyonel türev ile ilgili temel kavramlar 4
3.2. Lyapunov metodu 11

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA 12

4.1. Belirli bir modelde gecikmeli fraksiyonel diferansiyel denklemlerin kararlılığı 12

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 23

5.1 Sonuçlar 23
5.2 Öneriler 23

KAYNAKLAR 24

ÖZGEÇMİŞ 26

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\boldsymbol{R}$	**:** Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{C}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}})$	**:** $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$' den $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$'e tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
${}^{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}$	**:** $\boldsymbol{\alpha}$-mertebeden Caputo fraksiyonel türev operatörü
$\boldsymbol{I}^{\boldsymbol{\alpha}}$	**:** $\boldsymbol{\alpha}$-mertebeden Riemann-Liouville integral operatörü
$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{n})$	**:** Gama fonksiyonu
$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$	**:** Beta fonksiyonu
$\boldsymbol{\tau}$	**:** Gecikme parametresi
$\boldsymbol{\Omega}$	**:** Omega
$\boldsymbol{\delta}$	**:** Delta
$\boldsymbol{\varepsilon}$	**:** Epsilon
$\boldsymbol{\gamma}$	**:** Gama

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3. 1 İspattaki kümelerin geometrik temsili 7
Şekil 3. 2 Lyapunov fonksiyonunun seviye yüzeyi 7
Şekil 3. 3 İspattaki kümelerin geometrik temsili 9

1. GİRİŞ

Fraksiyonel kalkülüs, doğal sayı mertebeden türev ve integralin genelleştirilmiş hali olan herhangi keyfi reel ya da karmaşık sayı mertebeden türev ve integralin hesaplanması olarak tanımlanır. Son yıllarda, fraksiyonel diferansiyel denklemler fizik, kimya, mekanik, elektrik, biyoloji, ekonomi, kontrol teorisi, sinyal ve görüntü işleme, biyofizik, aerodinamik, deneysel donanım gibi çeşitli alanlarda karşılık bulmasından dolayı çok önemli bir rol oynamaktadır. Son on yılda, fraksiyonel analiz, uzun bellek süreçlerini tanımlamak için en iyi araçlardan biri olarak kabul edilmektedir. Bu modeller mühendisler ve fizikçiler için değil, aynı zamanda saf matematikçilerinde ilgisini çekmekte ve gizemli bir alan olduğunu sürdürmektedir. Adi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin nitel davranışlarını incelemede geçerli olan klasik yöntemlerin fraksiyonel diferansiyel denklemler için uygulanması zor olmaktadır. Bu nedenle, araştırması daha zor hale gelen yeni teorilerin ve yöntemlerin özel olarak geliştirilmesi gerekmektedir. Klasik diferansiyel denklemler teorisi ile karşılaştırıldığında, kesirli diferansiyel denklemler teorisi üzerine yapılan araştırmalar sadece gelişimin ilk aşamasındadır. Söz konusu nedenler bizi fraksiyonel diferansiyel denklemleri çalışma noktasında motive etmiştir.

Bu çalışmada fraksiyonel diferansiyel denklemler teorisine zemin oluşturan temel kavramlar verilerek belli bir modelde fraksiyonel mertebe bir diferansiyel denkleme gecikme eklenerek sıfır çözümünün karalılığı Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak kararlılık için yeter şartlar verilecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Kesirli türev ilk olarak 1695 yılında Marquis de L'Hopital'in Gottfried Wilhelm Leibniz'e gönderdiği mektupta sorduğu " $\frac{d^n y}{dx^n}$ türev operatöründe n kesirli bir sayı olursa bu nasıl bir anlam ifade eder " sorusu ile ortaya atıldığı düşünülür. Sonra Leibniz cevaben gönderdiği mektubunda " Bu ucu açık bir sorudur ve ilerde bundan çok faydalı sonuçlar elde edilebilecektir" dedi (Miller ve Ross, 1993). Sonra, m pozitif tamsayı olmak üzere $y = x^m$ fonksiyonunu n. türevini Lacroix (1797) Gamma fonksiyonunu kullanarak

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

olarak ifade etti. Daha sonraları birçok yazarın kesirli türev ile ilgili farklı tanım ve yaklaşımları olmuştur (Liouville, 1832; Liouville, 1835; Grunwald, 1867; Letnikov, 1868; Riemann, 1876; Weyl, 1917; Riesz, 1949; Caputo, 1969; Nishimoto, 1991). Fraksiyonel kalkülüs hakkında ayrıntılı bilgi için Miller ve Ross (1993), Podlubny (1998), Kilbas ve ark. (2006), Burton (2012), Yong ve ark. (2016) gibi yazarların kitaplarına bakılabilir.

Son yıllarda fraksiyonel mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığı, düzgün kararlılığı, asimptotik kararlılığı, düzgün asimptotik kararlılığı, sınırlılığı gibi nitel özellikler üzerine çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalarda Lyapunov'un ikinci metodu, sabit nokta metodu, lineer matris eşitsizliği gibi çeşitli metotlar kullanılmaktadır. Özellikle bu metotlardan Lyapunov'un ikinci metodunun sonuç alma noktasında daha etkili bir araç olduğu gözlemlenmektedir. Fraksiyonel diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklemlere göre daha karmaşık olmakta ve özellikle yazarlar uygun Lyapunov fonksiyonlar elde etmede oldukça zorlanmaktadırlar. Literatürde kararlılık üzerine yapılan çalışmaların bazıları aşağıda özetlenmiştir;

Lakshmikantham (2008), Lakshmikantham ve Vatsala (2008) adi fonksiyonel diferansiyel denklemler teorisine karşılık gelen fraksiyonel fonksiyonel diferansiyel denklemler için başlangıç değer probleminin temel teorisini ve ekstrem çözümler, lokal varlık, çözümlerin global varlığı gibi nitel özellikleri araştırdılar.

Burton (2011) Caputo fraksiyonel mertebe bir diferansiyel denklemi skaler bir integral denklemine dönüştürerek Lyapunov'un ikinci metodu ile çözümlerin nitel özelliklerini inceledi.

Aguila-Camacho ve ark. (2014) fraksiyonel mertebe sistemlerin kararlılığını Lyapunov'un ikinci metoduyla ispatlamada kullanılacak çok faydalı bir lemma'yı Caputo'nun fraksiyonel türevi için ispatladılar.

Duarte-Mermoud ve ark. (2015) genel kuadratik Lyapunov fonksiyonlar için iki yeni lemma ve bir teorem ortaya koyarak iki FOMRAC şemasının kararlılık analizini kontrol etmede kullandılar.

Gallegos ve Duarte-Mermoud (2016) fraksiyonel mertebe sistemler ve Lyapunov metodu üzerine bazı temel özellikler elde ederek irdeleyici bir çalışma yaptılar.

Chen ve ark. (2017) Lyapunov fonksiyonlar inşa ederek fraksiyonel mertebe sistemlerin kararlılığını analiz etmek için çok kullanışlı bir eşitsizlik sundular. Sunulan eşitsizliği kullanarak Mittag-Lefler kararlılık için yeter şartlar elde ettiler.

Gecikmeli ya da gecikmesiz fraksiyonel diferansiyel denklemlerin nitel özellikleri çeşitli metodlar uygulanarak Krol (2011), Baleanu ve ark. (2017), Agarwal ve ark. (2010), Wen ve ark. (2015), Liu ve ark. (2016) yeter şartlar için önemli sonuçlar elde ettiler.

Son olarak, Badri ve Tavazoei, (2019) konveks fonksiyonlar kullanarak adi diferansiyel denklemleri için kullanılan uygun Lyapunov fonksiyonların fraksiyonel diferansiyel denklemler içinde kullanılabileceğini gösterdiler. Yazarların bu çalışmasından esinlenerek bizde bu çalışmada fraksiyonel diferansiyel denklemler üzerine bir model kurarak bu modelin denge noktasının kararlılığı üzerine dördüncü bölümde bir teorem ispatlayarak bir örnekle destekledik.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde materyal olarak çalışmada kullanacağımız literatürde mevcut kararlılık tanımları, kararlılık teoremleri, gecikmeli diferansiyel denklem tanımı ve fraksiyonel türevde kullanılan fonksiyon tanımları verilecektir.

3.1. Kararlılık ve fraksiyonel türev ile ilgili temel kavramlar

Fizik ve mühendislikte en çok tanımlanan matematiksel modeller ya da denklemler çoğunlukla $x(t_0) = x_0$ başlangıç şartı ile birlikte,

$$x' = F(t, x) \tag{3.1}$$

formunda otonom olmayan adi diferansiyel denklemlerdir. Burada $D \subset R^n$, $x = 0$ orijini içeren bir bölge ve $F: [0, +\infty]xD \to R^n$ fonksiyonu $[0, +\infty]xD$ üzerinde x'e göre Lipchitz şartını sağlayan ve t'ye göre parçalı sürekli bir fonksiyondur. Genellikle tüm ölçüm türlerinden kaynaklanan ilk verilerde hata olabileceğinden, ilk verilerdeki küçük farklılıkların (3.1) in çözümlerinin istenen davranışını ne kadar etkilediğini bilmek önemlidir. Yani başlangıç şartında yeterince küçük bir değişiklik yapılması durumunda, ilgili çözümde önemli bir sapma gözlenirse, o zaman verilen başlangıç verilerinden elde edilen çözüm kabul edilemezdir, çünkü istenen davranışı yaklaşık olarak tanımlamamaktadır. Çözümlerin kayda değer bir şekilde istenen davranıştan sapmasına izin vermeyecek koşulların araştırılması problemi, bunun için önemlidir. (3.1) in çözümlerinin davranışlarıyla ilgili bu tür problemlerle ilgilenen matematik alanı genellikle kararlılık teorisi olarak tercih edilir. $t_0 \geq 0$ sağında var olan (t_0, x_0) başlangıç noktasından geçen (3.1) in bir çözümü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ olsun. Biz x(t) çözümü için kararlılığın temel kavramlarını tanıştırmadan önce t_0 ve x_0 başlangıç değerleri üzerine $x(t, t_0, x_0)$ çözümlerinin sürekli bağımlılığına ilişkin bir sonuç ispatlayacağız.

Teorem 3.1 $F(t, x)$ fonksiyonu $B = \{(t, x): t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, \|x - x_0\| \leq b\}$ kümesinde sürekli ve $(t, x_1), (t, x_2) \in B$ için,

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$$

Lipschitz şartını sağlasın. O zaman $x_n \to x_0$ demek $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için

$$x(t, t_0, x_n) \to x(t, t_0, x_0)$$

düzgün demektir (Ahmad ve Rao, 1999).

İspat: Sırasıyla (t_0, x_0) ve (t_0, x_n) den geçen (3.1) in herhangi iki çözümü $x(t, t_0, x_0)$ ve $x(t, t_0, x_n)$ olsun.

$$x(t,t_0,x_n) = x_n + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s,t_0,x_n))ds,$$

$$x(t,t_0,x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s,t_0,x_0))ds$$

Lipchitz şartını kullanarak $t \geq t_0$ için,

$$\|x(t,t_0,x_n) - x(t,t_0,x_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \int_{t_0}^{t} K\|x(s,t_0,x_n) - x(s,t_0,x_0)\| \, ds.$$

$$\|x(t,t_0,x_n) - x(t,t_0,x_0)\| \leq \|x_n - x_0\|. \exp(K\alpha)$$

Bu da sonucu ima eder (Ahmad ve Rao, 1999).

Şimdi (3.1) in $x(t,t_0,x_0)$ çözümü için çeşitli kararlılık tanımları verilir.

Tanım 3.1 (3.1) diferansiyel denklem sisteminin herhangi bir çözümü $x(t)$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (3.1) in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t,t_0,\bar{x}_0)$ çözümü için $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1) 'in $x(t)$ çözümüne kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.2 Eğer (3.1) in $x(t)$ çözümü kararlı ve bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ var $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| \to 0$ oluyorsa (3.1) 'in $x(t)$ çözümüne asimptotik kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.3 (3.1) diferansiyel denklem sisteminin herhangi bir çözümü $x(t)$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (3.20) in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t,t_0,\bar{x}_0)$ çözümü ve $t_1 > t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta$ iken her $t > t_1$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1) in $x(t)$ çözümüne düzgün kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.4 Eğer (3.1) in $x(t)$, çözümü düzgün kararlı ve bir $\delta_0 > 0$ vardır ve her bir $\eta > 0$ için bir $T = T(\eta) > 0$ vardır ki $t_1 \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta_0$ iken her $t \geq t_1 + T$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \eta$ oluyorsa (3.1) in $x(t)$ çözümüne düzgün asimptotik kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.5 (3.1) diferansiyel denklem sisteminin herhangi bir çözümü $x(t)$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (3.1) in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t,t_0,\bar{x}_0)$ çözümü ve $t_1 > t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1) 'in $x(t)$ çözümüne kuvvetli kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

$D \subset \mathcal{R}^n$ olmak üzere $f : D \to \mathcal{R}^n$ lokal lipchitz şartını sağlayan bir dönüşüm olsun.

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.2}$$

otonom diferansiyel denklem sistemi verilsin.

Tanım 3.6 (3.2) diferansiyel denklem sisteminin denge noktası $x = 0$ olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\|x(0)\| < \delta$ iken $\forall\, t \geq 0$ için $\|x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.2) nin x = 0 denge noktası kararlıdır denir. Aksi takdirde kararsızdır. Eğer (3.2) nin $x = 0$ denge noktası kararlı ve $\|x(0)\| < \delta$ iken $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ oluyorsa (3.2) nin $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır denir (Khalil ve Grizzle, 2002).

Orijini içeren $D \subset R^n$ bölgesinde tanımlanan $V: D \to R$ sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. V nin (3.2) eğrisi boyunca türevi

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\, \dot{X}_\iota = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\, f_i(X)$$

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] \cdot \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

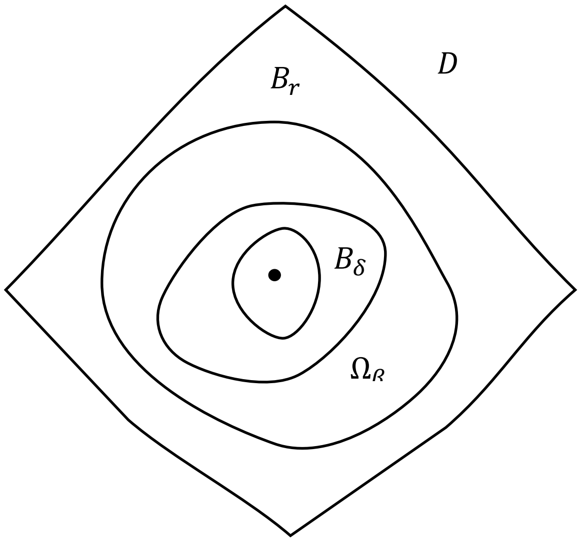
$$= \frac{\partial V}{\partial x}\, f(x)$$

olur.

Teorem 3.2 $f(t, x)$ fonksiyonu t ye göre parçalı sürekli, $D \subset R^n$ bölgesinde her x ve her $t > t_0$ için x e göre lokal Lipchitz sağlasın. W kümesi x_0 içeren D nin kompact bir alt kümesi olsun. Eğer $x' = f(t, x)$, $x(t_0)$ başlangıç değer probleminin her çözümü tamamen W da kalırsa o zaman her $t > t_0$ için başlangıç değer probleminin tanımlanan bir tek çözümü vardır (Khalil ve Grizzle, 2002).

Teorem 3.3 (3.2) diferansiyel denklem sisteminin $x = 0$ denge noktasını içeren bir $D \subset R^n$ bölgesi verilsin. $V: D \to R$ sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $V(0) = 0, D - \{0\}$ da $V(x) > 0$ $ve\ D'de\ \dot{V}(x) \leq 0$ ise o zaman (3.2) nin $x = 0$ çözümü kararlıdır. Ayrıca eğer $D - \{0\}$ da $\dot{V}(x) < 0$ ise (3.2) nin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır (Khalil ve Grizzle, 2002).

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin. $B_r = \{x \in \mathcal{R}^n : \|x\| \leq r\} \subset D$ olacak şekilde $r \in (0, \varepsilon]$ seçelim. $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ olsun. O zaman $D - \{0\}$ da $V(x) > 0$ olduğundan $\alpha > 0$ olur.



Şekil 3. 1 İspattaki kümelerin geometrik temsili

$\beta \in (0, \alpha)$ alalım ve $\Omega_\beta = \{x \in B_r : V(x) < \beta\}$ olsun. O zaman Ω_β, B_r nin iç bölgesidir. $t = 0$ da Ω_β da başlayan herhangi bir eğri her $t \geq 0$ için Ω_β da kalır.

Bu durum D kümesinde $\dot{V}(x) \leq 0$ olduğundan dolayıdır. Çünkü $\forall\, t \geq 0$ için

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta$$

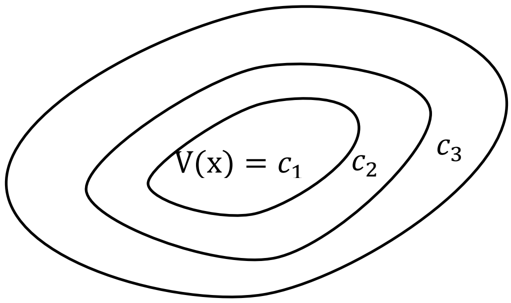
Ω_β kompakt bir küme olduğundan dolayı Teorem 3.2 den (3.2) sistemi $x(0) \in \Omega_\beta$ da $\forall\, t \geq 0$ için tanımlanan bir tek çözüme sahiptir. $V(x)$ sürekli ve $V(0) = 0$ olduğundan $\|x\| < \delta$ iken $V(x) < \beta$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. O zaman

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

ve

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r$$

Böylece $\forall\, t \geq 0$ için $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon$ olur. Bu da $x = 0$ denge noktası noktasının kararlı olduğunu gösterir.



$$c_1 < c_2 < c_3$$

Şekil 3. 2 Lyapunov fonksiyonunun seviye yüzeyi

Şimdi $D-\{0\}$ da $\dot{V}(x)<0$ olduğunu varsayalım. Asimptotik kararlılığını göstermek için $t\to\infty$ iken $x(t)\to 0$ olduğunu göstermeye ihtiyaç duyarız, yani her $a>0$ için $\forall\ t>T$ için $\|x(t)\|<a$ olacak şekilde $T>0$ vardır. Önceki argümanları tekrarlayarak her $a>0$ için $\Omega_b\subset B_a$ olacak şekilde $b>0$ seçebiliriz. Dolayısıyla $t\to\infty$ iken $V(x(t))\to 0$ göstermek yeterlidir. $V(x(t))$ monoton azalan ve sıfır ile alttan sınırlı olduğundan dolayı $t\to\infty$ iken $V(x(t))\to c\geq 0$ olur.

$c=0$ olduğunu göstermek için çelişki kullanırız. Farz edelim ki $c>0$, V(x) in sürekliliği ile $B_d\subset\Omega_c$ olacak şekilde $d>0$ vardır.
$V(x(t))\to c>0$ limiti $x(t)$ yörüngesinin her $t\geq 0$ için B_d yuvarının dışına uzandığını ima eder.

$$-\gamma=\max_{d\leq\|x\|\leq r}\dot{V}(x)$$

olsun. Sürekli $\dot{V}(x)$ fonksiyonu $\{d\leq\|X\|\leq r\}$ kompakt kümesi üzerinde bir maksimuma sahip olduğundan dolayı $-\gamma$ vardır. $D-\{0\}$ da $\dot{V}(x)<0$ dan $-\gamma<0$ olur. Böylece

$$V\big(x(t)\big)=V\big(x(0)\big)+\int_0^t\dot{V}(x(\tau))\,d\tau\leq V\big(x(0)\big)-\gamma t$$

Sonuçta eşitliğin sağ tarafı negatif olacağından dolayı $c>0$ kabulü ile çelişir. Buda gösterir ki $x=0$ denge noktası asimptotik kararlıdır (Khalil ve Grizzle, 2002).

Tanım 3.7 $\gamma(0)=0$ ve $\gamma:[0,a)\to[0,\infty)$ sürekli fonksiyonu sıkı artan ise γ ya K-sınıfına aittir denir. Eğer $a=\infty$ ve $r\to\infty$ iken $a(r)\to\infty$ ise γ ya K_∞ sınıfına aittir denir (Khalil ve Grizzle, 2002).

Lemma 3.1 Orijini içeren $D\subset R^n$ bölgesi üzerinde tanımlı, sürekli pozitif tanımlı $V:D\to R$ fonksiyonu verilsin. Bir $r>0$ için $B_r\subset D$ olsun. O zaman her $x\in B_r$ için

$$\alpha_1(\|x\|)\leq V(x)\leq\alpha_2(\|x\|)$$

olacak şekilde $[0,r]$ de tanımlanan α_1 ve α_2 K-fonksiyonlar sınıfı vardır. Eğer $D=R^n$ ise α_1 ve α_2 fonksiyonları $[0,\infty]$ tanımlanmış olacak ve yukarıdaki eşitsizlik $x\in R^n$ için sağlanacak. Ayrıca $V(x)$ radyal sınırsız ise o zaman α_1 ve α_2 fonksiyonları K_∞ sınıfından seçilebilir (Khalil ve Grizzle, 2002).

Teorem 3.4 (3.2) sisteminin $x=0$ denge noktasını içeren bir bölge $D\subset R^n$ olsun. $V:[0,+\infty]xD\to R$ sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\forall\ t\geq 0$ ve $\forall\ x\in D$ için $W_1(x)$ ve $W_2(x)$ sürekli pozitif tanımlı fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki

$$W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x) \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq 0 \tag{3.4}$$

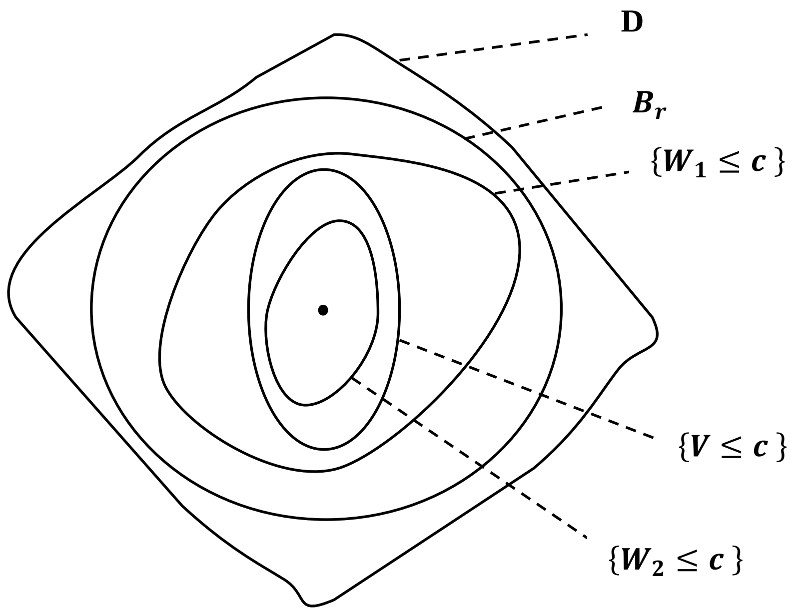
şartları sağlanıyor ise o zaman (3.2) sisteminin $x = 0$ denge noktası düzgün kararlıdır (Khalil ve Grizzle, 2002).

İspat: (3.2) sisteminin yörüngeleri boyunca V Lyapunov fonksiyonunun türevi

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq 0$$

ile verilir. $B_r \subset D$ ve $c < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$ olacak şekilde $r > 0$ ve $c > 0$ seçelim. O zaman $\{x \in B_r : W_1(x) \leq c\}$ kümesi B_r nin iç bölgesidir. Zaman-bağımlı $\Omega_{t,c} = \{x \in B_r : V(t,x) < c\}$ kümesi tanımlansın. $W_2(x) \leq c \Rightarrow V(t,x) \leq c$ olduğundan dolayı $\Omega_{t,c}$ kümesi $\{x \in B_r : W_2(x) \leq c\}$ kümesini içerir. Diğer taraftan; $V(t,x) \leq c \Rightarrow W_1(x) \leq c$ olduğundan dolayı $\Omega_{t,c}$ kümesi $\{x \in B_r : W_1(x) \leq c\}$ kümesinin bir alt kümesidir.

Böylece $\forall\, t \geq 0$ için $\{x \in B_r : W_2(x) \leq c\} \subset \Omega_{t,c} \subset \{x \in B_r : W_1(x) \leq c\} \subset B_r \subset D$ bu beş iç içe küme şekil 3.3 de çizilir. $V(t,x) = c$ yüzeyi şimdi t ye bağımlıdır bu sebepten dolayı bu yüzey $W_1(x) = c$ ve $W_2(x) = c$ zaman bağımsız yüzeyler ile çevrelenmiştir.



Şekil 3. 3 İspattaki kümelerin geometrik temsili

Herhangi $x_0 \in \Omega_{t_0,c}$ ve herhangi $t_0 \geq 0$ için D de $\dot{V}(t,x) \leq 0$ olduğundan dolayı (t_0, x_0) da başlayan çözüm $\forall\, t \geq t_0$ için $\Omega_{t,c}$ de kalır.

Bu yüzden $\{x \in B_r : W_2(x) \leq c\}$ de başlayan herhangi bir çözüm $\Omega_{t,c}$ de kalır ve sonuçta her gelecek zaman için $\{x \in B_r : W_1(x) \leq c\}$ kümesinde bunun sonucu olarak çözüm her $t \geq t_0$ için tanımlı ve sınırlıdır. Ayrıca $\dot{V} \leq 0$ olduğundan dolayı $\forall\, t \geq t_0$ için

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0))$$

Lemma 3.1 den

$$\alpha_1(\|x\|) \leq W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

olacak şekilde $[0, r]$ üzerinde tanımlanan α_1 ve α_2 fonksiyonlar sınıfı vardır. Önceki iki eşitsizliği birleştirerek

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(V(t_0, x(t_0))) \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(t_0)\|))$$

$\alpha_1^{-1} o\, \alpha_2$ bir K fonksiyon sınıfı olduğundan dolayı

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(t_0)\|))$$

Bu da orijinin düzgün kararlı olduğunu gösterir (Khalil ve Grizzle, 2002).

Tanım 3.10 Gamma fonksiyonunun en temel açıklaması faktöriyel kavramının reel sayılar için genellemesi olup $x \in R^+$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

ile tanımlanır. Gamma fonksiyonu gibi Beta fonksiyonuda belli bir integral ile

$$x, y \in R^+$$

için

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

olarak tanımlanır. Fraksiyonel kalkulusta önemli bir rol oynayan Mittag-Leffler fonksiyonu e^x üstel fonksiyonunun bir genellemesi olup $\alpha > 0$, $\beta > 0$ için

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

ve

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

kuvvet serileri ile tanımlanır (Podlubny, 1998).

3.2. Lyapunov metodu

Yarım yüzyıla yakın bir zamandır lineer olmayan diferansiyel denklemlerin nitel teorisinin araştırılması için büyük çabalar sarf edilmiştir. Bu bağlamda çözümlerin sınırlılığı, kararlılığı, periyodikliği ve yakınsaması gibi nitel özelliklerin araştırılmasında kullanılan tekniklerden bir tanesi de Lyapunov’ un ikinci metodudur. Kararlı olan sistemlerin yakınsama özelliği teorik olarak önemlidir. Uygulamalarda denge noktasında gerçekleşen küçük sapmalar sonsuza gittiğinde yörünge yine ona geri dönecektir. Bu tezin niteliksel özelliklerini inceleyen yaklaşım Lyapunov’ un ikinci metodudur. Bu kavram dinamik sistemlerin kararlılık alanı ve otomatik kontrol uygulamalarının farkındadır. Lyapunov yönteminin uygulanması skaler bir fonksiyonun oluşturulmasında yatar. Belirli özelliklere sahip bir skaler fonksiyon ve türevlerinin özellikleri karşılaştırıldığında sistemin kararlılık davranışı bilinir. Lyapunov ikinci metodunun uygulanmasındaki en büyük zorluk lineer olmayan sistemlerin çözümlerinin niteliksel özelliklerine uygun Lyapunov fonksiyonlarını bulma işleminin kolay bir prosedür olmamasıdır. Lyapunov fonksiyonu bulmak bir sanattır ve diğer sanatlar gibi takip edilmesi gereken yörüngeler içerir. Kararlı bir sistem için çok sayıda hatta sonsuz sayıda Lyapunov fonksiyonu oluşturulabilir. Lyapunov fonksiyonlarını oluşturmak için literatürde önerilen bir çok yöntem mevcuttur. Krasovskii’s Metodu, Schultz – Gibson’s Variable Metodu, Intrinsic Metodu bu yöntemlerden bir kaçıdır. Yüksek mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerle ilgili bir çok araştırma sonucu Lyapunov teoremleri ve genellemeleri kullanılarak elde edilir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

4.1. Belirli bir modelde gecikmeli fraksiyonel diferansiyel denklemlerin kararlılığı

Tanım 4.1 İkinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir $f: R^n \to R$ fonksiyonu ve f nin Hessian matrisi $H\big(f(.)\big): R^n \to R^{nxn}$ verilsin. Eğer herhangi konveks ve kompakt $D \subset R^n$ için aşağıdaki;

i) $\forall x, y \in D$ için $f(y) - f(x) - (\partial f(x)/\partial x)^T (y - x) \geq (\theta/2)\|y - x\|^2$,

ii) $\forall x, y \in D$ için $\big((\partial f(y)/\partial y) - (\partial f(x)/\partial x)\big)^T (y - x) \geq \theta \|y - x\|^2$,

iii) $\forall x \in D$ için $H(f(x)) \geq \theta I_n$

eşdeğer şartları sağlayan $\theta > 0$ sabiti varsa $f: R^n \to R$ fonksiyonu lokal güçlü konveks denir (Chen ve ark., 2017).

Lemma 4.1 $x(t) \in R$ sürekli ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman herhangi $t \geq t_0$ ve $\forall \alpha \in (0,1)$

$$\frac{1}{2}\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x^2(t) \leq x(t)\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) \tag{4.1}$$

olur (Aguila-Camacho ve ark., 2014).

İspat : (4.1) ifadesinin doğruluğu ispatlamak için (4.1) ifadesine eşdeğer olan $\forall \alpha \in (0,1)$ için

$$x(t)\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) - \frac{1}{2}\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x^2(t) \geq 0 \tag{4.2}$$

doğruluğu ispatlanır. Caputo fraksiyonel türev tanımından

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \tag{4.3}$$

ve aynı şekilde

$$\frac{1}{2}\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{x(\tau)\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \tag{4.4}$$

yazılır. Böylece (4.2) ifadesi

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{[x(t)-x(\tau)]\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \geq 0 \tag{4.5}$$

olarak yazılır.

$y(\tau) = x(t) - x(\tau)$ değişken değiştirmesi yaparak (4.5) ifadesi

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y(\tau)\dot{y}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \leq 0 \tag{4.6}$$

olarak yazılabilir. Şimdi de (4.6) ifadesine kısmi integrasyon uygulanarak

$$u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha}} \qquad du = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha-1}$$

$$dv = \ y(\tau)\dot{y}(\tau)d\tau \qquad v = \frac{1}{2}$$

$$-\left[\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^2}\right]\Bigg|_{t-\tau} + \left[\frac{y_0^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^2}\right]$$
$$+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}}d\tau \geq 0 \tag{4.7}$$

olarak yazılabilir. $t = \tau$ da bir belirsizliğe sahip olan (4.7) ifadesinin birinci terimi kendisine özdeş olan

$$\lim_{t\to\tau}\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^2} = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\tau\to t}\frac{[x(t)-x(\tau)]^2}{(t-\tau)^{\alpha}}$$
$$= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\tau\to t}\frac{[x^2(t)-2x(t)x(\tau)+x^2(\tau)]}{(t-\tau)^{\alpha}} \tag{4.8}$$

limiti ile analiz edilir. $\frac{0}{0}$ belirsizliği olduğundan L'Hospital kuralı uygulanabilir. O zaman

$$\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\tau\to t}\frac{[x^2(t)-2x(t)x(\tau)+x^2(\tau)]}{(t-\tau)^{\alpha}} = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\tau\to t}\frac{[-2x(t)\dot{x}(\tau)+2x(\tau)\dot{x}(\tau)]}{-\alpha(t-\tau)^{\alpha-1}}$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\tau\to t}\frac{[2x(t)\dot{x}(\tau)-2x(\tau)\dot{x}(\tau)](t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha}$$

$$= 0$$

Böylece (4.7) ifadesi

$$\frac{y_0^2}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau_0)^\alpha}+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}}d\tau \geq 0 \tag{4.9}$$

indirgenir. (4.9) eşitsizliğinin doğruluğu açıktır. Bu da ispatı tamamlar (Aguila-Camacho ve ark., 2014).

Not 4.1 $x(t) \in R^n$ olduğu durumda $\forall\ \alpha \in (0,1)$ ve $\forall\ t \geq t_0$ için

$$\frac{1}{2}\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x^{\mathrm{T}}(t) \leq x^T(t)\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)$$

olur (Aguila-Camacho ve ark., 2014).

Lemma 4.2 f ve g fonksiyonları türevleri ile birlikte $(0,+\infty)$ da sürekli iseler o zaman Caputo'nun fraksiyonel türevi için Leibniz kuralı $\binom{\alpha}{k}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\mathrm{k}).\Gamma(1-\mathrm{k}+\alpha)}$ olmak üzere

$${}_{0}^{C}D_t^{\alpha}(f(t)g(t))=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t).D_t^{\alpha-k}g(t)$$

formunu alır (Kilbas ve ark., 2006).

Lemma 4.3 $A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{nxn}$ zaman değişkenli bir matris ve $a_{ij}(t)$ ler sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlar olsun. $Q \in R^{nxn}$ olmak üzere o zaman aşağıdaki eşitlikler

$${}_{0}^{C}D_t^{\alpha}A(t)=\begin{pmatrix}{}_{0}^{C}D_t^{\alpha}a_{1,1}(t) & \cdots & {}_{0}^{C}D_t^{\alpha}a_{1,n}(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ {}_{0}^{C}D_t^{\alpha}a_{n,1}(t) & \cdots & {}_{0}^{C}D_t^{\alpha}a_{n,n}(t)\end{pmatrix}$$

$${}_{0}^{C}D_t^{\alpha}\big(QA(t)\big)=Q\,{}_{0}^{C}D_t^{\alpha}A(t)$$

vardır (Yige ve ark., 2015).

Lemma 4.4 $\alpha\epsilon(0,1)$ olmak üzere $x(t_0)=y(t_0)$ ve ${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) \geq {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}y(t)$ olsun. O zaman $x(t) \geq y(t)$ olur.

Lemma 4.5 $A \in R^{nxn}$ pozitif tanımlı bir matris olsun. O zaman $A=B^2$ olacak şekilde $B \in R^{nxn}$ pozitif tanımlı bir matris vardır (Yige ve ark., 2015).

İspat: A matrisi reel simetrik matris olduğundan bir ortogonal $P \in R^{nxn}$ matrisi vardır. Şöyle ki

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ayrıca A matrisinin pozitif tanımlı olması $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ lerin pozitif olmasını ima eder. $\Lambda_1 = diag\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ seçelim, $B = P\Lambda_1 P^{-1}$ o zaman pozitif tanımlı B matrisini alırız. Böylece

$$B^2 = BB = P\Lambda_1 P^{-1} P\Lambda_1 P^{-1} = P{\Lambda_1}^2 P^{-1} = P\Lambda P^{-1} = A$$

elde edilir (Yige ve ark., 2015).

Lemma 4.6 $\alpha \in (0,1)$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in R^n$ ve $x_i(t)$ ler sürekli ve diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman herhangi $t \geq 0$ için

$$\frac{1}{2}\,{}_0^C D_t^\alpha x^T(t) P x(t) \leq x^T(t) P\,{}_0^C D_t^\alpha x(t)$$

olacak şekilde pozitif tanımlı $P \in R^{nxn}$ matrisi vardır (Yige ve ark., 2015).

İspat: Bir önceki Lemmadan $P = Q^2$ olacak şekilde pozitif tanımlı $Q \in R^{nxn}$ matrisi vardır.

O zaman

$$\frac{1}{2}\,{}_0^C D_t^\alpha x^T(t) P x(t) = \frac{1}{2}\,{}_0^C D_t^\alpha x^T(t) Q^T Q x(t)$$

sahip olunur. $y(t) = Qx(t)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,{}_0^C D_t^\alpha x^T(t) P x(t) &= \frac{1}{2}\,{}_0^C D_t^\alpha x^T(t) Q^T Q x(t) \\
&= \frac{1}{2}\,{}_0^C D_t^\alpha y^T(t) y(t) \\
&\leq y^T(t)\,{}_0^C D_t^\alpha y(t) \\
&= x^T(t) Q^T\,{}_0^C D_t^\alpha Q x(t) \\
&= x^T(t) Q^T Q\,{}_0^C D_t^\alpha x(t) \\
&= x^T(t) P\,{}_0^C D_t^\alpha x(t)
\end{aligned}$$

sahip olunur (Yige ve ark., 2015).

Teorem 4.1 Otonom olmayan fraksiyonel mertebeden ${}_{t_0}^C D_t^\alpha x = f(t, x(t))$ sisteminin denge noktası $x = 0$ olsun. Kabul edelim ki sürekli $V(x(t), t)$ Lyapunov fonksiyonu ve K-fonksiyonlar sınıfından skaler bir $\gamma_1(.)$ fonksiyonu vardır. Eğer $\forall x \neq 0$ için

i) $\gamma_1(\|x(t)\|) \leq V(x(t),t)$

ii) ${}_0^C D_t^\beta V(x(t),t) \leq 0, ve\ \beta \in (0,1]$

sağlanırsa o zaman ${}_{t_0}^C D_t^\alpha x(t) = f\big(t, x(t)\big)$ sisteminin denge noktası Lyapunov kararlıdır. Eğer ek olarak K-fonksiyonlar sınıfından skaler bir $\gamma_2(.)$ fonksiyonu var ve

iii) $V(x(t),t) \leq \gamma_2(\|x(t)\|)$

sağlanırsa o zaman ${}_{t_0}^C D_t^\alpha x(t) = f\big(t, x(t)\big)$ sisteminin denge noktası Lyapunov düzgün kararlıdır (Duarte-Mermoud ve ark., 2015).

İspat: İlk olarak ${}_{t_0}^C D_t^\alpha x(t) = f\big(t, x(t)\big)$ sisteminin denge noktasının Lyapunov kararlılığı ispatlanır. Yani Teorem'in i) ve ii) şartları sağlanırken her $\varepsilon > 0$ için $\|x(t_0)\| < \delta$ iken öyle bir $\delta(\varepsilon, t_0)$ vardır ki $\forall\ t \geq t_0$ için $\|x(t)\| < \varepsilon$ olduğu gösterilir. Teorem'in ii) şartından ve fraksiyonel kıyaslama ilkesinden $\forall\ t \geq t_0$

$$V(x(t),t) \leq V(x(t_0),t_0) \tag{4.10}$$

elde edilir. i) ve (4.10) dan $\forall\ t \geq t_0$ için

$$\gamma_1(\|x(t)\|) \leq V(x(t),t) \leq V(x(t_0),t_0) \tag{4.11}$$

yazılabilir. $V(x,t)$ Lyapunov fonksiyonu x e göre sürekli ve $V(0,t_0) = 0$ olduğundan $\|x(t_0)\| < \delta$ iken

$$V(x(t_0),t_0) < \eta = \gamma_1(\varepsilon) \tag{4.12}$$

olacak şekilde bir δ bulunabilir. Bu demektir ki eğer $\|x(t_0)\| < \delta$ ise o zaman (4.11) ve (4.12) den $\forall\ t \geq t_0$

$$\gamma_1(\|x(t)\|) \leq \gamma_1(\varepsilon) \tag{4.13}$$

Bir K-fonksiyon sınıfından $\gamma_1(.)$ fonksiyonu azalmayan olduğundan (4.13) eşitsizliği $\forall\ t \geq t_0$ için $\|x(t)\| < \varepsilon$ olduğunu ima eder. Buda sistemin denge noktasının Lyapunov kararlı olduğunu gösterir. Şimdi de Teorem'in i)-iii) şartlarının sağlanması durumunda sistemin denge noktasının düzgün Lyapunov kararlı olduğu gösterilir. Yani i)-iii) sağlanması halinde her $\varepsilon > 0$ için $\|x(t_0)\| < \delta$ iken öyle bir $\delta(\varepsilon)$ vardır ki $\forall\, t \geq t_0$ için $\|x(t)\| < \varepsilon$ olduğu gösterilir. Teorem'den $\forall\, t \geq t_0$ için

$$\gamma_1(\|x(t)\|) \leq V(x(t), t) \leq \gamma_2(\|x(t)\|) \tag{4.14}$$

olduğu bilinir. Şimdi herhangi $\varepsilon > 0$ için $\gamma_2(\delta) < \gamma_1(\varepsilon)$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ bulunabilir. $x(t_0)$ başlangıç şartı $\|x(t_0)\| < \delta$ olacak şekilde seçilsin o zaman (4.10) açıklamasının bir sonucu

$$\gamma_1(\varepsilon) > \gamma_2(\delta) \geq V(x(t_0), t_0) \geq V(x(t), t) \geq \gamma_1(\|x(t)\|) \tag{4.15}$$

yazılabilir. $\gamma_1(.)$ artmayan olduğundan $\forall\, t \geq t_0$ için $\|x(t)\| < \varepsilon$ olması demektir. Bu durumda δ sayısı t_0 dan bağımsız olduğundan sistemin denge noktası Lyapunov düzgün kararlıdır. Buda ispatı tamamlar (Duarte-Mermoud ve ark., 2015).

Teorem 4.2 Sürekli ve diferansiyellenebilir iki fonksiyon $V\big(x(t)\big): \Omega \to \mathrm{R}$ ve $x(t): [t_0, +\infty) \to \Omega$ olsun. Burada $\Omega \subseteq R^n$ bir kümedir. Eğer $V\big(x(t)\big)$ fonksiyonu Ω üzerinde konveks bir fonksiyon ise o zaman herhangi $t \geq t_0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} V(x(t)) \leq \left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial(x(t))}\right)^T {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) \tag{4.15}$$

olur (Chen ve ark., 2017).

İspat: (4.15) eşitsizliği kendisine eşdeğer

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} V\big(x(t)\big) - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) \leq 0 \tag{4.16}$$

olarak yazılabilir. Fraksiyonel türev tanımı kullanılarak (4.16) eşitsizliği

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{\left[((\partial V\big(x(\tau)\big))/\partial x) - ((\partial V\big(x(\tau)\big))/\partial x)\right]^T x(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \leq 0 \tag{4.17}$$

yazılabilir. $\varphi(\tau,t) = V\big(x(\tau)\big) - V\big(x(t)\big) - (\partial V/\partial x)^T(x(\tau) - x(t))$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{(d/d\tau)\varphi(\tau,t)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{d[\varphi(\tau,t)]}{(t-\tau)^{\alpha}} \leq 0 \tag{4.18}$$

elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanarak (4.18) eşitsizliği

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{d[\varphi(\tau,t)]}{(t-\tau)^{\alpha}} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\varphi(\tau,t)}{(t-\tau)^{\alpha}}\bigg|_{\tau=t} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\varphi(t_0,t)}{(t-t_0)^{\alpha}} \\ &\quad - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi(\tau,t)}{(t-\tau)^{\alpha+1}}d\tau\end{aligned} \tag{4.19}$$

(4.19) eşitsizliğinde eşitliğin sağ tarafındaki ilk terimdeki tanımsızlığı ortadan kaldırmak için L'hospital kuralı uygulanarak

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(\tau,t)}{(t-\tau)^{\alpha}}\bigg|_{\tau=t} &= \lim_{\tau\to t}\frac{\varphi(\tau,t)}{(t-\tau)^{\alpha}} = \lim_{\tau\to t}\frac{\left[\dfrac{\partial V\big(x(\tau)\big)}{\partial x} - \dfrac{\partial V\big(x(t)\big)}{\partial x}\right]^T x(\tau)}{\alpha(t-\tau)^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{\tau\to t}\frac{\left[\dfrac{\partial V\big(x(\tau)\big)}{\partial x} - \dfrac{\partial V\big(x(t)\big)}{\partial x}\right]^T x(\tau)(t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha} = 0\end{aligned}$$

bulunur. $V(x)$ fonksiyonu konveks olduğundan dolayı $\varphi(\tau,t) \geq 0$ sahip oluruz. (4.19) da son iki terim

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\varphi(t_0,t)}{(t-t_0)^{\alpha}} - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi(\tau,t)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \leq 0$$

olduğundan böylece

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{d[\varphi(\tau,t)]}{(t-\tau)^{\alpha}} \leq 0$$

olur bu durumda ispat tamamlanır (Chen ve ark., 2017).

Tamsayı mertebeden zaman gecikmeli

$$\dot{x} = f\big(x(t), x(t-\tau)\big) \quad \tau \in [0,+\infty) \tag{4.10}$$

sisteminin denge noktasının kararlılığı için yeter şartlar uygun aday Lyapunov fonksiyonu kullanılarak Krasovskii metodu ile elde edilir.

(4.10) sisteminin fraksiyonel mertebeden diferansiyel denklem hali $\tau \in [0,+\infty)$, $\alpha \in (0,1]$ için

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x = f\big(x(t), x(t-\tau)\big) \tag{4.11}$$

olur.

Tamsayı mertebe (4.10) diferansiyel denklem sisteminin kararlılığı için kullanılan Lyapunov fonksiyonunun uyarlanması ile fraksiyonel mertebe (4.11) diferansiyel denklem sisteminin kararlılığı kontrol edilir.

Kabul edelim ki $x = 0$ (4.10) sisteminin denge noktasıdır. Eğer türevi

$$\dot{V}_{(4.10)}(t) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial (x)}\right)^{T} \dot{x}(t) + g\big(x(t)\big) - g\big(x(t-\tau)\big) \tag{4.12}$$

negatif tanımlı olacak şekilde

$$V_{(4.10)}(t) = V\big(x(t)\big) + \int_{t-\tau}^{t} g\big(x(s)\big)ds \tag{4.13}$$

Lyapunov fonksiyonu varsa o zaman $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır. Eğer konveks ise (4.13) Lyapunov-Krasovskii fonksiyonu Teorem 4.2 ve Riemann-Liouville integral tanımı kullanılarak fraksiyonel mertebeden (4.11) sistemi için aşağıdaki Teorem verilir (Badri ve Tavazoei, 2019).

Teorem 4.3 Kabul edelim ki (4.10) ve (4.11) sistemlerinin denge noktası $x = 0$ dır. $\dot{V}_4(t)$ negatif tanımlı ve $V(x(t))$ fonksiyonu x vektörüne göre konveks olacak şekilde (4.10) sistemi için $V_4(t)$ formunda Lyapunov-Krasovskii fonksiyonu varsa o zaman (4.11) sisteminin $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır (Badri ve Tavazoei, 2019).

İspat: $V_{(4.10)}(t)$ Lyapunov fonksiyonu (4.11) sistemi için

$$V_{(4.11)}(t) = {}_{t_0}I_t^{1-\alpha}V\big(x(t)\big) + \int_{t-\tau}^{t} g(x(s))\, ds \tag{4.14}$$

olarak modifiye edilir. Caputo fraksiyonel türevin özelliğinden dolayı herhangi diferansiyellenebilir $h(t)$ fonksiyonu için

$$\lim_{\gamma\to 1^-} {}_{t_0}^{C}D_t^{\gamma} h(t) = h'(t) \tag{4.15}$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma\to 1^-} {}_{t_0}^{C}D_t^{\gamma} V_{(4.11)}(t) &= \lim_{\gamma\to 1^-} {}_{t_0}^{C}D_t^{\gamma}\, {}_{t_0}I_t^{1-\alpha}V\big(x(t)\big) + \lim_{\gamma\to 1^-} {}_{t_0}^{C}D_t^{\gamma} \int_{t-\tau}^{t} g\big(x(s)\big)ds \\ &= {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}V\big(x(t)\big) + g\big(x(t)\big) - g(x(t-\tau) \end{aligned} \tag{4.16}$$

$V(x)$ konveks bir fonksiyon olduğundan Teorem 4.2 den (4.16) eşitliği

$$\dot{V}_{(4.11)}(t) \le \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) + g\big(x(t)\big) - g(x(t-\tau) \tag{4.17}$$

olarak elde edilir. (4.17) den $\dot{V}_{(4.10)}(t)$ nin negatif tanımlılı $\dot{V}_{(4.11)}(t)$ nin negatif tanımlılığı demektir. Bu da gösterir ki (4.11) sisteminin $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır (Badri ve Tavazoei, 2019).

Teorem 4.4 Fraksiyonel mertebeden

$${}_{t_0}^{C}D_t\ x(t) = -af\big(x(t)\big) + f\big(x(t-\tau)\big) \tag{4.18}$$

diferansiyel denklemini alalım. Eğer $a > 1$ $\lambda > 0$ olmak üzere $f(0) = 0$,

$$\frac{\lambda}{a} < f'(x) < \lambda$$

ise o zaman (4.18) denkleminin $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

İspat: Teorem'i ispatlamak için (4.18) fraksiyonel diferansiyel denkleminin tamsayı mertebe karşılığı olan gecikme argümanlı

$$\dot{x} = -af\big(x(t)\big) + f\big(x(t-\tau)\big) \tag{4.19}$$

diferansiyel denklemi için $f^2(x)$ konveks fonksiyon olmak üzere uygun Lyapunov fonksiyon olarak

$$V(x) = f^2(x) + \lambda \int_{t-\tau}^{t} f^2(x(s))\, ds \tag{4.20}$$

alırız. $V(0) = 0$ ve $x \neq 0$ için $V(x) > 0$ olduğundan Lyapunov fonksiyonu pozitif tanımlıdır. Şimdi (4.20) Lyapunov fonsiyonunun negatif tanımlı olduğunu gösteririz.

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= 2f(x)f'(x)\dot{x} + \lambda[f^2(x(t)) - f^2(x(t-\tau))] \\
&= 2f(x)f'(x)\big[-af\big(x(t)\big) + f\big(x(t-\tau)\big)\big] + \lambda f^2\big(x(t)\big) - \lambda f^2\big(x(t-\tau)\big) \\
&= -2af'(x)f^2(x) + 2f'(x)f(x)f\big(x(t-\tau)\big) + \lambda f^2\big(x(t)\big) \\
&\qquad - \lambda f^2\big(x(t-\tau)\big) \\
&\leq -2af'(x)f^2(x) + \lambda f^2(x) - \lambda f^2\big(x(t-\tau)\big) \\
&\qquad + \big|2f'(x)f(x)f\big(x(t-\tau)\big)\big| \\
&\leq -2af'(x)f^2(x) + \lambda f^2(x) - \lambda f^2\big(x(t-\tau)\big) + \lambda f^2(x) + \lambda f^2\big(x(t-\tau)\big) \\
&\leq (-2af'(x) + 2\lambda)f^2(x) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Lyapunov fonksiyonunun kendisi pozitif tanımlı türevi negatif tanımlı olduğundan Teorem 4.3 gereği (4.18) fraksiyonel denkleminin denge noktası asimptotik kararlıdır.

Örnek 4.1 ${}_{t_0}^{C}D_t\ x(t) = -2x(t) + x(t-\tau),\ \tau > 0$ fraksiyonel mertebeden diferansiyel denkleminin sıfır çözümü kararlı mıdır?

Çözüm: $f(x) = x$ ve $f(0) = 0$ ve $f^2(x) = x^2$ konveks bir fonksiyon olduğundan lyapunov fonksiyon olarak $V(x) = x^2 + \int_{t-\tau}^{t} x^2(s)\, ds$ alırız. Şimdi gösterelim ki Lyapunov fonksiyonun türevi negatif tanımlıdır.

$$\frac{dV}{dt} = 2x\dot{x} + x^2(t) - x^2(t-\tau)$$

$$= 2x[-2x(t) + x(t-\tau)] + x^2(t) - x^2(t-\tau)$$

$$= -4x^2(t) + 2x(t)x(t-\tau) + x^2(t) - x^2(t-\tau)$$

$$\leq -2x^2(t)$$

$$\leq 0$$

Bu da denge noktasının asimptotik kararlı olduğunu gösterir.

Örnek 4.2 ${}_{t_0}^{C}D_t\ x(t) = -a[2xarctanx - \ln(1+x^2) + 4x] + 2x(t-\tau)\text{arctan}(x-\tau) - \ln(1+x^2(t-\tau)) + 4x(t-\tau),\ \tau > 0$ fraksiyonel mertebeden diferansiyel denklemin sıfır çözümü kararlı mıdır?

Çözüm

$f(x) = 2xarctanx - \ln(1+x^2) + 4x,\ f(0) = 0$ ve $f'(x) = 2\text{arctanx} + 4$ olduğundan $4 - \pi < f'(x) < 4 + \pi$ olur böylece $\lambda = 4 + \pi$ ve $a = \frac{4+\pi}{4-\pi}$ seçeriz.

$$[f^2(x)]'' = 2[f'(x)]^2 + 2f''(x)f(x)$$

$$= 2(2arctanx + 4)^2 + \frac{4[2xarctanx - \ln(1+x^2) + 4x]}{1+x^2} > 0$$

olduğundan $f^2(x) = (2x.Arctanx - \ln(1+x^2) + 4x)^2$ konveks bir fonksiyon olur. Böylece Lyapunov fonksiyonunu

$$V(x) = f^2(x) + \lambda \int_{t-\tau}^{t} f^2\big(x(s)\big)\, ds$$

olarak seçersek Teorem 4.4 gereği $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Tamsayı mertebeden zaman gecikmeli

$$\dot{x} = f\big(x(t), x(t-\tau)\big) \quad \tau \in [0, +\infty) \tag{5.1}$$

diferansiyel denklem sisteminin denge noktasının kararlılığı için kullanılan uygun Lyapunov fonksiyonunun fraksiyonel mertebeden

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x = f\big(x(t), x(t-\tau)\big) \tag{5.2}$$

denklemi içinde kullanılabilir (Badri ve Tavazoei, 2019). Yazarın bu çalışmasını göz önüne alarak biz de belli bir fraksiyonel mertebeden bir diferansiyel denklem sisteminin denge noktasının asimptotik kararlılığı için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak yeter şartlar elde ettik ve iki örnekle destekledik.

5.2 Öneriler

Yapılan bu çalışmada kullanılan Lyapunov fonksiyonunun türevinin negatif tanımlı olduğunu göstermek için $V(x)$ konveks bir fonksiyon olmak üzere

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} V(x(t)) \leq \left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial(x(t))}\right)^T {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t)$$

eşitsizliği kullanılmıştır. Acaba bu konvekslik şartı olmadan yeterli şartlar elde edilebilir mi?

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P., Lakshmikantham, V., Nieto, J.J. 2010. On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72 (6), 2859-2862.

Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M.A., Gallegos, J.A. 2014. Lyapunov functions for fractional order systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19 (9), 2951-2957.

Ahmad, S., Rao, M.R.M. 1999. Theory of ordinary differential equations, With applications in biology and engineering. *Affiliated East-West Press Pvt. Ltd., New Delhi*.

Badri, V., Tavazoei, M.S. 2019. Stability analysis of fractional order time-delay systems: constructing new Lyapunov functions from those of integer order counterparts, *IET Control Theory & Applications*, 13 (15), 2476-2481.

Baleanu, D., Wu, G.C., Zeng, S.D. 2017. Chaos analysis and asymptotic stability of generalized Caputo fractional differential equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 102, 99-105.

Burton, T. 2011. Fractional differential equations and Lyapunov functionals, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74 (16), 5648-5662.

Burton, T.A., 2012, Liapunov theory for integral equations with singular kernels and fractional differential equations, *Northwest Research Institute*,

Caputo, M. 1969. Elasticitá e dissipazione (Elasticity and anelastic dissipation), *Zanichelli, Bologna*.

Chen, W., Dai, H., Song, Y., Zhang, Z. 2017. Convex Lyapunov functions for stability analysis of fractional order systems, *IET Control Theory & Applications*, 11 (7), 1070-1074.

Duarte-Mermoud, M.A., Aguila-Camacho, N., Gallegos, J.A., Castro-Linares, R. 2015. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22 (1-3), 650-659.

Gallegos, J.A., Duarte-Mermoud, M.A. 2016. On the Lyapunov theory for fractional order systems, *Applied Mathematics and Computation*, 287, 161-170.

Grunwald, A.K. 1867. Uber" begrente" Derivationen und deren Anwedung, *Zangew Math und Phys*, 12, 441-480.

Khalil, H.K., Grizzle, J.W., 2002, Nonlinear systems, *Prentice hall Upper Saddle River, NJ*,

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., 2006, Theory and applications of fractional differential equations, *elsevier*,

Krol, K. 2011. Asymptotic properties of fractional delay differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 218 (5), 1515-1532.

Lacroix, S.F., 1797, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, *JBM Duprat*,

Lakshmikantham, V. 2008. Theory of fractional functional differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69 (10), 3337-3343.

Lakshmikantham, V., Vatsala, A. 2008. Basic theory of fractional differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69 (8), 2677-2682.

Letnikov, A. 1868. Theory of differentiation of fractional order, Mat. Sb, 3 (1), 1868.

Liouville, J., 1835, Mémoire sur le changement de la variable indépendante, *dans le calcul des différentielles a indices quelconques*,

Liouville, J., 1832, Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, *et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions*, Liu, S., Jiang, W., Li, X., Zhou, X.-F. 2016. Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems, *Applied Mathematics Letters*, 51, 13-19.

Miller, K.S., Ross, B., 1993, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, *Wiley*,

Nishimoto, K., 1991, An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus in the 21st Century): Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, *Descartes Press Company*,

Podlubny, I., 1998, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, *Elsevier*,

Riemann, B. 1876. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, *Gesammelte Werke*, 62 (1876).

Riesz, M. 1949. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta mathematica*, 81, 1-222.

Wen, Y., Zhou, X.-F., Zhang, Z., Liu, S. 2015. Lyapunov method for nonlinear fractional differential systems with delay, *Nonlinear dynamics*, 82 (1-2), 1015-1025.

Weyl, H. 1917. Bemerkungen zum begriff des differentialquotienten gebrochener ordnung, Zürich. *Naturf. Ges*, 62, 296-302.

Yige, Z., Yuzhen, W., Zhi, L., 2015, Lyapunov function method for linear fractional order systems, *2015 34th Chinese Control Conference (CCC)*, *IEEE*, 1457-1461.

Yong, Z., Jinrong, W., Lu, Z., 2016, Basic theory of fractional differential equations, *World Scientific*,

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Aydın Çelik
Uyruğu	:	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Eruh 01/11/1979
Telefon	:	0 505 077 54 56
Faks	:	
e-mail	:	aydincelik@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Eruh Lisesi, Eruh, Siirt	1996
Üniversite	:	Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2001
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2001	**Milli Eğitim Bakanlığı**	**Öğretmen**

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR