KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# KUANTUM MEKANİĞİNDE KUAZİ-KLASİK YAKLAŞIM YÖNTEMİ

**Sevgül ÖZTÜRK**

**FİZİK ANABİLİM DALI**

**KASTAMONU**
**2011**

**Her hakkı saklıdır**

## TEZ ONAYI

**Sevgül ÖZTÜRK** tarafından hazırlanan "**Kuantum Mekaniğinde Kuazi-Klasik Yaklaşım Yöntemi**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Kastamonu Üniversitesi **Fizik** Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : **Prof. Dr. Ferhad NASİBOV**

Jüri Üyeleri:

**Prof. Dr. Ahmet KAÇAR**
Kastamonu Üniversitesi
Eğitim Fakültesi – Matematik Bölümü

**Prof. Dr. Ferhad NASİBOV**
Kastamonu Üniversitesi
Fen- Edebiyat Fakültesi - Fizik Bölümü

**Yrd. Doç. Dr. Şükrü ÇAVDAR**
Gazi Üniversitesi
Fen- Edebiyat Fakültesi - Fizik Bölümü

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Doç. Dr. Gürkan ÜNAL**

**Enstitü Müdürü**

## İÇİNDEKİLER

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $h$ | Planck sabiti |
| $\sigma(x)$ | $\leq 1$ dereceli polinom |
| $h(x)$ | ağırlık fonksiyonu |
| $\{\mathrm{P}_n(x)\}$ | ortogonal polinomlar sistemi |
| $\{\hat{\mathrm{P}}_n(x)\}$ | ortonormal polinomlar sistemi |
| $F_m(x)$ | $m < n$ dereceli polinom |
| $\mathrm{T}_n(x)$ | 1.nevi Tchebyshev polinomları |
| $U_n(x)$ | 2.nevi Tchebyshev polinomları |
| $\mathrm{P}_n(x)$ | Legendre polinomları |
| $\mathrm{P}_n(x;\alpha,\beta)$ | Jacobi polinomları |
| $\mathrm{H}_n(x)$ | Hermite polinomları |
| $L_n(x)$ | Tchebyshev-Laguerre polinomları |
| $\omega(\delta, f)$ | sürekilik modülü |
| $\rho(\mathrm{A},\mathrm{B})$ | metrik anlamda uzaklık |
| $\mathrm{E}_n(f)$ | en iyi yaklaşım ifadesi |
| $J_n(x)$ | 1. nevi Bessel fonksiyonu |

| **Kısaltmalar** | **Açıklama** |
|---|---|
| (o.n.s.) | ortonormal sistem |
| (o.s.) | ortogonal sistem |

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi
KUANTUM MEKANİĞİNDE KUAZİ-KLASİK
YAKLAŞIM YÖNTEMİ
Sevgül ÖZTÜRK

Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ferhad H. NASİBOV

Bu araştırmada klasik mekanik, kuantum mekaniği kavramlarına açıklık getirilmiş, bunların arasındaki ilişki araştırılmıştır. Kuantum mekaniğinde esas olan Schrödinger denklemi, onun birkaç özel halleri incelenmiştir. Böyle denklem çözümleri olan fonksiyonların argumentin büyük değerlerinde yaklaşık-asimptotik ifadelerin bulunması için kuazi-klasik yaklaşım yöntemi açıklanmıştır. Bu kuazi-klasik yaklaşım metodunda matematiksel problemlerden biri denklemin çözümü olan fonksiyonun yaklaşık ifadelerinin bulunmasıdır, zira bu fonksiyonların kesin bulunması birçok durumlarda mümkün olmamaktadır. Bunun için ise diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözüm metotlarından faydalanılır. Burada da çeşitli ortogonal polinomlar, bu tip polinomlar üzere Fourier serilerine açılım esas konu olur. Çalışmada bazı ortogonal polinomların önemli özelliklerine de yer verilmiştir. Yaklaşık metotlarda ortaya çıkan hataların değerlendirilmesi, yani asimptotik ifadelerin bulunması söz konusu yöntemin başlıca problemidir. Burada ise fonksiyonların en iyi yaklaşım teorisi çok önemli eşsiz bir katkısı olan teori olarak bilinmektedir. Bu çalışmada bu konuya verdiğimiz önem de bununla ilişkilidir.

**2011, 85 sayfa**



**Anahtar Kelimeler:** kuasi-klasik yaklaşım; WKB metot; klasik mekanik; kuantum mekaniği; Tchebyshev Polinomları

## ABSTRACT

Ph. D. Thesis

QUASI-CLASSICAL APPROXIMATION
METHOD İN QUANTUM MECHANİCS

Sevgül ÖZTÜRK

Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof.Dr. Ferhad H. NASİBOV

In this study clarified the terms of classical mechanics and quantum mechanics and investigated between of them relation. Equation of Schrödinger and its a few special cases investigated which is foundation in quantum mechanics. Quassi-classical approximation method is explained which argument of the functions of such large values of solutions of finding approximate-asymtotic expressions. İn quassi-classical approximation method is found approximate expression of the functions which is one of the mathematical problems that solution of the equation. But in many cases this is impossible that findig accurately the functions. For this purpose, from the approximation methods are utilazed. Here too various orthogonal polynomials, this type of polynomials is primitive subject that Fourier series expansions. And this study some important properties of orthogonal polynomials are also included. Finding asymtotic expressions are main problem of method which evaluated that to occur inaccurary in approximation methods. Here the theory of the best approach of functions are known that the theory is very important and unique contribution to them. Our commitment to this issue in this study are associated with it.

**Keywords:** Semi-classical approximations; quassi-classical approximations; WKB method; classical mechanics; quantum mechanics; Tchebyshev Polynomials

# TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımm her aşamasmda bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof Dr. Ferhad H. Nasibov'a , sayın hocam Prof Dr. Ahmet Kaçar'a ve sayın hocam Yrd. Do. Dr. Can Doğan Vurdu'ya ve çalışmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme en derin duygularımla teşekkür ederim. Sevgül ÖZTÜRK

Kastamonu, Ocak ,2011

## §1. GİRİŞ

Bizim günlük pratiğimizde rastladığımız uzay, Oklit uzayıdır; buna göre de onun yapısı Oklit geometrisine uygundur. Bizim çevremizde meydan gelen olayların hepsi Oklit uzayına ait edilmektedir. Fiziğin ve geometrinin inkişafı gösterdi ki, Oklit uzayı gerçek uzayın en kaba soyutlaşmasıdır.

Işık ve ışık olaylarının araştırılması elektrodinamiğe ve A. Einstein'in Görelilik (relativity) teorisine yol açmış oldu. Bunlar gösterdi ki, ışık ışınlarının hareket ettiği uzayın yapısı çok farklıdır, bu uzay zamana bağlıdır ve üçboyutlu Oklit geometrisi ile değil artık dört boyutlu, yani, gayri-Oklit geometrisi ile karakterize edilir.

Makro alemde uzay münasebetlerinin belirtilmesi için pratik (empirik) esaslandırma olarak katı cisimlerin ve ışık ışınlarının hareketi kullanılır. Buna göre uzayı tanımlamak için maddi obje ve onun hareketi veya objeler arasındaki ilişkilerin yapısı gerekmektedir. Bu gibi problemlerin incelenmesi bir problem olarak ortaya çıktı ve bununla ilgili gayri-Oklit geometrisi iddiasının etkisi altında non-Oklit uzaylarda hareketin mekaniğini belirlemek için birçok çalışmalar ortaya çıkmış oldu ( Tilli, Kotelnikov, vd.).

Bununla da klasik mekanikten farklı yeni bir mekanik teorisi şekillenmeye başladı.

Bu tipli geçişle ilgili karşıya çıkan soru şöyle ifade edilebilir: Oklit uzayından non-Oklit uzayına geçiş zamanı mekanik nasıl değişiyor?

Dolayısıyla, klasik mekanikten (19. yy.'da şekillenmiştir), kuantum mekaniğine (20. yy.'ın başlarında ortaya çıkmıştır) geçişlerde uzay kavramı nasıl değişir? Çağdaş kuantum mekaniği dalga mekaniğinin etkisi altında ortaya çıktı; yani Broglie- Schrödinger ' in dalga teorisinin Geyzenberg, Jordan ve Born 'un matris mekaniği ile birleşmesi ve inkişafı sürecinde yaratılmış oldu. Dalga mekaniği Hamilton'un optik-mekanik benzetmelerinden yola çıkarken kuantum mekaniğinin esas denklemi olan Schrödinger denklemini ortaya çıkardı.

Örneğin, hareketin diskrit olması şartı dahilinde klasik mekaniğin Hamilton-Jacobi matris mekaniği de klasik mekanikten çıkmıştır (Geyzenberg). Böylece klasik mekanik ile kuantum mekaniği arasında bir bağlantı (vereselik) olduğu açıklanmış olur.

1960 yılında P.A.M. Dirac 'Kuantum Mekaniğinin Prensipleri' adlı eserinde: 'Klasik mekaniğe kuantum mekaniğinin limit durumu olarak bakılabilir' yazmıştır.

Günümüzde kuantum mekaniğinin birkaç formal şekilde oluşumu bellidir. Fakat biz bu konulara girmekten vazgeçiyoruz, zira bu bizim konumuzdan farklıdır.

Biz, kuantum mekaniğinde rastlanan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleriyle bağlı 'kuazi-klasik yaklaşım' denilen konu ile ilgileniyoruz. Klasik fizik ile kuantum mekaniği arasında bir uygunluk problemleri araştırılırken

$$\left[k(x)y'\right]' + \lambda r(x)y = 0 \tag{1.1}$$

denkleminin çözümü için $\lambda \to +\infty$ iken düzgün (uniform) asimptotik ifadenin elde edilmesi problemi ortaya çıkmış oldu.

Böyle araştırma zamanında elde edilen denklemin çözümünün yaklaşık gösterimi kuazi-klasik yaklaşım olarak adlandırılır.

Bu tip araştırma ilk defa Wentzel, Kramers, Brillouin tarafından yapılmıştır. Daha sonra da Langer ve birçok başkaları tarafından geliştirilmiştir.

Belirtelim ki, (1.1) denkleminde bulunan $k(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları özel olarak seçilebilir. Bunları özel olarak seçmekle özel diferansiyel denklemler elde edilir ve bunların her biri ayrıca birçok matematikçi tarafından araştırılmıştır.

Ayrıca belirtelim ki, asimptotik ifadelerin bulunması $y(x)$ çözümünün herhangi $\{\varphi_k(x)\}$ sistemi üzere Fourier serisine açılımına dayanmaktadır, teorik esas olarak da fonksiyonların en iyi yaklaşım teorisi önemli şekilde uygulanmaktadır.

Biz bu çalışmamızda yalnızca matematiksel fiziğin en önemli özel fonksiyonlarından bir tanesi olan ve (1.1) denkleminin özel çözümlerinden olan birkaç ortogonal polinomlar, onların özellikleri, hangi diferansiyel denklemin çözümleri oldukları, bazılarının asimptotik ifadeleri, onlar esas alınarak düzenlenen Fourier serilerinin yakınsaklık problemleri, vb. ile uğraşırken, burada önemli yeri olan fonksiyonların en iyi yaklaşım teorisi üzerine de bazı önemli neticeleri hatırlatmak zorundayız.

Ayrıca belirtelim ki, P.L. Tchebyshev'in adı ile bilinen polinomlar üzerine bilgi vermeyi de amaçlıyoruz.

## §2. KURAMSAL BİLGİLER

### 2.1.KLASİK MEKANİK VE TARİHİ GELİŞİMİ

Bilindiği gibi, fizik problemleri en eski zamanlardan beri bilirkişileri düşündürmüş, çağımızda da düşündürmektedir.

En eski zamanlarda Aristo ile başlayan G. Galile ile devam ettirilen çalışmalar I. Newton tarafından mükemmel bir teori haline getirilmiştir.

Bu aşamada şekillenmiş olan fizik yasaları 'Klasik Mekanik' olarak bilinmektedir.

Burada, Galile'nin gösterdiği gibi, temel kavram 'hareket' kavramıdır. Aristo'ya göre 'hareket bir amaca ulaşmak' olarak tanımlanırken, Galile 'hareketi dış kuvvetlerin etkisi altında meydana çıkan bir olay ' olarak tanımlamıştır.

İlk çalışmalarında Galile anlamıştır ki, o ana kadar 'hareket' kavramının kendisi doğru dürüst hiç incelenmedi. Buna göre de Galile 'hareket'in kendisini araştırmaya başladı.

Fiziğin tarihsel gelişimi, doğa olayların sorgulanmaya başlaması, yani fiziğin doğuşu, ilk uygarlıkların ortaya çıkmasıyla birlikte oldu. Mezopotamya'da M.Ö. 3000'lerde, Sümer ve Akad uygarlıklarında su değirmenleri kullanılıyor, ağır heykeller dikiliyor, piramitler yapılıyor, zaman, uzaklık ve hız ölçümleri gerçekleştirilebiliyordu. M. Ö. 2500'den sonra Mısır'daki uygarlıklarda pratik olarak ağır basan mühendislik sorunlarının çözümünde fizik kurallarından yararlanmışlardı.

Ama bu pratik gereksinimlerden doğan tekniklerin ortak temellerini oluşturan ilkelerin aranışı, M.Ö. 6. ve 5. yy.'larda Ege kıyılarında yaşayan filozofların soyutlamalarla doğayı sorgulama yöntemlerinde ortaya çıktı. Bu dünya, kaostan nasıl doğdu? Çokluğun ve çeşitliliğin kökenleri nedir? Hareket ve değişim nasıl hesaplanabilir?

Bazı temel kabullerden mantıksal olarak sistematik fizik kuramları çıkarsamanın ilk örneği, Thales'in (M.Ö. 6. yy) suyu tüm varlıkların temel maddesi saymasıdır. Thales, iki temel kuvvet olarak, büzülmeye yol açan merkezcil kuvvet ile genişlemeye yol açan merkezkaç kuvveti tanımladı.

Fizik, olayları uzay ve zamana bağlı olarak inceler. Mekanik, elektrodinamik, akışkanlar mekaniği, vb. uygulamalarının sonuçları çoğu zaman vektör denklemleri şeklinde ifade edilirler. Bu vektörlerin türevleri ve integralleri de denklemlerde yer alır.

30 yıl kadar süren bir arayışın sonunda kuantum mekaniği denilen yeni bir bilim felsefesi doğdu. Kısaca tanımlamak gerekirse, kuantum mekaniği mikroskopik sistemleri (atom, çekirdek, vs) matematiksel nesneler (dalga fonksiyonları) cinsinden tanımlayan ve matematiksel nesneleri fiziksel içeriğe dönüştürmek üzere bir dizi kurallar veren bilimsel bir yöntemdir.

### 2.1.1.Kuantum Mekaniğinde Belirsizlik İlkesi

Atomik olguyu açıklamak için elektrodinamik ve klasik mekaniği uygulamaya çalıştığımızda, yapılan deneylere göre çelişkili sonuçlara neden olurlar. Yani, klasik olarak, yörüngelerde çekirdeğin etrafında hareket eden elektronları düşünürsek, bir model atoma elektrodinamiği uyguladığımızda elde edilen sonuçtan bu çelişki çok açık bir şekilde görülür. Böyle hareket boyunca elektronlar sürekli elektromanyetik dalgaları yayarlar. Bu emisyon ile elektronlar enerjilerini kaybederler ve sonuçta bu onların çekirdeğin içine düşmesine neden olur. Böylece, klasik elektrodinamiğe göre, atom kararsız olurdu. Bu hatalar atomik olgu için uygulanabilir teorinin yapısını, teori ve deney arasındaki çelişkiyi gösterir, yani, bu olgu çok küçük uzaklıklardaki çok küçük kütleli parçacıklarda meydana gelir. Yani, temel fizik kavram ve yasalarında temel değişiklik gerektirir.

Bu değişikliğin araştırılması için başlangıç noktası olarak, elektron kırınımı olarak bilinen deneysel olarak gözlemlenen olguyu almak uygun olur. Homojen elektron ışını bir kristal boyunca geçtiğinde, ortaya çıkan ışın demeti maximum ve minumum yoğunluklu bir desen sergiler. Bu tamamen elektromanyetik dalgaların kırınımında gözlenen kırınım desenine benzer. Böylece, bu durumda katı parçacıkların davranışı belirli koşullar altında, elektron-dalga sürecine ait olan özellikler gösterir.

Bu hareketin alışılagelmiş fikirleri arasındaki çelişki, kristalle elektron kırınımı deneyinden açıkça görülür. Elektronlar için iki yarıklı su geçirmez bir ekran düşünelim. Diğer yarık kapalı olmak üzere,  yarıklardan biri boyunca elektron ışınlarının geçişini gözleyerek, yarığın arkasındaki ekranda sürekli olarak yer alan, yoğunluk dağılımının bir kısım desenleri elde edilir; benzer şekilde birinci kapalı ikinci yarık açık olmak üzere diğer desen elde edilir. Yarığın her iki tarafındaki yol boyunca ışının geçişini gözlemleyerek, klasik fizik fikirlerinin temeline göre desenler: her elektron yarıkların biri boyunca geçen her elektron için desen elde edilir ve diğer yarık boyunca geçen elektronların etkisi yoktur. Elektron kırınımı deneyi gösterir ki, gerçekte kırınım deseni elde edilir, yani her iki yarık boyunca elde edilen desenin toplamı tümüyle yani tamamıyla ilgili değildir. Açık ki bu sonuç yarıklar boyunca hareket eden elektronların davranışlarıyla hiçbir şekilde uyuşmaz.

Böylece, mekanikler atomik olguyu temel olarak dalga mekaniği veya kuantum mekaniği ile açıklar. Yani klasik mekanikten farklı olan hareket fikirlerine dayalı olmalıdır. Kuantum mekaniğinde parçacığın yolu olarak böyle bir kavram yoktur. Kuantum mekaniğinin temel ilkelerinden bir tanesi olan ve belirsizlik ilkesi olarak isimlendirilen kavramın içeriğini oluşturan bu kavram ilk defa 1927 de W. Heisenberg tarafından keşfedilmiştir (Landau ve Lifshitz, 1958).

Bu belirsizlik ilkesinin olumsuzluk içerdiği söylenebilir, yani, klasik mekaniğin ilkelerini reddeder. Bu ilke parçacıkların yeni bir mekanik yapısı için temel olarak yeterli değildir. Doğal olarak böyle bir teori bazı olumlu iddialar üzerine kurulmuş olmalıdır. Bu iddiaları formüle etmek için, öncelikle kuantum mekaniğinde karşılaşılan problemlerin çözümünü belirlememiz gerekir. Bunu yapmak için öncelikle klasik mekanik ve kuantum mekaniği arasındaki karşılıklı ilişkinin özel doğasını incelemeliyiz. Daha genel bir teori genellikle eksiksiz bir şekilde formüle edilebilir, onun limit durumunda olan formu klasik mekanikten bağımsız değildir. Böylece, Newton mekaniği için herhangi bir referans olmadan relativistik mekaniği kendi temel ilkeleri temelinde oluşturulabilir. Ancak klasik mekaniği kullanmadan kuantum mekaniğinin temel kavramlarını formüle etmek mümkün değildir (elektronun hareketinin karakteristiği, kütle, yük gibi değil, bunlar parametrelerdir, bir parçacık olarak düşünülür). Dolayısıyla açıktır ki, kuantum mekaniğinde oluşan bir sistem için mekanik yapı klasik fiziğe göre tamamen farklıdır. Klasik mekanik elektronun hareketini fiziksel nesnelerle açıklama imkanını gerektirir. Eğer elektron böyle bir klasik nesne ile etkileşirse, o zaman elektronun durumu değişir. Bu değişimin büyüklük ve yapısı elektronun durumuna bağlıdır ve bu yüzden nicel olarak onun karakteristiği ile belirlenebilir.

Bu bağlamda klasik nesne genellikle işlemci olarak isimlendirilir ve elektron ile etkileşimi ölçüm olarak söylenir. Burada biz ölçümle kuantum mekaniğinde, elektronun dışında meydana gelen ve herhangi bir gözlemciden bağımsız, klasik ve kuantum nesneleri arasındaki herhangi bir etkileşim sürecini anlamalıyız. Kuantum mekaniğinde ölçüm kavramının önemi ilk defa N. Bohr tarafından aydınlatılmış oldu [Landau ve Lifshitz, 1958].

Klasik mekanikle yeterli doğrulukta çözülen işlemciyi fiziksel nesne olarak tanımladık. Örneğin, yeterince büyük kütle gibi. Ancak, o işlemci mutlaka makroskopik olarak farz edilmelidir. Belirli koşullar altında bu işlemcilerin bir kısmı (parçası) mikroskopik bir nesne tarafından alınabilir, çünkü yeterli doğrulukta önerilen asıl probleme bağlıdır. Böylece, Wilson odasındaki elektronun hareketi elektron yoğunluğu (bulutu) vasıtasıyla gözlenir ve elektronun hareketi, böyle düşük doğrulukta belirlendiği zaman elektron kesinlikle klasik nesne olarak düşünülür.

Böylece kuantum mekaniği, fizik teorileri arasında çok sıra dışı bir yere sahiptir: klasik mekaniği bir limit durumu olarak içerir, yani klasik fizik, kuantum mekaniğinde sınırlı olarak içerilir.

Anlaşılacağı üzere, makroevrensel ve mikroevrensel nesnelerin özelliklerini temsil eden matematiksel yapılarda önemli farklılıklar vardır. Makroevrensel nesnelerin bazı özelliklerinin eşzamanlı ölçümü herhangi bir ilke ile sınırlandırılmamıştır. Mikroevrensel nesnelerin ölçümünü yapmak deneysel açıdan mümkün olmasına karşın, makroevrensel ölçümlerde olduğu gibi, sonuçları kesin bir biçimde değerlendirmek mümkün değildir. Schrödinger denklemi ile mikroevrensel nesnelerin hali $\psi$ ile tanımlanır. Esasen, mikroevrensel nesnelerle ilgili tüm felsefi tartışmalar bu hal tanımlamasından doğar. Çünkü bunun neye karşılık geldiği tam açıklanamaz. Açıklanamayınca, makroevrensele yansıtması da yapılamaz.

Makroevrensel nesnelerin özellikleri hakkında yapılacak ölçümlerin bilgisi bir üst sınırla sınırlanmamıştır. Sonsuza kadar ölçüm yapabiliriz ve ölçüm yaptıkça da bir öncekinden daha kesin bilgiye ulaşırız. Buna karşın mikroevrensel nesnelerin deneysel bilgisi, Heisenberg'in belirsizlik bağıntısı nedeni ile bir üst değerle sınırlandırılmıştır. Ardışık ölçmelerin yapılması, deneye dayalı bilgiyi artırmak amaçlı olsa da, ters olarak bilgi eksilmesine yol açabilir.

Çeşitli ölçüm türleri arasında, ölçülen nesne temel bir rol oynar. Kuantum mekaniğinin uygulanabilirlik sınırları içinde, elektronun konumunun ölçümü her zaman istenen doğrulukla yapılabilir.

Varsayalım ki, $\Delta t$ belirli zaman aralıklarında, elektronun koordinatlarının ardışık ölçümü yapılmıştır. Sonuçlar genellikle düzgün bir eğri üzerinde doğru olur. Aksine, daha doğru yapılan ölçümler, olmayan bir elektronun hareketi varlığıyla daha kesintili ve düzensiz sonuçlarının değişimi olacaktır. Eğer elektronun koordinatları düşük doğrulukta ölçülürse oldukça düzgün bir elektron yoğunluğu elde edilir, örneğin Wilson odasındaki buhar damlacıklarının yoğunlaşması.

Eğer, ölçümlerin doğruluğunu değiştirmeden bırakırsak, ölçümler arasındaki $\Delta t$ aralıklarını azaltırız, sonra diğer (komşu) ölçümler, koordinatların komşu değerlerini verir. Ancak, ardışık bir dizi sonuçlar uzayın küçük bir bölgesinde olsa da, hiçbiri düzgün eğri olmayacak şekilde tamamen düzensiz bir şekilde bu bölgede dağıtılacaktır. Özellikle $\Delta t \to 0$ iken, komşu ölçüm sonuçları hiçbir şekilde düz bir çizgi üzerinde komşu ölçüm sonuçlarına bağlı değildir.

Bu durum kuantum mekaniğinde şunu gösterir: klasik anlamda parçacığın hız kavramı yoktur, bunlar arasındaki yani, bu koordinatların ard arda farkını sınırlamak için $\Delta t$ aralığına bölerek, $\Delta t \to 0$ şeklinde olur. Ancak kuantum mekaniğinde verilen bir anda parçacığın hızının makul bir tanımı yapılabilir ve bu hız klasik mekaniğe geçerken klasik hız olarak geçer. Ama klasik mekanikte parçacığın koordinatları vardır ve herhangi bir anda hız, kuantum mekaniği durumundakinden tamamen farklıdır. Eğer ölçüm sonucunda, elektron koordinatları kesin bulunabilirse onun kesin bir hızı vardır. Tersine, eğer elektronun hızı varsa, uzayda kesin bir durumu (pozisyonu) olamaz. Koordinatların ve hızın eşzamanlı varlığı için olmayan elektronun varlığı anlamına gelir. Böylece kuantum mekaniğinde elektronun koordinatları ve hızı aynı anda tam olarak ölçülemeyen niceliklerdir; örneğin, aynı anda kesin değerlere sahip olamazlar. Elektronun koordinatları ve hızı aynı anda var olamayan niceliklerdir diyebiliriz. Aynı anda hızın koordinatlarının hatalı ölçümünün olasılığını belirleyen nicelikler arasındaki bağıntıyı üretebiliriz.

Klasik mekanikte fiziksel bir sistemin durumunun tam açıklaması, belirli bir anda tüm hız ve koordinatları belirterek, bu ilk veri ile sonraki zamanlarda sistemin davranışını belirleyen tam hareket denklemleri ile verilir. Kuantum mekaniğinde böyle bir tanımlama ilke olarak mümkün değildir, çünkü koordinatlar ve hızlar eşzamanlı olamazlar. Böylece kuantum sisteminin durumunun açıklaması, klasik mekanikten daha küçük niceliklerle hesaplanır.

Kuantum mekaniğinde yapılan tahminlerin doğasından çok önemli bir sonuç elde edilir. Klasik tanımlama tam doğruluktaki mekanik sistemin gelecek hareketini tahmin etmek için yeterliyken, kuantum mekaniğinde yeterli olmayabilir. Bu demektir ki, kuantum mekaniğinde bir elektron en eksiksiz biçimde mümkün olduğunca açıklanan bir durumda olsa bile, diğer anlamda onun davranışı ilke olarak hala belirsizdir. Yani, kuantum mekaniği elektronun bir sonraki davranışlarıyla ilgili kesin tahminleri tam anlamıyla yapamaz. Başlangıçta verilen elektronun durumu için bir sonraki ölçümler değişik sonuçlar verebilir. Kuantum mekaniğinde, Bose-Einstein yoğunlaşması ile 107 atom içeren makroskopik üst üste binme durumları elde edilebilmiştir. Yani 107 atom aynı kuantum durumundadır. Hepsi bir ve tek davranırlar. Aynı bir dans grubundaki gibi tek davranış olur. Bireyselliklerini terk edip aynı olurlar. Anlaşıldığı üzere bazı durumlarda ölçüm sonucunu veren olasılık tektir, birdir.

Kuantum mekaniğinde tüm ölçüm işlemleri iki sınıfa ayrılabilir. Ölçümlerin çoğunluğunu içeren bir tanesinde, sistemin herhangi bir durumunda kesin olan, belirlenemeyen sonucun bulunmasıdır. Diğeri, sonucu kesin olan ölçümün mümkün olan her durumdaki ölçümlerini içerir. Bu son ölçümler, *tahmin edilebilir ölçümler* olarak isimlendirilir ve kuantum mekaniğinde önemli bir rol oynar. Bir durumun nicel özellikleri kuantum mekaniğinde fiziksel nicelikler olarak isimlendirilen ölçümlerle belirlenir. Eğer bazı durumlarda ölçüm kesin olan tek sonucu verirse, bu durumda fiziksel nicelikle ilgili olarak kesin değere sahip olduğunu söyleyebiliriz. Kuantum mekaniğindeki her bir fiziksel niceliğin hiçbiri ardarda ölçülemez, örneğin, aynı anda hepsi aynı değerlere sahip olabilir. Bahsetmiş olduğumuz elektronun koordinatları ve hızı, fiziksel niceliklerin özellikleri kuantum mekaniğinde önemli bir rol oynar: bu nicelikler ard arda ölçülebilir fakat bunlar ardı ardaysa kesin değerlere sahiptir, bu durumda diğer fiziksel nicelik (fonksiyon olmaksızın) tam değere sahip olabilir. Fiziksel niceliklerin böyle olmalarını *tam toplamları* olarak söyleyebiliriz; bazı durumlarda *tam toplamlar* sadece tek bir niceliği oluşturur. Elektronun herhangi bir durumdaki tanımı belli başlı bazı ölçüm sonucu olarak ortaya çıkar. Kuantum mekaniği durumunda tam tanımı formüle edebiliriz. Kesin olarak tanımlanan durumlar fiziksel niceliğin tam toplamının ardı ardına ölçümünün sonucu olarak meydana gelir. Böyle ölçümün sonuçlarından ilk ölçümden önceki elektronun durumlarıyla ilgili kısmen sonraki herhangi ölçümün çeşitli sonuçlarının olasılığı belirlenir. [Landau ve Lifshitz, 1958]

Kuantum mekaniğinde, makro-mikroevrenler arasında niceliksel ve niteliksel ‘geçiş’in sağlanabilmesi için karşıgelim ilkesi oluşturulmuştur. Mikroevrenden makroevrene geçiş için, kuantum etkilerinin yok olması ve Planck sabitinin sıfıra ($h \to 0$) gitmesi gerekir. Kuantum mekaniği, klasik fiziği bir limit durum olarak içeren daha genel bir mekanik teorisidir. Ancak, bunun kesin bir bakış açısı olmaması gerekir. Çünkü biliyoruz ki, aşırı iletkenler makroevrensel nesnelerdir ve Planck sabiti sıfıra gitmediği halde, kuantum etkisi ve işleyişi devam eder. Benzer bir geçiş örneği, Newton mekaniğinden görelilik mekaniğine geçiştir. Newton mekaniğinin küçük hızlar için geçerli olmasına karşın, görelilik teorisi ışık hızına yakın hızlarda geçerlidir. Bu iki teori birbirine ve kuantum mekaniğine, limit yöntemi ile bağlanabilir. [Brack ve Rajat K. Bhaduri , Semiclassical Physics]

### 2.1.2.Klasik Mekaniğin Limit Durumuna Geçiş

Kuantum mekaniği, klasik mekaniğin belirsiz limit durumunu kapsar. Bu limit durumuna geçiş nasıl sağlanır?

Kuantum mekaniğinde elektronun konumu dalga fonksiyonuyla tanımlanır; bu fonksiyon şimdiye kadar bildiğimiz lineer kısmi diferansiyel denklemin sadece kesin çözümüdür. Klasik mekanikte ise hareket denklemleriyle belirlenen elektronun hareketi, parçacığı materyal olarak gösterir. Burada karşılıklı bir bağıntı vardır; kuantum ve klasik mekaniğe benzer şekilde elektrodinamikte dalga optiği ve geometrik optik arasında da vardır. Dalga optiğinde, elektromanyetik dalgalar Maxwell denklemleri olarak isimlendirilen lineer diferansiyel denklemler şeklinde tanımlanan elektrik ve manyetik alan vektörleriyle tanımlanır. Geometrik optikte, ışık veya ışık ışınlarının tanımlanan sistemde o yol boyunca yayılması şeklinde düşünülür. Böyle durumlar bize klasik mekaniğin limit durumundan kuantum durumuna geçişe benzer şekilde geometrik optikten dalga optiğine geçiş meydana gelir. [Landau ve Lifshitz 1958].

Bu dönüşümün matematiksel olarak nasıl yapıldığını gösterelim. $u$-nun elektromanyetik dalgadaki herhangi bir alanın bileşeni olduğunu gösterelim. $u = ae^{i\varphi}$ şeklinde yazılabilir ($a$ ve $\varphi$ reel), burada $a$ yükseklik, $\varphi$ dalga durumudur. Geometrik optiğin sınır durumu küçük dalga uzunluklarına bağlıdır; burada matematiksel olarak $\varphi$ kısa dalga uzaklıkları boyunca büyük miktarlarla değiştiği şeklinde ifade edilir; bunun anlamı, o dalga uzaklıkları boyunca çok büyük tam değerler aldığı olarak düşünülebilir.

Benzer şekilde klasik mekaniğin sınır durumu olarak $a$ yavaşça değişen fonksiyon ve $\phi$ büyük değerler alan ve kuantum mekaniğinde var olan dalga fonksiyonları olmak üzere $\psi = ae^{i\phi}$ şeklinde gösterilir. Yani, burada değişken prensip olarak mekanikle belirlenebilir, mekanik sistemin hareketine göre bu değişken mümkün olan en az değer almalıdır (the principle of least action veya Hamilton Teoremi). Geometrik optikte ışık ışınının yolu ışının optik yol uzunlukları arasındaki fark yolun sonundaki ve başındaki durumları olarak belirtilir; yani, en az (veya en büyük) tam değerleri almalıdır. [Landau ve Lifshitz 1958].

Bu benzerliğin temelini, klasik mekaniğin sınır durumlarında dalga fonksiyonu $\phi$ nin durumu olarak değerlendirebiliriz. Fiziksel sistemin mekanik hareketi yani, $S = sabit \times \phi$ olmalıdır. Bu sabit Planck sabiti olarak isimlendirilir ve $\hbar$ ile gösterilir. Hareketin boyutu ($\phi$ boyutsuz olduğu için) ve son ölçümlere göre değeri,

$$\hbar = 1,054 \times 10^{-27} \text{ erg sec} \tag{2.1}$$

dir. Böylece, dalga fonksiyonunun ‘hemen hemen (yaklaşık) klasik (veya *kuazi klasik* ) olduğu söylenir; fiziksel sistem

$$\psi = ae^{iS/\hbar} \tag{2.2}$$

denklemiyle belirtilir. Planck sabiti $\hbar$¸ kuantumun olağanüstülüğünde temel bir rol oynar. Onun relative (göreceli) değeri (diğer niceliklerle benzer boyutları karşılaştırır) verilen fiziksel sistemin miktarını ölçmenin uzantısı şeklinde belirlenir. Klasik mekanikten kuantum mekaniğine geçiş, büyük durumlara bağlıdır, $\hbar \to 0$ şeklinde tanımlanabilir ($\lambda \to 0$, sıfır dalga uzunluğunun sınırına geçişle ilgili olarak geometrik optikten dalga optiğine geçişe benzer şekilde) [Landau ve Lifshitz 1958].

Dalga fonksiyonundan sınır durumuna geçişini belirttik, fakat klasik harekete nasıl bağlı olduğu sorusu hala kalır. Genelde dalga fonksiyonuyla tanımlanan hareket, tanımlanan fiziksel sistemdeki harekete bağlı değildir. Klasik hareketle bağlantılıdır, yani, anlık dalga fonksiyonu başlangıçta ve verilen koordinatların dağılım olasılığıyla birlikte bu dağılımdaki sonraki anlarda klasik mekaniğin kanunlarına göre değişecektir.

Tanımlanan sistemde hareketi elde etmek için ilk olarak uzayın çok küçük bölgesindeki sıfırdan farklı olan dalga fonksiyonundan başlamalıyız; bu bölgenin boyutları $\hbar$ ile birlikte sıfıra yaklaşır. Bu durumda bunun **kuazi-klasik** olduğunu söyleyebiliriz, dalga paketi parçacığın klasik yolu boyunca uzayda hareket edecektir.

Son olarak, kuantum mekanik operatörler fiziksel niceliğe bağlı olarak onunla çarpılarak sınır durumlarda azaltılmalıdır [Landau ve Lifshitz 1958].

## 2.2.KUAZİ-KLASİK DURUM

### 2.2.1.Kuazi-Klasik Durumundaki Dalga Fonksiyonu

Verilen problemin koşullarını belirleyen, parçacıkların Broglie dalga uzunlukları, karakteristiklerin boyutlarıyla karşılaştırıldığında eğer küçük ise, sistemin özellikleri klasik duruma yakın olurken; dalga uzunluğu sıfıra yaklaşırken dalga optiği geometrik optiğe geçer. [Brack ve K. Bhaduri]
Kuazi-klasik sistemlerin özelliklerini daha yakından inceleyelim. Bunu yapmak için

$$\sum_a \frac{\hbar^2}{2\mu_a}\Delta_a\psi + \left(E-U\right)\psi = 0 \tag{2.3}$$

Schrödinger denklemine bakalım. Burada

$$\psi = e^{(\xi/\hbar)\sigma}$$

ifadesini yerine koyarak $\sigma$ fonksiyonu için

$$\sum_a \frac{1}{2\mu_a}(\Delta_a \sigma)^2 - \sum_a \frac{i\hbar}{2\mu_a}\Delta_a \sigma = E - U \tag{2.4}$$

denklemi elde edilir. Sistemin özellikleri yaklaşık olarak klasik olduğu düşünüldüğü için $\sigma$ yı seriye açarsak

$$\sigma = \sigma_0 + (\hbar/i)\sigma_1 + (\hbar/i)^2 \sigma_2 + ... \tag{2.5}$$

yazılır ve $\hbar$ kuvvetinde genişlemiştir.

Bir parçacığın tek boyutlu hareketinin en basit durumu düşünerek başlayalım. Bu halde (2.4) denklemi

$$\sigma'^2 |2\mu - i\hbar\sigma''|2\mu = E - U(x) \tag{2.6}$$

denklemine indirgenir. Bu denklem, $x$ koordinatına bağlı fark başlangıcını belirtir.

İlk yaklaşımda $\sigma = \sigma_0$ yazılır ve $\hbar$ terimini denklemde ihmal edersek

$$\sigma'^2 |2\mu = E - U(x)$$

elde edilir. Böylece

$$\sigma_0 = \pm\int \sqrt{\{2\mu[E - U(x)]\}}dx$$

yazılır. İntegralde ifade edildiği gibi parçacığın $p(x)$ momentumu klasiktir. Değişkenin önündeki + işaretiyle ifade edilen $p(x)$ momentumu,

$$\sigma_0 = \pm\int pdx \ , \ p = \sqrt{[2\mu(E - U)]} \tag{2.7}$$

şeklindedir. Dalga fonksiyonu için (2.2) limit ifadesinde olduğu gibi bu sonuç görülmelidir. (2.6) denkleminde yapılan yaklaşım sol taraftaki ikinci terim birincisiyle karşılaştırıldığında küçükse kurallara uygundur. Yani

$$\hbar|\sigma''|\sigma'^2 \ll 1 \qquad \text{veya} \qquad |d(\hbar/\sigma')/dx| \ll 1$$

olmalıdır. (2.7) e göre ilk yaklaşımda , $\sigma' = p$ dır, çünkü kurala göre elde edilen denklem

$$|d(\lambda/2\pi)/dx| \ll 1 \tag{2.8}$$

gibi yazılabilir. Burada $\lambda(x) = 2\pi\hbar/p(x)$ parçacığın Broglie dalga uzunluğudur, $x$ -in bir fonksiyonu olarak $p(x)$ klasik fonksiyonuyla ifade edilir. Böylece elde edilen ‘kuazi-klasik’ şartı: parçacığın dalga boyu uzaklıkları kendisine çok yakın olmalıdır. Türetilen formül bu şarta uymayan uzay bölgelerinde uygulanmaz.

(2.8) şartı

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{\left[2\mu\left(E-U\right)\right]} = -\frac{\mu}{p}\frac{dU}{dx} = \frac{\mu F}{p}$$

formunda da yazılabilir. Burada $F = -dU/dx$ parçacığa dışarıdan uygulanan klasik kuvvettir. Bu kuvvetin terimlerinde

$$\mu\hbar F/p^3 \ll 1 \tag{2.9}$$

olmalıdır. Buradan görüldüğü gibi, kuazi-klasik yaklaşım parçacığın momentumu çok küçükse uygulanamaz. Özellikle, bu uygulanamayan dönüş noktaları, mesela parçacığa yakın yerler, klasik mekaniğe göre parçacık durabilir ve zıt yönde hareket etmeye başlar. Bu noktalar $p(x) = 0$ denklemiyle verilir, örneğin $E = U(x)$ olduğu durum. Aslında $p \to 0$ iken Broglie dalga boyu sonsuza gider ve küçük olamaz.

(2.5) ifadesindeki sonraki terimi hesaplayalım. (2.6) denklemindeki $\hbar$ terimlerinin ilk sırası

$$\sigma_0'\sigma_1' + \frac{1}{2}\sigma_0'' = 0$$

denklemini verir. Buradan denklemin

$$\sigma' = -\sigma_0''/2\sigma_0' = -p'/2p$$

ifadeleri ve integralleyerek integrasyon sabiti ihmal edilerek

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}\log p \tag{2.10}$$

elde edilir. (2.3) ve (2.5) ifadesinde yerine koyarak aşağıdaki dalga fonksiyonu bulunur

$$\psi = C_1 p^{-\frac{1}{2}} e^{(i/\hbar)\int p dx} + C_2 p^{-\frac{1}{2}} e^{-(i/\hbar)\int p dx} \tag{2.11}$$

(2.5) ifadesinde terimleri yerine koymak $\hbar$ kuvvetlerinin daha yüksek ve ilk terimleri ile ve üssel katsayıların elde edilmesini sağlar; bu terimleri hesaplamak için bu her zaman gerekli değildir.

Dalga fonksiyonundaki $1/\sqrt{p}$ çarpanının bulunması sadece yorumdur. x ve $x+dx$ arasındaki noktada parçacığın bulunma olasılığı $|\psi|^2$ ile verilir. Bu, parçacığın kesinlikle 'kuazi-klasik' olduğunu söyler, çünkü klasik harekette dx parçasındaki parçacığın geçen zamanı parçacığın (veya momentumun) hızına ters orantılıdır.

Uzayda, klasik kurallara uymayan $E<U(x)$ durumuna göre, üsler reel olduğu için $p(x)$ sanaldır. Bu bölgede dalga fonksiyonu

$$\psi=\frac{C_1'}{\sqrt{|p|}}e^{-(1/\hbar)\int|p|dx}+\frac{C_2'}{\sqrt{|p|}}e^{(1/\hbar)\int|p|dx} \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir. [Landau ve Lifshitz 1958].

## 2.3.GENEL ORTOGONAL POLİNOMLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ

### 2.3.1. Varlık Teoremi ve Ortogonallik

$h(x)$ fonksiyonu, $(0,\infty)$ aralığında tanımlı ve $h(x)\geq 0$ olmasının yanı sıra

$$0<\int_a^b h(x)dx<\infty \tag{2.13}$$

şartını da sağlıyorsa, sonlu $(a,b)$ aralığında *ağırlık foksiyonu* olarak adlandırılır.

$(a,b)$ aralığının sonsuz olması durumunda ise $h(x)$ fonksiyonunun kuvvet momenti diye adlandırılan

$$h_n=\int_a^b x^n h(x)dx\,,\quad n=0,1,2,... \tag{2.14}$$

integrallerinin mutlak yakınsak olması gerekir.

$n$ derecesine sahip olan $P_n(x)$ polinomlarının

$$P_0(x),P_1(x),\ P_2(x),\ldots,P_n(x),\ldots, \tag{2.15}$$

dizisinin önceden verilmiş olduğunu düşünelim., Bu sistemden herhangi iki polinom için,

$$\left(\mathrm{P}_n,\mathrm{P}_m\right)=\int_a^b h(x)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_m(x)dx=0, \quad n\neq m$$

şartı sağlanıyorsa, o zaman (2.15) deki polinomlara $(a,b)$ aralığında $h(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal (dik) polinomlar denir. Bununla birlikte, $(a,b)$ aralığı *ortogonallik aralığıdır,* ancak $a$ ve $b$ sayılarının sınırlı olması durumunda, ortogonallik aralığı $[a,b]$ olur. Yüksek (baş) terim katsayısı pozitif olan $\mathrm{P}_n(x)$ ortogonal polinomları

$$\|\mathrm{P}_n\|=\left[\int_a^b h(x)\mathrm{P}^2{}_n(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}=1$$

şartını da sağladığında ortonormal polinomlar diye adlandırılır. Böylece, (2.15) polinomlar sisteminin ortonormallik şartı aşağıdaki gibidir:

$$\left(\mathrm{P}_n,\mathrm{P}_m\right)=\int_a^b h(x)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_m(x)dx=\delta_{nm}=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases} \tag{2.16}$$

Bu durumda da $\left(x^k,x^m\right)=h_{k+m}$ olur.

Ortonormal polinomlar $\left\{\hat{\mathrm{P}}_n(x)\right\}$ şeklinde gösterilir ve (2.15) deki polinomlar özel olarak sırasıyla

$$\hat{\mathrm{P}}_0(x),\ \hat{\mathrm{P}}_1(x),\ \hat{\mathrm{P}}_2(x),\ldots,\ \hat{\mathrm{P}}_n(x),\ldots$$

şeklinde gösterilir.

$h(x)$ ağırlık fonksiyonu fonksiyonunun, $(a,b)$ aralığında, sonlu sayıda noktalar hariç sürekli olması, müstesna noktaların etrafında ise sınırlı olmaları düşünülür. $h(x)$ fonksiyonu sonlu sayıda noktalarda veya ortogonallik aralığı dahilinde yerleşen bazı parçalarda sıfır olabilir. $(a,b)$ aralığında $h(x)$ fonksiyonunun sürekli ve pozitif olduğu noktalar ağırlık fonksiyonunun *reguler noktaları* olarak adlandırılır. Diğer tüm noktalar ve özellikle de $h(x)$ fonksiyonunun sıfır noktaları *kritik noktalar* olarak adlandırılır. Tabii ortogonallik aralığının uçları her zaman kritik noktalardır.

İspata girmeden, yalnızca verilmiş $h(x)$ ağırlık fonksiyonuna uygun ortonormal (veya ortogonal) polinomların varlık teoremini vermekle yetinelim:

Teorem 2.3.1. Her bir $h(x)$ ağırlık fonksiyonu için yüksek katsayısı (baş katsayısı) pozitif olan ve (2.16) ortonormlaştırma şartını sağlayan tek bir $\{P_n(x)\}$ dizisi vardır.

Teorem 2.3.2. $n$ dereceli $P_n(x)$ polinomunun $h(x)$ ağırlık fonksiyonuyla ortogonal polinom olması için her bir $m(<n)$ dereceli $Q_m(x)$ polinomu için

$$\int_a^b h(x)P_n(x)Q_m(x)dx = 0, \quad m<n \tag{2.17}$$

şartının sağlanması gerekli ve yeterlidir.

Teorem 2.3.3 Ortogonallik aralığının koordinatların başlangıcına göre simetrik olması ve $h(x)$ ağırlık fonksiyonunun çift sayı olması durumunda, her bir $P_n(x)$ ortogonal polinomu sadece $n$ numarasıyla aynı eşitliğe sahip olan $x$ derecelerini içerir. Yani

$$P_n(-x) \equiv (-1)^n P_n(x) \tag{2.18}$$

eşitliği olur.

İspat: $h(-x) \equiv h(x)$ olduğunu ve $a>0$ olduğu $(-a,a)$ aralığında $P_n(x)$in ortogonal olduğunu varsayalım. O zaman Teorem 2.3.2. gereği

$$\int_{-a}^{a} h(x)P_n(x)F_m(x)dx = 0, \; m = 0,1,\ldots,n-1$$

şartlarının sağlanması gerekli ve yeterlidir, $F_m(x)$ ise derecesi $m(<n)$ olan herhangi polinomdur. Burada, $x=-t$ değişken değiştirmesi yaparsak bu eşitliklerden

$$\int_{-a}^{a} h(t)P_n(-t)F_m(-t)dt = 0$$

elde edilir.

$F_m(x)$ polinomu keyfi olduğundan, $F_m(-t)$ polinomu da $m$ dereceli keyfi bir polinomdur. Bundan dolayı, yine Teorem 2.3.2 ye göre, $\mathrm{P}_n(-t)$ polinomu ortogonaldir ve $\mathrm{P}_n(t)$ polinomundan sadece sabit çarpan ile farklı olabilir, yani, $\mathrm{P}_n(-t) \equiv c\mathrm{P}_n(t)$ dir. Ancak ortonormlaştırılmış polinomları inceleyecek olursak, $|c|=1$ şartını elde ederiz. Bu iki polinomun yüksek katsayılarını karşılaştırsak $c=(-1)^n$ olduğunu buluruz.

Bu özdeşlik $\mathrm{P}_n(x)$ polinomunun, $n$ in çift veya tek sayı olmasına bağlı olarak $x$ in sadece çift veya tek kuvvetlerini içerdiği anlamına gelmektedir.

Teorem 2.3.3 de ispatlanmıştır.

Böylece, varlık ve teklik teoremine göre (Teorem2.3.1**)**, (2.16) şartını sağlayan ortonormlaştırılmış polinomlar sistemi $\{\mathrm{P}_n(x)\}$, her bir $h(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre tek olarak belirlenir.

### 2.3.2. Ortogonal Polinomların Cebirsel Özellikleri

Ortonormal polinomların temel cebirsel özelliklerini inceleyelim.

Teorem 2.3.4 $\{\mathrm{P}_k(x)\}$ ortonormal polinomlar sistemi için

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_k(t) = \lambda_n \frac{\mathrm{P}_{n+1}(x)\mathrm{P}_n(t) - \mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_{n+1}(t)}{x-t} \tag{2.19}$$

Christoffel-Darboux formülü doğrudur.

İspat: Ortonormal polinomlar sistemi için

$\lambda_n \mathrm{P}_{n+1}(x) = (x-a_n)\mathrm{P}_n(x) - \lambda_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}(x)$

indirgeme formülü sağlanır. Bunun da her tarafını $\mathrm{P}_n(t)$ ile çarparsak,

$$\lambda_n \mathrm{P}_{n+1}(x)\mathrm{P}_n(t) = (x-a_n)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_n(t) - \lambda_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}(x)\mathrm{P}_n(t) \tag{$\alpha$}$$

elde ederiz. Burada da $x$ ve $t$ nin yerlerini değiştirirsek,

$$\lambda_n \mathrm{P}_{n+1}(t)\mathrm{P}_n(x) = (t-a_n)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_n(t) - \lambda_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}(t)\mathrm{P}_n(x) \tag{$\beta$}$$

bulunur.

($\alpha$) ve ($\beta$) eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak:

$$(x-t)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_n(t)=\lambda_n\left[\mathrm{P}_{n+1}(x)\mathrm{P}_n(t)-\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_{n+1}(t)\right]-$$

$$-\lambda_{n-1}\left[\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_{n-1}(t)-\mathrm{P}_{n-1}(x)\mathrm{P}_n(t)\right]$$

formülüne ulaşırız. Bu denklemleri $n,n-1,n-2,...,2,1$ numaraları için yazıp da, sonra hepsini terim terime toplayarak sonuca

$$(x-t)\mathrm{P}_0(x)\mathrm{P}_0(t)=\mu_0^2(x-t)=\lambda_0\left[\mathrm{P}_1(x)\mathrm{P}_0(t)-\mathrm{P}_1(t)\mathrm{P}_0(x)\right]$$

denklemini de ekleyerek (2.19) denklemini elde ederiz. Böylece teorem 2.3.4 ispatlanmıştır.

Şimdi denklem (2.14) ile belirlenmiş olan ve $\{h_m\}$ ağırlık fonksiyonu vasıtasıyla ortonormlaştırılmış polinomları belirleyen formülü sonuç olarak ortaya çıkaralım. Bu amaçla Gram determinantı diye adlandırılan

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}(1,1) & (1,x) & (1,x^2) & ... & (1,x^n)\\ (x,1) & (x,x) & (x,x^2) & ... & (x,x^n)\\ (x^2,1) & (x^2,x) & (x^2,x^2) & ... & (x^2,x^n)\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ (x^n,1) & (x^n,x) & (x^n,x^2) & ... & (x^n,x^n)\end{vmatrix}$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}h_0 & h_1 & h_2 & ... & h_n\\ h_1 & h_2 & h_3 & ... & h_{n+1}\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ h_n & h_{n+1} & h_{n+2} & ... & h_{2n}\end{vmatrix} \qquad (2.20)$$

determinantını inceleyelim. Bu determinantın sıfırdan farklı olduğunu ispatlayalım. Tersine, $\Delta_n=0$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned}&h_0b_0+h_1b_1+...+h_nb_n=0\\ &h_1b_0+h_2b_1+...+h_{n+1}b_n=0\\ &......................................\\ &h_nb_0+h_{n+1}b_1+...+h_{2n}b_n=0\end{aligned} \qquad (2.21)$$

doğrusal (lineer) homojen denklemler sisteminin en azından aşikâr olmayan bir çözümü mevcuttur, yani sıfırdan farklı olan en az bir tane sıfırdan farklı sayı içeren ve sistem (2.21)'in çözümü olan $\{b_k\}_0^n$ sayılar sistemi mevcuttur. Bu sayılar için formül (2.14)'ün yardımıyla (2.21) sistemi

$$\int_a^b h(x)\left(b_0+b_1x+...+b_nx^n\right)dx=0$$

$$\int_a^b h(x)\left(b_0+b_1x+...+b_nx^n\right)xdx=0$$

.......................................................

$$\int_a^b h(x)\left(b_0+b_1x+...+b_nx^n\right)x^ndx=0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemlerden birincisini $b_0$ ile çarpalım, ikincisini $b_1$ ile çarpalım, sonuncusunu da $b_n$ ile çarpalım ve terim terime toplayalım. Sonuç olarak

$$\int_a^b h(x)\left(b_0+b_1x+...+b_nx^n\right)^2 dx=0$$

denklemini elde ederiz. Ancak bu mümkün değildir, çünkü burada $\{b_k\}$ sayılarından en az bir tanesi sıfırdan farklıdır. Bu şekilde $\Delta\neq 0$, yani Gramm determinantı her $n$ için sıfırdan farklıdır sonucu ortaya çıkar.

Teorem 2.3.5 $n\geq 1$ halinde ortonormal polinomlar

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}\begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & ... & h_n \\ h_1 & h_2 & h_3 & ... & h_{n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & ... & h_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & ... & x^n \end{vmatrix} \tag{2.22}$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: Aşağıdaki polinomu inceleyelim:

$$Q_n(x)=\begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & ... & h_n \\ h_1 & h_2 & h_3 & ... & h_{n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & ... & h_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & ... & x^n \end{vmatrix} \tag{2.23}$$

Bu polinomun $(a,b)$ aralığında $h(x)$ ağırlık fonksiyonuyla ortogonal olduğunu ispatlayalım. (2.23) in her tarafını $h(x)x^k\ (0\le k\le n-1)$ ile çarpar ve $(a,b)$ aralığında integralini alırsak, sağ tarafta aynı 2 satıra sahip determinant elde edilir, böyle determinantlar ise sıfıra eşit olur. Dolayısıyla

$$\int_a^b h(x)x^k Q_n(x)dx=0,\ (k=0,1,2,...,n-1)$$

olur. Bu eşitliklerden de

$$\int_a^b h(x)Q_n(x)F_m(x)dx=0,\ m<n$$

şartını elde etmek zor değildir. Burada, $F_m(x)$, $m(<n)$ dereceli keyfi bir polinomdur. Bu şarttan ise Teorem 2.3.2.'ye göre, $Q_n(x)$ in sabit çarpanı ile $\mathrm{P}_n(x)$ ortogonal polinomundan farklı olabileceği sonucunu çıkarırız.

Bu polinomun normunu hesaplayalım. Bunun için ortogonallik şartı ve denklem (2.23) den yararlanarak,

$$\|Q_n\|^2=\int_a^b h(x)Q_n^2(x)dx=\int_a^b h(x)Q_n(x)\left[\Delta_{n-1}x^n\right]dx$$

$$=\Delta_{n-1}\int_a^b h(x)Q_n(x)x^n dx=\Delta_{n-1}\Delta_n>0$$

sonucuna ulaşırız.

$\Delta_0=h_0>0$ olduğundan dolayı, $\Delta_n>0$ olduğu sonucuna varırız.

Ortonormal polinom $\mathrm{P}_n(x)$ i elde etmek için $Q_n(x)$ polinomunun $\|Q_n\|$ normuna bölünmesi gerekir. Bu şekilde denklem (2.22) gerçekten de doğrudur ve teorem 2.3.5 ispatlanmıştır.

Denklem (2.22)'den, $\mathrm{P}_n(x)$ ortonormlaştırılmış polinomunun baş katsayısı $\mu_n$ için

$$\mu_n=\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}} \tag{2.24}$$

formülü geçerlidir, ve bu formül yardımıyla $\lambda_n$ katsayısı

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}\Delta_{n+1}}{\Delta_n}} \tag{2.25}$$

formülünden bulunur. $\Delta_{-1} = 1$ tanımına göre (2.24) ve (2.25) formüllerinin $n = 0$ durumunu da düşünebiliriz. (2.22) yerine $\Delta_0 = h_0$ yazarak buna göre normlaştırma şartı (2.16)'dan

$$\mathrm{P}_0(x) = \mu_0 = \frac{1}{\sqrt{\Delta_0}}$$

sonucu çıkarılır.

### 2.3.3 Ortogonal Polinomlar Üzere Fourier Serileri

$f(x)$ fonksiyonu $(a,b)$ aralığında belirlenmiş ve karesi $h(x)$ ağırlık fonksiyonuyla integrallenebilir olsun. Genellikle bu tür fonksiyonlar uzayı $L_2[a,b;h(x)]$ olarak veya bazen de kısaca $L_2$ olarak gösterilir. Her bir $L_2[a,b;h(x)]$ uzayındaki $f(x)$ fonksiyonuna uygun olan

$$\|f\| = \left[\int_a^b h(x) f^2(x)dx\right]^{1/2} \tag{2.26}$$

ağırlık normu konulur. $L_2[a,b;h(x)]$ uzayından olan her bir fonksiyon için

$$a_n = \int_a^b h(t) f(t)\mathrm{P}_n(t)dt \qquad (n = 0,1,2,...) \tag{2.27}$$

Fourier katsayıları belirlenebilir. Seri, ortonormal polinomlara göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{P}_n(x) \tag{2.28}$$

Fourier serisi düzenlenebilir.

Tüm ortogonal dizilerde olduğu gibi, (2.28) dizisinin kısmi toplamları da

$$L_2 = L_2[a,b;h(x)]$$

uzayı metriğinde $f(x)$ fonksiyonunun en iyi yaklaşımı veren polinomlardır.

Gerçekten, $n$ dereceli keyfi

$$Q_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) \tag{2.29}$$

polinom için

$$\begin{aligned}
\| f - Q_n \|^2 &= \int_a^b h(x) \left[ f(x) - Q_n(x) \right]^2 dx = \\
&= \int_a^b h(x) \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x) \right] \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x) \right] dx = \\
&= \| f \|^2 - 2 \sum_{k}^{n} c_k a_k + \sum_{k=0}^{n} c_k^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k}^{n} (c_k - a_k)^2 \geq \\
&\geq \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2
\end{aligned} \tag{2.30}$$

geçerlidir. Özel halde (2.28) serisinin

$$s_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x) \tag{2.31}$$

kısmi toplamları için

$$\| f - s_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \tag{2.32}$$

eşitliği elde edilir. Sonuçta, (2.30)'a göre

$$\| f - s_n \| \leq \| f - Q_n \| \tag{2.33}$$

bulunur. Dolayısıyla derecesi $\leq n$ olan polinomlar arasında (2.31) kısmi toplamları $L_2$ metriğinde $f(x)$–e en iyi yaklaşım veren polinomdur denilebilir.

(2.32) nin sol tarafı pozitif olduğuna göre, sağ tarafı da negatif olamaz, yani

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leq \| f \|^2 \tag{2.34}$$

eşitsizliği sağlanır ki, buna da Bessel eşitsizliği denir. Bu eşitsizlikten

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \tag{2.35}$$

sonucunu elde ederiz. Zira, sağ taraf $n$-e bağlı değildir, sol tarafta ise $n$ keyfidir. O halde

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \leq \| f \|^2$$

yazılabilir. Yani, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$ serisi yakınsaktır. O yüzden de (2.35) sağlanır.

Şimdi de ortogonallik aralığının farklı bir noktasında (2.28) dizisinin $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşması şartlarını inceleyelim.

$$\mathrm{K}_n(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_k(t) \tag{2.36}$$

sembolünü kabul edersek (2.31) kısmi toplamları

$$s_n(x,f)=\int_a^b h(t)f(t)\mathrm{K}_n(x,t)dt \tag{2.37}$$

şekline dönüşür. Buradan görülüyor ki, $f(x)=1$ olursa, $S_n(x,t)=1$ olacağından

$$\int_a^b h(t)\left[\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_k(t)\right]dt=1$$

özdeşliği de sağlanır ve bunun her tarafını $f(x)$ ile çarparak ve (2.37) yi çıkararak

$$f(x)-s_n(x,f)=\int_a^b h(t)\left[f(x)-f(t)\right]\mathrm{K}_n(x,t)dt \tag{2.38}$$

özdeşliğini elde ederiz. (2.36) toplamının (2.19) Christoffel-Darboux formülünü kullanarak bu özdeşliği

$$f(x)-s_n(x,f)=$$

$$=\lambda_n\int_a^b h(t)\left[\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\right]\left[\mathrm{P}_{n+1}(x)\mathrm{P}_n(t)-\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_{n+1}(t)\right]dt \tag{2.39}$$

şeklinde de yazabiliriz. Bu ifadeyi kısaltmak için:

$$\varphi_x(t)=\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\ ,\ t\in[a,b] \tag{2.40}$$

kabul edersek ve $\{a_n(\varphi_x(t))\}$ ların $\varphi_x(t)$ nin Fourier katsayıları olduğunu kabul edersek (2.39) a göre

$$f(x)-s_n(x,f)=\lambda_n\left[a_n(\varphi_x)\mathrm{P}_{n+1}(x)-a_{n+1}(\varphi_x)\mathrm{P}_n(x)\right] \tag{2.41}$$

formülü elde edilir. Bu formül yardımıyla Fourier dizilerinin bir noktada ortogonal polinomlarla yaklaşımının yeterli şartlarını söyleyebiliriz.

Teorem 2.3.6 $[a,b]$ aralığı sonlu olmakla $\varphi_x(t)$ fonksiyonunun fiks edilmiş (sabitleştirilmiş) $x \in [a,b]$ noktasında $t$-nin bir fonksiyonu olarak $\varphi_x(t) \in L_2 = L_2[a,b;h(t)]$ olması ve $\{P_n(x)\}$ ortonormlaştırılmış polinomları ise $x$ noktasında sınırlı ise bu durumda $f(x)$ in $\{P_n(x)\}$ sistemi üzere Fourier serisi $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar. Yani

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad x \in [a,b] \tag{2.42}$$

yazılır. Amacımızdan fazla uzaklaşmamak için, bu temel teoremin ispatını vermiyoruz.

Yalnızca onu belirtelim ki, özel olarak, bu $f(t)$ fonksiyonu $x$ noktasının herhangi bir komşuluğunda (etrafında) $\alpha = 1$ hali için Lipschitz'in şartını sağlarsa, yani

$$|f(x) - f(t)| \leq M_1 |x - t|, \quad t \in (x - \delta, x + \delta) \tag{2.43}$$

olursa, Teorem 2.3.6 geçerli olur.

$h(t)$ ağırlık fonksiyonunun $x$ noktasının herhangi bir komşuluğunda sınırlı olması, $f(t)$ fonksiyonunun ise $x$ -in aynı komşuluğunda (2.43) yerine Lipschitz'in $\alpha > 1/2$ şartını sağlaması durumunda, yani

$$|f(x) - f(t)| \leq M_1 |x - t|^{\alpha}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \quad t \in (x - \delta, x + \delta) \tag{2.44}$$

olması halinde,

$$\int_a^b h(t) \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right|^2 dt$$

integrali has olmayan integraldir denir. $|P_n(x)| \leq M, \quad (x \in [a,b])$ eşitsizliğine gelince, onun sağlanması $h(t)$ ağırlık fonksiyonunun $x$ noktası etrafında sahip olduğu özelliklere bağlıdır.

Teorem 2.3.6 ve (2.43) ve (2.44) eşitsizlikleri ile karakterize edilen özel durumların incelenmesi, bazı genel şartlarda ortogonal polinomlarla Fourier serisinin $x$ noktasında yaklaşmasının, sadece $f(x)$ fonksiyonunun bu nokta komşuluğunda özelliklerine bağlı olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, Teorem 2.3.6 dan sonuç şeklinde ortaya çıkan yakınsama şartlarını lokalize prensibi olarak ifade edebiliriz.

Teorem 2.3.7 $L_2[a,b;h(x)]$ uzayından iki fonksiyon olan $f(x)$ ve $g(x)$ nin $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ aralığında çakışması halinde ve $x$ noktasında ortonormlaştırılmış polinomlar sınırlı olursa, $f(x)$ ve $g(x)$ nin Fourier dizileri aynı zamanda yakınsak veya ıraksak olurlar.

İspat: Bu iki fonksiyonunun kısmi toplamlarının farkı için (2.27) ve (2.31)'e göre

$$s_n(x_0, f) - s_n(x_0, g) = s_n(x_0, f-g) \tag{2.45}$$

formülü yazılır. $f(x)-g(x)$ fonksiyonu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ aralığında sıfır olduğundan dolayı, onun ortogonal polinomlar üzere Fourier serisi $x_0$ noktasında ona yaklaşır. (2.45) den

$$\lim_{n\to\infty}\left[s_n(x_0, f) - s_n(x_0, g)\right] = 0$$

sonucu çıkar ve bu şekilde $\{s_n(x_0, f)\}$ dizisinin herhangi bir limite yaklaşması durumunda, $\{s_n(x_0, g)\}$ dizisi de aynı limite yaklaşır. Birinci dizinin ıraksak olması halinde, ikinci dizi de ıraksak olur. Böylece Teorem 2.3.7 ispatlanmıştır.

Bundan önceki tüm sonuçlar, $f(x)$ fonksiyonunun $L_2[a,b;h(x)]$ uzayına dahil olması şartıyla yapılmıştır, yani, bu fonksiyon için (2.27) integrali vardır. Ancak Fourier dizileri ortogonal polinomlarla daha genel durumda ele alınabilir.

$L_1 = L_1[a,b;h(x)]$ ile

$$\int_a^b h(x)\left|f(x)\right|dx \tag{2.46}$$

integralinin yakınsak olduğu fonksiyonlar uzayını gösterelim. $[a,b]$ aralığının sonlu olması halinde, tüm integraller (2.27) yakınsak olurlar ve $L_1$ uzayından olan $f(x)$ fonksiyonun, onun ortogonal polinomlar üzere Fourier

serisi denk gelebilir. $[a,b]$ aralığının sonsuz olması halinde, (2.27) formülleri $f(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayılarını, $h(x)f(x)$ çarpımının sonlu kuvvet momentlere sahip olması şartıyla belirler.
Biz her yerde $f(x)$ fonksiyonunun Lebesgue'e göre ölçülebilir ve bazı integral şartlarını sağladığını varsayacağız hatta $f(x)$ fonksiyonunun her yerde sürekli olduğunu düşünebiliriz.

### 2.3.4.Lebesgue Eşitsizliği Yardımıyla Yeterli Yakınsaklık Şartlarının İncelenmesi

Sonlu ortogonallik aralığı durumunda, Fourier ortogonal polinomları dizilerinin yakınsaklık şartlarının incelenmesi yöntemini gözden geçirelim. Bu yöntem *Lebesgue fonksiyonları* olarak adlandırılan fonksiyonlara dayanır
Sürekli fonksiyonların polinomlarla yaklaşması meselesi ilk olarak ortogonal polinomlar teorisinde ve fonksiyonların yaklaşımı teorisinde birçok sonuç sahibi olan büyük Rus matematikçisi P.L. Tchebyshev tarafından ortaya atılmış ve incelenmiştir. Burada ise birkaç önemli kavramı veriyoruz. En kapsamlı bilgiler ise [Akhiezer-1947,1965], [İ.P. Natanson-1949], [Jackson-1941] kitaplarında bulunabilir.
$f(x)$ fonksiyonunun sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon olması halinde, $f(x)$-in $F_n(x)$ polinomuna uzaklığı

$$\rho(f,F_n)=\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-F_n(x)\right|$$

şeklinde tanımlanır ve bu $F_n(x)$ polinomunun $f(x)$ fonksiyonundan Tchebyshev sapması diye adlandırılır. Bu sapma $F_n(x)$ polinomunun değişmesi halinde değişir ve bu nedenle derecesi $\leq n$ olan polinomların ve $\Phi_n$ kümesinde $f(x)$ fonksiyonun en iyi yaklaşımı diye adlandırılan

$$\mathrm{E}_n(f)=\inf_{F_n}\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-F_n(x)\right| \tag{2.47}$$

ifadesi ortaya çıkar.

$$\mathrm{E}_n(f)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-Q_n(x)| \qquad (2.48)$$

şartını sağlayan $Q_n(x)$ polinomu vardır ve buna $f(x)$–e en iyi yaklaşım veren polinom denir.

Bu şekilde her $f(x)$ fonksiyonu için $\{\mathrm{E}_n(f)\}$ dizisi tanımlanır ve bu dizi $\Phi_n \subset \Phi_{n+1}$ şartına göre artmamaktadır, yani

$$\mathrm{E}_0(f)\geq \mathrm{E}_1(f)\geq \ldots \geq \mathrm{E}_n(f)\geq \ldots$$

bağıntısı vardır.Bundan başka, Weierstrass teoreminden

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}_n(f)=0 \qquad (2.49)$$

sonucu çıkar.

$\mathrm{E}_n(f)$-in sıfıra yaklaşma hızı $[a,b]$ aralığında $f(x)$fonksiyonunun yapısal ve diferansiyel özelliklerine bağlıdır. Sürekli fonksiyonun yapısal özelliği derken, özel halde

$$|f(x)-f(t)|\leq \mathrm{M}|x-t|^{\alpha},\ 0<\alpha\leq 1 \qquad (2.50)$$

Lipschitz şartı olarak kabul edilir. Bu tür fonksiyonlar sınıfını $Lip\alpha$ olarak göstereceğiz.

$[a,b]$ aralığında $f(x)$fonksiyonunun Lipschitz şartı $0<\alpha\leq 1$ olması durumunda, en iyi yaklaşımlar için[Akhiezer-1965], [Jackson -1941]

$$\mathrm{E}_n(f)\leq \frac{c_1}{n^{\alpha}},\ n=1,2,\ldots \qquad (2.51)$$

eşitsizliği sağlanır ve burada $c_1$ bir sabittir.

$f(x)$fonksiyonu $[a,b]$ aralığında $p$ defa sürekli diferansiyellenebilir ise ve $f^{(p)}(x)\in Lip\alpha$ olursa bu durumda Jackson teoremi:

$$\mathrm{E}_n(f)\leq \frac{c_2}{n^{p+\alpha}},\ n=1,2,\ldots \qquad (2.52)$$

şeklinde yazılır. Buradan, $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında türevleri ne kadar fazla ise, onun en iyi yaklaşımlar dizisi o kadar daha hızlı sıfıra yaklaşır sonucu çıkar.

Bundan sonra $f(x)$fonksiyonunun süreklilik modülü:

$$\omega(\delta, f) = \sup_{|x-t|\le\delta} |f(x) - f(t)|, \; x,t \in [a,b] \tag{2.53}$$

ve bu süreklilik modülü $\delta \to 0$ halinde monoton olarak sıfıra azalır. Böylece, (2.51) yerine, $\alpha = 0$ halinde

$$\mathrm{E}_n(f) \le c_3 \omega\left(1/n, f\right) \tag{2.54}$$

yazılabilir.

Şimdi Fourier dizilerinin ortogonal polinomlarla Lebesgue eşitsizliğini gösterelim. Bunun için ilk önce, en iyi yaklaşım polinomunun

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathrm{P}_k(x) = s_n(x, Q_n) \tag{2.55}$$

şeklinde gösterilebildiğini belirtelim, burada

$$c_k = \int_a^b h(t) Q_n(t) \mathrm{P}_k(t)\, dt \tag{2.56}$$

olup $c_k$ Fourier katsayılarıdır.

$$\begin{aligned} f(x) - s_n(x, f) &= \left[f(x) - Q_n(x)\right] + \left[s_n(x, Q_n) - s_n(x, f)\right] = \\ &= \left[f(x) - Q_n(x)\right] + s_n(x, Q_n - f) \end{aligned} \tag{2.57}$$

aşikar ifadelerini yazar ve (2.48) tanımına göre,

$$\begin{aligned} \left|s_n(x, Q_n - f)\right| = \left|\int_a^b h(t)\left[Q_n(t) - f(t)\right]\left[\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_k(t)\right] dt\right| \le \\ \le \mathrm{E}_n(f) L_n(x) \end{aligned} \tag{2.58}$$

elde edebiliriz ki, burada

$$L_n(x) = \int_a^b h(t) \left|\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_k(t)\right| dt \tag{2.59}$$

ifadesi $n$ dereceli $\{\mathrm{P}_n(x)\}$ sisteminin Lebesgue fonksiyonu diye adlandırılır ve bu ifadenin maksimumu,

$$L_n = \max_{x\in[a,b]} L_n(x) \tag{2.60}$$

İfadesi ise Lebesgue sabitidir. (2.58) yardımıyla (2.58) den

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{P}_k(x) \right| \le (1 + L_n)\, \mathrm{E}_n(f), \; x \in [a, b] \tag{2.61}$$

Lebesgue eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} L_n \mathrm{E}_n(f) = 0 \tag{2.62}$$

şartının yerine getirilmesi durumunda, sürekli $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinin $f(x)$-e yaklaştığı sonucu çıkar, üstelik bu dizi $[a,b]$ ortogonallik aralığında düzgün yaklaşır.

$\{L_n\}$ Lebesgue sabitleri sınırsız olarak artmaktadır, ancak birçok özel durumlarda, $h(x)$ ağırlık fonksiyonunun bazı genel şartlarında bu artışın hızı tespit edilebilir. Bu şekilde Lebesque eşitsizliği (2.62) ve (2.61) Fourier serilerinin tüm ortogonallik aralığı üzerinde, (bu ortogonallik aralığının sonlu olması şartıyla) düzgün yakınsama şartlarının tespit edilmesi imkanını vermektedir.

Aynı şekilde (2.57) den (2.58) i kullanarak her noktada

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{P}_k(x) \right| \le \left[1 + L_n(x)\right] \mathrm{E}_n(f), \; x \in [a,b] \tag{2.63}$$

Lebesque eşitsizliğini buluruz. Üstelik (2.62) yerine burada $\lim_{n\to\infty} L_n(x)\mathrm{E}_n(f) = 0$ şartı ortogonal polinomlarla Fourier dizisinin bir $x$ noktasında yakınsaklığını göstermektedir.

(2.57) denklemini biraz farklı değerlendirebiliriz. Şöyle ki, Bunyakowsky-Schwartz eşitsizliğini uygulayarak (2.58) yerine

$$\left| s_n(x, Q_n - f) \right|^2 \le \int_a^b h(t) \left| Q_n(t) - f(t) \right|^2 dt \int_a^b h(t) \left| \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_k(x) \mathrm{P}_k(t) \right|^2 dt$$

$$= \left\| Q_n - f \right\|^2 \sum_{k=0}^{n} \left| \mathrm{P}_k(x) \right|^2 \tag{2.64}$$

elde edeceğiz ve

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \mathrm{P}_k(x) \right|^2, \; x \in [a,b] \tag{2.65}$$

toplamının artış hızını bulmamız gerekmektedir. (2.63) yerine burada

$$\left| f(x) - s_n(x, f) \right| \le \left| f(x) - Q_n(x) \right| + \left\| Q_n - f \right\| \left[ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_k^2(x) \right]^{1/2} \tag{2.66}$$

eşitsizliğini elde edeceğiz.

Dolayısıyla, öyle $\{Q_n(t)\}$ polinomlar dizisi olsa ki, onun için (2.64) çarpımı sıfıra yaklaşsın, yani

$$\|Q_n - f\| = \left[\int_a^b h(t)\left|Q_n(t) - f(t)\right|^2 dt\right]^{1/2}$$

ifadesi daha yüksek hızla sıfıra yaklaşsın, o zaman ortogonal polinomlar serisi $f(x)$-e yakınsar.

En fazla teorik ve uygulama önemine aşağıda belirtilen klasik ortogonal polinomlar sistemi sahiptir, yani aşağıdaki klasik ortogonal polinomlar teorik ve uygulama açısından en önemli olanlardır:

- 1.nevi Tchebyshev polinomları $\mathrm{T}_n(x)$ $[-1,1]$ aralığında ortogonaldir ve ağırlık fonksiyonu

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ x \in (-1,1) \tag{2.67}$$

şeklindedir.

- 2. nevi Tchebyshev polinomları $U_n(x)$ $[-1,1]$ aralığında ortogonaldir ve ağırlık fonksiyonu $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ dır.
- Legendre polinomları $\{\mathrm{P}_n(x)\}$ aynı aralık üzerinde $h(x) = 1$ ağırlık fonksiyonu ile ortogonaldirler.
- Jacobi polinomları $\{\mathrm{P}_n(x;\alpha,\beta)\}$ $h(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ ağırlık fonksiyonu ile $[-1,1]$ aralığında ortogonaldir ve burada $\alpha > -1$ ve $\beta > -1$ dir. Üslerin çakışması halinde ise, yani $\alpha = \beta$ olduğunda Jacobi polinomları ultra küresel diye adlandırılır ve $\{\mathrm{P}_n(x;\alpha)\}$ ile gösterilir.
- Jacobi polinomlarının en fazla incelenmiş olanları Tchebyshev ve Legendre polinomlarıdır ve yukarıdaki gösterimi dikkate alarak, bunların

$$\mathrm{T}_n(x) = \mathrm{P}_n(x;-1/2),\ U_n(x) = \mathrm{P}_n(x;1/2),\ \mathrm{P}_n(x) = \mathrm{P}_n(x;0) \tag{2.68}$$

şeklinde yazılması da mümkündür.

❖ Tchebyshev-Hermite polinomları $\{H_n(x)\}$;

$$h(x)=e^{-x^2},\ x\in(-\infty,\infty) \qquad (2.69)$$

ağırlık fonksiyonu ile tüm eksen üzerinde ortogonaldir.

❖ Tchebyshev-Laguarre polinomları $\{L_n(x;\alpha)\}$

$$h(x)=x^{\alpha}e^{-x},\ x\in(0,\infty),\ \alpha>-1 \qquad (2.70)$$

ağırlık fonksiyonu ile yarı eksen üzerinde ortogonaldir.

## 2.4. KLASİK ORTOGONAL POLİNOMLARIN GENEL ÖZELLİLERİ

Klasik ortogonal polinomların her biri belirgin bir diferansiyel denklemin çözümüdür. Polinomların bu özelliği belli olduktan sonra onların hepsini kapsayacak bir tane genel şekilde diferansiyel denklemin bulunması problemi gündeme geldi ve bu konuda bir çok çalışmalar ortaya çıktı. Onlardan bir tanesi de Pearson denklemi olarak bilinen denklemdir.

### 2.4.1 Pearson'un Diferansiyel Denklemi

Sağ tarafındaki katsayıların tümü gerçek olan

$$\frac{y'}{y}=\frac{p_0+p_1x}{q_0+q_1x+q_2x^2}=\frac{A(x)}{B(x)} \qquad (2.71)$$

diferansiyel denklemi *Pearson Denklemi* diye adlandırılır. Burada

$$A(x)=p_0+p_1x,\ B(x)=q_0+q_1x+q_2x^2 \qquad (2.72)$$

polinomların seçimine göre çeşitli polinomlar bulunabilir. Bu bağlamda aşağıda üç duruma ayrıca bakalım:

1. $B(x)$ polinomunun katsayılarının $q_1=q_2=0$, $q_0\neq 0$ olduğu duruma bakalım. Koordinat başlangıcını da değiştirirsek Pearson denklemi

$$\frac{y'}{y}=-2\beta x \qquad (2.73)$$

şekline gelmiş olur. Bu denklemin çözümü

$$y=\varphi_1(x)=c_1e^{-\beta x^2} \qquad (2.74)$$

dır. $\sqrt{\beta}x = t$ dönüşümü yapılırsa, bu fonksiyon Tchebyshev-Hermit polinomunun ağırlık fonksiyonundan $c_1$ sabit çarpanı ile farklaşan şekle gelir. Sabit çarpan ise polinomun ortogonallik özelliğini etkilemez, o yüzden de $c_1 = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda (2.74) formülü ile belirlenen ortonormal polinomlar ile Tchebyshev-Hermit polinomları arasında

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{c_1}} \hat{\mathrm{H}}_n\left(\sqrt{\beta}x\right) \tag{2.75}$$

bağıntısı olduğu ortaya çıkar. Zira

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_1 e^{-\beta x^2} \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{c_1}} \hat{\mathrm{H}}_n\left(\sqrt{\beta}x\right) \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{c_1}} \hat{\mathrm{H}}_m\left(\sqrt{\beta}x\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \hat{\mathrm{H}}_n(t) \hat{\mathrm{H}}_m(t)\, dt = \delta_{nm}$$

eşitliği mevcuttur.

2. Şimdi $q_2 = 0$ ancak $q_1 \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $q_0 = 0$ diyebiliriz, bu durumda (2.71) denklemi

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} - \beta \tag{2.76}$$

şeklinde gösterilebilir.

(2.76) denkleminin çözümü

$$y = \varphi_2(x) = c_2 x^{\alpha} e^{-\beta x} \tag{2.77}$$

fonksiyonu ise $[0,\infty)$ yarı aralığında $c_2 > 0$, $\alpha > -1$, $\beta > 0$ şartlarıyla ağırlık fonksiyonu olabilir. (2.77) ağırlık fonksiyonuyla (2.31) ağırlık fonksiyonuna uygun gelen ortogonal polinomlar da Tchebyshev-Laguerre polinomlarının genellemesi olarak kabul edilebilir.

3. Şimdi $\mathrm{B}(x)$ polinomunun iki tane gerçek ve sıfırdan farklı katsayılarının olduğu durumu inceleyelim. O zaman Pearson denklemi

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_2(x-a)(x-b)} = \frac{\beta}{x-a} - \frac{\alpha}{b-x} \tag{2.78}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\alpha$ ve $\beta$ sabit değerlerdir ve $a < b$ dır. (2.78) denkleminin çözümü

$$y = \varphi_3(x) = c_3(b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta} \tag{2.79}$$

dır ve ağırlık fonksiyonu $c_3 > 0$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ şartlarıyla olabilir. $2x = (b-a)t + (a+b)$ lineer değişken değiştirmesiyle (2.79) denklemi ağırlık fonksiyonu (2.28) olan Jacobi denklemine dönüştürülebilir.

Aynı katsayılarla Pearson denkleminin $(-\infty, a)$ ve $(b, +\infty)$ aralıklarında çözümlerinin bulunduğu söylenebilir ve (2.78) denklemi

$$\frac{y'}{y} = \frac{\beta}{x-a} + \frac{\alpha}{b-x}$$

şeklinde gösterilebilir. O zaman (2.77) yerine $x > b$ durumunda tanımlanmış olan

$$y = \varphi_4(x) = c_3 (x-a)^{\beta} (b-x)^{\alpha} \tag{2.80}$$

fonksiyonunu elde edeceğiz. Ancak bu fonksiyonun $(b, \infty)$ aralığında herhangi $\alpha$ ve $\beta$ ağırlığı olamaz. Aynı şekilde (2.78) denklemini aşağıdaki şekilde gösterirsek

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\beta}{a-x} - \frac{\alpha}{b-x}$$

çözüm olarak fonksiyonu elde edeceğiz:

$$y = \varphi_5(x) = c_3 (a-x)^{\beta} (b-x)^{\alpha} \tag{2.81}$$

fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon $(-\infty, a)$ aralığında tanımlanmıştır, ancak ağırlık fonksiyonu yoktur.

Bu şekilde (2.71) denkleminin sağ tarafındaki paydasında yer alan 3 terimli ifade, (2.71) denkleminin $c_3 > 0$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ şartlarıyla $(a, b)$ aralığında çözümü (2.79) ifadesidir ve bağımsız değişkenin lineer değiştirilmesi ve sabit değerle çarpılmasıyla (2.75) ifadesindeki gibi Jacobi polinomlarına dönüşen ortogonal polinomlar sistemini tanımlar.

4. $\mathrm{B}(x)$ polinomunun katsayılarının iki tanesinin sıfır olması halinde (2.78) ve (2.79) yerine

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_2 x^2} = \frac{\beta}{x^2} + \frac{\alpha}{x},$$

$$y = \varphi_6(x) = c_4 x^{\alpha} e^{-\frac{\beta}{x}} \tag{2.82}$$

sonuçlarını elde edeceğiz.

Böylece çözüm tüm $x>0$ durumları için tanımlanmıştır, ancak tüm $(0,\infty)$ aralığında ağırlık fonksiyonu olmaz.

Yukarıda belirtilen, Pearson denkleminin çözümünün ağırlık fonksiyonu olduğu üç durum için, $(a,b)$ ortogonallik aralığındaki limit bağıntıları

$$\lim_{x\to a+0} h(x)\mathrm{B}(x) = \lim_{x\to b-0} h(x)\mathrm{B}(x) = 0 \tag{2.83}$$

şeklinde olur. Bu şekilde, Pearson denkleminin ilk üç çözümü, yani $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ve $\varphi_3(x)$ fonksiyonları (2.83)'ü sağlamaktadır.

Bu tür ortogonal polinomları *klasik polinomlar* diye adlandıracağız. Biz, klasik ortogonal polinomların üç ayrı aile oluşturduğunu tespit ettik: T*chebyshev – Hermie'in genelleştirilmiş polinomları, Tchebyshev – Laguerre'nin genelleştirilmiş polinomları ve Jacobi'nin genelleştirilmiş polinomları*. Bu ailelerden her biri, sırasıyla Tchebyshev – Hermit polinomları, Tchebyshev – Laguerre polinomları ve Jacobi'nin polinomlarından bağımsız değişkenin lineer olarak değiştirilmeleri ve bir sabit ile çarpımıyla elde edilir. Başka herhangi bir klasik ortogonal polinom yoktur.

### 2.4.2 Klasik ortogonal polinomlar için diferansiyel denklemler

Klasik ortogonal polinomların herhangi bir değişken katsayılı ikinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemi sağladıklarını gösterebiliriz. Bu denklemin münferit durumları muhtelif fiziksel ve teknik içerikli problemlerin incelenmesinde sık sık ortaya çıkmaktadır. Bununla da aslında klasik ortogonal polinomların uygulama meselelerinde önemli rol oynadıkları açıklanmaktadır.

$h(x)$ ağırlık fonksiyonunun $(a,b)$aralığında Pearson diferansiyel denklemine uygun olduğunu varsayalım, yani:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0+p_1x}{q_0+q_1x+q_2x^2} = \frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)} \tag{2.84}$$

ve ayrıca, ortogonallik aralığının uçlarında, burada daha kısa biçimde yazacağımız

$$h(a)\mathrm{B}(a) = h(b)\mathrm{B}(b) = 0 \tag{2.85}$$

limit bağıntılarının ortogonallik aralığının sınırsız olması halinde bunun sınırlı değere sahip olacağını dikkate alarak, yerine getirildiğini varsayalım. Genellikle $\{P_n(x)\}$ ile $h(x)$ ağırlık fonksiyonuna tekabül eden ortonormal polinomları ele alacağız. Bu şekilde, tüm üç klasik ortogonal polinomlar ailelerini tek bir durum olarak değerlendirelim.

Teorem 2.4.1. $h(x)$ ağırlık fonksiyonunun (2.84) ve (2.85) şartlarını yerine getirmesi halinde, $P_n(x)$ ortogonal polinomu

$$B(x)y''+\left[A(x)+B'(x)\right]y'-\gamma_n y=0 \tag{2.86}$$

diferansiyel denkleminin çözümünü sağlamaktadır. Burada

$$\gamma_n=n\left[p_1+(n+1)q_2\right] \tag{2.87}$$

dir.

İspat: $$J=\int_a^b\left[B(x)h(x)P_n'(x)\right]'x^k dx \tag{2.88}$$

integralini inceleyelim. Kısmi integrasyon yaparak,

$$J=x^kB(x)h(x)P_n'(x)\Big|_a^b-k\int_a^b x^{k-1}B(x)h(x)P_n'(x)dx$$

eşitliğine ulaşırız. (2.85) e göre integralin dışındaki terim sıfıra eşittir. Bundan dolayı yeniden kısmi integrasyon yaparsak,

$$J=-kx^{k-1}B(x)h(x)P_n(x)\Big|_a^b+k\int_a^b P_n(x)\left[x^{k-1}B(x)h(x)\right]dx=$$

$$=k\int_a^b P_n(x)\left[(k-1)x^{k-2}B(x)h(x)+x^{k-1}B'(x)h(x)+x^{k-1}B(x)h'(x)\right]dx$$

buluruz. Daha sonra (2.84) den,

$$B(x)h'(x)=h(x)A(x) \tag{2.89}$$

özdeşliği ortaya çıkar ve bunun yardımıyla bir önceki denklemden

$$J=k\int_a^b P_n(x)\left[(k-1)x^{k-2}B(x)+x^{k-1}B'(x)+x^{k-1}A(x)\right]h(x)dx$$

sonucunu elde ediyoruz. Köşeli parantezler içerisinde $k$ dereceli polinom yer aldığından ve $P_n(x)$ polinomunun ortogonalliğinden dolayı

$$\int_a^b P_n(x)\left[(k-1)x^{k-2}B(x)+x^{k-1}B'(x)+x^{k-1}A(x)\right]h(x)dx=0$$

$(k=0,1,2,...,n-1)$ eşitlikleri elde edilir.

Bundan dolayı, aynı $k$ değerlerinde (2.88) integrali de sıfıra eşittir. Bu integralde türev alma işlemini yaparak ve (2.89) u kullanarak

$$J=\int_a^b\left[B'(x)h(x)P_n'(x)+B(x)h'(x)P_n'(x)+B(x)h(x)P_n''(x)\right]x^k dx=$$

$$\int_a^b\left\{\left[B'(x)+A(x)\right]P_n'(x)+B(x)P_n''(x)\right\}x^k h(x)dx=0$$

sonucu elde edeceğiz. {} parantezlerinin içerisinde yer alan $n$ dereceli polinoma $Q_n(x)$ diyelim. O zaman son olarak yukarıda belirtilen eşitlik

$$\int_a^b Q_n(x)x^k h(x)dx=0,\ (k=0,1,2,...,n-1)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu integralleri rastgele herhangi sabit bir sayıyla çarparak ve toplayarak

$$\int_a^b Q_n(x)F_m(x)h(x)dx=0$$

şartını elde ederiz. Burada $F_m(x)$, $m<n$ dereceli bir polinomdur. Ancak Teorem1.2 ye göre bu şart $Q_n(x)$ polinomunun $h(x)$- ağırlık fonksiyonu ile ortogonal polinom olması için gerekli ve yeterli şarttır, yani, bu polinom ortonormlaştırılmış $P_n(x)$ polinomundan yalnız sabit çarpanla farklı olabilir. Dolayısıyla;

$$B(x)P_n''(x)+\left[A(x)+B'(x)\right]P_n'(x)=\gamma_n P_n(x)$$

eşitliğine ulaşmış oluruz. Sadece $\gamma_n$ sabitini bulmamız gerekir. Bunun içinde sol ve sağ taraflarda yüksek terim katsayılarını eşitlersek

$$q_2 n(n-1)\mu_n+(p_1+2q_2)n\mu_n=\gamma_n\mu_n$$

sonucunu elde ediyoruz ve $\mu_n$ ile sadeleşme yaparsak, $\gamma_n$ bulunmuş olur. Teorem 2.4.1. ispatlanmıştır.

Bizi (2.86) diferansiyel denklemi ve (2.87) şartı ile yalnız Tchebyshev – Hermite, Tchebyshev – Laguerre ve Jacobi polinomlarını elde edebileceğimiz kadarı ilgilendirmektedir. Denklem (2.86)'nın bu özel durumlarını inceleyelim.

Formül (2.74)'te $c_1 = 1$ ve $\beta = 1$ olduğunu varsayarsak, o zaman Tchebyshev – Hermite polinomlarının ağırlık fonksiyonunu elde edeceğiz. Buna tekabül eden ilgili (2.73) Pearson denklemi

$$\frac{y'}{y} = -2x$$

Şeklindedir. O halde burada

$$\mathrm{A}(x) \equiv -2x, \; \mathrm{B}(x) \equiv 1$$

dır ve bu sebeple (2.86) yerine (2.87)'nin hesaplanmasından sonra Tchebyshev–Hermite polinomları için

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{2.90}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Dolayısıyla,

$$\mathrm{H}_n''(x) - 2x\mathrm{H}_n'(x) + 2n\mathrm{H}_n(x) \equiv 0$$

özdeşliği gerçekleşmiştir.

Şimdi formül (2.77)'de $c_2 = \beta = 1$ olduğunu farzedelim. O zaman Tchebyshev –Laguerre polinomlarının ağırlık fonksiyonunu elde edeceğiz. Pearson'nun ilgili denklemi ise

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha - x}{x}$$

şeklinde olacaktır. Yani, Tchebyshev – Laguerre polinomları için

$$\mathrm{A}(x) = \alpha - x, \; \mathrm{B}(x) = x, \; \gamma_n = -n$$

olur. Bu değerleri (2.86) da yerine koyarak Tchebyshev– Laguerre polinomları için

$$xy'' + (\alpha - x + 1)y' + ny = 0 \tag{2.91}$$

denklemini elde ediyoruz, yani Tchebyshev– Laguerre polinomları

$$xL_n''(x;\alpha) + (\alpha - x + 1)L_n'(x;\alpha) + nL_n(x;\alpha) \equiv 0$$

çözümüdür.

Nihayet (2.79)'da $c_3 = 1,\ a = -1,\ b = 1$ olduğunu varsayacağız. O zaman Jacobi polinomlarının ağırlık fonksiyonunu elde ederiz, denklem (2.78) ise

$$\frac{y'}{y} = \frac{\beta}{x+1} - \frac{\alpha}{1-x} = \frac{(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta)x}{1-x^2}$$

şekline dönüşür. Bu yüzden, burada

$$\mathrm{A}(x) = (\beta-\alpha)-(\alpha+\beta),\ \mathrm{B}(x) = 1-x^2,\ \gamma_n = -n(n+\alpha+\beta+1)$$

olduğu ortaya çıkıyor. Diferansiyel denklem ise

$$(1-x^2)y'' + \left[\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x\right]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0 \tag{2.92}$$

şeklini almış olur, burada da $y = \mathrm{P}_n(x;\alpha,\beta)$ alırsak,

$$(1-x^2)\mathrm{P}_n''(x;\alpha,\beta) + \left[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\right]\mathrm{P}_n'(x;\alpha,\beta) + n(n+\alpha+\beta+1)\mathrm{P}_n(x;\alpha,\beta) = 0$$

özdeşliğini elde ederiz. Özellikle, Legendre polinomları için $\alpha = \beta = 0$ olduğundan, Legendre polinomları için diferansiyel denklem

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{2.93}$$

gibi olur.

Tchebyshev'in birinci nevi polinomları $\alpha = \beta = -1/2$ durumunda ortaya çıkar ve bu durum için:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \tag{2.94}$$

olur.

Benzer şekilde Tchebyshev'in ikinci nevi polinomları için, $\alpha = \beta = 1/2$ şartını dikkate alarak, (2.92)'den

$$\left(1-x^2\right)y''-3xy'+n\left(n+2\right)y=0 \tag{2.95}$$

diferansiyel denklemini buluruz.

### 2.4.3 Genelleştirilmiş Rodrigues Formülü

Klasik ortogonal polinomları için, Genelleştirilmiş Rodrigues Formülü diye adlandırılan formül vasıtasıyla ağırlık fonksiyonunun çok önemli gösterimi mümkündür.

Lemma 1. $h\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ortogonallik aralığında,

$$\frac{h'\left(x\right)}{h\left(x\right)}=\frac{\mathrm{A}\left(x\right)}{\mathrm{B}\left(x\right)},\ x\in\left(a,b\right) \tag{2.96}$$

şartının yerine getirilmesi halinde, ve burada genellikle,

$$\mathrm{A}\left(x\right)=p_0+p_1x,\ \mathrm{B}\left(x\right)=q_0+q_1x+q_2x^2 \tag{2.97}$$

olması durumunda,

$$Q_n\left(x\right)=\frac{1}{h\left(x\right)}\left[h\left(x\right)\mathrm{B}^n\left(x\right)\right]^{(n)} \tag{2.98}$$

fonksiyonu $\leq n$ dereceli polinomdur.

İspat: $F_k\left(x;n\right)=\left[h\left(x\right)\mathrm{B}^n\left(x\right)\right]^{(k)}$ (2.99)

ifadesini inceleyelim.

$k=0$ ve $k=1$ durumunda, (2.96)'yı kullanarak

$$F_0\left(x;n\right)=h\left(x\right)\mathrm{B}^n\left(x\right),$$

$$F_1\left(x;n\right)=h'\left(x\right)\mathrm{B}^n\left(x\right)+h\left(x\right)n\mathrm{B}^{n-1}\left(x\right)\mathrm{B}'\left(x\right)=$$

$$=h\left(x\right)\mathrm{B}^{n-1}\left(x\right)\left[\mathrm{A}\left(x\right)+n\mathrm{B}'\left(x\right)\right]=h\left(x\right)\mathrm{B}^{n-1}\left(x\right)R_1\left(x\right)$$

olduğunu buluruz. Burada $R_1\left(x\right)$ köşeli parantezlerin içinde yer alan ve derecesi birden fazla olmayan polinomu ifade etmektedir. Tümevarım (indüksiyon) yöntemiyle (2.99) değeri için

$$F_k\left(x;n\right)=h\left(x\right)\mathrm{B}^{n-k}\left(x\right)R_k\left(x\right) \tag{2.100}$$

ifadesinin geçerli olduğunu ispatlayacağız ve burada $R_k(x)$ - derecesi $\leq k$ polinomdur. (2.100) fonksiyonunun bir daha türevini alalım. (2.96)'yı kullanarak aşağıdakini buluruz:

$$F_{k+1}(x;n) = \left[F_k(x;n)\right]' = h'(x)\mathrm{B}^{n-k}(x)R_k(x) +$$
$$+h(x)(n-k)\mathrm{B}^{n-k-1}(x)\mathrm{B}'(x)R_k(x) + h(x)\mathrm{B}^{n-k}(x)R_k'(x) =$$
$$h(x)\mathrm{B}^{n-k-1}(x)\left[\mathrm{A}(x)R_k(x) + (n-k)\mathrm{B}'(x)R_k(x) + \mathrm{B}(x)R_k'(x)\right] =$$
$$= h(x)\mathrm{B}^{n-k-1}(x)R_{k+1}(x) \qquad (2.101)$$

ve burada $R_{k+1}(x)$ polinomu $\leq k+1$ dereceye sahiptir ve

$$R_{k+1}(x) = \left[\mathrm{A}(x) + (n-k)\mathrm{B}'(x)\right]R_k(x) + \mathrm{B}(x)R_k'(x) \qquad (2.102)$$

denklemi ile bulunur. Bununla (2.100) formülü ispatlanmıştır. Bu formülde $k=n$ olduğunu farzedelim ve (2.98) eşitliğine $F_n(x;n)$-i koyalım. Sonuçta $Q_n(x)$-in derecesi $\leq n$ olan polinom olduğunu görürüz.

Teorem 2.4.2. Klasik ortogonal polinomlar için

$$\mathrm{P}_n(x) = c_n \frac{1}{h(x)}\left[h(x)\mathrm{B}^n(x)\right]^{(n)}, \; n = 0,1,2,\ldots \qquad (2.103)$$

Rodrigues formülü doğrudur ve burada $\{c_n\}$ sabit katsayılardır.

İspat: Lemma 1.'e göre (2.103)'in sağ tarafı derecesi $\leq n$ olan polinomdur. Formül (2.100)'dan, (2.85) şartlarını kullanarak

$$F_k(a;n) = F_k(b;n) = 0, \; k = 0,1,2,\ldots,n-$$

olduğunu buluruz. Bunları da dikkate alırsak, (5.30)'dan

$$\left[h(x)\mathrm{B}^n(x)\right]^{(k)}\Big|_{x=a} = \left[h(x)\mathrm{B}^n(x)\right]^{(k)}\Big|_{x=b} = 0$$

yazılır. (2.98) polinomu için

$$\int_a^b h(x)x^k Q_n(x)\,dx = \int_a^b x^k\left[h(x)\mathrm{B}^n(x)\right]^{(n)}dx =$$

$$= x^k \left[h(x)\mathrm{B}^n(x)\right]^{(n-1)}\Big|_a^b - k\int_a^b x^{k-1}\left[h(x)\mathrm{B}^n(x)\right]^{(n-1)} dx =$$

$$= (-1)^k k! \int_a^b \left[h(x)\mathrm{B}^n(x)\right]^{(n-k)} dx =$$

$$= (-1)^k k! \left[h(x)\mathrm{B}^n(x)\right]^{(n-k-1)}\Big|_a^b = 0 \qquad (2.104)$$

eşitliklerin gerçek olduğunu görürüz.

Şimdi (2.98) formülü ile tanımlaman ve tespit edilen $Q_n(x)$-polinomunun, (2.85) şartlarında derecesinin $n$ olduğunu göstereceğiz. Aksini, yani $Q_n(x)$-in $n$-den daha düşük olan dereceye sahip olduğunu varsayalım. O zaman, denklem (2.104) $k = 0,1,\ldots,n-1$ durumlarında geçerli olduğuna göre, bu denklemleri $Q_n(x)$-polinomunun katsayılarına çarparak ve sıfırları toplayarak,

$$\int_a^b h(x)Q_n^2(x)dx = 0$$

sonucunu elde edeceğiz, oysa bu denklem $h(x)$ ağırlık fonksiyonu olduğu için mümkün olamaz.

Demek $Q_n(x)$-polinomunun derecesi $n$ dir. O zaman (2.104) şartından, onun, *h(x)* ağırlık fonksiyonuna denk gelen $\mathrm{P}_n(x)$ ortonormlaştırılmış polinomlarından yalnız sabit çarpanı ile farklı olabileceği sonucu çıkmaktadır. Bununla formül (2.103) ve Teorem 2.4.2 ispatlanmıştır.

Formül (2.103)'ü (2.98)'e göre

$$\mathrm{P}_n(x) = c_n Q_n(x) \qquad (2.105)$$

biçiminde yazabiliriz. Bundan dolayı da $Q_n(x)$- polinomunun baş katsayısının hesaplanması gerektiği ortaya çıkmaktadır. Ancak açıklama için bu polinomun ikinci baş katsayısının da hesaplanması gerekir. Bununla ilgili olarak

$$Q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots, \qquad (2.106)$$

ayrışımına gireceğiz ve bu iki katsayıyı bulacağız.

Lemma 2. $Q_n(x)$- polinomunun iki yüksek katsayısı için aşağıdaki formüller geçerlidir:

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left[p_1 + (n+k)q_2\right], \tag{2.107}$$

$$b_n = n\frac{p_0 + nq_1}{p_1 + 2nq_2}a_n \tag{2.108}$$

İspat: Formül (2.101)'den $R_k(x)$ polinomunun birinci ve ikinci baş katsayılarını $a_k^{(n)}$ ve $b_k^{(n)}$ olarak belirleyelim, yani

$$R_k(x) = a_k^{(n)}x^k + b_k^{(n)}x^{k-1} + ... \tag{2.109}$$

olduğunu farzedelim. O zaman formül (2.102)'den, (2.97)'yi dikkate alarak, aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned}
&a_{k+1}^{(n)}x^{k+1} + b_{k+1}^{(n)}x^k + ... = \\
&= \left[p_0 + p_1 x + (n-k)(q_1 + 2q_2 x)\right]\left(a_k^{(n)}x^k + b_k^{(n)}x^{k-1} + ...\right) + \\
&+ \left(q_0 + q_1 x + p_0 + q_2 x^2\right)\left[ka_k^{(n)}x^{k-1} + (k-1)b_k^{(n)}x^{k-2} + ...\right]
\end{aligned} \tag{2.110}$$

ifadesinin sol ve sağ tarafında baş katsayıları kıyaslayarak,

$$a_{k+1}^{(n)} = \left[p_1 + (2n-k)q_2\right]a_k^{(n)} \tag{2.111}$$

olduğunu buluruz. (2.99) ve (2.100) denklemleri, $k = n$ olması halinde şu hale gelirler:

$$F_n(x;n) = \left[h(x)\mathrm{B}^n(x)\right]^{(n)}, \; F_n(x;n) = h(x)R_n(x)$$

Sonuç olarak, (2.98)'e göre $Q_n(x)$ ve $R_n(x)$ polinomları birbiri ile çakışmaktadır. Bundan dolayı, (2.111)'i uygulayarak,

$$\begin{aligned}
&a_n = a_n^{(n)} = \left[p_1 + (n+1)q_2\right]a_{n-1}^{(n)} = \\
&= \left[p_1 + (n+1)q_2\right]\left[p_1 + (n+2)q_2\right]a_{n-2}^{(n)} = ... \\
&... = \left[p_1 + (n+1)q_2\right]\left[p_1 + (n+2)q_2\right]...\left[p_1 + 2nq_2\right]a_0^{(n)}
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Ancak (2.99)'a göre $a_0^{(n)}=1$ durumu mevcuttur ve bu şekilde, formül (2.107) ispatlanmıştır.

Benzer şekilde, ikinci katsayı $b_n$-nin bulunması için formül (2.110)'da, sol tarafta ve sağ tarafta $x^k$ durumundaki katsayıları eşitliyoruz. Sonuç olarak

$$b_{k+1}^{(n)}=\left[p_0+(n-k)q_1\right]a_k^{(n)}+\left[p_1+(n-k)2q_2\right]b_k^{(n)}+$$
$$+q_1ka_k^{(n)}+q_2(k-1)b_k^{(n)}$$

veya

$$b_{k+1}^{(n)}=\left[p_1+(2n-k-1)q_2\right]b_k^{(n)}+\left[p_0+nq_1\right]a_k^{(n)} \tag{2.112}$$

olduğunu bulacağız. formül (2.112)'de ilkönce $k=0$ olduğunu, bundan sonra da $k=1$olduğunu varsayalım. Bunun sonucunda, $a_0^{(n)}=1$, $b_0^{(n)}=0$ denklemlerini ve (2.111)'i dikkate alarak, $k=0$ durumunda

$$b_1^{(n)}=p_0+nq_1,$$
$$b_2^{(n)}=\left[p_1+(2n-2)q_2\right]b_1^{(n)}+\left[p_0+nq_1\right]a_1^{(n)}=$$
$$=\left[p_1+(2n-2)q_2\right](p_0+nq_1)+(p_0+nq_1)(p_1+2nq_2)=$$
$$=2\left[p_1+(2n-1)q_2\right](p_0+nq_1)=2\frac{p_0+nq_1}{p_1+2nq_2}a_2^{(n)}$$

sonucunu elde ederiz. Şimdi indüksiyon yöntemiyle

$$b_k^{(n)}=k\frac{p_0+nq_1}{p_1+2nq_2}a_k^{(n)} \tag{2.113}$$

denklemini ispatlayacağız. Bunun için (2.113) ve (2.112)'yi yerine koyalım. Bunun sonucunda sırasıyla

$$b_{k+1}^{(n)}=\left[p_1+(2n-k-1)q_2\right]k\frac{p_0+nq_1}{p_1+2nq_2}a_k^{(n)}+\left[p_0+nq_1\right]a_k^{(n)}=$$
$$=\frac{kp_1+k(2n-k-1)q_2+p_1+2nq_2}{p_1+2nq_2}\left[p_0+nq_1\right]a_k^{(n)}=$$
$$=(k+1)\frac{p_1+(2n-k)q_2}{p_1+2nq_2}(p_0+nq_1)a_k^{(n)}=(k+1)\frac{p_0+nq_1}{p_1+2nq_2}a_{k+1}^{(n)},$$

buluruz, ve bununla birlikte burada denklem (2.111)'den yararlanmıştık. Böylelikle denklem (2.113) bulunmuştur. Bu formülde $k=n$ olduğunu varsayarak ve $b_n = b_n^{(n)}$ olduğunu dikkate alarak, (2.108)'i elde ederiz.

Bu şekilde Lemma 2 ispatlanmıştır.

Şimdi $a_n$ ve $b_n$ katsayılarını tüm özel durumlarda hesaplıyoruz.

Jacobi polinomları için

$$\mathrm{A}(x) = (\beta-\alpha)-(\alpha+\beta)x,\ \mathrm{B}(x) = 1-x^2 \tag{2.114}$$

denklemleri mevcuttur. Bunun sonucunda, (2.108)'den

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left[-(\alpha+\beta)+(n+k)(-1)\right] = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha+\beta+n+k =$$

$$(-1)^n (\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+2)...(\alpha+\beta+n+n) \tag{2.115}$$

sonucunu elde ediyoruz.

Euler- Gamma-fonksiyonları için

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt,\ p>0 \tag{2.116}$$

tanımı bilinmektedir. Bu fonksiyonun iyi bilinen özelliklerinden aşağıdaki tekrarlama formülünü kullanalım;

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p),\ p>0 \tag{2.117}$$

Bu formülü birkaç defa uygulayarak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\Gamma(\alpha+\beta+2n+1) = (\alpha+\beta+2n)...(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1) \tag{2.118}$$

ve bu denklem yardımıyla formül (2.115) aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$a_n = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \tag{2.119}$$

bu sonucu kullanarak, (2.108)'e göre ikinci katsayıyı hesaplayalım,

$$b_n = n\frac{p_0 + nq_1}{p_1 + 2nq_2}a_n = n\frac{\beta - \alpha}{-(\alpha+\beta) - 2n}a_n =$$

$$= (-1)^n (\alpha - \beta) n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \qquad (2.120)$$

Tchebyshev – Hermite polinomları için

$\mathrm{A}(x) = -2x$, $\mathrm{B}(x) = 1$

geçerlidir. Bundan dolayı bu polinomlar için

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}(-2) = (-1)^n 2^n, \; b_n = 0 \qquad (2.121)$$

durumu geçerlidir.

Tchebyshev – Laguerre polinomları için:

$\mathrm{A}(x) = \alpha - x$, $\mathrm{B}(x) = x$

olup bunun sonucunda, burada (2.107) ve (2.108)'e göre:

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}(-1) = (-1)^n, \; b_n = (-1)^{n+1} n(\alpha + n) \qquad (2.122)$$

durumu mevcuttur.

(2.119), (2.121) denklemleri ve (2.122)'yi dikkate alarak, (2.104)'ten

$$\tilde{\mathrm{P}}_n(x;\alpha,\beta) =$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}\left[(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \left(1-x^2\right)^n\right]^{(n)}, \qquad (2.123)$$

$$\tilde{\mathrm{H}}_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} \qquad (2.124)$$

$$\tilde{L}_n(x;\alpha) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)^{(n)} \qquad (2.125)$$

sonucunu elde ederiz.

Tchebyshev – Laguerre, Tchebyshev – Hermite, Tchebyshev – Jacobi polinomlarının pratikte kullanımda olan aşağıdaki standart şekilleri mevcuttur:

$$\mathrm{P}_n(x;\alpha,\beta)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\left[(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\left(1-x^2\right)^n\right]^{(n)} \tag{2.126}$$

$$\mathrm{H}_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} \tag{2.127}$$

$$L_n(x;\alpha)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)^{(n)} \tag{2.128}$$

$$\hat{\mathrm{P}}_n(x;\alpha,\beta)=\frac{(-1)^n}{2^n}\sqrt{\frac{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{n!2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}\times$$

$$\times\frac{\left[(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\left(1-x^2\right)^n\right]^{(n)}}{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}} \tag{2.129}$$

Bu polinomların normlaşmış şekilleri de şunlardır:

$$\hat{\mathrm{P}}_n(x;0)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\left[\left(1-x^2\right)^n\right]^{(n)} \tag{2.130}$$

$$\hat{\mathrm{H}}_n(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\sqrt{\pi}2^n}}e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} \tag{2.131}$$

$$\hat{L}_n(x;\alpha)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}}x^{-\alpha}e^{x}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)^{(n)} \tag{2.132}$$

### 2.4.4 Üretici Fonksiyon

$(a,b)$ aralığında $h(x)$ ağırlık fonksiyonlu $\{\mathrm{P}_n(x)\}$ ortogonal polinomları sistemi için, $x\in(a,b)$ olmakla

$$F(x,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{P}_n(x)}{n!}\omega^n \tag{2.133}$$

kuvvet serisi ve onun toplamı incelenebilir, zira ağırlık fonksiyonuna ilişkin bazı minimal şartlarda, bu seri pozitif yakınsaklık yarıçapına sahiptir. O zaman $F(x,\omega)$ fonksiyonu $\{\mathrm{P}_n(x)\}$ polinomlarının üretici fonksiyonu diye adlandırılır.

Klasik ortogonal polinomlar için üretici fonksiyonlar şunlardır:

1) Tchebyshev-Hermite polinomları için

$$e^{2z\omega-\omega^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_n(z)}{n!}\omega^n \tag{2.134}$$

Yani, $F(z,\omega)=e^{2z\omega-\omega^2}$ -dır.

2) Tchebyshev-Laguerre polinomları için

$$(1-\omega)^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{z\omega}{1-\omega}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(z;\alpha)\omega^n \tag{2.135}$$

olduğundan üretici fonksiyon

$$F(z,\omega)=(1-\omega)^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{z\omega}{1-\omega}\right)$$

olur.

3) Legendre polinomları $Q_n(x)=\left[\left(1-x^2\right)^n\right]^{(n)}$ için aşağıdaki üretici fonksiyon mevcuttur:

$$\frac{1}{\sqrt{1+4\omega z+4\omega^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_n(z)}{n!}\omega^n \tag{2.136}$$

Yani, $F(z,\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4\omega z+4\omega^2}}$ -dır.

Legendre polinomunun

$$\mathrm{P}_n(x;0)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\left[\left(1-x^2\right)^n\right]^{(n)} \tag{2.137}$$

standart şekli için de

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\omega z+\omega^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(z;0)\omega^n \tag{2.138}$$

üretici fonksiyonu bilinmektedir.

4) Jacobi polinomları için

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}R\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{2}-\omega+\frac{1}{2}R\right)^{\beta}R}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_n(z)}{n!}\omega^n \tag{2.139}$$

ayrışımı gösteriyor ki,

$$F(z,\omega)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\omega+\frac{1}{2}R\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{2}-\omega+\frac{1}{2}R\right)^{\beta}}$$

ve burada

$$Q_n(z)=\frac{1}{(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}}\left[(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}\left(1-z^2\right)^n\right]^{(n)}$$

$R=\sqrt{1+4z\omega+4\omega^2}$ dır.

Not: Kapsamlı kaynaklarda ispatlanır ki, ortogonal polinomların türevleri de aynı aralıklarda ortogonal polinomlar olur ve bunlarda klasik ortogonal polinomlar listesine dahildirler [Suetin- 1979].

## §3.EN İYİ YAKLAŞIM KAVRAMI ÜZERİNE

**1.** Çağdaş matematik uygulamalarda ‘En İyi Yaklaşım’ ifadesi sık sık kullanılmaktadır. Bu kavram, çoğunlukla da ‘Fonksiyonlar Teorisi’nden uzak konularda çalışan matematikçiler ve en önemlisi fizikçiler tarafından bilinmeyen bir kavramdır. Bunu dikkate alarak, bu kavram hakkında az da olsa bilgi vermemiz çok yerinde olurdu. Zira bu kavram, yaklaşık hesaplama yöntemlerinin daha ileriye getirilmiş, geliştirilmiş bir devamı olarak düşünülebilir.

Bu konu da ilkel çalışmalar yapan kişilerin başında büyük Rus âlimi P.L. Tchebyshev gelmektedir (≈1853-lü yıllardan başlayarak). P.L. Tchebyshev’den sonra onun ileri sürmüş olduğu iddia birçok matematikçi tarafından geliştirildi, birçok yeni problem ortaya çıkarıldı ve çözüldü. Bunların arasında K. Weierstrass, D. Jackson, S.N. Bernsteyin önemli derecede yer almaktalar. Hazırda bu konu gelişmiş, sistemli, düzenli bir teori haline gelmiş olurken, daha yeni yeni çalışmalarla gelişmeye devam etmektedir.

Bu teoriyi bu kadar önemli kılan da onun sınırsız uygulama alanlarına sahip olmasıdır. Örneğin; bir denklemin çözümünü kesin olarak bulmak mümkün olmadığında onun yaklaşık çözümünü bulmaya çalışıyorlar. Ve bu çoğunlukla fizikte, teknikte rastlanan diferansiyel (veya diğer) denklemlerin çözümü sırasında karşımıza çıkmaktadır.

Burada da karşılaşılan en önemli problem, bu yaklaşıklık hatalarının minimuma indirilmesi problemidir. 'Fonksiyonların en iyi yaklaşım'ı ifadesi de bu durumu çok güzel ifade etmektedir.

Şimdi, fonksiyonların en iyi yaklaşım probleminin genel ifadesini verelim. $E$ herhangi bir lineer metrik uzay, $z = f(x)$ ise orada tanımlı bir fonksiyon olurken, $E_1 \subset E$ herhangi alt uzay olsun. Bu $E_1$ alt uzayı işin karakteri gereğince, $f(x)$-e nisbeten daha iyi karakteristiğe sahip fonksiyonlardan oluşur. O zaman $\rho(x, y)$ ile $E$- de tanımlanmış metrik gösterilirse, bu metrik anlamında verilmiş $f(x) \in E$ elementi ile $\varphi(x) \in E_1$ arasındaki uzaklık şöyle $\rho(f, \varphi)$ gibi belirlenir: Burada $f$ verilmiş bir tane element $\varphi$ ise $E_1$ içerisinde değişebilir. O zaman da, öyle bir $\varphi_0(x) \in E_1$ elementinin bulunması gerekir ki, bu $\varphi_0(x)$–ın $f(x)$–ten uzaklığı minumum olsun, yani $f \overline{\in} E_1$ olmakla,

$$\min_{\varphi \in E_1} \rho(f, \varphi) = \rho(f, \varphi_0) \tag{3.1}$$

şartı sağlansın. Böyle $\varphi_0(x) \in E_1$ elementine, $f(x) \in E$ elementinin en iyi yaklaşım veren elementi denir.

Tabii, burada $\rho$ metriği, $E, E_1$- kümeleri özel olarak seçilmekle, problem kesinleşir ve kesin çözümler ortaya çıkar. En basit hal olarak, Tchebyshev metriği olarak bilinen metriği tanımlayalım:

$E$ olarak herhangi $\langle a,b\rangle$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı $C[a,b]$yi alalım. Burada metrik

$$\rho(f,\varphi)=\max_{a\le t\le b}|f(t)-\varphi(t)|$$

şeklinde tanımlanır; $E_1$ olarak da, örneğin, derecesi $\le n$ olan

$$P_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$$

Polinomlar uzayı alınırsa, $\forall f(x)\in C[a,b]$ için derecesi $\le n$ olan polinomlarla (bunların kümesini $\Phi_n$ ile gösterirsek) en iyi yaklaşımı

$$E_n(f)=\min_{\mathrm{P}_n\in\Phi_n}\left\{\max_{a\le x\le b}|f(x)-\mathrm{P}_n(x)|\right\} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır.

$2\pi$ periyotlu olup da, uzunluğu $2\pi$ olan herhangi bir aralıkta ( diyelim$[-\pi,\pi]$ aralığında)

$$t_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

Trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımı

$$E_n^*(f)=\inf_{t_n\in\mathrm{T}_n}\left\{\max_{-\pi\le x\le\pi}|f(x)-\mathrm{P}_n(x)|\right\} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır, burada $\mathrm{T}_n:=\left\{t_n(x):t_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right\}$

**2.** Bir de anlattığımız kadar genel şekilde, herhangi $\mathrm{P}\ge 1$ için

$$\|f\|_p^p=\int_E|f(x)|^p\,dx<+\infty$$

şartını sağlayan fonksiyonların $L_p$ uzayında metrik

$$\rho(f,\varphi) = \|f-\varphi\|_p$$

olarak tanımlanır ve

$$E_n(f)_p = \min_{P_n}\left(\int_a^b |f(x)-P_n(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\ E_n^*(f)_p := \inf_{t_n\in T_n}\|f-t_n\|_p$$

şeklinde en iyi yaklaşımlar tanımlanır.

Ayrıca ispatlanabilir ki, her durumda verilmiş fonksiyona en iyi yaklaşımı veren elementler vardır.

Fakat bu elementlerin bulunması en zor problemlerdendir. Yani, onların bulunması değil, onları karakterize eden şartların bulunması çok önemli olur. Bu bağlamda P.L. Tchebyshev teoremi ve onun benzerleri vardır, yani bulunmuşlardır.

Bundan sonraki zor problem ise $E_n(f)$ ve $E_n^*(f)$ lerin kesin değerlerinin bulunması problemidir. Burada belirtelim ki, bu problemin çok az durumları dikkate alınmazsa, kesin çözümü mümkün değildir. Bun göre de onların bir şekilde değerlendirilmesi problemi ortaya çıkar:

$$E_n(f) \le c.\varphi\left(\frac{1}{n}\right), E_n^*(f) \le c_1.\psi\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.4}$$

şeklinde veya bunların daha iyi durumları söz konusudur. $H_k$ olarak Amerikan bilim adamı D. Jackson göstermiştir ki, $f(x)$ -in diferansiyel özellikleri (3.4) tipli değerlendirmeleri önemli derecede etkiler.

Bu tipli teoremlere de Jackson tipli teoremler denir. Bu bağlamda ([Akhiezer-1965], [Natanson-1949], [Timan-1963]) kaynaklara bakılabilir. Burada yalnızca, Ferhad H. Nasibov'a ait olan ([Nasibov-1969]) genel bir teorem vermekle yetinelim.

Teorem 3.1. ([Nasibov-1969]). $\mathrm{K}(t)$ ve $\varphi(t)$-$2\pi$ periyodlu periyodik fonksiyonlar olmak üzere $p\geq 1$, $q\geq 1$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\geq 0$ için $\mathrm{K}(t)\in L_p$, $\varphi(t)\in L_q$ ise, o zaman

$$f(x)=(\mathrm{K}*\varphi)(x)=\int_{\mathrm{K}_n}\mathrm{K}(x-t)\varphi(t)\,dt=\int_{\mathrm{K}_n}\mathrm{K}(t)\varphi(x-t)\,dt \tag{3.5}$$

fonksiyonu için

$$\left\|f-t_m^0\right\|_r\leq \mathrm{E}_m^*(\mathrm{K})_p\,\mathrm{E}_m^*(\varphi)_q \tag{3.6}$$

olacak şekilde $t_m^0(x)=t^0_{m_1,m_2,\dots,m_n}\ (x_1,x_2,\dots x_m)$ trigonometrik polinomu vardır. Burada $x=(x_1,x_2,\dots x_n)\in \mathrm{K}_n=\mathrm{K}_1x\mathrm{K}_2x\dots x\mathrm{K}_n=\mathrm{K}^n$ $n$ boyutlu küp, $x_1\in[-\pi,\pi]$ $(i=1,2,\dots,n)$ $\mathrm{E}_m^*(f)_r\leq\left\|f-t_m^0\right\|_r$ olduğunu da dikkate alırsak, (3.5) formülü ile tanımlanan $f(x)=f(x_1,\dots x_n)$ fonksiyonunun $\mathrm{E}_m^*(f)_r$ en iyi yaklaşımın üst değerlendirmesi için $\mathrm{K}(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonlarının en iyi yaklaşımları hakkında bir bilgiye sahip olmak yeterli olur. Fakat bu $\mathrm{K}(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonlarından bir tanesi $\mathrm{K}(x)$ önceden seçilmiş belirli bir fonksiyon olarak, (3.5) integral operatörü için çekirdek fonksiyonu adlandırılır. $\varphi(x)$ ise herhangi belli bir sınıfta değişebilir ve bu sınıfın karakteristiği olur.

Ayrıca belirtelim ki, herhangi bir anlamda türevi olan fonksiyonlar da (3.5) şeklinde gösterilebilirler.

Eğer, $\mathrm{K}(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\left(jt-\frac{2\pi}{2}\right)}{j^r}=D_2(t)$

olursa, $m=1$ durumunda (3.5) formülü

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_r(x-t)\varphi(t)\,dt$$

şekline gelir ki, bu da demektir ki, $\varphi(t)$ fonksiyonu $f(x)$ –in Weyl-Nikolsky anlamında $r$ mertebe türevidir. $m=1$ ve $p=1$ alırsak, $r=q$ olur ve Nagi-Dzyadik-Nikolsky tarafından kesin olarak ispatlanmıştır ki,

$$\mathrm{E}_n^*(D_r)_1 = \frac{1}{n^r}$$

dir. Buna göre de, $r \geq 0$ mertebe türevi olan $2\pi$ periyotlu $f(x) \in L_q$ fonksiyonunun $\leq n$ dereceli trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımı için

$$\mathrm{E}_n^*(f)_q \leq \frac{1}{n^r}\mathrm{E}_n^*(\varphi)_q = \frac{1}{n^r}\mathrm{E}_n^*\left(f^{(2)}\right)_q \tag{3.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şunu da belirtelim ki, burada türev kavramı hem adi anlamda, hem de genel anlamda -Weyl-Nikolsky anlamında, yani $r>0$ keyfi reel sayı olabilir.

Nihayet, K fonksiyonunu seçmekle, (3.5) gösterimine sahip olan sonsuz sayıda fonksiyonlar sınıfları tanımlayabiliyoruz.

Son olarak belirtelim ki, benzer teorem F. Nasibov tarafından periyodik olmayan fonksiyonlar, hatta bütün $R^n$ uzayında tanımlı fonksiyonların tam fonksiyonlarla yaklaşımı için de ispatlanmıştır [Nasibov, 1998], [ Nasibov, 1989].

Burada unutmayalım ki, teorik fizikte sık sık kullanılan diferansiyel denklemlerin çözümleri de (3.5) tipli integraller şeklinde gösterilirler [Nikiforov.-Uvarov,1978].

**3.** Periyodik olmayan, herhangi sonlu $[a,b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için kesir mertebe türev: Riemann-Lioville anlamında türev kavramı tanımlanır. Genelliği bozmadan $[a,b]$ yerine $[-1,1]$ alınırsa, her $s>0$ için

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}\varphi(t)\,dt \tag{3.8}$$

eşitliğini sağlayan $\varphi(t)$ fonksiyonunun $f(x)$ -in $s>0$ mertebe Riemann-Lioville anlamında türevi denir ve $f^{(s)}(x)=\varphi(x)$ olarak yazılır. Burada $s=n\in\mathbb{N}$ doğal sayı olursa, bu tanım adi $f^{(n)}(x)$ tanımından önemli derece farklaşmaz.

F.H. Nasibov bu anlamda türevi olan fonksiyonlarla ilgili birçok çalışmalar yapmıştır ([Nasibov, 1962], [Nasibov, 1969], [Nasibov, 1983]). Burada tek bir örnek verelim:

Teorem 3.2 ([Nasibov, 1962]) Eğer $\varphi(t)\in L_p(-1,1)$ olmak üzere $\varphi(t)=f^{(s)}(x)$ $(s>0)$ ise, o zaman

$$\mathrm{E}_n(f)_p \le \frac{c(s)}{n^s}\|\varphi\|_p, \qquad (p\ge 1) \tag{3.9}$$

olacak şekilde $c(s)$ sabiti vardır.

Hem (3.7) hem de (3.9) eşitsizliklerinin sağ tarafında süreklilik modülü kullanılabilir.

Teorem 3.3. [Nasibov-1983] $2\pi$ periyotlu $f(x)$ -in Weyl-Nikolsky anlamında $f^{(s)}(x)\in L_p$ türevi varsa, o zaman

$$\mathrm{E}_n^*(f)_p \le \frac{c}{n^s}\omega_k\left(f^{(s)};\frac{\pi}{n}\right)_p;$$

$[-1,1]$–da tanımlı $f(x)$ -in Riemann-Liuoville anlamında $f^{(s)}(x)\in L_p$ türevi olduğunda ise

$$\mathrm{E}_n(f)_p \le \frac{\mathrm{M}_1(s)}{n^s}\omega_2\left(f^{(s)};\frac{1}{n}\right)_{L_p(a',b')}$$

eşitsizlikleri sağlanır, burada $p\ge 1$, $s$ pozitif reel sayıdır, $L_p(a',b')$ ise $L_p$ normunun $(a',b')\subset(-1,1)$ aralığında alınmasını ifade eder.

Süreklilik modüllerinin $\omega(\varphi,\varphi)_p \to 0 \ (\delta \to 0)$ özelliği vardır.

**4.** Bu teoremler de $\mathrm{E}_n^*(f)_p$ ve $\mathrm{E}_n(f)_p$ en iyi yaklaşımları tanımlanırken keyfi trigonometrik $t_n(x)$ ve $\mathrm{P}_n(x)$ (cebirsel) polinomları kullanılmıştır. Fakat burada, örneğin $t_n(x)$ yerine $2\pi$ periyotlu bir $f(x)$ fonksiyonun adi trigonometrik sistem üzere Fourier serisinin $S_n(t;x)$ kısmi toplamı da alınabilir. $\mathrm{E}_n(f)_p$ tanımında ise, herhangi $[a,b]$ parçasında tanımlı ortogonal $\{\varphi_k(x)\}$ sistemi üzere Fourier serisinin kısmi toplamı alınabilir.

Fakat altını çizmek istediğimiz şey şudur. Her iki durumda Fourier serisinin $S_n(f;x)$ kısmi toplamı diğer polinomların hepsinden daha iyi yaklaşım verir.

Teorem 3.4. [M. Riesz], [Hrushikesh-2000] Eğer $2\pi$ periyotlu $f(x) \in L_p(-\pi,\pi) = L_p \quad (1 < p < \infty)$ ise, o zaman trigonometrik sistem üzere Fourier serisi $S_n(f;x)$ kısmi toplamı

$$\|f - S_n(f_i)\|_p \le (C_p + 1)\mathrm{E}_n^*(f)_p \tag{3.10}$$

eşitsizliğini sağlar, burada $C_p > 0$ – yalnızca $p$ ‘e bağlı bir sabittir.

Eğer $\|f - S_n(f)\|_p \ge \mathrm{E}_n^*(f)_p$ olduğunu da dikkate alırsak, (3.10) ile birlikte

$$\mathrm{E}_n^*(f)_p \le \|f - S_n(f)\|_p \le (1 + C_p)\mathrm{E}_n^*(f) \tag{3.11}$$

iki taraflı eşitsizliğin sağlandığını görürüz. Buradan da görülüyor ki, $(1 < p < \infty)$ durumunda

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f_i)\|_p = 0 \tag{3.12}$$

olur, yani, $(1 < p < \infty)$ olmak üzere her $f(x) \in L_p$ fonksiyonunun Fourier serisi $L_p$ (yani, orta) anlamında $f(x)$-in kendisine yakınsar, zira $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}_n^*(f)_p = 0$ dır.

Bu sonucun ne kadar önemli olduğunu anlamak için $p=1$ ve $p=\infty$ durumlarında bir fonksiyonun Fourier serisi onu üreten fonksiyonun kendisine yakınsamayabilir olduğunu hatırlatmamız yeterli olur.

Nihayet, (3.11) iki taraflı eşitsizliğinden

$$0 \le \Delta_n^*(f)_p = \left\| f - S_n(f) \right\|_p - \mathrm{E}_n^*(f)_p \le C_p \mathrm{E}_n^*(f)_p \tag{3.13}$$

elde ederiz ki, buradan da görülüyor ki, $n \to \infty$ -da $\Delta_n^*(f)_p$ farkı $\mathrm{E}_n^*(f)_p$ –den daha hızlı sıfıra yaklaşır. Bu da demek olur ki,

$$\left\| f - S_n(f) \right\|_p \approx \mathrm{E}_n^*(f)_p \tag{3.14}$$

asimptotik formülü gerçekleşir.

SONUÇ: $n \to \infty$ -iken $\left\| f - S_n(f) \right\|_p$ ve $\mathrm{E}_n^*(f)_p$ ifadeleri asimptotik olarak eşittirler. Bu halde

$$\mathrm{E}_n^*(f)_p \approx \left\| f - S_n(f) \right\|_p \quad (1 < p < \infty)$$

Bu sebeple, Fourier serilerinin, yaklaşık hesaplar yapılırken ne kadar önemli olduğu ortaya çıkmış olur.

Bu nedenle de matematiksel fizik problemlerinin çözümü sırasında Fourier serileri önemli-eşsiz araçlar olarak ortaya çıkmış olur.

### 3.1. Süreklilik Modülü

$\mathrm{E} = \langle a,b \rangle$ aralığında bir $f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun, burada $\langle a,b \rangle$ olarak $[a,b]$, $(a,b)$, $(-\infty,\infty)$, $[0,\infty)$, $[a,b)$ v.d. düşünülebilir. Herhangi $\delta > 0$ sayısı alalım ve $\langle a,b \rangle$ aralığında olmakla $|x-y| \le \delta$ şartını sağlayan bütün $x, y$ çiftleri için

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y| \le \delta} \left| f(x) - f(y) \right| \tag{3.15}$$

sayısına $f(x)$-in süreklilik modülü denir. $\omega(\delta)$ bir $\delta$-ya bağlı olarak bazı özelliklere sahiptir. Onlardan:

1) $\omega(\delta)$-artan bir fonksiyondur: $0<\delta_1<\delta_2$ için $\omega(\delta_1)\le\omega(\delta_2)$ dır. Gerçekten $|x-y|\le\delta_2$ şartını sağlayan $(x,y)$ çiftleri $|x-y|\le\delta_1$ şartını sağlayan $(x,y)$ çiftlerinden daha zengin küme oluştururlar, o zamanda geniş kümede $\sup$ daha büyük olur.
2) $f(x)$-in $\mathrm{E}$-de muntazam sürekli olması için $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0$ olması gerekli ve yeterlidir.
3) $n$-doğal sayısı için $\omega(n\delta)\le n\omega(\delta)$-dır.
4) Keyfi $\lambda>0$ sayısı için $\omega(\lambda\delta)\le(\lambda+1)\omega(\delta)$

TANIM: Bütün $x,y\in\mathrm{E}=\langle a,b\rangle$ için $|f(x)-f(y)|\le\mathrm{M}|x-y|^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ şartı sağlandığında, $f(x)$, $\alpha$ göstergesi ile Lipshitz şartını sağlar denir. Bu şartı sağlayan fonksiyonlar kümesi $Lip_M\alpha$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.5: Her $f(x)\in Lip_M\alpha$ $\mathrm{E}$-de düzgün (muntazam) süreklidir-açıktır.

5) Eğer bir $f(x)$ için $|f'(x)|\le\mathrm{M}$ $(x\in\mathrm{E})$ şartını sağlayan türev varsa, o zaman $f(x)\in Lip_M 1$-dir. Gerçekten Lagrange formülüne göre $|f(x)-f(y)|=|f'(c)||y-x|\le M|x-y|$.
6) $f(x)\in Lip_M\alpha$ ve $\alpha>1$ ise, $f(x)=const$-dır. Gerçekten:
$$|f(x)-f(y)|\le\mathrm{M}|x-y|^{\alpha}\to\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\le\mathrm{M}|x-y|^{\alpha-1}\to 0$$
$$(y\to x)\sim|f'(x)|=0\to f(x)=const$$
7) $\alpha<\beta$ ise $Lip_{M_1}\alpha\supset Lip_M\beta$
8) $f(x)\in Lip_M\alpha$ ve $\omega(\delta)\le\mathrm{M}\delta^{\alpha}$ eşitsizlikleri eşdeğerdirler.

### 3.2 Tchebyshev Polinomları

1.19. yüzyılda yaşayan ve çalışan P. L. Tchebyshev bütün zamanlarda bütün dünyada en büyük bilim adamları arasında ön yerlerden birine sahip olup matematikte, mekanikte birçok önemli, eşsiz çalışmalar yapmıştır. Bu bilim adamı sırf mekanik bir problemin çözümü ile uğraşmış ve bu problemin çözümünü sırf bir matematik problemin çözümüne bağlamıştır. Problem şöyle ifade edilebilir:

Problem A: $P_n\left(x\right)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_1x+a_0$

tipli polinomlar arasında öylesi bulunsun ki, onun için

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|P_n\left(x\right)\right|=M\left(P_n\right) \tag{3.16}$$

ifadesi minimum olsun.

Tamamen doğal olarak bu problemi şöyle de söylemek olur:

Problem B: Derecesi $\left(n-1\right)$ olan ve

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|x^n-P_{n-1}\left(x\right)\right| \tag{3.17}$$

İfadesine minimum veren $\mathrm{P}_{n-1}^0\left(x\right)$ polinom bulunsun.

Her iki problemin çözümü olarak P. L. Tchebyshev tarafından

$$T_n\left(x\right)=\cos\left(n\arccos x\right) \tag{3.18}$$

polinomu bulunmuş oldu.

Yeri gelmişken (3.16) ve (3.17) şeklinde ifade olunan problemlerin her biri çok önemli bilimsel çalışma istikametlerinin başlangıcı oldu. Bunlardan, (3.17) probleminin gelişmesi, derinleşmesi, kesinleşmesi… çağımızda çok önemli uygulama alanları olan, gelişmiş, sistemli, kapsamlı bir teori haline gelmiş olan ‘Fonksiyonların Konstruktiv Teorisi’ dir. Bu teoride de temel neticeler P. L. Tchebyshev ve onun ardışılları olan matematikçilere aittir.

$T_n(x)$ polinomuna Tchebyshev'in 1. nevi polinomu denir.

2. $T_n(x)$ polinomları tarih itibariyle 1. şıkta söylediğimiz şekilde ortaya çıktı. Fakat sonraları onu araştıranlar gördüler ki, bu polinomları başka yöntemlerle de elde edebiliriz.

1) Üretici fonksiyon yardımıyla

$$T(t,\theta)=\frac{1-t\cos\theta}{1-2t\cos\theta+t^2} \quad (-1<t<1)$$

fonksiyonu $t$' nin kuvvetlerine göre açılımı zamanı $T_n(x)$ polinomları katsayılar olarak karşımıza çıkıyor:

$$\frac{1-t\cos\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}=\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\cos n(\arccos x) \tag{3.19}$$

2) Bir diferansiyel denklemin özel çözümleri olarak da $T_n(x)$ polinomları ortaya çıkıyor:

$y=T_n(x)$ polinomları

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0 \tag{3.20}$$

denkleminin çözümleridir.

3) Bir de $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre kurulan ortogonal polinomlar olarak da $T_n(x)$, Tchebyshev polinomları ortaya çıkıyor.

3. $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre kurulan

$$U_n(x)=\mathrm{K}_n\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.21}$$

ortogonal polinomları da 2. nevi Tchebyshev polinomları olarak adlandırılır. Burada normlaştırıcı katsayı olan $\mathrm{K}_n$

$$\int_{-1}^{1} U_n^2(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \mathrm{K}_n^2\int_0^{\pi}\sin^2(n+1)\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\mathrm{K}_n^2$$

ile bulunur. Ancak, ortonormal $\hat{U}_n(x)$ için $\mathrm{K}_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ olmalıdır. Tamamen açıktır ki,

$$\frac{dT_{n+1}(x)}{dx} = (n+1)\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = (n+1)U_n(x)$$

Bu $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ polinomlarının her ikisi kendi ağırlık fonksiyonu ile ortogonal polinomlar sistemidir ve bunlar üzere Fourier serilerine açılım çok sık rastlanmaktadır.

4. Şimdi gösterelim ki $T_n(x)$ gerçekten $x$-in pozitif kuvvetlerine göre yazılabilir ifadeler-cebirsel polinomlardır.

Euler formülü gereğince $\theta = \arccos x$, $x = \cos\theta$ olduğu için

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta;\ \cos n\theta \pm i\sin n\theta = (\cos\theta \pm i\sin\theta)^n;$$

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - i\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$$

yazılabilir. Bunları dikkate alırsak,

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right] \tag{3.22}$$

formülüne ulaşırız. Burada $x = \cos\theta$ olduğu için $|x| \le 1$ dır. Fakat bazı durumlarda $|x| > 1$ değerleri de merak konusu olabilir. Bu durum için ise

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \tag{3.23}$$

Formülü uygulanabilir.

(3.22) formülünü

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}c_n^k x^{n-k} i^k\left(\sqrt{x^2-1}\right)^k\left[1+(-1)^k\right] \tag{3.24}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan da görülüyor ki, yalnızca $k$-nın çift kuvvetlerine uygun ifadeler sıfırdan farklı, $k$-nın tek kuvvetlerinde ise $1+(-1)^k=0$ olduğu için toplamda bulunan uygun terimler sıfır olur. $k$-nın çift kuvvetlerinde ise $1+(-1)^k=2$ ve $\left(\sqrt{(1-x^2)}\right)^k$ ifadesi köksüz olacağı için (3.24) ifadesinde her yerde $x$-in tam kuvvetleri dışında bir terim kalamaz, yani sağ taraf $x$-e bağlı bir polinom, yani $T_n(x)$ bir polinomdur.

Direk hesaplamalar ile kolayca aşağıdaki ifadeler bulunabilir:

$$\begin{aligned} T_0(x)&=1\\ T_1(x)&=x\\ T_2(x)&=2x^2-1\\ T_3(x)&=4x^3-3x\\ T_4(x)&=8x^4-8x^2+1\\ T_5(x)&=16x^5-20x^3+5x,... \end{aligned}$$

Bu eşitliklerden ilk üç tanesi direk hesapla elde edilirken, diğerlerini kolay bulmak için

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x) \tag{3.25}$$

Rekurense (tekrarlama) formülünü kullanmak daha sade bir yöntem olurdu.

(3.18) formülünden

$$T_n(1)=1,\ T_n(-1)=(-1)^n,\ T_{2n}(0)=(-1)^n,\ T_{2n+1}(0)=0,\ T'_{2n}(0)=0,\ T'_n(1)=n^2,$$

$$T'_n(-1)=(-1)^n n^2,\ T'_{2n+1}(0)=(2n+1)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \tag{3.26}$$

olduğu kolayca görülebilir. (3.25) formülü ise

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

trigonometrik formülünden elde edilir, zira

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta$$

şeklindedir.

5.Şimdi gösterelim ki, $T_n(x)$ ifadesinde $x^n$-in katsayısı $2^{n-1}$-dir. Gerçekten, (3.23) formülünü kullanarak

$$\frac{T_n(x)}{x^n} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n + \left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n\right]$$

den

$$\lim_{x\to\infty}\frac{T_n(x)}{x^n} = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n + \lim_{x\to\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n\right] = \frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$$

yani,

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}$$

olduğunu buluruz.

Herhangi $\mathrm{P}_n(x)$ polinomunda yüksek terimin katsayısı 1 olduğunda özel olarak $\tilde{\mathrm{P}}_n(x)$ sembolü kullanılır. Bu nedenle de

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

kabul edilir.

6. $T_n(x)$ polinomunda $n$ - tek sayı olduğunda $x$-in ancak tek kuvvetleri, $n$ - çift sayı olduğunda ise $x$-in ancak çift kuvvetleri bulunur. Bu özellik $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ formülünden de görülür.

### 3.2.1 Tchebyshev Polinomlarına Göre Seriye Açılım Üzerine

1. Önce Tchebyshev polinomlarının $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ağırlık fonksiyonu ile $[-1,1]$ aralığında ortogonal olduklarını, yani

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = m > 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

olduğunu görelim.

İspat için $\theta = \arccos x$, $x = \cos\theta$ olduğunu ve $0 \leq \theta \leq \pi$ olduğunu dikkate alırsak, sonuçta $\cos n\theta$ ve $\cos m\theta$ fonksiyonlarının ortogonallik özelliği yardımıyla ispatı bitiririz:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \cos(n-m)\theta + \cos(n+m)\theta \right] d\theta = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \pi/2, n = m > 0 \\ \pi, n = m = 0 \end{cases}$$

Dolayısıyla, $(T_n, T_m) = 0$, $n \neq m$ ise, $(T_n, T_n) = \dfrac{\pi}{2}$, $\|T_n\| = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ $(n \geq 1)$-dir.

Bu $\{T_n(x)\}$ ortogonal sistemi normlaştırırsak, sonuçta $\left\{ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} T_n \right\} \equiv \{\hat{T}_n\}_1^{\infty}$;

$\hat{T}_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} T_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ sistemine ulaşmış oluruz.

1. Şimdi $[-1,1]$ aralığında tanımlı bir $f(x)$ için

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t) \frac{\hat{T}_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (n = 0,1,2,...) \tag{3.28}$$

katsayılarını bularak, onların yardımıyla da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{T}_n(x) \tag{3.29}$$

serisini oluşturabiliriz.

Teorem 3.1. $f(x)$, $[-1,1]$ aralığında sürekli ise ve onun $\omega(f;\delta)$ süreklilik modülü

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)\ln\frac{1}{\delta}=0 \tag{3.30}$$

Dini şartını sağlarsa, bu durumda $f(x)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında yakınsak olan, Tchebyshev polinomları serisine açılabilir

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\hat{T}_n(x)\quad \left(x\in[-1,1]\right) \tag{3.31}$$

olur. Şimdi bu seri için Lebesque fonksiyonunu alalım:

$$L_n(x)=\int_{-1}^{1}\left|\sum_{k=0}^{n}\hat{T}_k(x)\hat{T}_k(t)\right|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta.\cos k\tau\right|d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta\cos k\tau\right|d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1+\sum_{k=1}^{n}\cos k(\theta-\tau)+\sum_{k=1}^{n}\cos k(\theta+\tau)\right|d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_n(\theta-\tau)+D_n(\theta+\tau)\right|d\tau\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_n(\tau)\right|d\tau\approx\frac{4}{\pi}\ln n$$

Burada $D_n(t)$-Dirishlet çekirdeğidir.

Dolayısıyla, Fourier- Tchebyshev serileri için Lebesque sabiti $\ln n$ hızıyla artar. Buna göre de Lebesque teoremi [Suetin,1979 (s-94)] bu durum için

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{T}_k(x)\right|\le c_1\mathrm{E}_n(f)_c(1+\ln n)\quad \left(\forall x\in[-1,1]\right) \tag{3.32}$$

şeklinde olur. Burada da en iyi yaklaşım hakkında söylediklerimizi dikkate alırsak şöyle bir sonuca varılır:

F.H. Nasibov Teoremi gereğince [Nasibov, 1962] (Teorem 2.4.1) eğer $f(x)$-in $s>0$ ($s$-nin kesir sayıda olabileceği unutulmasın) $f^{(s)}(x)\in Lip_M\alpha$ olursa, o zaman

$$E_n(f)_c\le\frac{c}{n^{s+\alpha}}$$

olur, ve buna göre de

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \hat{T}_k(x) \right| \le \frac{c_2}{n^{s+\alpha}} \ln n \tag{3.33}$$

elde edilir.

NOT: Birçok elementar fonksiyonların seriye açılımı zamanı Fourier- Tchebyshev serileri daha hızlı bir şekilde yakınsaklık sergilemektedir. Bunun da kaynağı, örneğin, Taylor serisine açılım zamanı $[-1,1]$ aralığında yakınsaklık hızına, fonksiyonun birim çember $(|z|=1)$ üzerinde bulunan aykırı noktaları etkide bulunurlar, Fourier- Tchebyshev serisinin yakınsaklık hızı ise yalnızca fonksiyonun birim parçada ($[-1,1]$ parçası) sahip olduğu özelliklere bağlıdır.

Bu nedenle, uygulamalı problemlerde Fourier- Tchebyshev serilerinin kullanımı daha avantajlı olur.

Şimdi, Fourier- Tchebyshev serisine açılıma ait birkaç örnek verelim,:

1. $\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}4\cos\frac{\theta}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} + \ln\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = -\ln 2 + \ln(1+\cos\theta) =$

   $= -\ln 2 + \ln(1+x) = -\ln 2 + \ln 2 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{T_n(x)}{n}$

2. $|\sin\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{4n^2-1}$ $(0 \le \theta \le \pi)$ - de $\theta = \cos x$ dersek

   $\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{2n}(x)}{4n^2-1}$ $(-1 \le x \le 1)$

3. $x = \cos\theta$ olduğunu bilerek

   $e^{ax} = e^{a\cos\theta}$ çift fonksiyonunu kosinüsler serisine açabiliriz;

$$e^{a\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m \cos^m\theta}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!2^m}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^m \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} c_m^k e^{(m-k)i\theta} e^{-ki\theta}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!(m-k)!} e^{(m-2k)i\theta} \tag{3.34}$$

(3.34) parantezi dahilinde olan toplamların yerlerini değiştirirsek,

$$e^{a\cos\theta}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!(m-k)!}e^{-(m-2k)i\theta} \tag{3.35}$$

formülüne de ulaşırız. (3.22) ve (3.23) formüllerini taraf tarafa toplarsak,

$$e^{a\cos\theta}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!(m-k)!}\cos(m-2k)\theta$$

formülüne ulaşırız ki, bu da

$$e^{a\cos\theta}=\mathrm{I}_0(a)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n(a)\cos n\theta$$

şeklinde yazılabilir ki, burada da $\mathrm{I}_n(a)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(a/2\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}$ -sanal argümentli Bessel fonksiyonudur. Sonuçta $\cos\theta=x$ dersek,

$$e^{ax}=\mathrm{I}_0(a)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n(a)\cos(n\theta)=\mathrm{I}_0(a)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n(a)T_n(x) \quad (10)$$

Özel halde, $x=1$ dersek,

$$e^{x}=\mathrm{I}_0(1)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n(1)T_n(x),\ -1\le x\le 1 \tag{3.36}$$

açılımını bulmuş oluruz.

4. Şimdi de $\sin ax$, $\cos ax$ fonksiyonlarının Tchebyshev polinomlarına göre seriye açılımına bakalım. Bu amaçla

$$J_n(a)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(a/2\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!} \tag{3.37}$$

1.nevi Bessel fonksiyonu kullanılabilir. Bu fonksiyonla sanal argümentli fonksiyon arasında

$$\mathrm{I}_n(ia)=i^nJ_n(a)$$

bağıntısı vardır. (2.90) formülünü de kullanarak

$$e^{iax}=\cos ax+i\sin ax=\mathrm{I}_0(a)+2\sum_{n=1}^{\infty}(i)^nJ_n(a)T_n(x)$$

elde edilir. Burada da sanal ve reel kısımlar ayrılırsa, sonuçta

$$\cos ax=\mathrm{I}_0(a)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^mJ_{2m}(a)T_{2m}(x) \tag{3.38}$$

$$\sin ax = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m J_{2m+1}(a)T_{2m+1}(x) \tag{3.39}$$

açılımlarına ulaşmış oluruz.

(3.35), (3.37), (3.38) açılımları yalnızca $-1 \le x \le 1$ değerleri içindir. Fakat $a$ sabitini değiştirerek, onların her $x$ için geçerli olduğunu da görürüz.

### 3.2.2 İkinci Nevi Tchebyshev Polinomları

1.Yukarıda artık söylemiştik ki, $h(x) = \sqrt{1-x^2}\,(-1 \le x \le 1)$ ağırlık fonksiyonuna uygun gelen ve 2.nevi Tchebyshev polinomları olarak adlandırılan

$$U_n(x) = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos x\right]}{\sqrt{1-x^2}} \quad (n = 0,1,2,...) \tag{3.40}$$

Polinomları ile $T_n(x)$ polinomları arasında

$$T_{n+1}'(x) = U_n(x)(n+1)$$

bağıntısı vardır. Bu fonksiyonlar da $[-1,1]$ aralığında ortogonaldırlar. Gerçekten

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sin\left[(n+1)\arccos x\right]\sin\left[(m+1)\arccos x\right]\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} \sin(n+1)\theta \sin(m+1)\theta = \begin{cases} 0, & n \ne m \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = m \end{cases}$$

olmaktadır.

$$\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2\sin(n+1)\theta\cos\theta \tag{3.41}$$

trigonometrik formülünden, $\theta = \arccos x$ olduğunu dikkate alırsak ve her tarafı $\sqrt{1-x^2}$ ile bölersek, sonuçta

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \tag{3.42}$$

Rekurense (tekrarlama) formülünü elde ederiz. Bu formülleri kullanarak birkaç $U_n(x)$ polinomu için

$$U_0(x)=1$$
$$U_1(x)=2x$$
$$U_2(x)=4x^2-1$$
$$U_3(x)=8x^3-4x$$
$$U_4(x)=16x^4-12x^2+1$$
$$U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$$

Özel polinomları elde edilir. (3.42) formülünden görülüyor ki, $U_n(x)$-de $x^n$-in katsayısı $2^n$-dir.

1. şıktan görülüyor üzere,

$$U_n(-1)=(-1)^n(n+1),\ U_n(1)=(n+1)$$

yani,

$$\tilde{U}_n(x)=\frac{1}{2^n}U_n(x)$$

dir.

1. $\tilde{U}_n(x)$ polinomları üzere de seriye açılımlar düzenlenebilir.

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(t)\hat{U}_n(t)\sqrt{1-t^2}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} f(t)\sin\left[(n+1)t\sin tdt\right]\quad (n\geq 0)$$

formülleri ile $a_n$ katsayıları hesaplanır ve onların da kullanımı ile $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\hat{U}_n(x)$ Fourier- Tchebyshev serisi düzenlenir.

Bu $\hat{U}_n(x)$ polinomlar serisinin yakınsaklık problemi de aşağıdaki teoremle çözülür.

Teorem 3.2: $[-1,1]$ parçasında sürekli $f(x)$ fonksiyonunun süreklilik modülü

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta)\ln\frac{1}{\delta}=0 \tag{3.43}$$

Dini şartını sağlıyorsa, bu durumda $f(x)$-in Fourier serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\hat{U}_n(x) \tag{3.44}$$

$(-1,1)$ aralığının her noktasında $f(x)$-e yakınsar ve $\forall\varepsilon>0$ için $[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$ parçasında bu seri düzgün yakınsar. Bunun da yanı sıra

$$\sqrt{1-x^2}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\hat{U}_k(x)\right|\le c_1 \mathrm{E}_n(f)(1+\ln n)\quad(|x|\le 1) \tag{3.45}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.3.: $f(x)$, $[-1,1]$ parçasında sürekli diferensiyellenebilir olsun ve $\alpha>\frac{1}{2}$ için $f'(x)\in Lip\alpha$ olsun. Bu durumda $f(x)$-in 2.nevi Tchebyshev polinomları üzere Fourier serisi $[-1,1]$ parçasının her $x$ noktasında $f(x)$-e yakınsar ve

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{U}_k(x)\right|\le\frac{c_1}{\eta^{\alpha-\frac{1}{2}}}\quad(x\in[-1,1]) \tag{3.46}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.4.: Eğer $[-1,1]$ da $f(x)$-in $s\ge 2$ olmak üzere $s$. mertebe dahil sürekli $f^{(k)}(x)$ türevleri varsa $(k=2,3,...,s)$ ve $f^{(s)}(x)\in Lip\alpha$ ise, bu durumda

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{U}_k(x)\right|\le\frac{c_2}{n^{s+\alpha-\frac{3}{2}}}\quad(x\in[-1,1]) \tag{3.47}$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca belirtelim ki, burada $f^{(s)}(x)$ türevi Riemann-Liuoville anlamında türevdir ve bu türev için $\mathrm{E}_n(f)$-in değerlendirilmesi F.H.Nasibov Teoremi gereğince yapılmaktadır.

NOT: (3.46) ve (3.47) eşitsizlikleri hemen hemen aynı anlamı taşırken, sağ tarafta $n$-in kuvvetinde bulunan $-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$ sayıları Lebesque fonksiyonu $L_n(x)$-in değerlendirilmesine bağlıdır ve bu 1.ve 2.nevi polinomları farklılaştıran noktalardan bir tanesidir. 1.nevi Tchebyshev polinomları için

$$L_n(x)\le\frac{4}{\pi}\ln n$$

olurken, 2.nevi polinomlarda

$L_n^2(x) \le c_3 n^3; \quad L_n(x) \le c_4 n^{3/2}$

gibidir.

### 3.2.3 Tchebyshev Polinomlarının Asimptotik Özellikleri Üzerine

$1^0$. 1. $T_n(x) = \cos n(\arccos x)$ $(-1 \le x \le 1)$ tanımından görülerek $[-1,1]$ da

$|T_n(x)| \le 1$ dir.

2. $\hat{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x)$ normlaşmış polinomları için $|\hat{T}_n(x)| \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ $(|x| \le 1)$ olur.

3. Nihayet, yüksek terimi 1 olan $\tilde{T}_n(x)$ için $|\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$ $(|x| \le 1)$ dir.

Bunlar $[-1,1]$ aralığında $T_n(x)$, $\hat{T}_n(x)$, $\tilde{T}_n(x)$ polinomlarının düzgün sürekli olduklarını gösterir.

Şimdi $[-1,1]$ parçasının dışında bu polinomların sahip oldukları özellikleri açıklamaya çalışalım.

$T_n(x)$ polinomları

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right] \tag{3.48}$$

şeklinde yazılabilir. Bu formüller, $|x| > 1$ için $T_n(x)$-in karakterini belirtmeye imkan vermektedir.

Gerçekten, $|x| > 1$ halinde $x + \sqrt{x^2 - 1}$ toplamı $x - \sqrt{x^2 - 1}$ farkından çok çok büyük olur. Buna göre de (3.48) formülü

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n \left[1 + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right)^n\right] \tag{3.49}$$

şeklinde yazılabilir. Burada da $n\to\infty$-da $\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^n \to 0 \quad \left(|x|>1\right)$

olduğundan $T_n(x)$ için

$$T_n(x)\approx\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n \tag{3.50}$$

asimptotik ifadesini bulmuş oluruz.

$x<-1$ olduğu durumda ise (3.49) ve (3.50) yerine uygun olarak

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\left[1+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^n\right] \tag{3.51}$$

$$T_n(x)\approx\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n \quad \left(x<-1; n\to\infty\right) \tag{3.52}$$

ifadelerini bulmuş oluruz.

Sonuç: $|x|>1$ halinde $\{T_n(x)\}$ Tchebyshev polinomları geometrik dizi hızıyla artarlar.

$2^0$. $\Phi(z)=z+\sqrt{z^2-1}$ dersek, $\dfrac{1}{\Phi(z)}=z-\sqrt{z^2-1}$ olur. Burada $z$ kompleks sayı olmakla $[-1,1]$ aralığını içine alan bir $D$ bölgesinde $|\Phi(z)|>1$ olur. Ona göre de

$$T_n(z)=\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n\left[1+\left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{z+\sqrt{z^2-1}}\right)^n\right] \tag{3.53}$$

formülünde $\left(\dfrac{z-\sqrt{z^2-1}}{z+\sqrt{z^2-1}}\right)^n$ geometrik dizi hızıyla azalır ve buna göre de

$$T_n(z)\approx\frac{1}{2}\Phi^n(z) \quad \left(z\in D, n\to\infty\right) \tag{3.54}$$

asimptotik estetiğine ulaşmış oluruz. Bunu da (3.53) te kullanırsak,

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^n \left[1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{R^{2n}}\right)\right] \tag{3.55}$$

asimptotik formülünü elde ederiz ki, burada kalan terim de vardır, $|w| = |\Phi(z)| = R > 1$ dir.

Nihayet,

$$\hat{T}_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^n \left[1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{R^{2n}}\right)\right] \tag{3.56}$$

asimptotik formülünü de buluruz.

# 4. KUAZİ-KLASİK YAKLAŞIM VE ONUN BİR UYGULAMASI

## (Bir Kuantum Mekanik Probleminin Çözümü)

1. Daha önce de belirttiğimiz gibi kuantum mekaniğinin birçok probleminin çözümünde

$$\left[k(x)y'\right]' + \lambda r(x)y = 0 \tag{4.1}$$

tipli denklemin çözümü için $\lambda \to +\infty$-da asimptotik bir ifadenin bulunması problemi ortaya çıkıyor.

(4.1) denklemini

$$y(x) = \varphi(x)u(s), \ s = s(x) \tag{4.2}$$

dönüşümüyle

$$u''(s) + \left[\lambda - q(s)\right]u(s) = 0 \tag{4.3}$$

standart hale getirebiliriz, burada

$$\left[s'(x)\right]^2 = \frac{r(x)}{k(x)}, \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\frac{1}{2}\frac{(ks')'}{ks'} = -\frac{1}{4}\frac{\left[k(x)r(x)\right]'}{k(x)r(x)}$$

şartlarının sağlanır olması gerekir ve

$$q(s) = -\frac{\left[k(x)\varphi'(x)\right]'}{r(x)\varphi(x)}$$

şeklindedir. Bir sıra standart dönüşümler yaparak $k(x)>0$, $r(x)>0$ $\left(x\in(a,b)\right)$ halinde (4.1) denkleminin çözümü için $\lambda\to+\infty$-da $[a,b]\subset(a,b)$ aralığında

$$y(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)p(x)}}\left[A\cos\xi(x) + B\sin\xi(x)\right] \tag{4.4}$$

asimptotik ifadesi bulunabilir [Nikiforov ve Uvarov, 1988 (s.117-119)], burada

$$p(x) = \sqrt{\lambda\frac{r(x)}{k(x)}}, \quad \xi(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt$$

şeklindedir. $k(x)>0$, $r(x)<0$ olduğunda ise

$$y(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)p(x)}}\left[Ae^{\xi(x)} + Be^{-\xi(x)}\right] \tag{4.5}$$

formülü elde edilir, burada da

$$p(x) = \sqrt{\lambda\left|\frac{r(x)}{k(x)}\right|}, \quad \xi(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt$$

ile tanımlıdır.

1. Eğer (4.1) denkleminde

$$k(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}, \quad r(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad \lambda = n(n+\alpha+\beta+1)$$

seçilirse,

$y(x)=\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ (Jacobi polinomu)

fonksiyonu (4.1) denklemini sağlar. B durum için $m=\beta+1$, $l=\beta$, $\nu=\beta$. $n\to\infty$-da $\lambda\to\infty$-dır. $-1\le x\le 1-s$ için

$$y(x)\approx\frac{\sqrt{\xi(x)}}{(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}}\left[AJ_\beta(\xi)+BJ_{-\beta}(\xi)\right] \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada da

$$\xi=\xi(x)=\mu\int_{-1}^{\alpha}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\mu\arccos(-x),\ \mu=\sqrt{\lambda}$$

$$\lim_{x\to-1}y(x)=\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^n\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(\beta+1)}$$

olduğu için $B=0$

$$A=\lim_{x\to-1}\frac{(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}}{\sqrt{\xi}J_\beta(\xi)}y(x)=(-1)^n\frac{2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\Gamma(n+\beta+1)}{n!\mu^{\beta+\frac{1}{2}}},$$

$$\mu=\sqrt{n(n+\alpha+\beta+1)}$$

olur, ve $x=-\cos\theta$ dersek, $0\le\theta\le\pi-\delta$ için

$$\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}(-\cos\theta)\approx\frac{(-1)^n\Gamma(n+\beta+1)}{n!\mu^\beta}\frac{\sqrt{\theta/2}}{\left(\cos\theta/2\right)^{\beta+\frac{1}{2}}\left(\sin\theta/2\right)^{\beta+\frac{1}{2}}}J_\beta(\mu\theta) \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada $\alpha=\beta=0$ halinde $\mathrm{P}_n^{(0,0)}(\cos\theta)=\mathrm{P}_n(\cos\theta)$-Legendre polinomu olur ve onun için

$$\mathrm{P}_n(\cos\theta)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\frac{\cos\left[\left(n+1/2\right)\theta-\pi/4\right]}{\sqrt{\sin\theta}} \tag{4.8}$$

asimptotik formülüne ulaşılır.

$\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ olursa, $P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(\cos\theta) = T_n(x)$-Tchebyshev polinomuna dönüşür ve (4.7)-den:

$$T_n(\cos\theta) \approx \frac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\mu}}{n!} \frac{\sqrt{\theta/2}}{\left(\cos\theta/2\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\left(\sin\theta/2\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} J_{\frac{1}{2}}(\mu\theta)$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!}\sqrt{\frac{\mu\beta}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(\mu\theta), \ \mu = \sqrt{\lambda}$$

asimptotik formülü elde edilir.

2. Tekrar $u = \varphi(x)y$ dönüşümü yapılarak

$$[ky']' + \lambda ry = 0$$

denklemi

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma\rho\frac{dy}{dx}\right] + \lambda\rho y = 0$$

şekline dönüştürülebilir, burada $\rho(x)$ fonksiyonu $(\sigma\rho)' = \tau\rho$ denklemini sağlar. $\tau(x)$, $\tilde{\tau}(x)$ ve $\varphi(x)$ arasında ise

$$\tau = \bar{\tilde{\tau}} + 2\frac{\varphi'}{\varphi}\sigma$$

bağıntısı vardır [Nikiforov ve Uvarov, 1988].

**Lineer Harmonik Osilatör**

Lineer harmonik osilatör için $E$ enerjinin ve özel fonksiyonların bulunması problemini alalım. Bu durumda $u = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ potansiyel enerjili alanda hareket eden parçacık söz konusudur. $m$-kütle, $x$-denge durumunda eğim, $\omega$-açısal frekanstır. En basit harmonik osilatör $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ potansiyeline sahip non-relativistik parçacık doğadaki sistemler için mükemmel bir modeldir.

Bu problem kuantum elektrodinamiği oluştururken temel rol oynar. Kristal ve moleküllerde çeşitli dalgaların incelenmesinde büyük ölçüde uygulamalara sahiptir.

Harmonik osilatörde $\psi(x)$ dalga fonksiyonu için Schrödinger denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{m\omega^2}{2}x^2\psi=\mathrm{E}\psi \quad (-\infty<x<\infty)$$

şeklinde olur.

$\mathrm{E}$ -nin öyle değerleri bulunması gerekiyor ki, $\psi$ nin sürekli olmasının yanı sıra

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2(x)\,dx=1$$

normalizasyon şartını da sağlasın.

Bu problemi çözmek için $x$ koordinatı ve $\mathrm{E}$ enerjisi yerine yüksek enerji seviyeleri incelenirken $\xi,\varepsilon$ gibi birimsiz değişkenlere geçiş yapılır:

$$x=\sqrt{\frac{h^2}{m\omega}}\xi=\alpha\xi\,,\quad \mathrm{E}=h\omega\varepsilon$$

sonuçta

$$\psi''_{\xi}+\left(2\varepsilon-\xi^2\right)\psi=0$$

denklemi elde edilir.

Bu denklemde $\sigma(\xi)=1$, $\tilde{\tau}(\xi)=0$, $\tilde{\sigma}(\xi)=2\varepsilon-\xi^2$ olmakla genelleşmiş hipergeometrik denklemdir.

$\psi(\xi)$ için olan denklemi

$$\sigma(\xi)y''+\tau(\xi)y'+\lambda y=0$$

hipergeometrik şekle getirelim, bunun için $\psi(\xi)=\varphi(\xi)y(\xi)$ almamız yeterli olur ve $\varphi(\xi)$ nın kendisi

$$\frac{\varphi'}{\varphi}=\frac{\pi(\xi)}{\sigma(\xi)}$$

denkleminin çözümüdür. $\pi(\xi)$ polinomu için

$$\pi(\xi)=\pm\sqrt{k-2\varepsilon+\xi^2}$$

ifadesi bulunur, $k$ sabiti öyle seçilir ki, kök içindeki ifadenin iki kat kökü olsun, yani, $k=2\varepsilon$. O zaman $\pi(\xi)=\pm\xi$ olur ve bu 2 çözümden öyle seçilir ki, $(\sigma\rho)'=\tilde{\tau}\rho$ olsun (burada $\tau(\xi)=\tilde{\tau}(\xi)+2\pi(\xi)$), $(-\infty,\infty)$ da sınırlı olsun ve

$\sigma(\xi)\rho(\xi)\xi^k\big|_{\xi\geq\pm\infty}=0$ $(k=0,1,2,...)$ olsun.

Eğer $\sigma(\xi)=e^{-\xi^2}$ seçersek, $\rho$ üzerine konulan şartlar sağlanır ve buna uygun gelenler

$$\pi(\xi)=-\xi\,,\ \varphi(\xi)=e^{-\frac{\xi^2}{2}};$$

$$\tau(\xi)=-2\xi\,,\ \lambda=2\varepsilon-1$$

olur. Enerjinin özdeğerleri

$$\lambda_n+n\tau'+\frac{n(n-1)}{2}\sigma''=0$$

denkleminden bulunur. Buradan da

$$\varepsilon=\varepsilon_n=n+\frac{1}{2}\text{, yani }\mathrm{E}=\mathrm{E}_n=h\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\ (n=0,1,2,...)$$

elde edilir. $y_n(\xi)$ özvektörler ise

$$y_n(\xi) = \mathrm{B}_n e^{\xi^2} \frac{d^{(n)}}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right)$$

formülü ile bulunur. Bunlar ise, sabit çarpan farkıyla $\mathrm{H}_n(\xi)$-Hermite polinomlarıdır. $\psi(x)$ dalga fonksiyonu için

$$\psi_n(x) = c_n e^{-\xi^2} \mathrm{H}_n(\xi), \; x = \alpha\xi \, , \; \alpha = \sqrt{\frac{h}{m\omega}}$$

$c_n$ normalizasyon sabiti ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{\,2}(x)\,dx = 1$$

formülünden kolayca bulunabilir: Buradan

$\alpha c_n^2 dn^2 = 1, \; dn^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}$ Hermite polinomu için $\mathrm{H}_n(x)$-in karesidir. Sonuçta

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}$$

olur.

$\mathrm{E} = \mathrm{E}_n = h\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ enerji ifadesi $n = 0$ için sıfır nokta enerjisini verir. Buna göre katılarda düşük sıcaklıklarda tüm katıların özgül ısı düşmesi açıklanır. Düzensiz düşük sıcaklığın davranışı ise Einstein şöyle açıklamıştır: her bir atom bağımsız basit harmonik osilatör olmalıdır. Buna göre osilatörler siyah cisim ışıması gibi sadece kuantalı enerji yaymalı ya da soğurmalıdır. Böylece düşük sıcaklıklarda osilatörleri hareketlendirmek için termal uyarı ortamında yeterli enerji nadiren vardır sonucu çıkar.

## 9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu araştırmada klasik mekanik, kuantum mekaniği kavramlarına açıklık getirilmiş, bunların arasındaki ilişki araştırılmıştır. Kuantum mekaniğinde esas olan Schrödinger denklemi, onun birkaç özel halleri incelenmiştir. Böyle denklem çözümleri olan fonksiyonların argumentin büyük değerlerinde yaklaşık-asimptotik ifadelerin bulunması için kuazi-klasik yaklaşım yöntemi açıklanmıştır. Bu yöntem matematiksel fiziğin özel fonksiyonlarından olan Tchebyshev polinomlarına uygulanmıştır. Aynı zamanda çözüm olacak fonksiyonların böyle özel fonksiyonlar serisine açılımı, bu açılımların yakınsaklığı ile ilişkili 'Fonksiyonların en iyi yaklaşım teorisi'nin bazı önemli neticeleri de ele alınmıştır. Bu çalışma, mikro parçacıkların fiziği ile ilgili ortaya çıkan problemlerin matematiksel olarak çözüm yöntemlerinden olan kuazi-klasik yaklaşım metoduna atf edilmiştir. Bilindiği gibi klasik mekanik Aristo-Galile-Newton'dan başlayarak geliştirilmeye çalışılmıştır. Galile'nin anladığı üzere en çok konuşma objesi olan 'hareket' kavramı daha hiç incelenmemiştir. Galile'nin bu yaklaşımına göre hareketin fiziksel olarak incelenmesi ancak matematiğin uygulanması ile mümkün olabilir. Anıtsal hız problemi matematikte 'türev' kavramının ortaya çıkmasına, belirlenmesine sonunda da mekaniğe uygulanmasına imkan sağlamıştır. Bundan sonra İ. Newton bu konuyu daha da ileriye götürdü.

Tamamen açık ki, bunların hepsi içerisinde bulunduğumuz dünyanın yapısına bağlıdır. Bu ise o zaman için mevcut olan bir tek geometriye- Oklit geometrisine bağlı olarak anlaşılabilir olduğu için klasik mekanik sadece bu geometrinin ilkelerini temel alabilirdi. Bu da sadece makro cisimler için geçerli olan kanunların bulunmasını sağladı.

Fakat daha sonraları bu kanunlar bazı problemlerin incelenmesi için ışık, elektromanyetik gibi olaylar için yeterli olmadı. Burada ortaya çıkan en önemli problem ‘uzay’ kavramına olan yaklaşım oldu. Yani Oklit geometrisinde var olan üç boyutlu uzay burada yeterli olmuyor. Artık 4 boyutlu uzay kullanımı gerekti. Burada nesnelerin uzayda sahip olduğu konum zamanla birlikte ele alınmalıydı. Böylece non-Oklit geometrisi yani çok boyutlu uzaylar ortaya çıktı. Daha önceden varlığı bile düşünülmeyen N. İ. Lobaçevsky, B. Riemann (vd.) geometrileri kullanılmaya başladı.

Artık bu geometriler yeni objelere uygulanmaya başladı. Örneğin, Oklit geometrisinde temel oluşturan nokta, yörünge, uzaklık gibi kavramlar şu ana kadar sahip oldukları anlamını kaybetmiş oldular. Bu kavramlar yeni bir anlam kazandılar. Tek bir örnek verelim: Oklit geometrisinde ‘nokta’ bölünemez olduğu halde fiziksel nokta sonsuz olarak bölünebilir.

Dolayısıyla, mikro parçacıkların öğrenilmesi bu geometrinin yardımı ile başarıya ulaştı.

Burada da klasik mekanikte olduğu gibi incelenmekte olan bir olayın matematiksel modelini oluşturmak gerekiyordu, böyle modeller olarak da bu veya diğer şekilde diferansiyel denklemler ortaya çıkmaya başladı. Bu tür denklemler arasında en çok bilinen kısmi türevli, 2. mertebe diferansiyel denklemler oldu. Bu tür denklemler arasında da kuantum mekaniğinde önemli bir kullanıma sahip olan Schrödinger denklemi vardır. Böyle denklemlerin çözümünü kesin olarak mümkün değildir. Bu yüzden bu tür denklemleri çözmek için yaklaşık çözümlerin bulunması problemi ortaya çıkıyor. Bu konuda ise kuazi-klasik yaklaşım metodu daha çok kullanılan bir metotdur.

Kuazi-klasik yaklaşımın temel problemi, çözüm için bir limit durumu ile ilgili yaklaşık-asimptotik bir ifadenin bulunmasıdır. Söz konusu denklem

$$\left[k(x)y'\right]' + \lambda r(x)y = 0$$

$\lambda \to \infty$-da çözüm için yaklaşık-asimptotik bir ifadenin bulunmasıdır.

Hazırlamış olduğum bu tez de bu konuyla ilgili bazı kavramlara açıklık getirmeye çalıştık. En çok kullanılan araç-ortogonal sistemlerdir. Böyle sistemler üzere

Fourier serileri, fonksiyonların en iyi yaklaşım problemi ile ilgili sonuçlar olduğu için bu konulara ait gerekli bilgileri vermeye çalıştık.

Diferansiyel denklemin çözümü olacak fonksiyon, bu serilerin kısmi toplamları ile yaklaşık ifade olur. Bu yaklaşıklığın hatalarının hesaplanması kolay değildir, hatta çok önemli bir problemdir. Bu konuda da yaklaşım teorisinde Jackson tipli teoremler olarak bilinen teoremler önemlidir. Bu söz konusu hatalar, fonksiyonun kaçıncı mertebe türeve sahip olmasına bağlı olarak belirlenir. Bunu da dikkate alarak F.H. Nasibov'a ait olan Jackson tipli teoremlerin son durumlarını belirten birkaç sonucu da vermeyi uygun bulduk.

Soruların cevaplandırılmasında, matematiksel fiziğin özel fonksiyonları olan Tchebyshev, Legendre, Hermite, Jacobi, Laguerre polinomları hakkında bilgi verdik. Özel olarak Tchebyshev polinomları için asimptotik ifadeleri bulmaya çalıştık. Fizik ve uygulama örneği olarak da lineer harmonik osilatör için $E$ - enerjinin ve özel fonksiyonların bulunması problemini ele aldık.

Öneri olarak aşağıdakileri verebiliyoruz:

1. Fizik bölümlerinde matematik derslerine daha çok önem verilsin.
2. Yaklaşık çözüm yöntemleri çok önemli konular olarak ele alınsın.
3. Fonksiyonların en iyi yaklaşım teorisine bir şekilde öğrenme imkanı sağlansın.
4. Genel integral kavramları ile ilgili öğrencilere bilgiler verilsin, zira eski Riemann integrali çağımızda çok yetersiz kalmaktadır. Ölçülebilir fonksiyonlar, Lebesque integrali, Stieltjes integrali daha çok önem taşımaktadır. Unutmayalım ki, fizikte, özellikle kuantum fiziğinde Dirac fonksiyonu tipli fonksiyonlar kullanılmaktadır.

## KAYNAKLAR

Akhiyeser N. İ., Theory of Approximation, (Rusça), 1947 ve 1965; İngilizcesi - M. 1956.

Aleksich , Ortogonal Serilerin Yakınsaklık Problemleri , 1963.

Bari N.K. , Trigonometriçeskiye Ryadı (Rusça), M. 1961 Dokl. AN SSSR, v. 309, No: 3 (1989) (in Russian-1960).

Eddington, Teoriya Otnositelnosti, 1922.

Einstein A., ‘Sushnost Teorii Otnositelnosti, M. 1955.

Hobson V. , Küresel ve Elipsodial Fonksiyonlar Teorisi, 1952.

Hrushikesh N. M., Devidas V. Pai (İng.) Fundamentals of Approximation Theory, 2000Jackson D. , Fourier Series and Orthogonal Polinomials, İng. 1941, Rusçası 1948.

Jeffrey A. ve Daı H.H., Handbook Of Mathematical Formulas and Integrals, 2008.

Kaçar A., Fourier Dönüşümleri ve Uygulamaları, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1986 (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi).

Kaçmarz S. , Şteynhaus G. , Ortogonal Seriler Teorisi, 1958.

Landau L.D. and Lifshitz E.M., Quantum Mechanics, 1958.

Lavrentyev M. A. , Şabat B. V. , Metodı Teorii Funktsiy Kompleksnozo Peremennogo, M. ‘Nauka’ , 1974.

Marcellan F. And Van Assche W., Lecture Notes in Mathematics, 1883

Matthias B. University of Regensberg Germnay ve R. K. Bhaduri McMaster University Canada, Semiclassical Physics,1997 .

Minkowsky G., ‘Prostranstvo u Vremya’, 1908.

Nasibov F. G(H). , Ekstremalnıye zadaçi v Klassakh Tselıkh Funktsiy (Monografi, R. Bakü, 1998).

Nasibov F. G(H). , O poryadke Nailuçshikh Priblijeniy Funktsiy,

imeyuşikh drobnuyu proizvodnuyu v smısle Riemanna-Liuovillya, İzv. AN Azerb. SSR No: 3(1962), 51-57.

Nasibov F. G(H). , O poryadke Nailuçshikh Priblijeniy nekotorikh Klassov Funktsiy, İzv. VUZov SSSR ‘Matematika’, No: 3(1969), 35-41.

Nasibov F. G(H). , O Priblijenii Funktsiy v Ravnomernoy Metrike i v Sreduem, BAKU, AGNA, 1983.

Nasibov F. G(H). , Ob Approksimatsii Tselımi Funktsiyami, Moskova.

Nasibov F. G (H), Sevgül Öztürk; Kwaziklasik yaklaşım üzerine, 27. Uluslar arası fizik kongresi, 14-17 Eylül-2010, İstanbul.

Nasibov F. H ve Hacısalihoğlu H.(H)., Fonksiyonların En İyi Yaklaşım Teorisinin Esas Problemleri ve Çağdaş Durumu, Türk Dünyası 2. matematik Kongresi, Sakarya, ‘007.

Natanson İ. P. , Konstruktivnaya Teoriya Funktsiy (Rusça), M. 1949

Nikiforov A. F. , Uvarov V. B. , Özel Fonksiyonlar Teorisinin Esasları (Rusça), 1974, M.

Nikiforov F. ve Uvarov V.B., Special Functions of Mathematical Physics,1988.

Szego G. , Orthogonal Polinomials, New York, 1939.

Suetin P. K. , Klasik Ortogonal Polinomlar (Rusça), M. 1979.

Timan A. F. , Theory of Approximation of Functions of a Real Variable in Engl. Translated, İnc. New York, 1963.

Vatson G., Bessel Fonksiyonlar Teorisi, 1949.

Vurdu, Can D. 2006. Atom Metal Yüzey etkileşmesi. Gazi Üniversitesi Doktora Tezi.

Vurdu, C., D., Özçelik, S., Güvenç, Z., B. 2007. Quasiclassical studies of Eley-Rideal and hot-atom reactions on a surface at 94 K: H(D) -> D(H) + Cu(111)", Surface Science 601: 3745.

Vurdu, Can D., Güvenç, Ziya B. 2010. Developing interaction potential for H (2H)→Cu(111) interaction system: A numerical study. Commun Nonlinear Sci Numer Simulation 15, 648.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

| | |
|---|---|
| Soyadı, adı | : Sevgül ÖZTÜRK |
| Uyruğu | : T.C. |
| Doğum tarihi ve yeri | : 31.07.1984/Bulgaristan/Shumen |
| Medeni hali | : Bekar |
| E-posta | : sevgulozturkk@gmail.com |

### Eğitim

| Derece | Eğitim Birimi | Mezuniyet tarihi |
|---|---|---|
| Yüksek lisans | Kastamonu üniversitesi | 2011 |
| Lisans | Gazi Üniversitesi/ Fizik Bölümü | 2008 |
| Lise | Aydınlıkevler Lisesi | 2002 |

### Yabancı Dil

İngilizce (Üds-75)

Bulgarca

### Katıldığım Konferanslar

Nasibov F. G (H), Sevgül Öztürk; 'Kwaziklasik yaklaşım üzerine', 27. Uluslar arası Fizik Kongresi, 14-17 Eylül-2010, İstanbul