KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK İSPAT SÜRECİ VE EĞİLİMLERİ

Şerife ZAİMOĞLU

İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

KASTAMONU
2012

TEZ ONAYI

Şerife ZAİMOĞLU tarafından hazırlanan " **8. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik İspat Süreci ve Eğilimleri** " adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : **Prof. Dr Ferhad NASİBOV**

Jüri Üyeleri :

Prof. Dr. Ferhad NASİBOV
Kastamonu Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Ahmet KAÇAR
Kastamonu Üniversitesi
İlköğretim Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Çiğdem ARSLAN
İstanbul Üniversitesi
İlköğretim Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Ömer KÜÇÜK
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK İSPAT SÜRECİ VE EĞİLİMLERİ

Şerife ZAİMOĞLU

Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ferhad NASİBOV

Bu araştırmanın amacı, ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat ve akıl yürütme sürecini ve ispat temsil şekillerine olan eğilimlerini tümevarım ve tümdengelimsel muhakeme doğrultusunda incelemektir. Bu araştırmanın, ülkemizin matematik öğrenme alanında ispat yapmaya ilişkin ihtiyaçlarının belirlenmesine ve bu anlamda öğrencilerde ispat yeteneğinin gelişimi için izlenecek stratejinin belirlenmesine, öğretmenin bu aşamadaki yeri ve rolüne, öğretmenin belirlenen stratejiye uygun tasarlayacağı sınıf içi yaşantılara katkı sağlayacağı düşünülmüştür.
Araştırmanın örneklemini; Bursa iline bağlı iki ilköğretim okulundan 8. sınıftan toplam 154 öğrenci oluşturmuştur. Araştırmacı tarafından 6. ve 7. sınıf geometri öğrenme alanı ve kazanımlarına uygun, geometri temelli, üçgen ve açıların daha ön planda tutulduğu toplam 8 açık uçlu soru hazırlanmıştır.
Geometride ispat Öklid' ten başlayarak günümüze kadar başka bilim dallarında da uygulanmaktadır. Bu anlamda, (Bell 1976), (Stylianides 2007) kaynakları da bizim çalışmalarımıza ışık tutan önemli kaynaklar olmuştur.
Verilerin analizi aşamasında yüzde ve frekans tablolarından yararlanılmıştır. Bu araştırmayı yaparken, verilen cevaplar Bell' in (1976) belirlediği ispatın matematiksel anlamının taşıdığı üç boyut (*doğrulama, açıklama ve sistematikleştirme*) dikkate alınmıştır. Ayrıca alt problemler belirlenirken, Stylianides' in, 2007 de, sınıf içinde yapılan ispatlama etkinliklerine ilişkin ispat için ortaya koyduğu iki özellik (*ispatlama yolları ve ispat temsil şekilleri*) göz önünde bulundurulmuştur. Öğrencilerin cevaplamalarında kullandıkları ispatlama yolları (akıl yürütme metotları) her soruda, tek tek incelenmiş, kodlanmış ve bu kodlamaların yüzde ve frekansları hesaplanmış, tablo halinde gösterilmiştir. Öğrencilerin ispat temsil şekilleri için ise, öğrencilerin verdikleri cevaplar kategorilere ayrılmış ve bu kategorilerin frekansları her soruda, tabloda gösterilmiş yüzdeleri ise grafiklerle sunulmuştur.

Sonuçlar, genel olarak, bilinen doğrulardan yeni bir doğru çıkarma durumunun az da olsa gerçekleştiğini gösterirken, doğruya dolaylı yollardan (*olmayana ergi yöntemi, çelişki bulma yöntemi*) ulaşma durumunun neredeyse hiç gerçekleşmediğini, öğrencilerin geçerli bir ifadenin doğrulamasını yapabilmelerine rağmen, geçersiz ifadeyi çürütme yollarını (*ters örnek bulma, çelişki bulma yöntemi*) bilmediklerini, en çok tercih edilen ispat türü sayısal örnekleme ve görsel ispat, en az tercih edilen ispat türünün cebirsel ispat olduğunu göstermiştir. Sayısal örnekleme kategorisinde değerlendirilen cevaplamalardan, öğrencilerin örnekleyerek, deney gözlem ve ölçmeye dayalı ispatlama yoluna gitmeleri, onların tümevarımsal muhakeme yapmaya eğilimli olduklarını, görsel ispat kategorisinde ise, cevaplar, öğrencilerin, doğrudan sembolik olarak yapılan bir çıkarımla, ispatın açıklama boyutunda yetersiz kaldıklarını ortaya koymuştur. Cebirsel ispat kategorisinde değerlendirilen cevaplamalarda öğrencilerin cebirsel ifade ve işlemleri de tam kavrayamadıklarını göstermiş, bununla birlikte, ispatın matematiksel anlamının boyutlarına bakıldığında; cebirsel ispat yapan öğrencilerin açıklamalarının yeterli fakat ötesinde daha matematiksel bir özellik olan sistematikleştirme boyutunda olmadıklarını ortaya koymuştur.

2012, 88 sayfa
Anahtar kelimeler: ispat, akıl yürütme, geometrik ispat, tümevarımsal ve tümdengelimsel muhakeme

ABSTRACT

M. Sc.Thesis

GEOMETRICAL PROOF PROCESSES AND TENDENCIES OF 8TH GRADE STUDENTS

Şerife ZAİMOĞLU

Kastamonu University
Institute of Science
Department of Primary Education
Supervisor: Prof. Dr. Ferhad NASİBOV

The aim of this study is to investigate 8th grade students' geometrical proof and reasoning processes and their tendencies to proof representations in terms of deductive and inductive reasoning. The present study is considered to be helpful to determine the needs of our country with respect to mathematical proof instruction, to determine the strategies to be followed for improving the students' geometrical proving processes, to determine the role of the teacher in proving process, and to shed a light to classroom activities according to the determined strategies.

The study was carried out with 154 students in two primary schools in Bursa. Eight open-ended questions related to 6th and 7th grade geometry subjects where triangle and angles were given importance were prepared by the investigator.

In geometry, Proof, starting from Euclid, has been carried out in other fields up to date. In this context, the sources of Bell (1976), (Stylianides 2007) have been the main sources which shed a light to our studies.

For the analysis of the data, percentage and frequency tables were used. When analyzing the data, three aspects of mathematical proof (justification, explanation, and systematizing) suggested by Bell were used. Additionally, when determining sub-problems, two properties of in-classroom proofs (proving procedures and proof representation types) set forth by Stylianides in 2007 were taken into consideration. The students' answers (proving processes/reasoning methods) were analyzed for each question, were coded, and percentage and frequencies were calculated accordingly, and they were shown in tables. For the students proof representation types, the students' answers were categorized, and the frequencies of these categories were demonstrated in tables and their percentages were shown in graphics.

The results indicated that the situation of inferring a new truth from generally known truths was rarely encountered, while reaching the truth indirectly (method of reductio ad absurdum, proof by contradiction) was almost non-existing. The results also indicated that although the students were able to justify a valid statement, they were not able to refute an invalid statement (opposite example, contradiction). The findings showed that the most preferred proof type was numerical sampling and visual proof whereas the least preferred one was algebraic proof. The answers evaluated in numerical sampling category showed that the students prefer deductive reasoning by sampling and by proving with experiment, observation and measurement. The answers evaluated in visual proof category showed that the students remained incapable for the explanation of proofs by direct symbolic deduction. The answers evaluated as algebraic proofs demonstrated that the students were not able to understand algebraic statements Furthermore, when we look at the mathematical aspects of proof, the results show that the explanations of students making algebraic proofs were adequate, but were not systematized, which is a more mathematical feature.

2012, 88 pages

Keywords: proof, reasoning, geometrical proof, deductive and inductive reasoning

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri, yardımlarını esirgemeyerek yetişme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Ferhad NASİBOV' a, çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen değerli bilim dalı başkanımız sayın Prof. Dr. Ahmet KAÇAR' a, çalışmalarım sırasında katkıları bulunan sayın Yrd.Doç. Dr. Abdulkadir TUNA'ya, sayın Yrd. Doç. Dr. Güler TULUK ve sayın Araş. Gör. Oktay MERCİMEK' e, ders dönemim süresince desteğini gördüğüm sayın Yrd. Doç. Dr. Gülten TORUN'a, sayın Yrd. Doç. Dr Göksel BİLGİCİ' ye ve yaşantımın her aşamasında fedakarlık göstererek beni destekleyen aileme içten teşekkür ederim.

Şerife ZAİMOĞLU
Kastamonu, Ocak 2012

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Leonardo da Vinci' nin dediği gibi "Matematiksel ispattan geçmeyen hiçbir insan araştırması asıl ilim olarak adlandırılamaz.''

Çağımızda herkes karşılaştığı her cümlenin, her ifadenin, her teklifin, her önerinin kesin, inanılır, güvenilir, şüphe ve endişelere yer bırakmayan tarzda olmasını ister. Bu tip özelliklere sahip olmayan hiç bir şeyi de kabul etmezler. Dolayısıyla insanlar her şeyin **ispatlanmış** olduğunu isterler.

W. Bell (1976), "A study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations'' adlı çalışmasında ispatın matematiksel anlamının üç boyut taşıdığını ve her birinin kendi açısından çok önemli olduğunu ifade etmiştir.

Bell' e göre ispatın matematiksel anlamı üç boyut taşımaktadır ve her biri kendi açısından çok önemlidir:

"İlki, bir önermenin doğruluğu ile ilgili olan geçerli kılma ya da *doğrulamadır;* ikincisi, a*çıklamadır;* çünkü iyi bir ispattan bir önermenin neden doğru olduğuna dair bir öngörü taşıması beklenmektedir, bu ispatın geçerliliğini etkilemez fakat bir ispattaki varlığı estetik açıdan tercih edilmektedir. İspatın üçüncü boyutu daha matematiksel bir özellik olan *sistematikleştirmedir* ki bu, sonuçların aksiyomların, ana kavramların ve teoremlerin ve bunlardan türeyen küçük sonuçların tümdengelimsel bir sisteme dönüştürülmesidir.''

Bell' in belirlediği üç özellik ispatları incelemek için matematik eğitiminde bir araç olarak kullanılmaktadır.

Yeni bireyler tarafından incelendiğinde ve değerlendirildiğinde ispat, sürekli bir eleştiri ve yeniden doğrulanma süreçlerine tabi tutulmaktadır. Hatalar, belirsizlikler ve yanlış anlaşılmalar bu sürekli tabi olma sürecinde giderilmektedir. İspat konunun can alıcı noktasını ortaya çıkararak anlama yetisini arttırır. Son olarak, ispat "törenseldir'' ve saf akıl yürütme gücünün bir "törenidir'' (Tsamir et al. 2009). Matematiksel akıl yürütme ve ispat insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenektir (Altıparmak 2005). Birçok olgu hakkında iç görü geliştirmek ve bunları ifade etmek için etkili yollar sunmaktadır. Bu bağlamda matematiksel akıl yürütme ve ispat okul öncesi dönemden 12. sınıfa kadar öğrencilerin matematiksel deneyimlerinin bir parçası olmalıdır (Alıntılayan Özer 2002).

Geometri, matematiksel ispatları öğrenmek ve öğretmek için, matematiksel kavramları araştırmak için, günlük yaşam ve matematik arasındaki boşluğu doldurmak için ve matematiğe insan kültürünün bir parçası olarak değer verebilmek için iyi bir başlangıç noktasıdır.

Buradan yola çıkarak bu çalışmada, ilköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik ispatlama ve akıl yürütme süreçleri ve ispat temsil şekillerine olan eğilimleri, tümevarım ve tümdengelimsel muhakeme süzgecinden geçirilerek gözlemlenmiştir. Çalışmanın, öğrencilerde ispat yeteneğinin gelişimi için izlenecek stratejinin belirlenmesine, öğretmenin bu aşamadaki yeri ve rolüne, öğretmenin belirlenen stratejiye uygun tasarlayacağı sınıf içi yaşantılara bir ışık tutacağı ümit edilmektedir.

1.1 İspatın Tarihsel Gelişimine Kısa bir Bakış

Matematiğin doğuşunun en önemli kaynağı insanın evreni, çevresini nicel özellikleriyle algılama yeteneğidir. Bu yetenek, insana günlük ihtiyaçlarını ve sorunlarını çözmede tarih boyunca yardım etmiştir. Günlük ihtiyaçlardan doğan matematiğin ilk örneklerini Mezopotamya'da görmekteyiz. Yerleşik hayata geçilmesi ve tarımla uğraşılmasıyla birlikte Sümerler, Babiller ileri mühendislik gerektiren yapıtlar meydana getirmişlerdir. Sulama kanalları, asma bahçeleri düşünüldüğünde Mezopotamyalıların matematikte hayli ileri gittiklerini söyleyebiliriz. Aynı dönemde günlük ihtiyaçlardan doğan matematiği Çin'de, Hindistan'da ve Mısır'da da görebiliriz. Suların çekilmesiyle Nil nehrinin kıyılarında tarım yapmaları, her yıl tarlalarını ölçme ihtiyacında olan Mısırlıları geometri yapmaya zorlamıştır. Mısırlılar belli düzeyde ölçme bilgisine özellikle yer ölçme bilgisine ihtiyaç duyuyorlardı. Yaptıkları bu ölçme etkinliklerine yer ölçme anlamına gelen geometri denildi. Sonuç olarak, Çin'de, Mezopotamya'da, Hindistan'da ve Mısır'daki bu gelişmeler ilkel sayma becerisini aşan matematiğin M.Ö. 5000 yıllarına dayandığını bize göstermektedir.

Babil veya Mısır'daki matematik daha çok sınama yanılma yöntemine bağlı deney ve gözlem düzeyinde tümevarımsal bir çalışmadır. Matematikleri deney ve gözleme dayandığı için bu kültürlerde kullanılan alan ve hacim formülleri bir takım hatalar içeriyordu. Örneğin, Mısırlılar dairenin alanını hesaplarken π sayısını 22/7, Babilliler 3 olarak alıyordu. Dörtgenin alanını bulurken Babiller (bugünkü gösterimle) A= $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$ formülünü kullanıyorlardı. Bu formül dikdörtgenler dışındaki şekiller için doğru sonuç vermiyordu. Dolayısıyla, deneysel gözlem ile sınama yanılma yöntemine bağlı bu tür bilgilerin gerçek anlamda bir bilim oluşturduğu söylenemez. Dolayısıyla Babillilerin ve Mısırlıların matematikte ispat anlayışına veya mantıksal çıkarım yöntemlerine ulaştıkları söylenemez (Yıldırım 1988).

Matematiğe kuramsal bilim niteliği kazandıranlar Eski Yunanlılardır. Yunanlılar, geometriye yalnızca onun pratik yararlılığı açısından değil aynı zamanda onun kuramsal alakasından dolayı çok önem verdiler. Deneysel yaklaşımla tatmin olmadılar; bütün geometri uygulamalarının altında yatan, uzamın genel yasalarının katı tümdengelimsel ispatlarını bulmayı istediler. Yunanlı düşünürler, birkaç yüzyıl boyunca geometriye daha fazla geometrik ilkeyi keşfetme ve ispatlama yönünde dikkat yönelttiler.

Yunan matematiğinin ilk başlarında, ünlü olan Miletli Thales (İ.Ö. 640-550) ya da (İ.Ö 625-547), Sisamlı Pythagoras (İ.Ö. 580-500) ve Euclides (İ.Ö. 365-300) gelir (Struik 1969).

Thales ilk defa mantıksal bir yapı geliştirdi ve ispat düşüncesini geometriye soktu. Zamanına kadar gelen geometri problemlerini ve kurallarını topladı. Bunları kendi yöntemleriyle ispatlamaya çalıştı. İspatladığı önermelerden bazıları şunlardır:

1. Çap daireyi iki eşit parçaya böler.
2. İkizkenar üçgenin taban açıları eşittir.
3. İki doğru kesiştiği zaman iç ters açılar eşittir.
4. Yarım dairede çapı gören açı dik açıdır.
5. Benzer üçgenlerin kenarları oranlıdır.
6. İkişer açısı ve birer kenarları eşit olan iki üçgen özdeştir.

Bugün New York Metropolitan müzesinde kendine ait olduğu sanılan üzerinde kendi isminin yazılı olduğu bir vazo vardır.

Pisagor, Pitagor ya da Pythagoras ismiyle bilinen bir matematikçidir. Doğum ölüm tarihleri kesin olmadığı için bu tarihler değişik kaynaklarda (İ.Ö. 596-500), (İ.Ö. 572-497) ve (İ.ÖÖ. 580-500) biçimlerinde verilmektedir. En iyi tahminlere göre İ.Ö. 580 ile İ.Ö. 569 tarihleri arasında doğduğu sanılıyor. Bugünkü ismiyle Sisam o dönemdeki ismiyle Samos denen Ege denizindeki bir adada dünyaya gelmiştir. Thales' in öğrencisidir.

Pisagor doktrininin bize bıraktığı en önemli şeyin pozitif tamsayıların Tanrı tarafından yaratıldığı düşüncesidir. Bu sayılar evreni yönetiyordu. Tüm fiziksel olaylar bu sayılarla işaret ediliyor ve gösteriliyordu. Her şeyin bir geometrik şekli vardı ve bir sayı ile temsil ediliyordu. Yalnız gezegenlerin hareketleri sayıların oranları ile gösterilebilirdi. Bir de müzik notalarının harmonileri sayıların bölümleriyle ifade edilirdi. Üçgenin kenarları arasında 3 : 4 : 5 bağıntısı varsa bu bir dik üçgendir diyorlardı.

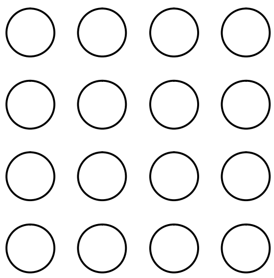
Pisagorcular da Thales'te olduğu gibi ateş, su, hava ve toprağı temel ilke olarak almışlardı. Evrene hakim olan bunlardı. Tek ve çift olma temel ilkeydi. Çift sayıları ikili olan taşlarla ikiye ayırarak yazıyorlardı. Oysa tek sayılar ikili taşlar biçiminde gösterilemiyordu. Çünkü bu bölmede her zaman bir taş açıkta kalıyordu. Bunun sonucu olarak Pisagorcular şu sonuçlara vardılar:

a. Çift sayıların toplamı çifttir.
b. İki tek sayının toplamı çifttir.
c. İkili guruplar oluşturmayan tek sayıların toplamı tektir.
d. Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı tektir.

Bu toplamların sonuçları olarak şu sonuçları biliyorlardı.

a. Çift bir sayının karesi çifttir.
b. Tek sayının karesi tektir.

Bunları aşağıdaki yuvarlaklarla gösteriyorlardı.



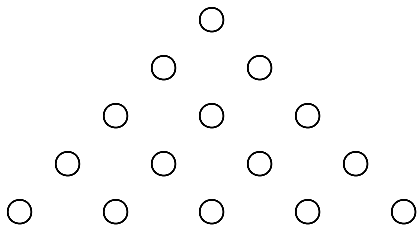
Şekil 1. 1 Kareli Sayılar

Bu biçimde taş yığınlarıyla

$1+3=2^2, \quad 1+3+5=3^2, \quad 1+3+5+7=4^2, \ldots \quad 1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

Sonucuna varabiliyorlardı.

Pythagoras okulunun bir başka buluşu üçgensel sayılar ve kare sayılardır.



Şekil 1. 2 Üçgen Sayılar.

Üçgensel olan doğal sayıların da ilginç özellikleri vardır. Bunlar da 1+2 = 3, 1+2+3 = 6, 1+2+3+4 = 10, 1+2+3+4+5 = 15, …, 1+2+3+4+…+n = n(n+1)/2 sonuçlarını verir.

Bugünkü gösterimle Pythagoras' ın keşfi: Köşegeni a ve kenarı b olan bir kareyi ele alalım. Pythagoras' ın teoremine göre,

$$2b^2 = a \Rightarrow a = b\sqrt{2}$$

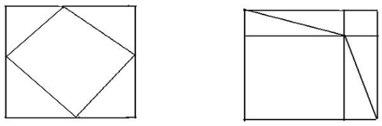
olacaktır. Eğer bu değer ölçülebilir ise,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

şeklinde bir sayı olmalıydı. Bu oran daha sonra karşımıza irrasyonel sayı olarak çıkacaktır.

Bhaskara Açarya ''Lilavati'' adlı kitabında Pisagor teoremi için aşağıdaki iki şekli vermiş ve yanlarında ''Bakınız '' diye yazmıştır (Fetisov 1954).

BAKINIZ



Şekil 1. 3 Pisagor Teoreminin İspatı

Pisagor teoremi: Dik üçgende katetler üzerinde kurulmuş karelerin alanları toplamı hipotenus üzerinde kurulmuş karenin alanına eşittir.

Bu şekillere bakarak biraz da düşünürsek Pisagor teoreminin gerçek olduğunu görürüz.

Burada 2 tane eşit kare vardır.

Birinci kare 4 tane eşit dik üçgen ve 1 kareden oluşur ki, bu kare hipotenus üzerinde kurulmuştur. 2. kare ise 4 tane aynı dik üçgen ve 2 kareden oluşur ki, bu kareler katetler üzerinde kurulmuştur. 4 dik üçgeni her iki kareden çıkarırsak, geriye kalan alanlar da eşit olacaktır. Bu geriye kalan alanlar: 1. karede hipotenus üzerinde kurulmuş kare, 2. karede ise katetler üzerinde kurulan iki kareden ibarettir. Sonuçta Pisagor teoreminin gerçekliği ispatlanmış olur (Nasibov 2010).

Öklid' in işlemlerinin ayrıcı özelikleri nelerdir? Öklid daima, geometrik yasaları evrensel bir biçimde formüle etmiştir. Asla herhangi bir tikel, ya da edimsel çizgi ve şeklin özelliğini tartışmaz; fakat daima, yalnızca belli bir çeşitten her şekil ya da çizginin sahip olduğu özelliklerle ilgilenir. Yalnızca bu değil; aynı zamanda onun yasaları daima, asla yaklaşımlar olarak nitelendirilmeyen mutlak ve katı bir biçimde anlatılır. Örneğin der ki, her üçgenin açılarının toplamı daima iki dik açıya eşittir. Bunu o, yaklaşık olarak doğru veya genellikle doğru olduğunu söyleyerek nitelendirmiyor – katı ve mutlak olarak doğru olan bir şey olarak sunuyor. Daha da önemlisi, Öklid bu geometrik yasaların birçoğunu yalnızca içeriğini vermiyor; onları ispatlıyor da. Gerçekte, kitabının bütünü sistematik bir biçimde düzenlenmiş ispatlardan oluşur. Dahası, ispatları tümevarımsal değildir. Öklid asla bizden üçgenin açılarının toplandığı iki dik açıya eşit olup olmadığını görmek için gerçek üçgenlerin açılarını ölçmemizi istemez. O asla kendini bu gibi edimsel deneyler veya gözlemlerle meşgul etmez. Bunun yerine onun ispatları, tümdengelimsel ispatlardır. O bu ispatlarla sonuçlarını, mutlak mantıksal zorunluluğun katılığı ile kurmaya çalışır. Bir ispat, (en azından ispat sözcüğünün sıradan anlamında) bir sonucun, doğru olduğu zaten bilinen öncüllerden mantıksal olarak çıktığını göstermekle, o sonucu kurma yönünde ilerleyen bir uslamlama zinciridir (Barker 2003).

Geometrinin yasaları iki guruba bölünür: Bir yanda ispatlanmayacak, ama öncüller olarak alınacak yasaların bir küçük gurubu olacak. Öte yanda, her biri bu temel öncüllere başvurmayla kesinkes ispatlanacağını umduğumuz diğer geometrik yasaların sonsuz geniş bir gurubu olacak. Öklid'in Öğeler' i yasaların bu ilk gurubuna '' *postulatlar* '' adını verir: Bunlar Öklid'in doğru olarak baktığı, ispatlamaya niyet etmediği fakat diğer geometrik yasaların ispatları için kullanacağı, çizgiler, açılar, şekiller hakkındaki yasalardır. İspatlanacak bu yasalara '' teoremler'' denir. Öklid' in kendi sisteminde verdiği *beş postulat* şunlardır:

1. Herhangi bir noktadan diğer herhangi bir noktaya düz bir çizgi çizilebilir.
2. Herhangi sonlu düz bir çizgi, bir düz çizgide daimi olarak uzatılabilir.
3. Verilen herhangi bir nokta ve uzunluk için, o noktayı merkez alan ve yarıçap uzunluğu o uzunluk olan bir çember çizilebilir.
4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.
5. Eğer bir düz çizgi, diğer iki düz çizgiyi keserse, öyle ki, bir kenardaki iki iç açının toplamı iki dik açıdan küçükse, şu halde iki düz çizgi yeterince uzatıldığında, bu açıların olduğu ilk çizginin aynı kenarında kesişirler.

Beşinci postulatın çok eski zamanlardan, diğerlerinin bir sonucu olabileceği düşüncesi **vardı. Ömer Hayyam, Nasreddin Tusi** gibi bilginlerin bu konuyla bağlı önemli düşünceleri vardır.

XIII. Yüzyılda yaşamış ve çalışmış olan Nasreddin Tusi' nin bu hususta ayrıca yeri vardır. 5. postulatı ispatlamak isterken o yeni bir önerme ile tarihe geçmiştir. Aslında Tusi göstermiştir ki, Öklid' in 5. aksiyomu "Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180 derecedir.'' önerisi ile eşdeğerdir.

Postulatların yanı sıra Öklid, aksiyomlar adı verilen diğer ilk beş ilkeyi de kullanır. Öklid için aksiyomlarla postulatlar arasındaki temel fark, postulatlar özellikle geometrinin konusu olan nesneler (çizgiler, açılar, şekiller ve diğerleri) hakkında konuşurken, aksiyomlar özel olan geometrik herhangi bir şeyden konuşmaz, daha genel olandan konuşur gözükür.

Öklid'in *aksiyomları* şunlardır:

1. Aynı şeye eşit olan şeyler, birbirine eşittirler.
2. Eşit şeylere eşit şeyler eklenirse, toplamlar eşit olur.
3. Eşit şeylerden eşit şeyler çıkarılırsa, kalanlar eşit olur.
4. Birbiriyle çakışan şeyler, birbirine eşittir.
5. Bütün, parçasından büyüktür.

Her bir terimin anlamının yeterince sabitlendiğinden emin olma isteği ve kısmen saf bir açıklık isteğinden dolayı bütün terimlerin kullanılmadan önce *tanımlanması*, Öklid yönteminin ana noktasını oluşturur.

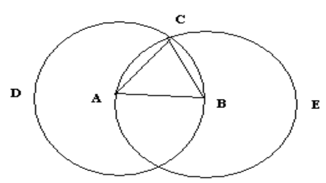
Başlangıçlar'ın 1. kitabının başlangıcında yer alan bazı *tanımlar* aşağıdadır:

1. Nokta parçası olmayandır.
2. Çizgi, genişliği olmayan uzunluktur.
3. Düz çizgi, kendi üzerindeki noktalarla bir hizada uzanan çizgidir.
4. Yüzey uzunluğa ve genişliğe sahip olandır.
5. Düzlem yüzey, kendi üzerindeki düz çizgilerle bir hizada uzanan yüzeydir.

6. Düzlem açı, düzlemde bir doğru üzerinde bulunmayan iki doğrunun kesişiminde elde edilen bir geometrik şekildir.
7. Bir düz çizgi, diğer bir düz çizgi üzerine bitişik açılar birbirlerine eşit olacak şekilde dikildiğinde eşit açılardan her birine dik açı adı verilir, bu düz çizgilere ise karşılıklı dik çizgiler denir.
8. Şekil, herhangi bir sınır ya da sınırlar tarafından kapsanan şeydir.
9. Çember, düzlem üzerinde merkez olarak adlandırılan bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeridir.
10. Paralel düz çizgiler, aynı düzlemde yer alan ve hiçbir yönde birbirleriyle buluşmayan her iki yönde de sonsuzca uzatılabilen düz çizgilerdir.

Öklid yöntemine kısa bir bakış elde etmek için, onun 1. kitabındaki 1. önermesini ele alışına bakalım.

Verilen sonlu bir düz çizgiden bir eşkenar üçgen oluşturmak üzere



AB gibi sonlu bir düz çizgi alalım. Böylece amaç, AB düz çizgisi üzerinde eşkenar üçgen oluşturmak olsun.

A merkezli ve AB yarıçaplı BCD çemberi çizilsin **(postulat 3).**

B merkezli BA yarıçaplı ACE çemberi çizilsin **(postulat 3).**

C noktasından çemberlerin birbirlerini kestiği yerden, A ve B noktalarına düz çizgiler CA ve CB çizilsin **(postulat 1).**

A noktası CDB çemberinin merkezi olduğundan AC, AB ye eşittir **(Tanım 9).**

B noktası CAE üçgeninin merkezi olduğundan BC, BA ya eşittir **(Tanım 9).**

AC, AB ye eşit, AB, BC ye eşit olduğundan AC, BC ye eşittir **(Aksiyom 1).**

Dolayısıyla, CA, AB, BC düz çizgileri birbirine eşittir. Sonuç olarak ABC üçgeni eşkenardır. Böylece verilen sonlu düz çizgi AB üzerine kurulmuştur.
Görüldüğü gibi Öklid teoremlerini, tanım, aksiyom ve postulat gibi öncüllere dayanan mutlak doğru bir mantıksal çıkarım üzerine kurmuştur.

Ancak M.Ö 200 yıllarından sonra Roma İmparatorluğunun hakim olduğu topraklarda matematik adına hiç bir şey yapılamamıştır.

M.S VIII. yüzyılda Türk- İslam kökenli bilim adamlarının sahneye çıkmalarıyla Yunan matematiği, M.Ö 200 yıllarından sonra karanlığa gömülen matematik, yeniden hayat bulmuş ve Harizmi, Banu Musa, Abu Kamil, Abul- Vefa, Al Kahri, Ömer Hayyam, İbn-i Sina ve El Biruni ile devam etmiştir.

Öklid' in zamanından beri, Öğeler üzerine çalışmış olan birçok kişinin Öklid' in beşinci postulatıyla ilgili farklı görüşleri ortaya çıkmış ve Öklid' ci olmayan geometri ortaya çıkmıştır. Bu çalışmalar arasında en önemli yeri olan N. İ. Lobachevsky' nin (1826) çalışmalarıdır. Daha sonra J. Bolyai, F. Gauss, B. Riemann, Sacchery vd. ile devam etmiştir.

1.2 İspat Yöntemleri

1.2.1 Teorem

Tanım 1 (hipotez, hüküm)

p => q şeklindeki bir koşullu önermede p doğru ve q da doğru ise böyle koşullu önermelere teorem denir. p önermesine hipotez, q önermesine de hüküm denir.
Çift gerektirme olarak ifade edilen teoremler de vardır.

Örnek 1:

Tek sayı olan bir doğal sayının karesi, tek olan doğal sayıdır. Bu ifade bir teoremdir. Bu teoremi sembolik olarak şu şekilde ifade edebiliriz.

p: $n \in N$ ve n bir tek sayıdır.

q: $n^2 \in N$ ve n^2 bir tek sayıdır.

Burada hipotez p, hüküm q dur. Teorem p=> q şeklinde yazılır.

1.2.2 Tümevarım

Doğal sayılar (N) kümesi üzerinde tanımlı P(x) açık önermesi verilmiş olsun. Bu açık önermenin ($\forall x \in N$) doğru olduğunu göstermek istiyoruz. Fakat N kümesinin eleman sayısı sonlu değildir. Bu nedenle $\forall x \in N$ için P(x) önermesinin doğru olup olmadığını bilemeyiz. İşte bu nedenle P(x) önermesinin $\forall x \in N$ için doğru olduğunu göstermek için ;

1. P(1) önermesi doğru ise,
2. P(n) için doğru olduğunu kabul ettiğimizde ($n \in N$),
3. P(n+1) doğru ise, $\forall x \in N$ için, P(x) önermesi doğrudur. Bu ispat yöntemine tümevarım denir.

UYARI: Burada P(x) açık önermesi N de değil de, A sonlu bir küme olmak üzere N –A da tanımlı olabilir. Bu durumda aynı işler N-A kümesi için yapılır.

Örnek 2:

$$\forall n \in N /\{0\}\, için$$
$$P(n): 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

İspat:

1) n= 1 için P(1)=1

2) Bir $n \in N$ /{0} için

P(n) :1+2+3+…+n= $\frac{n(n+1)}{2}$

olduğunu kabul edelim.

3) P(n+1): 1+2+3+…+n+ (n+1)= $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

önermesinin doğru olduğunu göstermeliyiz.

Eşitliğin sol tarafına bakarsak,

1+2+3+…+n= $\frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu kabul etmiştik. Bunu göstermek istediğimiz eşitliğin sol tarafında yerine koyarsak,

1+2+3+…+n+(n+1)= $\frac{n(n+1)}{2}$ + (n+1)

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

bulunur. İspat tamamlanır.

1.2.3 Tümdengelim

Tanım 1 (Tümdengelim)

p, q, r birer önerme olsun. p=>r ve r=> q doğru ise yani p=>r ve r=>q gerektirmelerinin doğruluk değerleri 1 ise p=>q birleşik önermesinin doğruluk değeri de 1 dir. Bu kurala tümdengelim denir. Bu kuralın ispatı kolaydır. Aşağıdaki doğruluk tablosundan görülür.

p	q	r	P=>r	r=>q	P=>q
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1

1.2.4 Tümdengelim İspat Yöntemleri

İspatlarda tümevarım ve tümdengelim ilkeleri (kuralları) kullanılır. Bir teorem tümdengelim ilkesi kullanılarak ya doğrudan ya da dolaylı yoldan ispatlanır.

1) Doğrudan İspat Yöntemi

p=>q teoreminin ispatında tümdengelim ilkesi kullanılır. p nin doğruluğundan q_1 gibi bir önermenin doğruluğu, q_1 indoğruluğundan q_2 gibi bir önermenin doğruluğu, … q_{n-1} in doğruluğundan q_n in doğruluğu ve q_n in doğruluğundan q nun doğruluğu çıkar.

$$p \Rightarrow q_1, q_1 \Rightarrow q_2, \ldots, q_{n-1} \Rightarrow q_n, q_n \Rightarrow q, p \Rightarrow q.$$

Örnek 3:

Çift bir doğal sayının karesi çift bir doğal sayıdır.

İspat:

p : n bir çift doğal sayıdır.

q : n^2 bir çift doğal sayıdır.

Teorem $p \Rightarrow q$ şeklindedir. n=2k ($k \in N$)

q_1 : 2k bir çift doğal sayıdır.

$p \Rightarrow q_1$, koşullu önermesinde p doğru olduğundan q_1 doğrudur(çift sayı tanımından).

$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2.(2k^2)$ yazılabilir. $k \in N$ iken $k^2 \in N$ (N kümesi adi çarpma işlemine göre kapalı olduğundan) ve $2.(2k^2)$ çift sayı olduğundan (çift sayı tanımından), n^2 çift bir doğal sayıdır. $q_1 \Rightarrow q$ elde edilir. Bu ikisinden $[(p \Rightarrow q_1)$, $(q_1 \Rightarrow q)]$, $p \Rightarrow q$ sonucuna varılır.

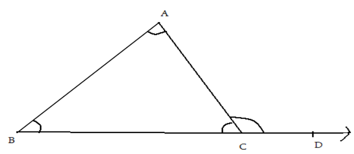
2) Dolaylı İspat Yöntemleri

Tanım1 (Olmayana Ergi Yöntemi)

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ olduğunu doğruluk tablosundan görmek kolaydır.

$p \Rightarrow q$ teoremi yerine $q' \Rightarrow p'$ teoremi ispatlanır. Yukarıdaki denklikten dolayı bu teorem ispatlanmış olur. Bu yönteme **olmayana ergi yöntemi** denir.

Örnek 4:



İspat:

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ denkliğini kullanarak, $q' \Rightarrow p'$ teoremini ispatlayalım. ABC üçgeninde,

p : ABC bir üçgendir.

q : m(A) +m(B) =m(ACD) olsun.

q' : m(A) +m(B) $\neq$ m(ACD) önermesine denktir. Bu doğru olunca,

m(C) +m(ACD) $\neq$ 180 eşitliğinden,

p' : m(A)+m(B)+m(C) $\neq$ 180 elde edilir. Bu ise p' önermesinin doğru olmasıdır. $q' \Rightarrow p'$ teoremi ispatlanmış olur.

Tanım2 (Çelişki Bulma Yöntemi)

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q \equiv (p \wedge q')'$ denkliklerinden yararlanırız. Bunun için $p \wedge q'$ çelişkisi elde edilir. $p \wedge q'$ birleşik önermesinin yanlış olduğu sonucuna varılır. Buradan da $(p \wedge q')' \equiv p \Rightarrow q$ olduğundan ispat biter. Bu ispat yöntemine **çelişki bulma yöntemi** denir.

Örnek 5:

“Bir üçgenin iki iç açısının ölçülerinin toplamı bunlara komşu olmayan dış açının ölçüsüne eşittir.’’ teoremini ele alalım. Bu teoremi bir de çelişki bulma yöntemiyle ispatlayalım.

İspat:

p : ABC bir üçgendir.

q : m(A) +m(B) =m(ACD) olsun.

$p \wedge q'$ önermesinin yani q' önermesinin doğru olduğunu kabul edelim.

m(A) +m(B) $\neq$ m(ACD) olsun.

r : m(C) +m(ACD) = 180 dir.

m(A) +m(B) $\neq$ m(ACD) kabul ettiğimizden, r önermesinde m(ACD) yerine, m(A)+m(B) değerini koyduğumuzda, m(A)+m(B)+m(C) $\neq$ 180 bulunur. Bu ise,

r' : Bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamı 180 dir önermesi ile çelişir. O halde q' önermesi yanlış ve $p \wedge q'$ yanlış olur.

$(p \wedge q')' \equiv p \Rightarrow q$ teoremi ispatlanmış olur.

Biliyoruz ki $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi her zaman bir teorem değildir. p hipotezi doğru iken veya doğru kabul edildiğinde $p \Rightarrow q$ önermesinin doğru olmadığını yani q önermesinin doğru olmadığını diğer bir deyişle $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değerinin yanlış olduğunu göstermek için;

1) Ters Örnek Bulma Yöntemi

2) Çelişki Bulma Yöntemi

diye iki yöntem kullanılır.

Ters örnek bulma yönteminde,
$(p \Rightarrow q)' \equiv p \wedge q'$ denkliğinden faydalanılır. En az bir ters örnekle, $p \wedge q'$ önermesinin doğru olduğu, q önermesinin yanlış olduğu bulunarak $p \Rightarrow q$ önermesinin yanlış olduğu sonucuna varılır.

Örnek 6:

''Bir doğal sayı 2 ve 4 ile ayrı ayrı bölünürse bu doğal sayı 8 ile de bölünür.'' önermesini ele alalım.

p : Bir doğal sayı 2 ve 4 ile ayrı ayrı bölünür.

q : Bu doğal sayı 8 ile bölünür.

Verilen önerme sembolik olarak $p \Rightarrow q$ şeklindedir. 12 sayısı 2 ve 4 ile ayrı ayrı bölünür ama 8 ile bölünmez. Bir ters örnek bulunmuştur. $p \Rightarrow q$ önermesi yanlıştır. Çelişki bulmak için de, koşullu önerme doğru kabul edilerek çelişki elde edilir.

Örnek 7:

Çift bir doğal sayının üç katı tek bir doğal sayıdır önermesini ele alalım. Bu yanlıştır. Çünkü,

$p : n \in N$ ve çift

$q : 3n$ tek doğal sayı $(n = 2k, k \in N)$ olsun.

$3n = 3.2k = 2.(3k)$ yazılabilir. Görülüyor ki $3n$ bir çift doğal sayıdır. (çift sayı tanımından) çelişki bulunmuştur.

Tanım 1 :Akıl Yürütme

Doğru olan veya doğru kabul edilen bazı önermelerden faydalanarak doğru bir sonuca ulaşmaya mantık biliminde akıl yürütme ile bilinenlerden (doğrulardan) yeni bir **doğru çıkarma** denir. Bu akıl yürütme **argumentlerle** yapılır.

$p, q, ..., r$ birer önerme olsun.

$(p \wedge q \wedge, ... \wedge r) \Rightarrow a$

Şeklinde bir gerektirmeye (koşullu önermeye) **argument** denir. Burada $p, q, ..., r$ önermeleri argumentin birer hipotezleridir (Özdemir 1999).

Bu çalışma, yukarıda bahsettiğimiz ispat yöntemleri ve tanımlar doğrultusunda yürütülmüştür.

Stylianides (2007), sınıf içinde yapılan ispatlama etkinliklerine ilişkin ispat için bir tanım ortaya atmıştır:

İspat, matematiksel bir önerme için veya önermeye karşı birbirine bağlı savlar dizisidir ve aşağıdaki özellikleri taşımaktadır.

1. Daha fazla ispata gerek olmaksızın doğru ve erişilebilir olan ve sınıf tarafından kabul edilen ifadeleri *(kabul edilmiş ifadeler dizisi)* kullanır.

2. Geçerli ve bilinen ya da sınıfın kavramsal olarak ulaşabileceği seviyede olan akıl yürütme metotlarını *(ispatlama yolları)* kullanır.

3. Sınıf için uygun ve bilinen ya da sınıfın kavramsal olarak ulaşabileceği seviyede olan anlatım şekilleriyle *(ispat temsil şekilleri)* ifade edilir (Alıntılayan Tsamir et al. 2009).

Stylianides, sadece ispatın içeriğini (1) vurgulamakla kalmaz, ispatlama yollarına (2) ve ispatların nasıl temsil edildiğine (3) de eşit derecede önem verir.

Ayrıca bu araştırmada,alt problemler belirlenirken, ispat *çerçevesi* olarak son iki özellik dikkate alınmıştır.

Bell' e göre ispatın matematiksel anlamı üç boyut taşımaktadır ve her biri kendi açısından çok önemlidir:

"İlki, bir önermenin doğruluğu ile ilgili olan geçerli kılma ya da *doğrulamadır;* ikincisi *açıklamadır* çünkü iyi bir ispattan bir önermenin neden doğru olduğuna dair bir içgörü taşıması beklenmektedir, bu ispatın geçerliliğini etkilemez fakat bir ispattaki varlığı estetik açıdan tercih edilmektedir. İspatın üçüncü boyutu daha matematiksel bir özellik olan *sistematikleştirmedir* ki bu, sonuçların aksiyomların, ana kavramların ve teoremlerin ve bunlardan türeyen küçük sonuçların tümdengelimsel bir sisteme dönüştürülmesidir.''

Yine bu araştırmada öğrencilerin verdikleri cevaplar bu üç özellik doğrultusunda incelenmiştir.

1.3 İspat Sınıflandırmalarına İlişkin Yapılan Araştırmalar

Bu bölümde matematik eğitimi ile ilgili literatürde önemli yer tutan ispat sınıflandırmalarına yer verilecektir.

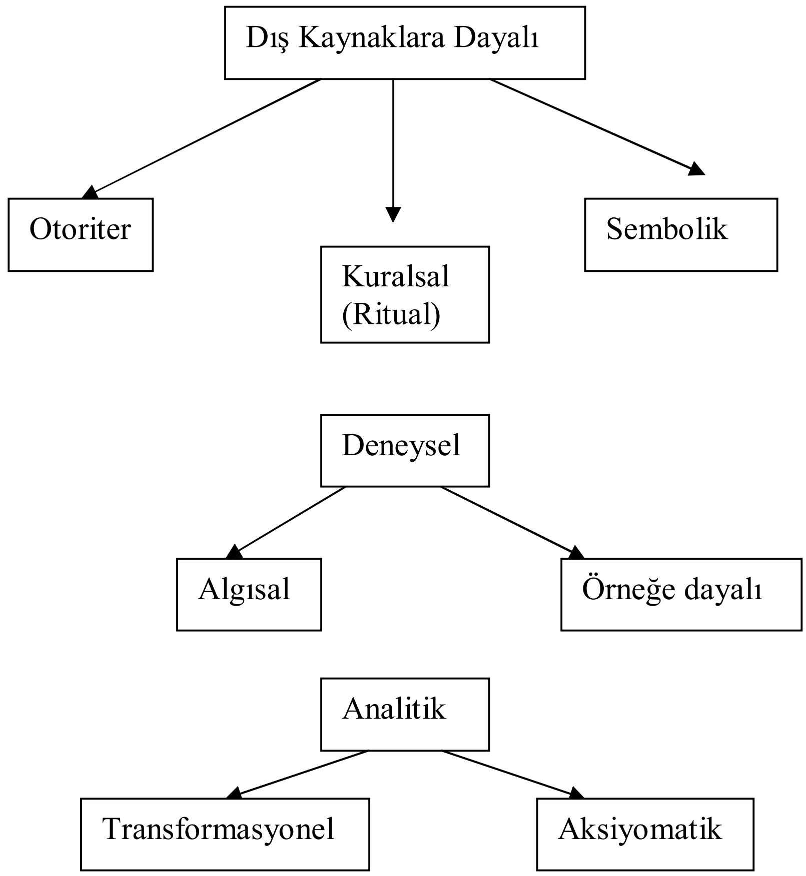
Balacheff (1988), ispatı gerçekçi ve kavramsal doğrulamalar olarak adlandırdığı iki kategoriye ayırmıştır. Geçekçi ispatlar örneklerin kullanımına, davranışlara veya gösterimlere dayanırken kavramsal ispatlar özelliklerin soyut formülasyonları ve özellikler arasındaki ilişkilere dayanır. Gerçekçi ispatlar üç çeşit içerir. Basit deneyimcilik, ispatlanacak ifadenin (rastgele seçilen) birkaç örnekte denendiği; kesin deney, ifadenin dikkatle seçilmiş bir örnek üzerinde denendiği; genel örnek, bir sınıfın karakteristik temsilcisi olarak seçilen bir örnek üzerindeki işlemlere ve dönüşümlere dayanan ispatlardır. Bu durumda, örnek üzerindeki işlemler ve dönüşümlerin tüm sınıf üzerinde yapılması istenir. Kavramsal ispatlar kategorisi, davranışların kabul edilen özel örneklerden ayrıldığı ve içselleştirildiği düşünme deneyini ve deneyin olmadığı ispatın somutlaştırılmış sembolik anlatımların kullanımına ve dönüşümüne dayandığı ifadelerle sembolik hesaplamayı içerir.

Miyazaki ispatı, ispat A, ispat B, ispat C ve ispat D olarak dört guruba ayırmıştır.Tümdengelimsel muhakeme içeren, demonstrasyonun fonksiyonel dili kullanılan ispatı ispat A, tümdengelimsel muhakeme içeren, diğer dil, çizimler veya hareket edebilen objeler kullanılan ispatı ispat C, tümevarımsal muhakeme içeren, demonstrasyonun fonksiyonel dili kullanılan ispatı ispat D olarak belirtmiştir.

A, B, C, D İspat grupları

İçerik / Sunum	Tümevarımsal Muhakeme	Tümdengelimsel Muhakeme
Demonstrasyonun fonksiyonel Dili	İspat D	İspat A
Diğer dil, çizimler ve/veya hareket edebilen objeler	İspat C	İspat B

Harel ve Sowder (1998), bir kişinin matematiksel bir ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını kendini veya diğerlerini ikna için kullandığı tartışmalardan bir ispat sınıflaması yapmışlardır. Sınıf gözlemleri, testler ve görüşmeler kullanarak kolej öğrencilerinin ispat çeşitlerini araştırmışlardır. Özelliklerine göre belirledikleri yedi ispat çeşidini üç ana kategori altında toplamışlardır.



*Otoriter ispat*ta, sadece bir kitaba, bir öğretmenin ifadesine veya daha bilgili bir sınıf arkadaşının doğrulamasına inanma varken, *kuralsal ispat*ta, bir tartışmanın bir doğruluğunu içerilen muhakemenin doğruluğundan ziyade sadece tartışmanın şekli ile yargılama vardır. *Sembolik ispat* ise, sadece sembollere dayalı olarak doğrulamadır. *Algısal ispat*, birkaç çizime veya tek bir algıya dayalı doğrulamayı içerir. Bir kişinin kendisini veya diğerlerini, bir veya daha fazla örnekle ikna etmede *örneğe dayalı ispat* kullanılır. *Transformasyonel ispat*ın özelliği, öğrencilerin doğrulamalarının durumun genel yönleri ile ilgili olması ve varsayımı genellemeye doğru yöneltilen muhakemeyi içerir. Eğer bir öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri ve teoremleri içeren bir sistemle çalışabiliyorsa *aksiyomatik ispat*ı kullanabiliyor demektir.

1.4 Araştırmanın Amacı ve Önemi

Türkiye’ nin TIMMS 2007 matematik öğrenme alanları ortalama başarı puanları incelendiğinde; sayılar öğrenme alanında 429, cebir öğrenme alanında 440, geometri öğrenme alanında 411 ve veri ve olasılık öğrenme alanında 445’ tir. Bütün öğrenme alanlarında TIMMS 2007 ortalaması 450 dir (TIMMS 2007 Ulusal Raporu http://earged.meb.gov.tr/arasayfa.php?g=114).

Bütün öğrenme alanlarında Türkiye dünya ortalamasının altında yer almakla birlikte, geometri öğrenme alanı en düşük ortalamaya sahip olup, matematik öğrenme alanı açısından Türkiye’ inin en sorunlu alanını oluşturmaktadır. Bu durum matematik öğretim programının özellikle geometri boyutunun ve geometri öğretiminin yeniden gözden geçirilmesini gerektirmektedir.

İspat ‘’ törenseldir’’ ve saf akıl yürütme gücünün bir ‘’ törenidir’’(Tsamir et al. 2009). Geometrinin, matematiksel ispatları öğrenmek ve öğretmek için, matematiksel kavramları araştırmak için, günlük yaşam ve matematik arasındaki boşluğu doldurmak için ve matematiğe insan kültürünün bir parçası olarak değer verebilmek için iyi bir başlangıç noktası olduğunu düşünerek, bu tür çalışmaların ülkemizin matematik öğrenme alanındaki bu eksikliğin giderilmesi için gerekli olan ihtiyaçların ve izlenecek yolun belirlenmesinde önemi büyüktür.

1.5 Araştırmanın Problemi

“İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinde geometrik ispat süreci ve eğilimleri nasıldır?’’ sorusu bu araştırmanın problem cümlesidir.

1.6 Araştırmanın Alt Problemleri

1. İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin geometrik problemleri çözerken başvurdukları ispatlama yolları nelerdir?
2. İspat yaparken başvurdukları ispat temsil şekilleri nelerdir?

1.7 Sayıltılar

1. Öğrencilerin sorulara cevap verirken gerçek kapasite ve tercihlerini ortaya koydukları varsayılmıştır.

1.8 Sınırlamalar

1. Bu araştırma 2010-2011 Eğitim-Öğretim yılı ve Bursa ilinde bulunan iki ilköğretim okulundaki 8. sınıf öğrencileri ile sınırlıdır.
2. Bu araştırmada kullanılacak kaynaklar, araştırmacının ulaşabileceği kaynaklar ile sınırlıdır.
3. Bu araştırma, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim - Öğretim Yönetmeliğinin belirlediği süre ile sınırlıdır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

İspat ve geometrik ispat sürecine ilişkin yapılmış bazı araştırmalar aşağıda özetlenmiştir.

Hoyles ve Küchemann (2000), 8 yaş grubu öğrencilerden oluşan üstün başarılı 4 grubun matematiksel muhakemeyi test etmek için tasarlanmış birisi cebirden diğeri geometriden iki yazılı soruda gösterdikleri performansı rapor etmişler ve ön bulgular, performansın sınıflar ve sorular arasında ve matematiksel becerinin genel ölçütlerine kıyaslandığında her zaman tutarlı olmadığını göstermiştir.

Özer ve Arıkan (2001), "Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri'' adlı araştırmalarında, Miyazaki ve Balacheff' in ispat konusunda yapmış oldukları çalışmalardan yararlanarak, lise 2 öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerilerini tespit ederek öğrencilerin ispat düzeylerini incelemişlerdir. Ayrıca materyal kullanarak ispat yapıp yapamadıkları gözlenmiştir. Bu amaçla 2000-2001 eğitim öğretim yılında toplam 110 öğrenci üzerinde araştırma yapılmıştır. Ayrıca 3 öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Açık uçlu sorulara öğrenciler tarafından verilen cevaplar sonucunda aldıkları puanlar gruplandırılarak tablolar oluşturulmuştur. Görüşme sırasında farklı zamanlarda 3 öğrencinin verdikleri cevaplar kasetlere kaydedilmiş ve bu kayıtlar yazılı görüşme metinlere dönüştürülmüştür. Araştırma sonucunda, lise 2 öğrencilerinin istenilen düzeyde ya da materyal kullanarak ispat yapamadıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin ispat yapma yöntem ve tekniklerini yeterince kullanmadıkları saptanmıştır.

Klieme, Reiss ve Heinze (2003), TIMMS soruları üzerine bir araştırmalarında, ortaöğretimin üst basamağı seviyesindeki TIMMS geometri maddelerinin gerektirdiği özellikler üzerine bir çalışma yapmışlardır. Alman okullarından 81 öğrenci, seçilen TIMMS maddeleri ve ek testleri çözmüşler ve geometri maddelerini çözerken sesli düşünme yöntemlerini kullanmışlar ve bu esnada da videoya çekilmişlerdir. Çalışma TIMMS başarı testinin bir onaylama çalışması olarak görüldüğü gibi geometrik yeterliliğin oluşturulması konusunda eğitimsel ve psikolojik bir çalışmadır. TIMMS yetkinlik ölçeğinin yüksek seviyelerindeki maddelerin, cevaplayıcıların daha karmaşık becerileri kullanmalarını gerektirdiğini – daha fazla bildirimsel bilgi (örneğin eşleşim gibi geometrik kavramların anlaşılması) ve metodolojik bilgi (örneğin, ispatları, genelliğini anlama)- göstermişlerdir. Araştırma geometri öğretimi için yapılacak en açık çıkarım, bildirimsel ve metadolojik bilginin edinilmesinin geometrik yeterlilik için gerekli bir önkoşul olduğunu ortaya koymuştur. Analizler geometri öğretiminde, bildirimsel bilgi (kavramların anlaşılması) ve metadolojik bilgide (ispat anlayışı) büyük eksiklikler ortaya çıkarmıştır. Bildirimsel bilginin söz konusu olduğu durumlarda, anlamanın örneklerle sınırlı olduğu, öğrencilerin metadolojik bilgilerinde ise, çeşitli yanlış kavramlar ve yanlış yorumlamalar ortaya çıkarılmıştır. Öğrencilerin ispatları açıklarken öyküsel ispatları, sadece deneysel argumanları veya yanlış dolaylı argumanları seçtikleri ortaya çıkmıştır.

Weber (2005), ispat oluşturma işlemlerinde problem çözme süreçleri ve öğrenme fırsatları üzerine yaptığı araştırmasında, lisans öğrencilerinin başarılı bir şekilde ispat oluşturmak için kullandıkları üç yaklaşıma dikkat çekerek, her bir ispat oluşturma şeklinin yarattığı öğrenme fırsatlarını incelemiştir. Yöntemsel ispat oluşturma şekli, yaygın ispat tekniklerini uygulamada pratiklik kazanma fırsatını yaratmaktadır, fakat öğrencilere kanıtlanan önermenin neden doğru olduğuna dair geçerli ve sezgisel bir açıklama yapabilme yetisi kazanma olanağı tanımaz veya ilgili matematiksel kavramlara dair rastlantısal düşüncelerini geliştirme ya da düzeltme şansı vermez. Sentaktik ispat oluşturma şekli, teoremlerin uygulanmasını içeren çıkarım kurallarını uygulamada pratiklik kazanma ve ispat oluşturmak için strateji ve önsezi geliştirme fırsatı tanır; ancak, tıpkı yöntemsel ispat oluşturma şekli gibi ilgili matematiksel kavramlara dair rastlantısal düşüncelerini geliştirme ya da düzeltme şansı vermez. Bu bağlamda sentaktik ispat oluşturma şekli öğrencilerin çalıştıkları alanı kavrama şeklini değiştiremeyebilir. Son olarak semantik ispat oluşturma şekli, öğrencilere matematiksel kavramlara dair rastlantısal düşüncelerini geliştirme ya da düzeltme fırsatını yaratır ve matematiksel teoremlerin neden doğru olduğuna dair ikna ve kavrama yetisi kazanmak için bu düşüncelerle çıkarım yapma şansı tanır.

Altıparmak ve Öziş (2005), matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir incelemesinde, konuyla ilgili olarak NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) standartları doğrultusunda, okul öncesi, ilköğretim ve lise seviyelerinde matematiksel ispat kavramı ile ilgili bilgiler ve örnekler vermiştir. Okul öncesi, ilköğretim ve lise yıllarında muhakemenin gelişimi incelenmiştir. Okul öncesi dönemde sınıflama, eşleştirme, karşılaştırma, sıralama kavramları çocuklarda muhakemenin oluşumu için temel kavramlardır. Bu bazda önermeler verilerek, mantıklı düşünmenin oluşması istenmiştir. İlköğretim döneminin birinci kademesinde, birey somut düşünme dönemindedir. Bu doğrultuda parça- bütün ilişkileri ele alınarak, tümevarım ilkeleri için örnekler verilmiştir. İkinci kademede ise, muhakeme ve ispat standartlarında öğrencilerden genellemeler hakkında varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri istenmektedir. Lise yılları soyut düşünebilme evresinin geliştiği yıllardır bu yıllarda tümdengelim ve tümevarım oluşmuştur. Bu doğrultuda ispat çeşitleri incelenerek, örnekler verilmiştir. Sonuçta, ispat ve muhakemenin insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenek olduğunu, fakat bu yeteneğin gelişiminin belirlenecek uygun stratejilere bağlı olduğunu söylemiştir. Öğrenciye, ispat ve muhakeme becerisinin öğretimi ve gelişiminde öğretmenin öğrencilere sunacağı öğrenme yelpazesinin önemine vurgu yapmıştır.

Yeşildere ve Türnüklü (2007), ilköğretim sekizinci sınıftan mezun öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerini incelemiştir. Araştırmada tarama (survey) yöntemi kullanılmıştır. İzmir evreninden tabakalı örnekleme stratejisi ile seçilen 20 okuldan toplanan 262 öğrencinin verileri nicel ve nitel veri çözümleme teknikleri kullanılarak incelenmiştir. Veri toplama aracı olarak on tane açık uçlu problem kullanılmıştır. Açık uçlu problemlerin analizi ile elde edilen veriler, İzmir evreninde yer alan ilköğretim sekizinci sınıftan yeni mezun öğrencilerin problem çözmede matematiksel bilgilerle ilişkilendirme yapmada ve mantıksal akıl yürütmede sorun yaşadıklarına işaret etmektedir. Bu duruma neden olan faktörler öğrencilerin verilenlerden hareketle değil öznel görüşlerine dayanarak akıl yürütmeleri, düşüncelerini kanıtlar sunarak ve açıklamalar yaparak ifade edememeleri ve verilenler arasında ilişkilendirme yaparak problemleri çözmemeleri olarak özetlemişlerdir.

Arslan (2007), “İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi’’ adlı doktora tezinde ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhekeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimini incelemiştir. Araştırma Bursa ili merkez ilçelerinde bulunan ve rastgele seçilen yedi ilköğretim okulunda okuyan 679 öğrenci ile 2005-2006 eğitim- öğretim yılının ikinci yarıyılında gerçekleştirilmiştir. Tarama modelinde düzenlenen çalışmanın öğrencilerin zihinsel gelişim basamaklarına uygun düşen ispat düzeylerinin belirlenmesi kısmı nicel, yargıların arkasında yatan sebeplerin incelenmesi kısmı nitel olarak yapılmıştır. Beş sorudan oluşan veri toplama aracı, araştırmanın nicel boyutunu gerçekleştirmek için öğrencilere kendi sınıflarında uygulanmış, nitel boyutunu gerçekleştirmek için seçilen 36 öğrenci ile özel görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerin tüm düşüncelerine yetecek süre verilmiştir. Veri analizi sonucunda, ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme düzeylerinin literatürce desteklenen ortalama verilere göre düşük olduğu ve bu süreçte kullanılması beklenen stratejilerden yeterli düzeyde kullanamadıkları; verilen ifadenin doğruluğunu göstermede tercih ettikleri ispat türünün sınıf seviyesi ile birlikte belli oranda değiştiği (görsel ve örnekle doğrulamadan cebirsel ispata yönelme) görülmüştür. Özellikle 8. sınıf öğrencileri ile 6 ve 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ispatı tercih etme düzeyleri arasında anlamlı farklılık bulunmuştur.

Ufer, Heinze ve Reiss (2008), geometrik ispat yeterliliğinin bireysel belirleyicileri üzerine yaptıkları araştırmada, 314 tane 9. sınıf Alman öğrencinin, geometrik ispat yeterliliğinin bireysel ve bilişsel belirleyicilerinden bazılarının etkileşimini ortaya koymuşlardır. Belirleyici olarak, temel geometri bilgisinin ve matematikle ilgili problem çözme becerilerinin bildirimsel ve yordamsal açılarına atıfta bulunmuşlar ve sonuçlar, temel bilginin bildirimsel açısının diğer belirleyicilere oranla çok daha baskın olduğunu göstermiştir. Geometri ve geometrik ispatın öğretimi için kullanılabilecek olası teorik açıklamaları ve içerdiği anlamları incelemişlerdir. Bireysel belirleyici olarak, bir çeşit problemin üstesinden gelebilmek için bireylerin yeterliliklerini potansiyel olarak geliştirecek becerileri, yetileri veya bilgileri dikkate almışlar ve deneysel araştırmalar sonucunda birkaç tane belirleyici sınıfı ortaya koymuştur: Belirli bir içerik ile ilgili *yöntem ve temel olgu bilgisi*, *stratejik bilgi* (örn.

Buluşsal yöntemler) ve *metabilişsel beceriler* (izleme ve kontrol) ve bunların yanı sıra *motivasyon, duygular ve uygulamalar gibi bilişsel olmayan özellikler* ile *metadolojik bilgi*. Araştırmada bilişsel belirleyiciler üzerinde durulmuştur. Geometrik ispat yeterliliğinin en belirgin belirleyicilerinden biri öğrencinin sahip olduğu temel bilginin miktarı ve yapısıdır. Bilişsel psikolojide izah edilmesi mümkün olan olgular ve kavramları ifade eden bildirimsel bilgi ve çoğu zaman ve daha dolaylı olan ve bilinen işlemlerin çözümünü ifade eden yordama bilgisi arasında olağan bir ayrım vardır (Alıntılayan Ufer 2008, sf.4). İspat problemlerinde gereken bildirimsel bilgi çok çeşitli olabilir: fiili matematiksel içerikle ilgili, ispatların doğasına ilişkin meta bilgi veya geçerli ispatlar. Araştırmada bildirimsel bilgi temel tanımları, teoremleri ve kavramları hatırlama yetisiyle sınırlandırılmıştır. Sonuçlar geometrik ispatların oluşturulmasında sağlam bir içerik bilgisine sahip olmanın kritik rolünü ve problem çözme becerileri veya meta bilgi gibi diğer etmenlerin etkililiğini ortaya koymaktadır.

Kuntze (2008), yazma aktivitesi barındıran öğrenme ortamının geometrik ispat yeterliliği üzerindeki etkilerini inceleyen bir ilk araştırma sunmuştur. Geometrik ispatları anlamak ve oluşturmak için öğrencilerin ispatlamayı matematiksel bir aktivite olarak kavramaları gerektiğine işaret ederek, öğrencilerden ispatlamanın farklı yönleriyle ilgili yazılar yazmalarını istemiş, ispatın doğası üzerine yansıtıcı düşünme fırsatları yaratarak ispatla ilgili meta bilgiyi geliştirme olanağı sunabileceğine vurgu yapmıştır. Bir yansıtıcı düşünme aktivitesi yazarak matematiksel ispat ile ilgili meta bilgiyi geliştirmek için konu çalışma metodu olarak adlandırılan yöntemi seçmiştir. Bu öğrenme ortamında öğrencilere çok çeşitli materyaller sunulmuştur (örneğin; öğrencilerin oluşturduğu, içerisinde hataları barındıran ispatlar veya değerlendirilmeleri gereken tamamlanmamış ispatlar, ispatlama ile ilgili veya ispatların gelişimi ile ilgili meta bilimsel metinler, matematikçiler tarafından yazılmış ispatlamanın rolü ve uygulaması ile ilgili alıntılar, cezai işlemlerde ispatın kanuni örnekleri, öğrencilerle ispat üzerine yapılmış görüşmelerden alınan kesitler vb.). Bu materyalleri inceleyip üzerinde düşündükten sonra öğrencilerin, ispatın ne olduğu ve neyle ilgili olduğu konusunda genel fikirlerini belirten yazılar yazmaları istenmiştir. Geleneksel öğretim yöntemleriyle karşılaştırıldığında matematik sınıflarındaki yazma aktivitelerinin başarı ve motivasyon üzerinde neredeyse hiç olumsuz etkisinin bulunmadığı aksine problem çözme yeterlilikleri ve bilişsel ve meta bilişsel stratejiler üzerinde olumlu etkilerinin olduğu gözlemlenmiştir.

Reiss, Heinze, Renkl ve Groß (2008), geometride mantık yürütme ve ispat konulu, ‘’Sezgisel çalışmalı örneklere dayalı öğrenim ortamının etkileri ‘’ adlı araştırmalarında, sezgisel çalışmalı örneklerin matematik sınıflarında kullanımı, algoritmik problem çözme öğrenimi için yeterli hale gelmiş geleneksel çalışmalı örnekler üzerindeki bulgularla harekete geçirilmiştir. Sezgisel çalışmalı örneklerin temel fikri, onlara keşfedici süreçleri teşvik etmesi ve böylece ispatı gerçekleştirirken farklı aşamaları açıkça yansıtmasıdır. Sezgisel örneklere sahip öğretimin, 243 kademeli 8 öğrencisi olan deneysel bir sınıf çalışmasındaki alışılagelen sınıf eğitiminden daha etkili olduğu hipotezlerini denemişler ve sonuçlar, sezgisel çalışmalı örneklerin alışılagelen matematik eğitiminden daha etkili olduğunu ortaya koymuştur. Özellikle ispat anlayışı yeterli olmayan öğrencilerin bu öğrenim ortamından faydalanabileceğine işaret etmektedir. Sezgisel çalışmalı örnekler geleneksel çalışmalı örnekler esasına dayanır ancak, ispatlama sürecine oranla problem çözme sezgisini açık hale getirmektedir.

Tsamir, Tirosh, Dreyfus, Barkai ve Tabach (2009), “İspat minimal mi olmalıdır? Ms T’ nin ortaöğretim seviyesindeki öğrencilerin ispatlarını değerlendirmesi’’ adlı araştırmalarında, bir ortaöğretim öğretmeninin, öğrencilerin basit sayı teorisinde oluşturdukları ispatlara ve doğrulamalara verdiği tepkiler üzerine odaklanmaktadır. İspatların kabul edilebilir olup olmadığını belirlemek için öğretmen; matematiksel açıdan alan bilgisini, ispatı oluşturan öğrencinin neyi bilip bilemeyeceğini belirlemek için de pedagojik alan bilgisini kullanmıştır. Araştırmanın sonucunda, başlıkta sorulan soruya verilen cevap “Hayır, sınıfta oluşturulan ispatlar ille de minimal olmamalıdır.’’ Kısalık açısından değerlendirildiğinde, bir doğrulama ve bir tanımlama arasındaki ayrım görülebilir. Bir tanımın kısa olması gerekirken, bir doğrulamada bir kısıtlama yoktur. Öğretmen sadece doğrulamanın geçerliliğiyle ilgilenmekle kalmayıp, o doğrulamayı yapan kişinin yansıtabileceği kavrayış şekline de dikkat etmektedir. Öğretmenin odaklandığı nokta, öğrencinin söz konusu önermeyi ne kadar kavradığıdır.

Reid (2005)' in, matematik eğitiminde ispatın anlamı üzerinde yaptığı araştırma, ispat kavramını, ispat öğretmekteki amacı, ispatlamanın da dahil olduğu sebeplendirmenin çeşitlerini, ispatlamanın işaret eder göründüğü ihtiyaçları, ispatla dil arasında görünen ilişkiyi içeriyor. CERME 4 te bir ispat çalışma grubu, 10 ülkeden ispatla ilgilenen 15 araştırmacıyı bir araya getirdi. Reid, diğer 14 kişiden 7 çift oluşturmalarını ve kendisinin belirlediği altılı bir kümeden en örnek niteliğinde olan ispatları seçmelerini istemiştir. Sonradan 3 çift, diğer çiftlere katılmış ve ikinci tur sonunda, seçimlerden biri sayısal genel örneği, diğeri cebirsel bir özdeşliğin ispatına dayanan bir diyagramı içermiştir. Seçimlerden hiç biri bir cebri ya da anlatımsal bir unsuru içermemiştir.

Görüldüğü gibi, incelediğimiz bu çalışmalarda öğrencilerin eğitimi sürecinde " ispat'' yönteminin farklı konular üzerinde denenmesi, uygulaması yapılmış, öğrencilerin bu süreç içerisinde ne kadar başarılı oldukları, sergiledikleri düşünce becerileri, eksiklikleri incelenmiş, sonuçlar tekrar denemelerle karşılaştırılmıştır.

Sunduğumuz bu tezde biz de benzer çalışmalar yaptık. Bizim çalışmamız, yerli ortama uygun bir şekilde yapılmış, yerli öğrencilerin benzeri problemlere bakışı, ne kadar başarılı oldukları, ispat sürecinde eğilimleri, karşılaşılabilecek olumsuzluklar, onların bir şekilde önlenmesi gibi problemler dikkatimizi çekmiştir.

Çalışmalarımızı yalnızca Geometri üzerine yönelik şekilde yaptık. Bir sonraki bölümler bu çalışmalarımızın sonuçlarına addedilmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın modeli, evren, örneklem hakkında bilgiler, verilerin toplanması, uygulanması, verilerin çözümü ve yorumlanmasında kullanılan yöntem ve teknikler açıklanmıştır.

3.1 Araştırmanın Modeli

8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat becerilerine ilişkin kullandıkları ispatlama yollarının ve ispat temsil biçimlerinin bulunmasıyla ilgili yapılan bu araştırmada durum tespiti yapılmıştır.

Araştırma 8. Sınıf toplam 154 öğrenciye açık uçlu sorular sorularak yürütülmüştür.

3.2 Çalışma Evreni ve Örneklem

Araştırmanın çalışma evrenini Bursa ili sekizinci sınıf öğrencileri oluşturmuştur. Araştırmanın örneklemi ise, Karacabey ilçesinden rastgele seçilmiş ilköğretim okullarından 14 Eylül İlköğretim Okulu ve Hacı Ahmediye Onur İlköğretim Okulu olarak belirlenmiştir.

3.3 Verilerin Toplanması

Bu araştırma için ilköğretim 6. ve 7. sınıf geometri öğrenme alanı ve kazanımlarına uygun, geometri temelli, üçgen ve açıların daha ön planda tutulduğu toplam 8 soruluk bir çalışma hazırlanmıştır. Öğrencilerin ispat becerilerini araştırmak için açık uçlu sorular sorulmuştur.

Sorular 2 öğretim görevlisinin ve 2 matematik öğretmeninin görüşleri alınarak güvenilir hale getirilmiştir.

3.4 Açık Uçlu Soruların Uygulanması

Açık uçlu soruların uygulanmasına başlanmadan önce uygulamaya (yazılı ankete) katılmayan iki sekizinci sınıf öğrencisine araştırma soruları uygulanmış ve karşılaşılabilecek sorunlar tespit edilmiş ve giderilmiştir.

Sorular, öğrencilerin ders programlarının uygun olduğu zamanlarda, 2 ders saati süresince matematik öğretmenleri tarafından uygulanmıştır. Daha önce 1 saat süreyle başka sorular sorulmuş, sonuçlar incelenmiş ve onları da dikkate alarak belki süre sorunu problemi olabileceğini düşünülerek bu denemede süre 2 saat olarak alınmıştır. Tezin hacmini büyütmemek için birinci deneme sonuçları dahil edilmemiştir.

3.5 Veri Toplama Aracının Geliştirilmesi

Öğrencilerin ispatlama yollarını ve ispat temsil şekillerini araştırmak için 8 tane açık uçlu sorulardan oluşan bir çalışma hazırlanmıştır.

Araştırmanın birinci sorusu 7. sınıf geometri alanının alt öğrenme alanlarından biri olan "Doğrular ve Açılar" alt öğrenme alanı kazanımlarına uygun olarak hazırlanmıştır.

Aynı düzlemde paralel iki doğrudan birini kesen bir doğru diğerini de keser mi? Neden? Açıklayınız.

Şekil 3. 1 Araştırmada kullanılan birinci soru

Araştırmanın ikinci sorusu 6. sınıf geometri alanının alt öğrenme alanlarından biri olan "Çokgenler" alt öğrenme alanı kazanımlarından "Üçgenleri açılarına ve kenarlarına göre sınıflandırır" kazanımına uygun hazırlanmıştır.

Bir dik üçgende dar açılarının ölçüleri toplamı 90^0 dir. Neden? Açıklayınız, ispatlayınız.

Şekil 3. 2 Araştırmada kullanılan ikinci soru

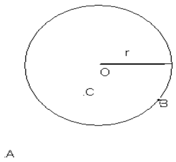
Araştırmanın üçüncü sorusu 7. sınıf geometri alanının alt öğrenme alanlarından biri olan "Çokgenler'' alt öğrenme alanı kazanımlarından "Çokgenlerin köşegenlerini, iç ve dış açılarını belirler'' kazanımıyla 6. sınıf "Kümeler" konusu göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır.

Bir üçgenin bir iç açısı bu üçgenin alt kümesi olur mu? Neden? Açıklayınız. İspatlayınız.

Şekil 3. 3 Araştırmada kullanılan üçüncü soru

Araştırmanın dördüncü sorusu 7. sınıf geometri alanının alt öğrenme alanlarından biri olan "Çember ve Daire''alt öğrenme alanı kazanımlarından "Çemberin düzlemde ayırdığı bölgeleri belirler'' kazanımına uygun olarak hazırlanmıştır.

Aşağıdaki O merkezli, r yarıçaplı çemberde ,
a) Anoktası çemberin dış bölgesindedir.
b) B noktası çemberin üzerindedir.
c) Cnoktası çemberin iç bölgesindedir.
Neden? İspatlayınız.   Not: Cetvel takımı kullanabilirsiniz.



Şekil 3. 4 Araştırmada kullanılan dördüncü soru

Araştırmanın beşinci sorusu ilköğretim 4. ve 5. sınıf geometri öğrenme alanı "Alan" konusu ve 7. sınıf altıncı ünite alt öğrenme alanlarından biri olan Dörtgensel "Bölgelerin Alanı'' alt öğrenme alanı kazanımları göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır.

Bir dikdörtgenin alanı, komşu iki kenarın çarpımına eşittir. Neden? İspatlayınız.

Şekil 3. 5 Araştırmada kullanılan beşinci soru

Araştırmanın altıncı sorusu ilköğretim 7. sınıf geometri alanının alt öğrenme alanlarından biri olan "Çokgenler'' alt öğrenme alanı kazanımlarından "Çokgenlerin köşegenlerini, iç ve dış açılarını belirler'' kazanımına ve "Doğrular ve Açılar" alt öğrenme alanı kazanımlarına uygun olarak hazırlanmıştır.

Bir üçgenin iki iç açısının ölçüleri toplamı, bu açılara komşu olmayan bir dış açısının ölçüsüne eşittir. Neden? İspatlayınız.

Şekil 3. 6 Araştırmada kullanılan altıncı soru

Araştırmanın yedinci sorusu 7. sınıf altıncı ünite alt öğrenme alanlarından biri olan "Dörtgensel Bölgelerin Alanı'' alt öğrenme alanı kazanımlarına uygun olarak hazırlanmıştır.

Bir üçgenin alanı aynı taban ve yükseklikteki paralelkenarın alanının yarısına eşittir. Neden? İspatlayınız.

Şekil 3. 7 Araştırmanın yedinci sorusu

Araştırmanın sekizinci sorusu 6. sınıf geometri alanının alt öğrenme alanlarından biri olan "Açılar'' alt öğrenme alanı kazanımlarına uygun olarak hazırlanmıştır.

Ölçüleri eşit iki açının, bütünler açılarının ölçüleri de eşit olur mu? Neden? Açıklayınız, ispatlayınız.

Şekil 3. 8 Araştırmanın sekizinci sorusu

3.6 Verilerin Toplanması ve Yorumlanması

Araştırmada toplam 8 açık uçlu soru kullanılmıştır. Araştırmanın 1. alt problemini test etmek için, her bir soruda, öğrencilerin verdikleri cevaplar tek tek irdelenmiş, doğru, kısmen doğru, yanlış ve soruyu boş bırakanlar olarak belirlenmiştir. Bu belirlemeden sonra, öğrencilerin cevaplamalarında kullandıkları ispatlama yolları (akıl yürütme metotları) her soruda, tek tek incelenmiş ve kodlanmış ve bu kodlamaların yüzde ve frekansları hesaplanmış, tablo halinde gösterilmiştir. Her bir kodlamaya ilişkin öğrenci cevaplarından biri de örnek olarak sunulmuştur. Yorumlarda bu kodlamalar tümevarımsal ve tümdengelimsel muhakeme becerileri süzgecinden geçirilmiştir.

2. alt problemi test etmek için her bir soruda, 1. alt problem bulgu ve yorumlarına bağlı kalınmış ve öğrencilerin verdikleri cevaplar; cebirsel, görsel, sözel ve sayısal örnekleme olmak üzere dört kategoriden oluşmuştur. Bu kategorilerin frekansları her soruda, tabloda gösterilmiş yüzdeleri ise grafiklerle sunulmuştur. Yine, cevaplamaların, temsil ettiği kategoriye göre doğru, yanlış, kısmen doğru olup olmadıkları ve ispatlama yolları tabloda belirtilmiştir. Soruları boş bırakarak cevaplandıramayanlar veya herhangi bir mantıksal çıkarımda bulunmayan öğrenciler herhangi bir kategoriye alınmamıştır.

Öğrencilerin verdikleri cevaplar, araştırmacı ve uzman tarafından hazırlanan cevap anahtarına göre araştırmacı tarafından değerlendirilmiş, frekans ve yüzdeleri alınmış, ispat becerilerinin olup olmadığına, çözümlerde kullandıkları ispatlama yollarına ve ispat temsil şekillerine bakılmıştır.

4. BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde araştırma verilerinin analizi sonucunda elde edilen bulgu ve yorumlara yer verilmiştir.

4.1 Birinci alt probleme ilişkin Bulgular

Birinci alt problem "İlköğretim 8. Sınıf öğrencilerinin geometrik problemleri çözerken başvurdukları ispatlama yolları nelerdir?'' şeklinde ifade edildi.

Bu alt probleme çözüm aranırken 6. ve 7. sınıf geometri öğrenme alanı ve kazanımlarına uygun, geometri temelli, üçgen ve açıların daha ön planda tutulduğu 8 soruya verdikleri cevapların yüzde ve frekansları hesaplanmıştır.

Çalışmanın bu bölümünde öncelikle ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin geometrik problemleri çözerken başvurdukları ispatlama yollarının neler olduğunu belirlemek için araştırma kapsamında sorulan 8 soruya verilen cevaplara ilişkin bulgu ve yorumlara yer verilmiştir.

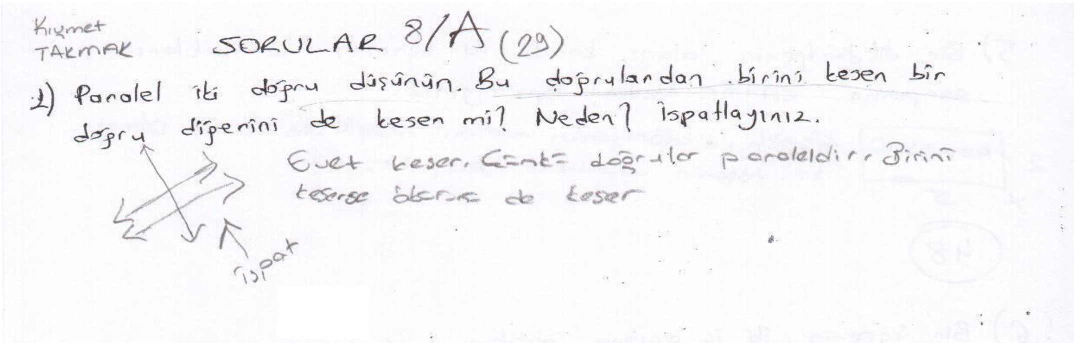
Bu araştırmada öğrenciler tarafından verilen örnekler için doğrulama terimi, verilen bir ifade için yapılan uygun doğrulama ve çürütmeleri belirtmek için ispat terimi, iddianın altında yatan nedeninin anlatımı için açıklama ve sorulardaki teoremler için evrensel önerme terimleri kullanılmıştır.

Çizelge 4. 1 Araştırmanın birinci sorusuna verilen cevapların yüzde frekansları

Cevaplamalarda kullanılan ispatlama yolları	n	%
Kısmen doğru cevap(Evet); Bilinen bir sonuçtan yola çıkarak sonuca ulaşma, destekleyici çizim	61	39,6
Kısmen doğru cevap(Evet); Tanımdan yola çıkarak sonuca ulaşma, açıklayıcı çizim	30	19,5
Kısmen doğru cevap(Evet); Tersini farzederek sonuca yaklaşım doğru ama eksik	4	2,6
Kavram yanılgılarından kaynaklı geçerli olmayan açıklama, yanlış cevap	12	7,8
Kısmen doğru cevap(Evet); Sadece şekil çizerek sonuca ulaşma var ama yetersiz, zayıf açıklama	38	24,7
Cevap yok	9	5,8
Toplam	154	100,0

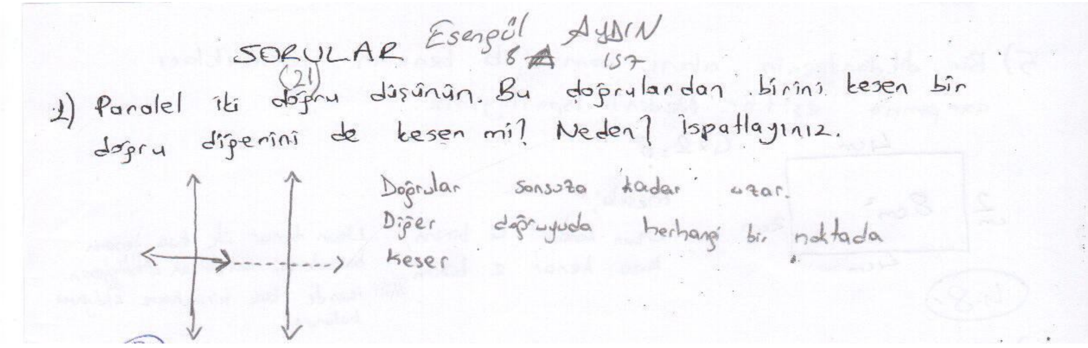
Öğrencilerin araştırmanın "Aynı düzlemde paralel iki doğrudan birini kesen bir doğru diğerini de keser mi? Neden? Açıklayınız'' şeklindeki birinci sorusuna verdikleri cevapların yüzde ve frekansları Çizelge 4. 1 de verilmiştir.

Öğrencilerden soruları incelemeleri, soruyu cevapladıktan sonra iddialarını kanıtlamaları istenmiştir. Öğrencilerin %39,6 sı daha önceden kesin doğru bildikleri -Öklid postulatının sonuçlarından biri olan-"Paralel doğrulardan birini kesen bir doğru diğerinin de keser'' sonucunu kullanarak destekleyici çizimle açıklamışlar ama yetersiz kalmıştır. Açıklamalarında; bilinen kesin bir sonuçtan yola çıkmaları, bu öğrencilerin sözel biçimde ve doğrudan ispata yöneldiklerini düşündürmüştür.



Şekil 4. 1 Araştırmanın birinci sorusunu bilinen bir sonuçtan yola çıkarak çözen öğrencilerden birine ait bir cevap

Öğrencilerin % 19,5 i doğrunun tanımından yola çıkmışlardır. Doğru, genişliği olmayan uzunluktur ve her iki ucundan sonsuza dek uzar. Bilgisini açıklayıcı bir çizime uygulayarak ispat yoluna gitmişlerdir ama açıklamaları genel ispat kapsamında yetersiz kalmıştır. Öğrencilerin ellerindeki materyalin (doğru kavramının) özelliğini bilerek buradan yola çıkmış olmaları ve açıklamasını çizimle yapmaları, öğrencilerin görsel şekilde ve doğrudan ispata yolunu tercih ettikleri fikrini uyandırmıştır.

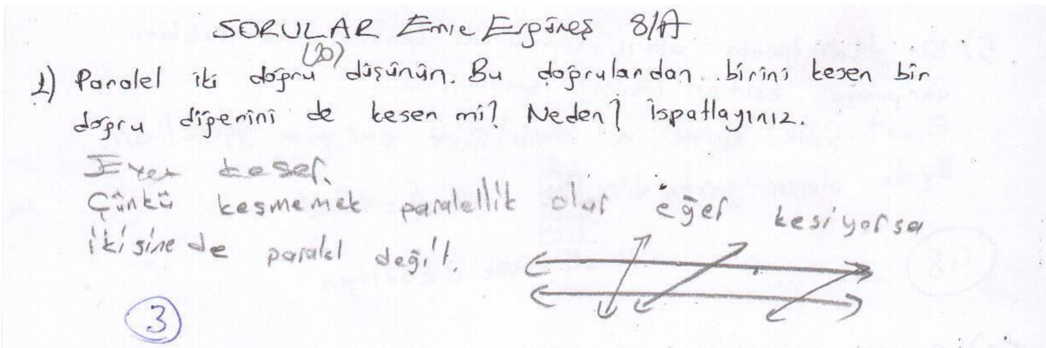


SORULAR Esengül AYDIN 8 A 157
(21)
1) Paralel iki doğru düşünün. Bu doğrulardan birini kesen bir doğru diğerini de kesen mi? Neden? İspatlayınız.

Doğrular sonsuza kadar uzar.
Diğer doğruyuda herhangi bir noktada
keser

Şekil 4. 2 Araştırmanın birinci sorusunu tanımdan faydalanarak çözen öğrenci cevaplarından biri

Öğrencilerin % 2,6 sı soruyu “Kesmeseydi ne olurdu, nasıl olurdu’’ şeklinde tersini farzederek ispatlama yolunu kullanmıştır. Şekil 4. 3 de verilen cevaba baktığımızda, öğrenci doğru yaklaşmış, doğru düşünmüş fakat bunun açıklamasını tam yapamamıştır. Bulduğu sonucu sistematikleştirememiştir. Bu da bu öğrencilerin ispata ilişkin yaşantılarının eksik olduğu kanısını uyandırmaktadır. Bu yaklaşım tarzı esasında istenen beklenen bir problem çözme yaklaşımıdır. Fakat yazılı ankete katılan öğrencilerin çok az bir kısmı bu ispat yolunu tercih etmiştir. Bu öğrenciler direkt değil, dolaylı yoldan ve sözlü ifadelerle açıklama yolunu tercih etmişler ve açıklamaları bu bağlamda eksik kalmış devamını getirememişlerdir. Oranın çok düşük olması ise, öğrencilerin dolaylı ispat olarak adlandırdığımız bu düşünme biçimini bilmedikleri yorumunu getirmiştir.



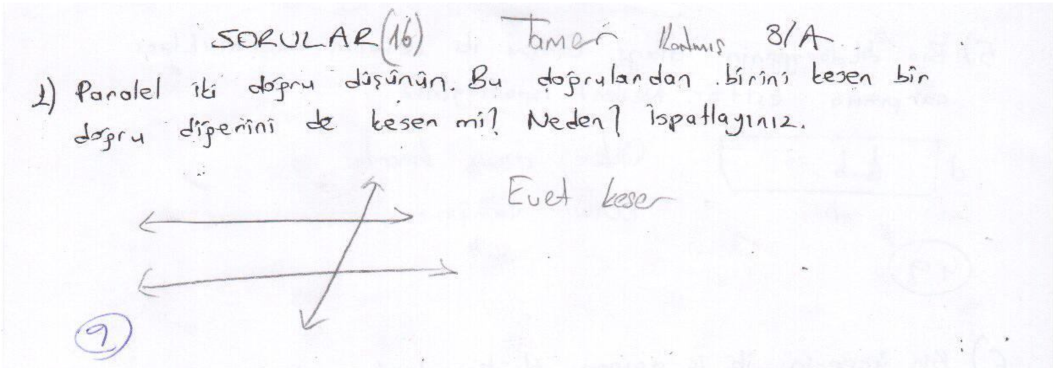
SORULAR Emre Ergüneş 8/A
(20)
1) Paralel iki doğru düşünün. Bu doğrulardan birini kesen bir doğru diğerini de kesen mi? Neden? İspatlayınız.

Evet keser.
Çünkü kesmemek paralellik olur eğer kesiyorsa
ikisine de paralel değil.

3

Şekil 4. 3 Araştırmanın birinci sorusunu tersini farzederek çözen öğrencilerden birine ait cevap

Öğrencilerin % 24,7 si sadece paralel olduğu varsayılan iki doğruyu kesen bir doğru çizerek yani sadece şekille doğrulamıştır. Öğrencilerin sadece şekille yola çıkmaları onların görsel doğrulamaya eğilimleri olarak yorumlanabilir.



Şekil 4. 4 Araştırmanın birinci sorusunu sadece şekille cevaplandıran öğrenci cevaplarından biri

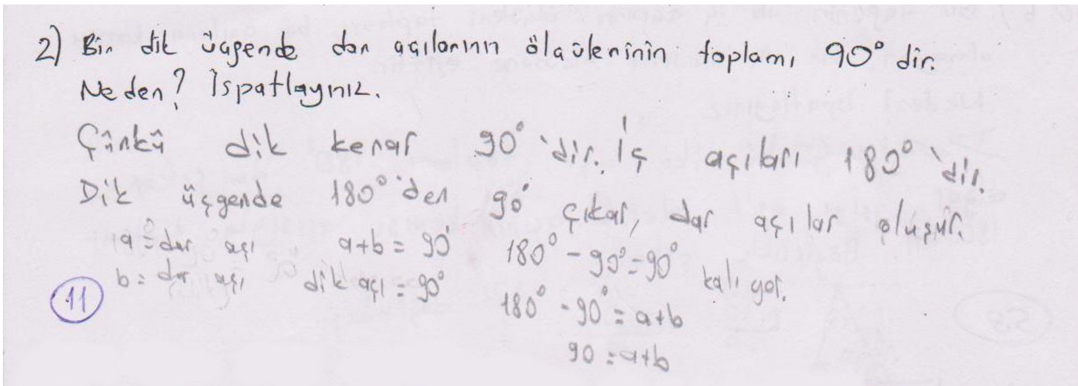
Öğrencilerin % 7,8 i soruyu kavram yanılgılarından kaynaklı yanlış cevaplandırmış, % 5,8 i ise boş bırakmıştır.

Çizelge 4. 2 Araştırmanın ikinci sorusuna öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları

Cevaplamalarda kullanılan ispatlama yolları	n	%
Bilinenler yardımıyla yapılan, şekille desteklenmiş, değişkenlerle ifade edilmiş geçerli açıklama, doğru cevap	8	5,2
Bilinenler yardımıyla yapılan, şekille desteklenmiş, sayısal ifadelerin kullanıldığı açıklaması yeterli, doğru cevap	18	11,7
Bilinenler yardımıyla, sözlü ifadelerin kullanıldığı açıklaması yeterli, doğru cevap	8	5,2
Açıklaması doğru fakat örneğe dayandırma var, yanlış cevap	5	3,2
Sadece örnekle verilen yanlış cevap	17	11,0
Tersini farzederek doğru sonuca yaklaşım var, zayıf açıklama, eksik, kısmen doğru cevap	1	0,6
Bilgi eksikliğinden kaynaklı yanlış cevap	41	26,6
Kavram yanılgılarından kaynaklı yanlış cevap	32	20,8
Saçma yanıt	16	10,4
Cevap yok	7	4,5
Ölçüm yaparak doğruya ulaşma, doğru cevap	1	0,6
Toplam	154	100,0

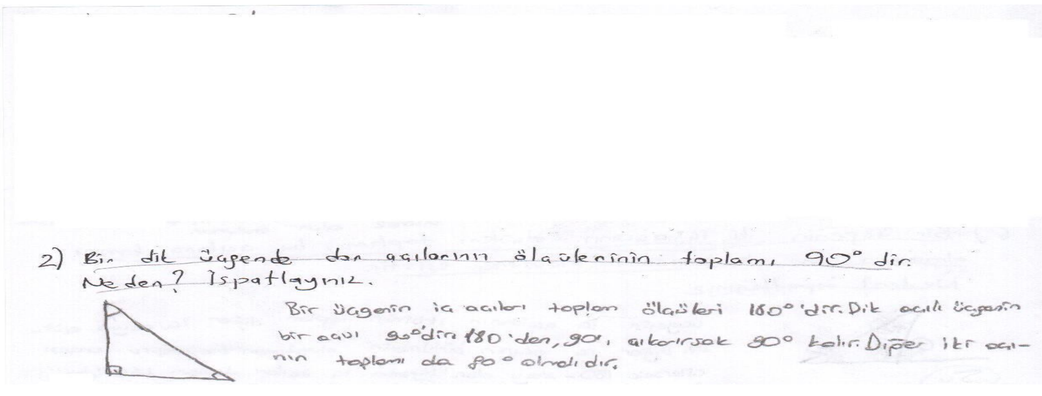
Araştırmanın, “Bir dik üçgende dar açılarının ölçüleri toplamı 90^0 dir. Neden? Açıklayınız, ispatlayınız’’ şeklindeki ikinci sorusuna öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları Çizelge 4. 2 de verilmiştir.

Çizelge 4. 2 incelendiğinde öğrencilerin soruyu bilinenler yardımıyla; değişkenler kullanarak, sözlü ifadelerle, örnek üzerinden ve bir öğrencinin tersinden farzederek cevaplandırdıkları görülmektedir.


2) Bir dik üçgende dar açılarının ölçülerinin toplamı 90° dir.
Neden? İspatlayınız.
Çünkü dik kenar 90°'dir. İç açıları 180°'dir.
Dik üçgende 180°'den 90° çıkar, dar açılar oluşur.
a = dar açı   a+b = 90°   180° − 90° = 90°
b = dar açı   dik açı = 90°   kalıyor.
180° − 90° = a+b
90 = a+b
11

Şekil 4. 5 Araştırmanın ikinci sorusuna bilinenler yardımıyla ve cebirsel ifadelerle cevaplandıran öğrenci cevaplarından biri

Öğrencilerin %5,2 si soruyu doğrudan ve değişkenler kullanarak cevaplandırmıştır. Öğrenciler soruya başlarken, dik üçgende, dik açının 90^0 ve bir üçgenin iç açı ölçülerinin toplamının 180^0 olduğunu biliyorlardı. Buradan iki dar açının ölçülerini farklı harflerle adlandırdılar. Dar açıların ölçüleriyle dik açının ölçüsünün toplamı 180^0 edecekti. Buradan dar açıların ölçüleri toplamı 90^0 sonucuna vardılar. Böylece bir genellemeye varmış oldular. Burada, öğrenciler cebirsel şekilde doğrudan ispatlama yolunu kullanmışlardır. Açıklamaları geçerli ve yeterlidir.

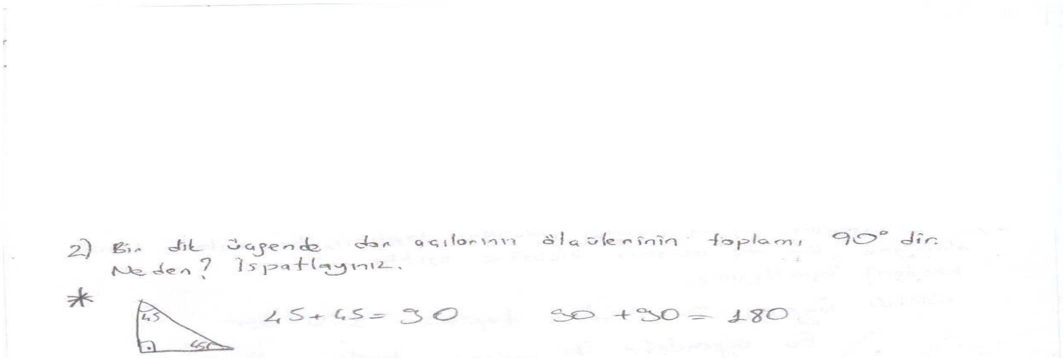

2) Bir dik üçgende dar açılarının ölçülerinin toplamı 90° dir.
Neden? İspatlayınız.
Bir üçgenin iç açıları toplam ölçüleri 180°'dir. Dik açılı üçgenin bir açısı 90°'dir. 180'den, 90'ı çıkarırsak 90° kalır. Diğer iki açının toplamı da 90° olmalıdır.

Şekil 4. 6 Araştırmanın ikinci sorusunu sözlü ifadelerle cevaplandıran öğrencilerden birine ait cevap

Öğrencilerin %16,9 u soruyu sözlü ifadelerle doğrulamışlardır.

Öğrenciler Şekil 4. 6 daki gibi soruyu değişkenler kullanarak sistematik bir genelleme yapmak yerine sözlü ifadelerle doğrudan ispatlama yolunu tercih etmişlerdir. Bu öğrencilerin, sözel doğrulamaya eğilimli oldukları yorumunu getirebilir. Bu % 16,9 luk oran, cebirsel doğrulamayı tercih edenlerin oranının iki katından daha fazladır. Bu, öğrencilerin, sözel doğrulamaya eğilimli olduklarının yanı sıra, cebirsel ifadeleri tam kavrayamadıklarını da düşündürmüştür.

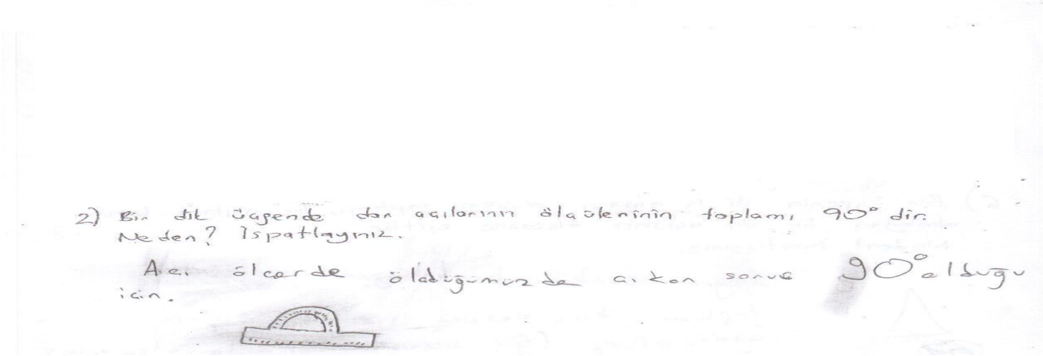
Öğrencilerin %14,2 si soruyu örnekle doğrulamışlardır. Örnekle cevaplandıranların bir kısmı, sözlü bir anlatımdan sonra örneklemiş, bir kısmı ise, direkt örnekle cevaplandırmışlardır. Destekleyici örnek, evrensel bir önermeyi kanıtlamak için yeterli olmadığından dolayı ve her ne kadar açıklamaları doğru olsa da, örneğe dayandırma olduğu için bir ispat değildir.



Şekil 4. 7 Araştırmanın ikinci sorusunu örnekle cevaplandıran öğrencilerden birine ait bir cevap

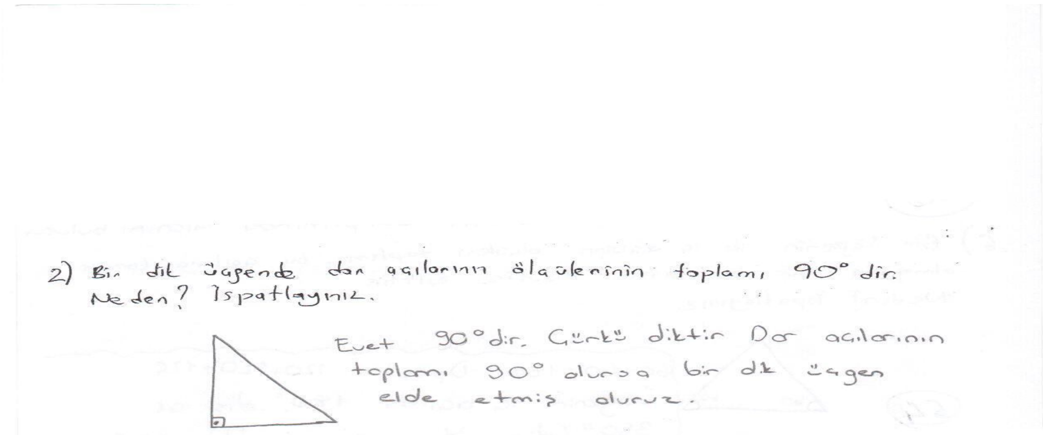
Şekil 4. 7 bir veya bir kaç örnekleme yoluyla verilen cevaplardan biri. Örnekle açıklayan öğrencilerin de dik açının 90^0 ve bir üçgenin iç açı ölçülerinin toplamının 180^0 olduğunu bildikleri yorumuna varabiliriz burdan. Fakat bunu örneğe, belki en çok kullandıkları bir örneğe dayandırmışlardır. Bu da bir ispat değildir. Çünkü bir iddia tek bir ters örnekle çürütülebildiği halde bir veya daha fazla destekleyici örnekle ispatlanamaz.

Öğrencilerden biri, açı ölçerle ölçüm yapılarak sonuca ulaşılabileceği gibi gerçekçi bir yaklaşımda bulunmuştur. Öğrencinin cevabı, doğru sonucu desteklemekte ve onaylamaktadır. Fakat bir genelleme yoktur. Mutlak olarak doğru sonucu garanti etmemektedir. Burada öğrenci ölçüm yapılarak deneysel bağlamda bir sonuç çıkarılacağını ifade etmiştir. Tümevarımsal bir yaklaşım olarak düşünülmüştür. Bu nedenle ispat yeterlidir.



Şekil 4. 8 Araştırmanın ikinci sorusunu ölçüm yaparak cevaplandıran öğrenciye ait cevap

Öğrencilerden bir diğeri ise tersinden farzederek sonuca ulaşmaya çalışmış fakat açıklaması yetersiz ve zayıf kalmıştır.



Şekil 4. 9 Araştırmanın ikinci sorusunu tersinden farzederek çözmeye çalışan öğrenciye ait cevap

Şekil 4. 9 daki cevaplandırmayı yapan öğrenci çözüme, dolaylı yoldan yaklaşmıştır. Yolu doğru fakat açıklaması yetersiz ve zayıftır.

Çizelge 4. 2 ye baktığımızda, yazılı ankete katılan öğrencilerin % 57,8 i; kavram yanılgılarından kaynaklı, bilgi eksikliğine dayanan ve ilgisiz yanlış cevaplar vermişlerdir. % 4, 5 i soruyu cevaplandıramayarak boş bırakmıştır. %22,1 i soruyu bilinenlerden hareketle doğrudan ispatlama yoluna gitmiştir. %14,2 si ise, örnekle doğrulamıştır. Bir öğrenci tersini farzederek dolaylı ispatlama yolunu kullanmıştır. Soruyu yanlış cevaplandıran ya da boş bırakarak cevaplandıramayanların bu oranının fazlalığı; öğrencilerin bilinenlerden hareketle iddianın ya da bir önermenin doğruluğunu yeniden inşa etmede(kanıtlama) yetersiz olduklarını düşündürmüştür. Doğru cevaplandıran öğrencilerden biri dolaylı ispat yolunu tercih etmiştir. Bu durum ise, öğrencilerin dolaylı ispat ile ilgili yaşantılarının eksik olduğu kanısını uyandırmıştır.

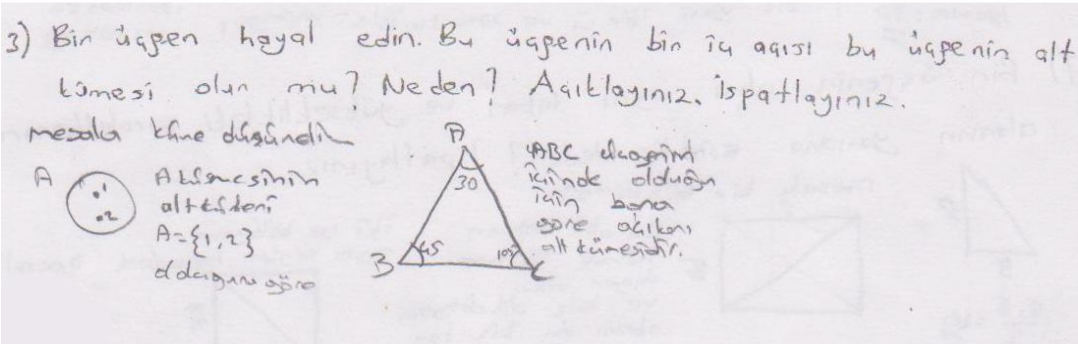
Araştırmanın "Bir üçgenin bir iç açısı bu üçgenin alt kümesi olur mu? Neden? Açıklayınız. İspatlayınız'' şeklindeki üçüncü sorusuna öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları Çizelge 4. 3 de verilmiştir.

Çizelge 4. 3: Araştırmanın üçüncü sorusuna öğrencilerin verdiği cevapların yüzde ve frekansları

Cevap türlerinin ortaya çıkış nedenleri	Öğrencilerin verdikleri cevaplarda karşılaşılan zorluklar ve yanılgılar	n	%
Kavram yanılgılarından kaynaklı cevaplar	Yanlış cevap (evet); Üçgen ile üçgensel bölge kavramlarını birbirinden ayıramama	7	4,5
	Yanlış cevap (evet); Açı ile açı ölçüsü kavramlarını birbirinden ayıramama	41	26,7
	Yanlış cevap (evet); Yanlış önermeye yönelme (Açı üçgenin elemanıdır)	5	3,2
	Kısmen doğru cevap; Yapılandırılamamış küme kavramı	25	16,2
Saçma yanıt	-	22	14,3
Eksik akıl yürütme	Geçerli bir açıklama yok, yanlış cevap	25	16,2
Cevap yok	-	29	18,8
Toplam		154	100,0

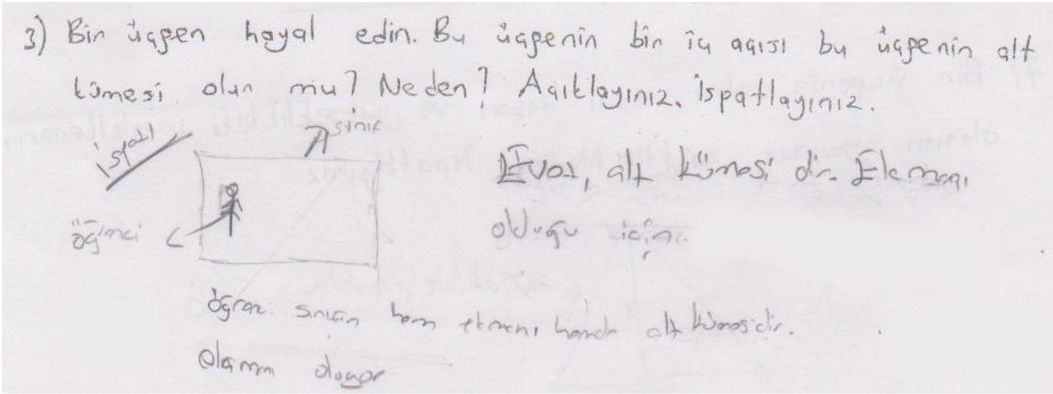
Çizelge 4. 3 incelendiğinde yazılı ankete katılan öğrencilerin %16,2 si kısmen doğru yanıtlamıştır. Bu soru geçersiz bir ifadenin çürütülmesine dayanmaktadır. Ancak verilen cevaplarda doğruya rastlanmamıştır. Bu öğrencilerin temel kavramlarda eksiklerinin olduğunu düşündürmekle birlikte, ifadeyi çürütme yoluna giden

öğrencinin olmaması onların ders içi etkinliklerde verilen bir ifadeyi sorgulamaya ve yanlış bir ifadenin çürütülmesine ilişkin yaşantılarının olmadığını düşündürmüştür. Öğrencilerin % 16,2 si yapılandırılamamış küme kavramı nedeniyle kavram yanılgısına düşmüştür.



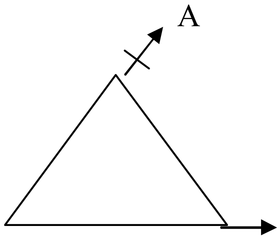
Şekil 4. 10 Araştırmanın üçüncü sorusunda yapılandırılamamış küme kavramı nedeniyle yanılgıya düşen öğrencilerden birine ait cevap

Şekil 4. 10 u incelediğimizde, kapalı şekilde küme tanımının kullanıldığını söyleyebiliriz. Öğrenci şema yöntemiyle 1 ve 2 elemanlarından oluşan bir A kümesi ve iç açı ölçüleri 45^0,30^0 ve 105^0 olan bir ABC üçgeni çizmiştir. A kümesinin alt kümelerinden biri olarak {1,2} ise iç açı da üçgenin içinde olduğu için alt kümesidir demiştir. Burada öğrenci şemayı küme olarak algılıyor. Üçgen şeklini de şema olarak yanlış algılıyor. Üçgen ikişer ikişer kesişen üç doğru parçasının birleşiminden oluşur. Alt kümeleri doğru parçaları, elemanları ise noktalardır. Üçgenin iç bölgesi üçgene değil üçgensel bölgeye aittir. Öğrenciler burada da bir yanılgıya düşüyor. Öğrencilerin %3,2 si yapılandırılamamış “eleman’’ kavramı nedeniyle yanılgıya düşmüşlerdir.



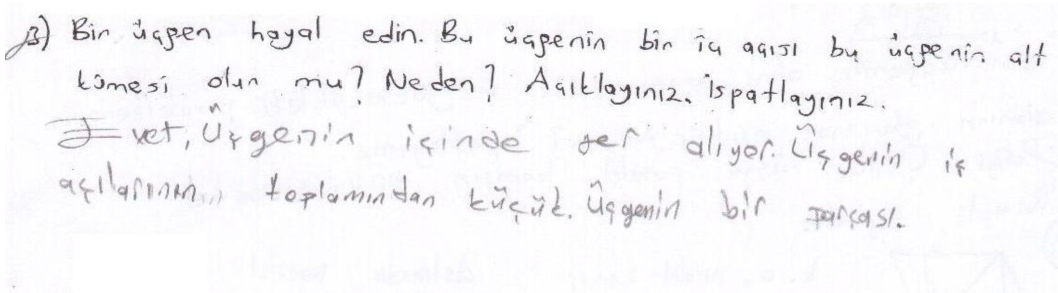
Şekil 4. 11 Araştırmanın üçüncü sorusunda yapılandırılamamış eleman kavramına ilişkin öğrenci cevaplarından biri

Şekil 4. 11 de öğrenci; adam sınıf odasının bir elemanıysa iç açı da üçgenin elemanıdır o halde alt kümesidir demiştir. Halbuki sınıf odasına ait özellik adamda yok. Adama ait özellik sınıf odasında yok. Adam sınıf odasının elemanı değildir. Açının kolları da bir ışındır ve üçgenin kenarlarıyla sınırlı kalmaz, sonsuza dek uzayabilir. Açı üçgenin elemanı değildir. Ters bir örnek; A noktası açının elemanı fakat üçgenin elemanı değildir.



Şekil 4. 12 Ters örnek

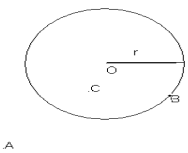
Öğrencilerin %26,7 si açı ile açı ölçüsünü karıştırmaları nedeniyle yanlış cevap vermişlerdir.


B) Bir üçgen hayal edin. Bu üçgenin bir iç açısı bu üçgenin alt kümesi olur mu? Neden? Açıklayınız. İspatlayınız.
Evet, Üçgenin içinde yer alıyor. Üçgenin iç açılarının toplamından küçük. Üçgenin bir parçası.

Şekil 4. 13 Araştırmanın üçüncü sorusunda açı ile açı ölçüsünü karıştırma nedeniyle yanlış cevap veren öğrencilerden birine ait cevap

Şekil 4. 13 e baktığımızda öğrenci üçgenin iç açı ölçüleri toplamıyla iç açı ölçüsü arasında ilişki kurmuştur. İç açı ölçüsü iç açı ölçüleri toplamından küçüktür ve bir parçasıdır öyleyse alt kümesidir demiştir. Açı ile açı ölçüsü kavramlarını karıştırmıştır. Bu da öğrencilerin açı ile açı ölçüsü kavramlarında yanılgılarının olduğunu ortaya koymuştur.

Araştırmanın üçüncü sorusuna, yazılı ankete katılan öğrencilerin %34,4 ü kavram yanılgısı sebebiyle, %30,5 i ilişkisiz ve eksik akıl yürütme sebebiyle yanlış cevap vermişlerdir. %18,8 i ise soruyu cevaplandıramayarak boş bırakmışlardır. Burada öğrenciler, kavram yanılgısı sebebiyle ispatlama aşamasına geçememişlerdir. Buradan, öğrencilerin açı, üçgen ve özellikle kümeler konusunun zihinlerinde yapılandırılamamış olduğu görülmektedir.



Araştırmanın dördüncü sorusu

Yukarıdaki O merkezli, r yarıçaplı çemberde,

a) A noktası çemberin dış bölgesindedir.

b) B noktası çemberin üzerindedir.

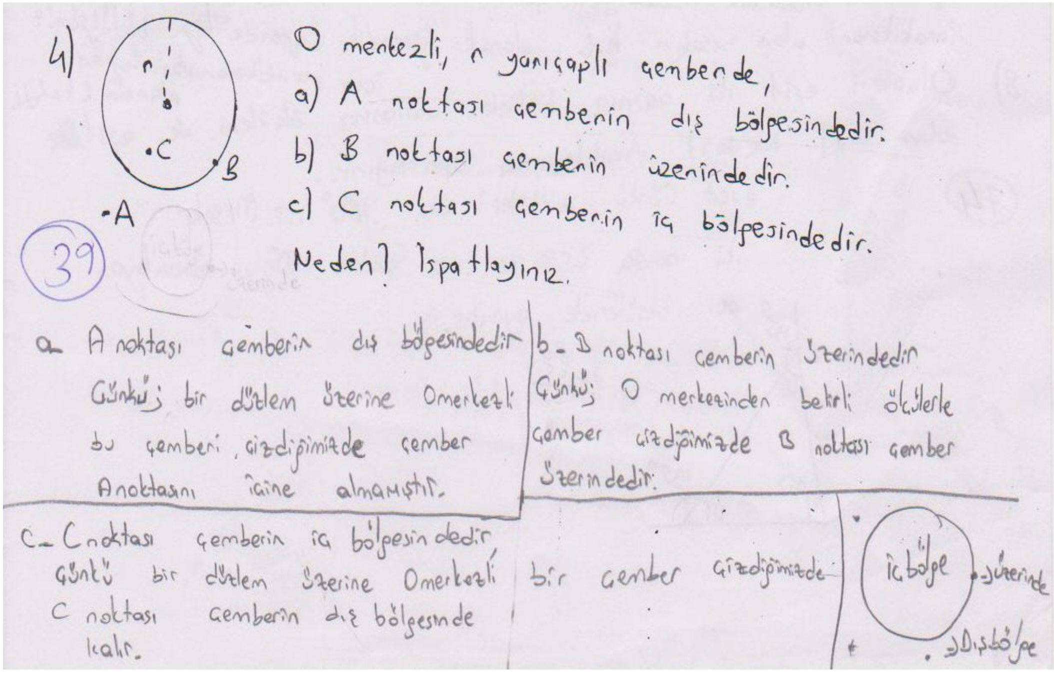
c) C noktası çemberin iç bölgesindedir.

Neden? İspatlayınız. Not: Cetvel takımı kullanabilirsiniz.

Şeklindedir bu dördüncü soruya öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları Çizelge 4. 4 de verilmiştir.

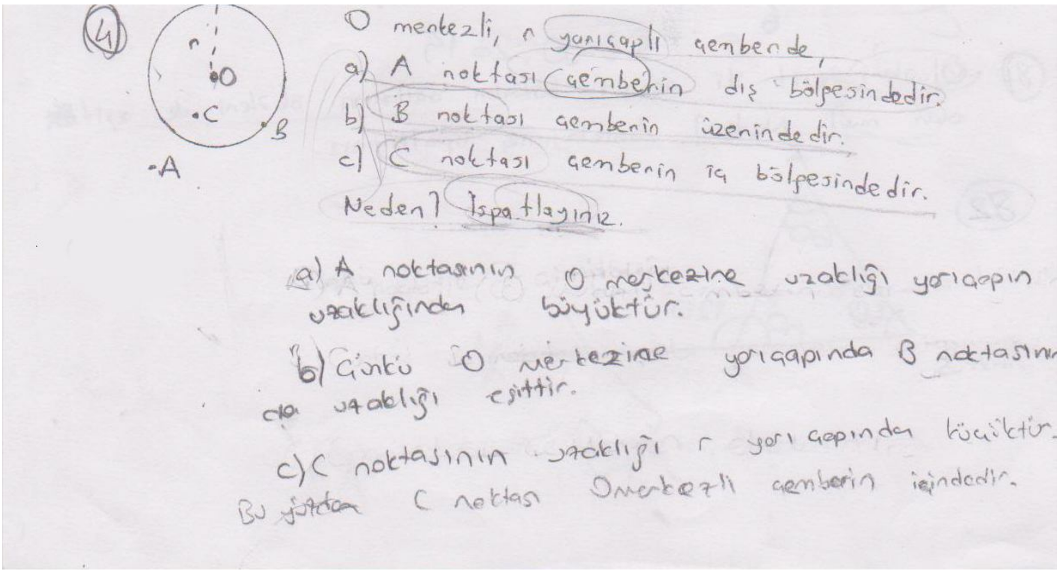
Çizelge 4. 4 Araştırmanın dördüncü sorusuna öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları

Cevaplamalarda kullanılan ispatlama yolları	n	%
Temel bilgi, şekil, sözel açıklama, kısmen doğru cevap	36	23,4
Ölçüm yapmadan kıyaslama, yaklaşım doğru ama çözüm yok, kısmen doğru cevap	23	14,9
Saçma yanıt	66	42,9
Ölçüm yaparak sonuca ulaşma kararı, kısmen doğru cevap	1	0,6
Cevap yok	28	18,2
Toplam	154	100,0



Şekil 4. 14 Araştırmanın dördüncü sorusunu temel bilgilere dayanarak cevaplandıran öğrencilerden birine ait cevap

Öğrencilerin %23,4 ü temel bilgilerine dayanarak doğrudan ispatlama yolunu kullanmışlardır. Şekil 4. 14 de öğrenci şekille çemberin iç bölgesini, dış bölgesini ve kendisini göstermiş ve bu bilgiye göre kanıtlama yoluna gitmiştir. Bu temel bilgi doğrudur. Ancak açıklama eksiktir. Öğrencilerin burada, açıklamalarının dayandığı temel bilgiyi görsel şekilde ifade etmeleri görsel doğrulamaya eğilimleri olarak düşünülmüştür.



Şekil 4. 15 Araştırmanın dördüncü sorusuna yarıçapa bağlı kıyaslama yaparak cevaplandıran öğrencilerden birine ait cevap

Öğrencilerin %14,9 u soruyu, ölçüm yapmadan kıyaslama yaparak doğrulamıştır.

Öğrenci burada, soruda verilen A noktasının merkeze uzaklığıyla yarıçap uzunluğunu, B noktasının merkeze uzaklığıyla yarıçap uzunluğunu, C noktasının merkeze uzaklığıyla yarıçap uzunluğunu karşılaştırarak ispatlama yoluna gitmişlerdir. Söz konusu noktanın merkeze uzaklığı, “yarıçapa eşitse nokta çemberin üzerinde, yarıçaptan büyükse çemberin dışında, yarıçaptan küçükse çemberin iç bölgesinde olur ‘’demiştir. Eğer uzunluklarını ölçerek sayısal ifadeler koymuş olsaydı, ölçmeye dayalı tümevarımsal ispat yapılmış olacaktı.

Bir öğrenci de ölçüm yapılarak sonuca ulaşılacağını yazmıştır.

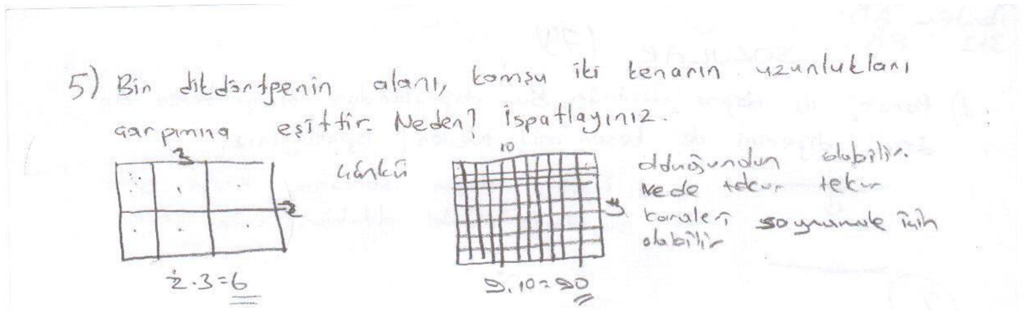
Öğrencilerin %23,4 ü temel bilgiye dayanarak görsel şekilde, % 14,9 u ölçüm yapmadan kıyaslama yaparak ispatlama yoluna gitmişlerdir. %42,9 u ilişkisiz cevaplar vererek yanlış yapmışlardır. %18,2 si soruyu cevaplandıramayarak boş bırakmışlardır. Buradan öğrencilerin şekle bakarak karar verdikleri için, gerçekçi bir yaklaşımı çok tanımadıkları ve ispatlamanın mantığını tam kavrayamadıkları yorumu getirilebilir.

Araştırmanın “Bir dikdörtgenin alanı, komşu iki kenarın çarpımına eşittir. Neden? İspatlayınız’’ şeklindeki beşinci sorusuna öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları Çizelge 4. 5 de verilmiştir.

Çizelge 4. 5 Araştırmanın beşinci sorusuna öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları

Cevaplamalarda kullanılan ispatlama yolları	n	%
Birim karelere ayırarak sonuca ulaşma, kısmen doğru cevap	9	5,8
Açıklayıcı doğru çizim ama çözüm yok, kısmen doğru cevap	12	7,8
Kuralı kabul edip sorgulamadan örnekleme, yanlış cevap	75	48,7
Saçma yanıt	32	20,8
Cevap yok	25	16,2
Tersinden yola çıkarak sonuca ulaşma ama çözüm yok, zayıf açıklama, kısmen doğru cevap	1	0,6
Toplam	154	100,0

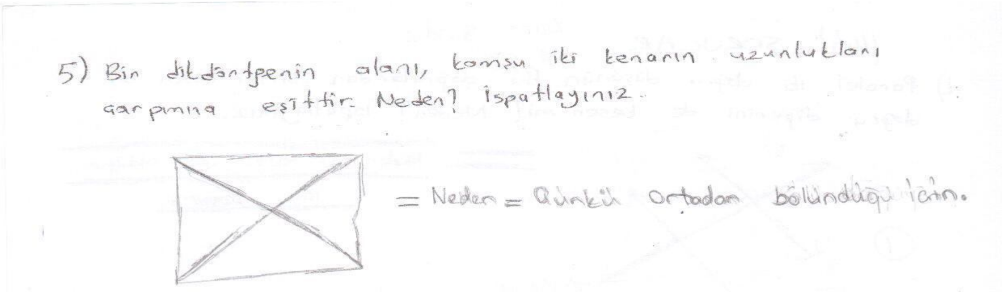
Çizelge 4. 5 incelendiğinde, ankete katılan öğrencilerin, %5,8 i birim karelere ayırarak tümevarımsal ispatlama yolunu kullanmıştır. % 7, 8 i sadece şekille, görsel biçimde doğrudan ispatlama yolunu kullanmıştır. %48,7 si örnekle doğrulamıştır. Bir öğrenci tersini farzederek dolaylı yoldan açıklamayı tercih etmiştir. %20,8 i ilişkisiz cevaplar vererek yanlış cevap vermiştir. %16,2 si soruyu cevaplandıramayarak boş bırakmıştır.



Şekil 4. 16 Araştırmanın beşinci sorusunu birim kareleri sayarak cevaplandıran öğrencilerden birine ait cevap

Ankete katılan öğrencilerin %5,8 i soruyu birim kareleri sayarak doğrulamıştır.
Şekil 4. 16 da öğrenci, bir birim kareden faydalanarak kenarlarının 3 birim ve 2 birim varsaydığı bir dikdörtgen çizmiştir. Dikdörtgeni birim karelere ayırarak, birim

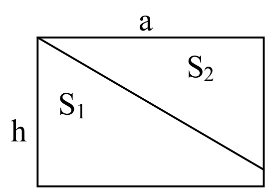
kareleri saymış ve 6 birim kare elde etmiştir. Bu da iki dik kenar uzunluğunun çarpımıdır. Buradan kenar uzunlukları daha büyük olan dikdörtgen için, alan hesabında yine birim kareleri kullanmış ve çok sayıda birim kare olduğunu görmüştür. Bu işin kolaylaşması için, tek tek birim kareleri saymak zorunda kalınmaması için dikdörtgenin alan ölçüsü; iki dik kenarın çarpımına eşit olmuş olabilir yorumunu getirerek bir çıkarımda bulunmuştur. Açıklama yeterli ve geçerlidir. Ancak kenarlar eşit olarak bölünemeseydi, bu yöntem çalışmayacaktı. Öğrencilerin şekil üzerinden, birim kareleri sayarak çıkarımda bulunmaları, onların sayısal örnekli doğrulamaya eğilimli olduklarını düşündürmüştür.



Şekil 4. 17 Araştırmanın beşinci sorusuna çizimle cevap veren öğrenci cevaplarından biri

% 7, 8 i sadece şekille, görsel doğrulamayı kullanmıştır.

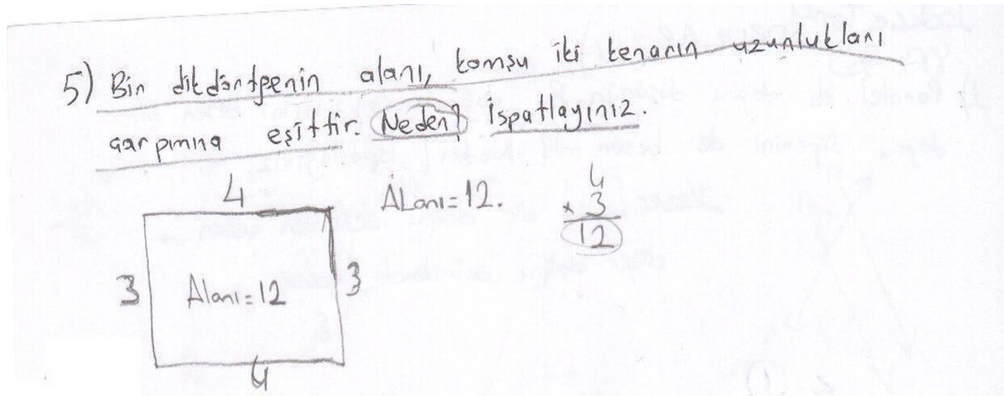
Şekil 4. 17 de öğrencinin cevabı, dikdörtgeni eş üçgenlere ayırması, sorunun çözümünü sezdiği fikrini uyandırmaktadır. Fakat çözüm olmadığı için cevabı eksik, açıklama yeterli değildir. Üçgenlerin alanından dikdörtgenin alanı, alan formülleri kullanılarak elde edilebilirdi (şekil 4. 18). Öğrencilerin üçgenin ve dikdörtgenin alan bilgisine dayanarak yaptıkları varsayılan açıklama yanlış değilse de geçerli bir ispat da oluşturamamışlardır. Öğrencilerin şekil kullanmaya yönelmeleri görsel doğrulamaya eğilimleri olarak yorumlanabilir.



$$\frac{h.a}{2} = S_1$$
$$\frac{h.a}{2} = S_2$$
$$2.\frac{h.a}{2} = h.a = S_1 + S_2$$

elde edilir.

Şekil 4. 18

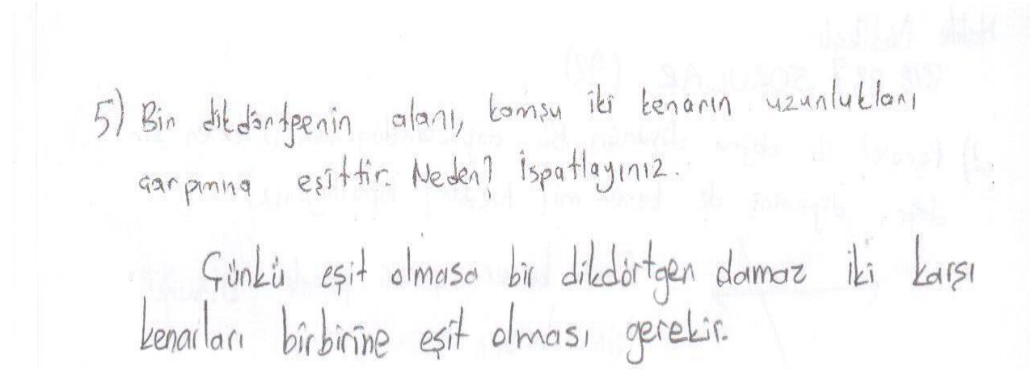


Şekil 4. 19 Araştırmanın beşinci sorusunu örnekle cevaplandıran öğrenci cevaplarından biri

Araştırmaya katılan öğrencilerin %48,7 si soruyu, kuralı sorgulamadan örnekle doğrulamıştır.

Evrensel bir önermenin kanıtı için destekleyici örnek göstermek yeterli değildir ancak yazılı ankete katılan öğrencilerin çoğu kuralı sorgulamadan destekleyici örnekle doğrulamayı kullanmıştır. Bu durum öğrencilerin kuralları nedenlerini sorgulamadan eleştirel düşünmeden uzak, ezberci bir yaklaşım içinde bulundukları ve ispatın altında yatan mantığı kavrayamadıklarını göstermiştir.

Bir öğrenci tersini farzederek dolaylı yoldan ispatlamaya çalışmıştır.



5) Bir dikdörtgenin alanı, komşu iki kenarın uzunlukları çarpımına eşittir. Neden? İspatlayınız.

Çünkü eşit olmasa bir dikdörtgen olamaz iki karşı kenarları birbirine eşit olması gerekir.

Şekil 4. 20 Araştırmanın beşinci sorusuna tersinden farzederek yaklaşan öğrenciye ait cevap

Şekil 4. 20 de öğrenci tersinden yola çıkarak farklı bir yoldan yaklaşmıştır. Ancak açıklama yanlış değil fakat zayıf ve yetersizdir.

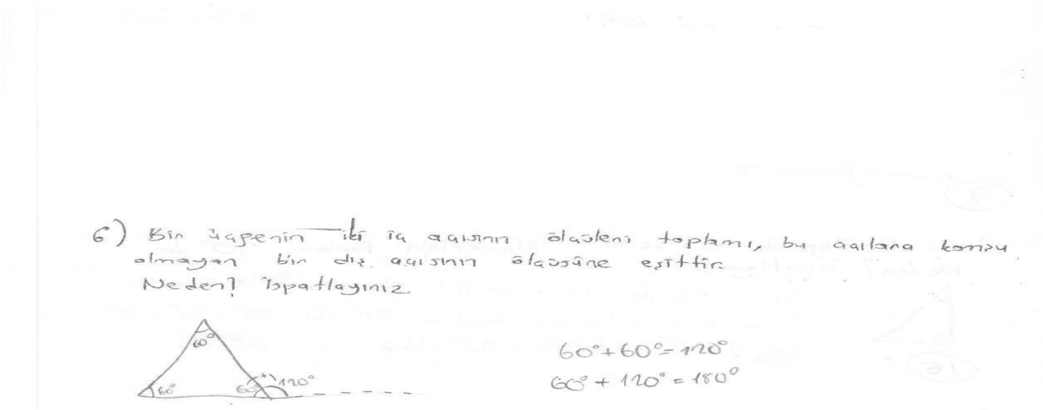
Çizelge 4. 5 incelendiğinde, ankete katılan öğrencilerin, %5,8 i birim karelere ayırarak doğrudan ispatlama yolunu kullanmıştır. % 7, 8 i sadece şekille, görsel biçimde ispatlama yolunu kullanmıştır. %48,7 si örnekle doğrulamıştır. Bir öğrenci tersini farzederek dolaylı yoldan açıklamayı tercih etmiştir. %20,8 i ilişkisiz cevaplar vererek yanlış cevap vermiştir. %16,2 si soruyu cevaplandıramayarak boş bırakmıştır.

Araştırmanın “Bir üçgenin iki iç açısının ölçüleri toplamı, bu açılara komşu olmayan bir dış açısının ölçüsüne eşittir. Neden? İspatlayınız’’ şeklindeki altıncı sorusuna öğrencilerin verdiği cevapların yüzde ve frekansları Çizelge 4. 6 da verilmiştir

Çizelge 4. 6 Araştırmanın altıncı sorusuna öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları

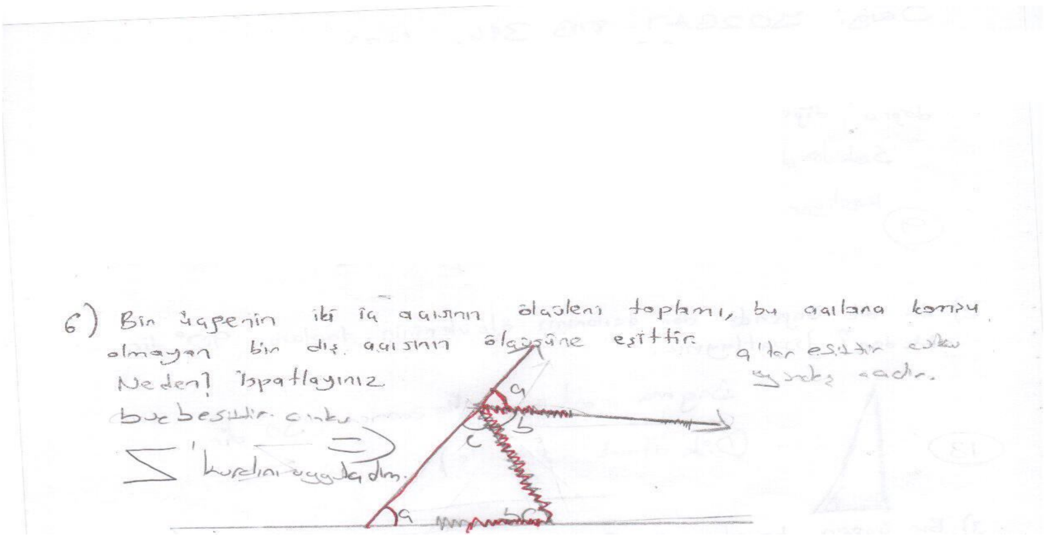
Cevaplamalarda kullanılan ispatlama yolları	n	%
Şekil, örnek üzerinden açıklama, yanlış cevap	29	18,8
Ek çizim, paralellikten yararlanarak sonuca ulaşma, cebirsel açıklama, doğru cevap	2	1,3
Destekleyici şekil, bilinen sonuçlardan yola çıkarak sonuca ulaşma, cebirsel açıklama, doğru cevap	4	2,6
Bilinen sonuçlardan yararlanarak sonuca ulaşma, sözlü ifadelerle açıklama, doğru cevap	6	3,9
Açıklaması doğru ama örneğe dayandırma var, yanlış cevap	2	1,3
Kavram yanılgılarından kaynaklı yanlış cevap	16	10,4
Yerleşmiş kural bilgisi, geçerli bir açıklama yok, yanlış cevap	27	17,5
Saçma yanıt	36	23,4
Cevap yok	32	20,8
Toplam	154	100,0

Öğrencilerin %20,1 i soruyu örnek üzerinden, %1,3 ü paralellikten yararlanarak ve değişkenler kullanarak doğrudan, %2,6 sı bilinenlerden yararlanarak ve değişkenler kullanarak doğrudan, %3,9 u bilinenlerden yararlanarak sözlü ifadelerle doğrudan ispatlama yolunu kullanmışlardır. %10,4 ü kavram yanılgılarından kaynaklı, %17,5 i kuralı biliyor fakat geçersiz açıklamadan, %23,4 ü ilişkisiz cevaplardan kaynaklı yanlış cevap vermişlerdir. %20,8 i soruyu cevaplandıramayarak boş bırakmıştır.



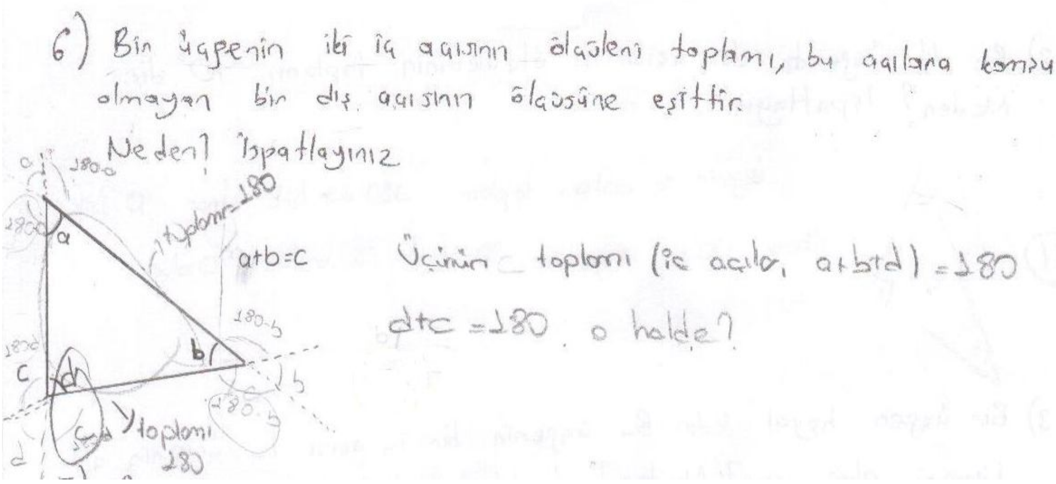
Şekil 4. 21 Araştırmanın altıncı sorusuna örnekle cevaplandıran öğrencilerden birine ait cevap

Öğrencilerin %20,1 soruyu şekil 4. 21 deki gibi örnekle doğrulamıştır. Destekleyici örnek, bir evrensel önermenin ispatı için yeterli değildir. Deneyerek sonucun doğruluğunu görmüştür fakat bir genelleme yoktur. Açıklama yeterli ve geçerli değildir.



Şekil 4. 22 Araştırmanın altıncı sorusunu “Z kuralı’’ adı ile paralellikten yararlanarak cevaplandıran öğrenci cevaplarından biri

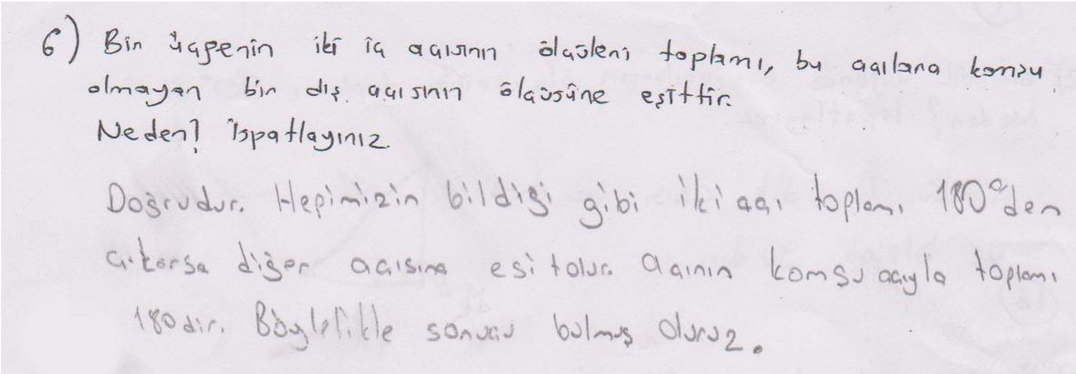
Z kuralı diye bir şey yoktur. Fakat bu “kural’’ altında aslında iki paralel doğrunun üçüncü bir doğruyla kesişmesiyle ortaya çıkan açıların özellikleri kuralı durmaktadır. Bu açıdan çözüm kabul edilebilir. Öğrencilerin % 1,3 ü soruyu ek bir paralel çizerek, yöndeş açılardan ve iç ters açılardan faydalanarak çözmüştür ve değişkenler kullanarak bir genelleme yapmış, doğrudan ispatlama yolunu tercih etmiştir. Açıklama geçerli ve yeterlidir. Bu, öğrencilerin önermeyi, ek çizim yöntemiyle, bilinenlerden yararlanarak ve değişkenler kullanarak açıklamaları, onların cebirsel ve doğrudan ispatı tercih ettiklerini göstermiştir.



Şekil 4. 23 Araştırmanın altıncı sorusunu bilinenlerden yararlanarak cevaplandıran öğrenci cevaplarından biri

Şekil 4. 23 de öğrenci, sorudaki iddianın doğru olduğuna ikna olmuş ve iddiayı nasıl kanıtlayacağını anlamıştır. Çünkü doğrusal açı kavramını, ters açı kavramını defalarca farklı tarzda kullanmıştır. Yaptığı her cebirsel işlemin nedeninin farkındadır. Böylece üçgenin iç açı ölçüleri toplamından elde ettiği bir denklemle, bir iç açıya komşu bir dış açının oluşturduğu doğrusal açıdan elde ettiği bir denklem daha oluşturmuş ve buradan zihinden a+b=c yani iki iç açının ölçüleri toplamının komşu olmayan bir dış açıya eşit olduğunu görmüştür. Bildiklerini iyi kullanmış ve sonuca ulaşmıştır. Bu ispat, kitaplarda verilen standart yöntemden farklı olmakla öğrencinin kendi düşünce sonucu olarak daha değerli bir yöntemdir.

Şekil 4. 22 ve şekil 4. 23 deki gibi cebirsel biçimde, doğrudan bir ispatlamayı yapabilen öğrenciler yaptıkları ispatın altında yatan mantığın farkındadır. Bir genellemeye ulaşmışlardır. Ancak yazılı ankete katılan öğrencilerin sadece %3,9 u bu ispatlamayı yapabilmiştir.


6) Bir üçgenin iki iç açısının ölçüleri toplamı, bu açılara komşu olmayan bir dış açısının ölçüsüne eşittir. Neden? İspatlayınız.

Doğrudur. Hepimizin bildiği gibi iki açı toplamı 180°den çıkarsa diğer açısına esit olur. Açının komşu açıyla toplamı 180 dir. Böylelikle sonucu bulmuş oluruz.

Şekil 4. 24 Araştırmanın altıncı sorusunu sözlü ifadelerle doğrulayan öğrencilerden birine ait cevap

Öğrencilerin %3,9 u sözel biçimde doğrulamıştır. Herhangi bir şekil ya da değişken içeren ifadeler ya da işlemler kullanmamıştır. Ancak açıklamasında bilinen bağıntılara dayandırarak yapılmış tümdengelimsel doğrudan bir yapı vardır. Bu nedenle açıklaması geçerli ve yeterlidir. İspatlamada sözlü ifadeleri kullanan bu öğrencilerin sözel doğrulamaya eğilimli olduklarını ortaya koymuştur.

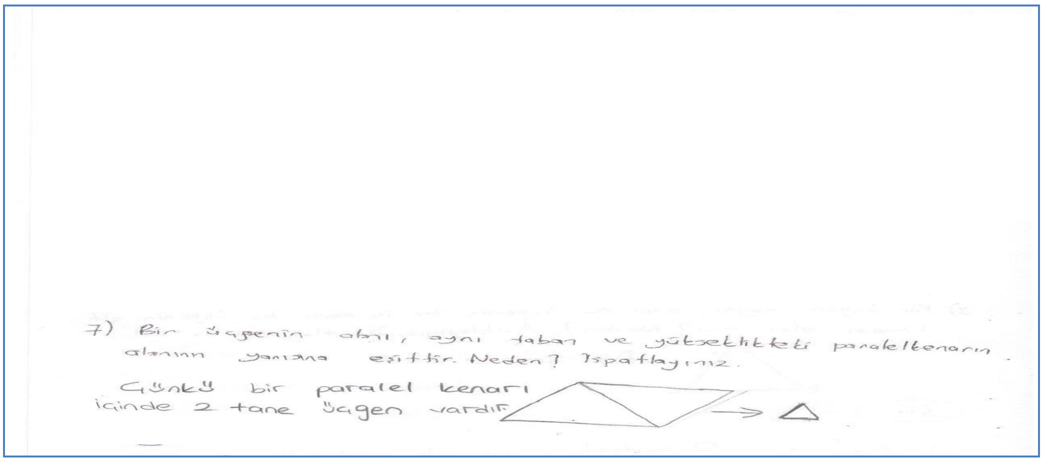
Yazılı ankete katılan öğrencilerin örnekle açıklamalar da dahil, %71,4 ü soruyu yanlış yanıtlamışlardır. Yanlışlar; örnekle doğrulama da dahil kavram yanılgıları ve ilişkisiz cevaplardan oluşmaktadır. %20,8 i de soruyu cevaplandıramayarak boş bırakmıştır. Bu durum öğrencilerin, geometride açı ve üçgenler konusunda, değişkenlerin de kullanıldığı bir önermenin yeniden inşa edildiği etkinliklerde eksik olduğu fikrini uyandırmıştır. Dolaylı ispat yönteminin kullanımına rastlanmamıştır.

Araştırmanın “Bir üçgenin alanı aynı taban ve yüksekliğe sahip olan paralelkenarın alanının yarısına eşittir. Neden? İspatlayınız’’ şeklindeki yedinci sorusuna öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları Çizelge 4. 7 de verilmiştir.

Çizelge 4. 7 Araştırmanın yedinci sorusuna öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları

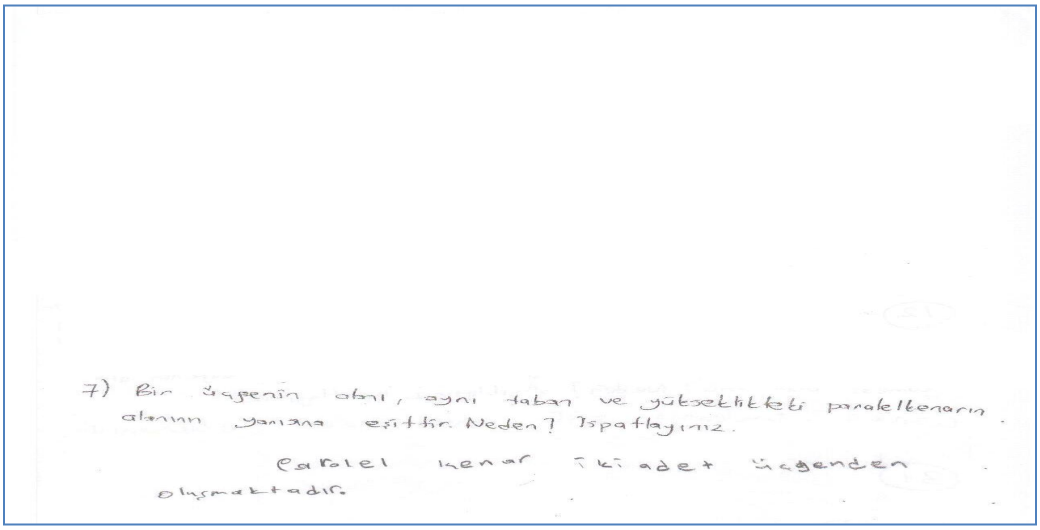
Cevaplamalarda kullanılan ispatlama yolları	n	%
Açıklayıcı doğru çizim ama çözüm yok, kısmen doğru cevap	25	16,2
Sözel tanımlama ama çözüm yok, yanlış cevap	3	1,9
Örnek üzerinden açıklama var, yanlış cevap	12	7,8
Bilinenleri kullanma, doğru cebirsel açıklama, destekleyici şekil, doğru cevap	3	1,9
Cevap yok	39	25,3
Kavram yanılgılarından kaynaklı yanlış cevap	13	8,4
Doğru yapının kısmi kullanımı (alan bağıntılarını yazar ama aralarındaki bağlantıyı kuramaz), yanlış cevap	15	9,7
Saçma yanıt	44	28,6
Toplam	154	100,0

Çizelge 4. 7 incelendiğinde ankete katılan öğrencilerin %16,2 sinin sadece açıklayıcı bir çizimle kısmen, yine %1,3 ünün bilinenler yardımıyla değişkenler kullanarak soruyu doğru cevapladıkları görülüyor. %1,9 unun sözel fakat ispat sayılamayacak bir açıklamayla, %7,8 i ise örnek üzerinden, %8,4 ü kavram yanılgılarından, %9,7 sinin ise geçerli olmayan açıklamalardan %28,4 ünün ise ilişkisiz cevaplardan yanlış cevapladıkları görülmektedir. %25,3 ünün cevaplandıramayarak boş bıraktıkları görülmektedir. Kısmen doğru yapan öğrencilerin oranıyla birlikte % 20 si doğru yanıt verebilmişlerdir. Bu oranın azlığı, öğrencilerin geometrik alan bağıntılarında, açıklamalarında matematiksel işlemleri, bağıntılar arası işlemsel ilişkileri kurmakta ve cebirsel ifadeleri kullanmakta yetersiz olduklarını, problemlerde tümdengelimsel muhakeme becerilerinin de yeterli olmadığı fikrini uyandırmaktadır. Dolaylı ispat yönteminin kullanımına rastlanmamıştır.



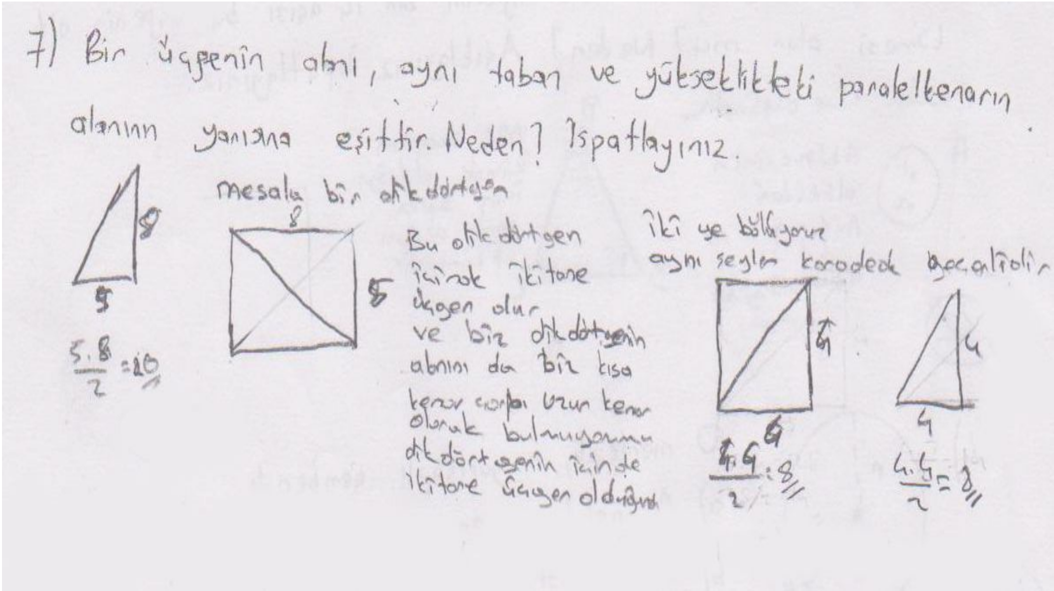
Şekil 4. 25 Araştırmanın yedinci sorusunu açıklayıcı çizimle cevaplandıran öğrencilerden birine ait cevap

Öğrencilerin %16,2 si herhangi bir işlem yapmadan sadece çizimle doğrulamışlardır. Doğru cevabı sezmişler ancak açıklamaları geçerli fakat yeterli değildir. Zira paralelkenar içerisinde her üçgen değil, bir köşegenin oluşturduğu iki üçgen söz konusudur. Öğrencilerin üçgenin alan bağıntısından haberdar oldukları varsayılırsa doğrudan ispata yöneldikleri düşünülebilir. Öğrencilerin şekle yönelmeleri ise onların görsel doğrulamaya eğilimleri olarak yorumlanabilir.



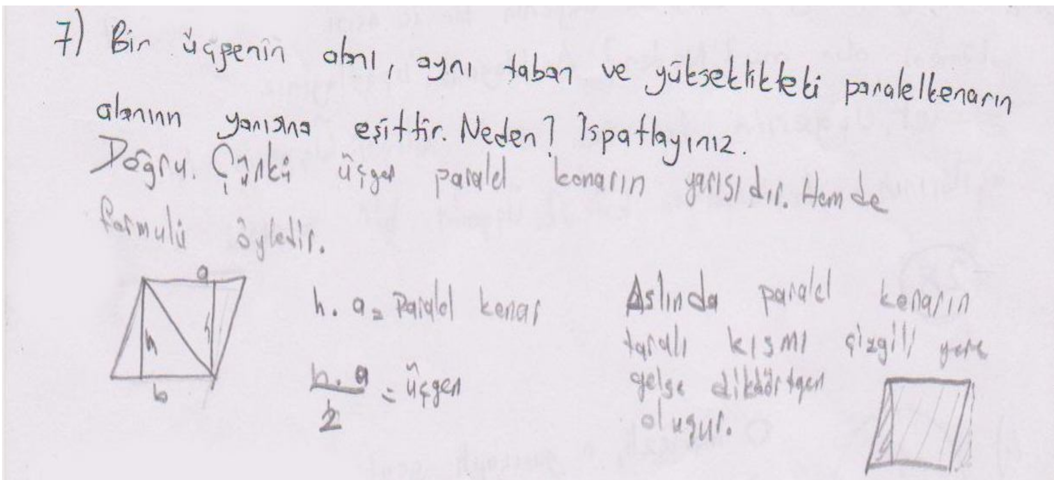
Şekil 4. 26 Araştırmanın yedinci sorusuna sözlü ifadelerle cevaplandıran öğrencilerden birine ait cevap

Öğrencilerin %1,9 u soruyu sözlü ifadelerle cevaplamışlardır. Bu, ispat sayılamaz.



Şekil 4. 27 Araştırmanın yedinci sorusunu örnekle cevaplandıran öğrencilerden birine ait cevap

Öğrencilerin %7,8 i soruyu şekil 4. 27 deki gibi örnek üzerinden doğrulamıştır. Öğrenci, alan bağıntılarını oluşturabilmiş, kullanabilmiştir. Konuyu kavradığı ortadadır. Ancak, ispatın tam mantığını kavrayamadığından örnek üzerinden açıklama yaptığı anlaşılıyor. Örnek vermek, bir önermenin ispatı için yeterli değildir. İddiayı destekleyici, onaylayıcı bir örnektir ancak mutlak olarak onun doğruluğunu garanti etmiş değildir. Her dikdörtgen paralelkenardır ama her paralelkenar dikdörtgen değildir. Burada dikdörtgen olduğu için yanlıştır.



Şekil 4. 28 Araştırmanın yedinci sorusunu cebirsel ifadeler kullanarak cevaplandıran öğrencilerden birine ait cevap

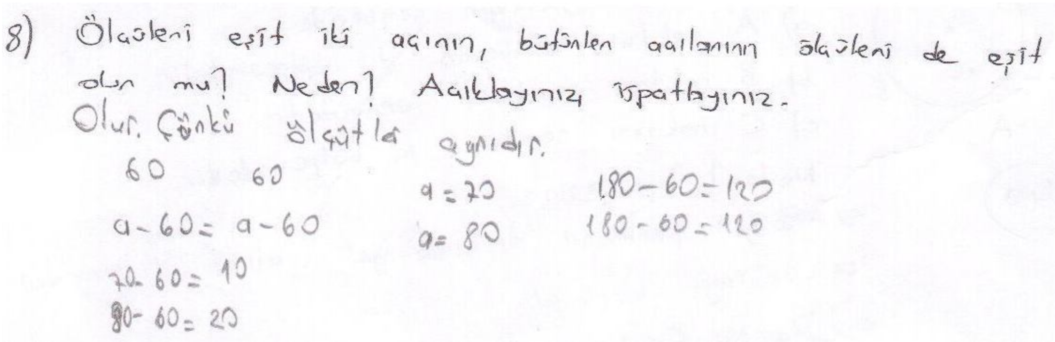
Öğrencilerin %1,9 u şekil 4. 28 deki gibi cebirsel ifadelerle doğrudan ispatlama yolunu kullanmıştır. Öğrenci, üçgensel ve paralelkenarsal bölgenin alan bağıntılarından üçgensel bölgenin alanının, paralelkenarsal bölgenin alanının yarısı olduğunu cebirsel ifadeler kullanarak göstermiştir. Öğrenci burada ispatlamanın farkındadır ve açıklaması geçerli, yeterlidir. Tümdengelimsel doğrudan ispatlama yolunu kullanmıştır.

Araştırmanın "Ölçüleri eşit iki açının, bütünler açılarının ölçüleri de eşit olur mu? Neden? Açıklayınız, ispatlayınız'' şeklindeki sekizinci sorusuna öğrencilerin verdiği cevapların yüzde ve frekansları Çizelge 4. 8 de verilmiştir.

Çizelge 4. 8 Araştırmanın sekizinci sorusuna öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları

Cevaplamalarda kullanılan ispatlama yolları	n	%
Destekleyici şekil, örnek üzerinden açıklama, yanlış cevap	19	12,4
Örnek üzerinden sayısal açıklama, yanlış cevap	6	3,9
Doğru cevap (evet); bilinenler üzerine genelleme var ama zayıf açıklama (cebirsel ifadeler kullanılmış)	1	0,6
Doğru cevap (evet); dolaylı yoldan açıklama	1	0,6
Kavram yanılgılarından kaynaklı yanlış cevap	17	11,1
Saçma yanıt	34	22,1
Geçerli açıklama yok, yanlış cevap	43	27,9
Yanlış cevap (Hayır)	7	4,5
Cevap yok	26	16,9
Toplam	154	100,0

Çizelge 4. 8 incelendiğinde ankete katılan öğrencilerin % 16,3 ü destekleyici örnek üzerinden doğrulamıştır. %0,6 sı cebirsel ifadelerle doğrudan, %0,6 sı önermeler mantığıyla olmayana ergi yöntemiyle doğrulamıştır. %11,1 i kavram yanılgılarından, %22,1 i ilişkisiz cevaplardan, %32,4 ü geçersiz açıklamalardan dolayı yanlış cevap vermişlerdir. %16,9 u ise soruyu cevaplandıramayarak boş bırakmıştır.



8) Ölçüleri eşit iki açının, bütünlen açılarının ölçüleri de eşit olur mu? Neden? Açıklayınız ispatlayınız.
Olur. Çünkü ölçütle aynıdır.
60 60
a-60= a-60
70-60= 10
80-60= 20
a=70 180-60=120
a=80 180-60=120

Şekil 4. 29 Araştırmanın sekizinci sorusunu dolaylı ispatla cevaplandıran öğrenciye ait cevap

Şekil 4. 29 da öğrenci, önermeler mantığından yola çıkmıştır.

p : iki açının ölçüleri eşit olsun. p' = iki açının ölçüleri eşit olmasın.

q : bütünler açılarının ölçüleri de eşit olur. q' = bütünler açılarının ölçüleri eşit olmaz.

Soru $p \Rightarrow q$ şeklindedir (Ölçüleri eşitse, bütünler açılarının ölçüleri de eşit olur).

$p' \Rightarrow q'$ (ölçüleri eşit olmayan iki açının bütünler açılarının da ölçüleri eşit olmaz) şeklindedir.

Önermeler mantığına göre $p \Rightarrow q \equiv p' \Rightarrow q'$ ($p \Rightarrow q$ nun doğruluk değeri, $p' \Rightarrow q'$ nun doğruluk değerine eşittir).

Öğrenci, ölçüleri eşit olmayan iki açının bütünler açılarının da eşit olmadığını görmüştür.

$p \equiv 1 \Rightarrow p' \equiv 0$ (p doğru ise p' yanlıştır)

$q \equiv 1 \Rightarrow q' \equiv 0$ (q doğru ise q' yanlıştır)

Önermeler mantığına göre $p \Rightarrow q$ nun doğruluk değerleri tablosu,

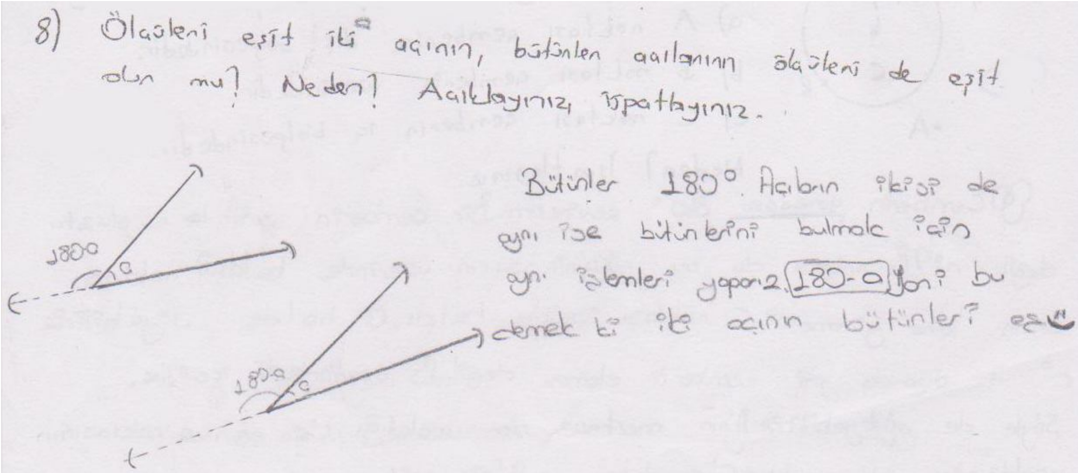
p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$p \Rightarrow q \equiv p' \Rightarrow q'$

$1 \Rightarrow 1 \equiv 0 \Rightarrow 0$ $p \Rightarrow q$ nun doğruluk değeri de 1 dir yani doğrudur, $p' \Rightarrow q'$ nun doğruluk değeri de 1 dir yani doğrudur.

O halde iddia doğrudur, sonucuna varmıştır.

Öğrenci burada dolaylı ispat yöntemini uygulamıştır. Açıklaması yeterli ve doğrudur.



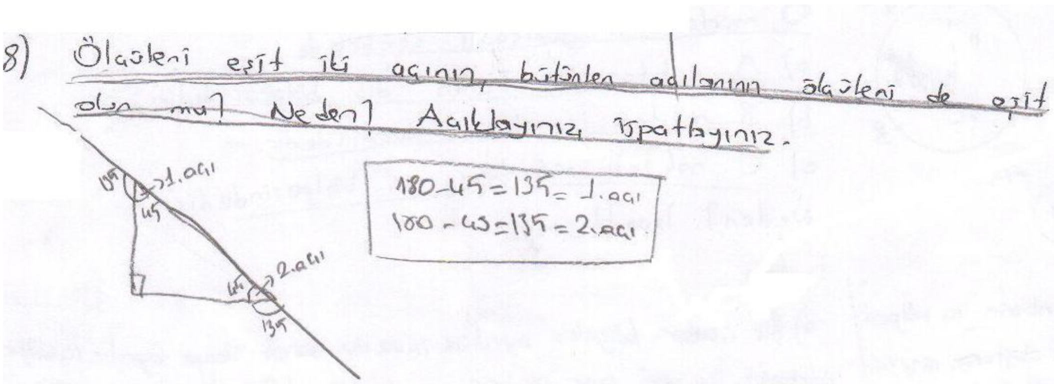
Şekil 4. 30 Araştırmanın sekizinci sorusunu bilinenler yardımıyla değişken kullanarak cevaplandıran öğrenciye ait cevap

Şekil 4. 30 incelendiğinde öğrenci değişkenler kullanarak cebirsel ve doğrudan ispatlama yolunu kullanmıştır. Ancak ispatı yaparken basamaklarını atlamıştır. Yani,

$$a = a$$
$$180\text{-}a = 180\text{-}a$$

demiştir.

Yöntem doğru, cevap doğru ancak açıklaması zayıf kalmıştır. Bu da öğrencinin eşitlik konusuyla ve ispatlamayla ilgili eksikleri olduğunu düşündürüyor. Fakat bu soruda değişken kullanarak doğrudan ispatlama yoluna giden tek öğrencidir. Bu öğrenci cebirsel doğrulamayı kullanmıştır.



Şekil 4. 31 Araştırmanın sekizinci sorusunu örnekle cevaplandıran öğrencilerden birine ait cevap

Öğrencilerin %16,3 ü destekleyici bir örnekle soruyu cevaplandırmıştır. Soruyu şekil 4. 31 deki gibi destekleyici örnekle cevaplandıran öğrenciler, sorunun bahsettiği konunun farkında ancak ispatlamanın mantığını kavrayamamış oldukları ortadadır. Önerme, ters tek bir örnekle çürütülebildiği halde, destekleyici örnek, önermenin doğruluğu için yeterli değildir.

Yazılı ankete katılan öğrencilerin %0,6 sı dolaylı ispata, %0,6 sı doğrudan ispata, %16,3 ü destekleyici örnek üzerinden açıklamaya yönelmiştir. %27,9 sorunun cevabını bildikleri halde açıklama getirememişlerdir. %16,9 u soruyu cevaplandıramayarak boş bırakmıştır.%37,7 si ise soruyu yanlış yanıt vermiştir. %1,2 si kısmen de olsa soruyu doğru cevaplandırmıştır. Bu oranın azlığı, öğrencilerin açılar, eşitlik ve denklem konularını tam kavrayamadıklarını ve ispatlamaya ilişkin ciddi eksikleri olduğunu düşündürmüştür.

4.2 İkinci Alt Probleme İlişkin Bulgular

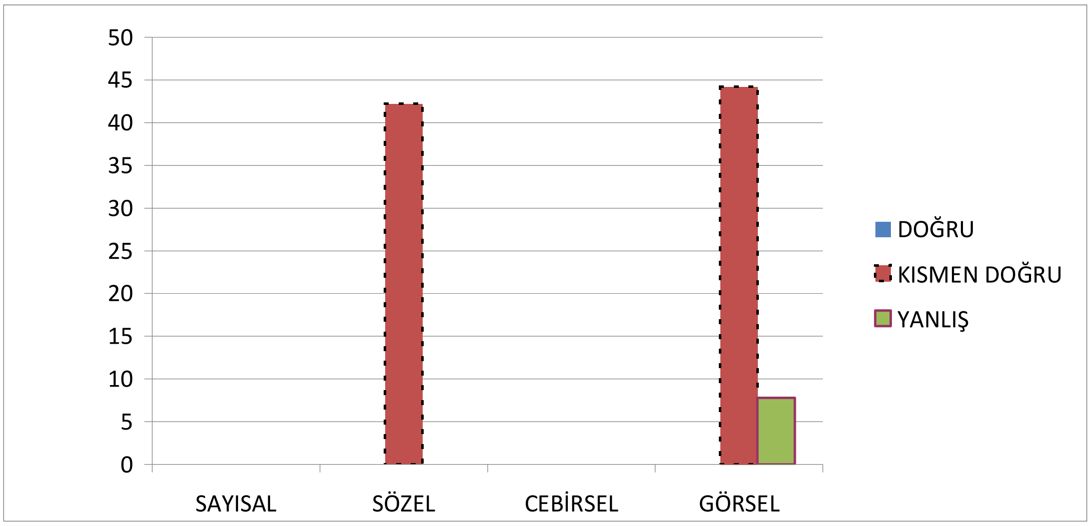
İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin "İspat yaparken başvurdukları ispat temsil şekilleri nelerdir? '' şeklinde ifade edilen ikinci alt probleme cevap aranırken, araştırmada kullanılan 8 soruya verdikleri cevaplardan tercih ettikleri ispat temsil şekilleri belirlenmiş tablo ve grafikle gösterilmiştir. İspat aşamasına geçememiş yanlış veya boş bırakılan cevaplandırmalar herhangi bir kategoriye alınmamıştır.

Öğrencilerin araştırmanın birinci sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve frekansları Çizelge 4. 9 da verilmiştir.

Çizelge 4. 9 Araştırmanın birinci sorusuna ait öğrencilerin verdikleri cevaplardaki ispat temsil şekilleri

İspat temsil şekilleri	İspatlama yolları	Doğru(n)	Kısmen doğru(n)	Yanlış(n)
Sayısal örnekleme	Tümevarım /Destekleyici örnek /Deney,gözlem ve ölçmeye dayalı	 Mevcut değil Sunulmadı	 Mevcut değil Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı
Sözel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	 Sunulmadı Sunulmadı	 61 4	 Sunulmadı Sunulmadı
Cebirsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	 Sunulmadı Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı
Görsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	 Sunulmadı Sunulmadı	 68 Sunulmadı	 12 Sunulmadı

Araştırmanın birinci sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve yüzdelerine ait grafik Şekil 4. 32 de verilmiştir.



Şekil 4. 32 Araştırmanın birinci sorusu için öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekilleri

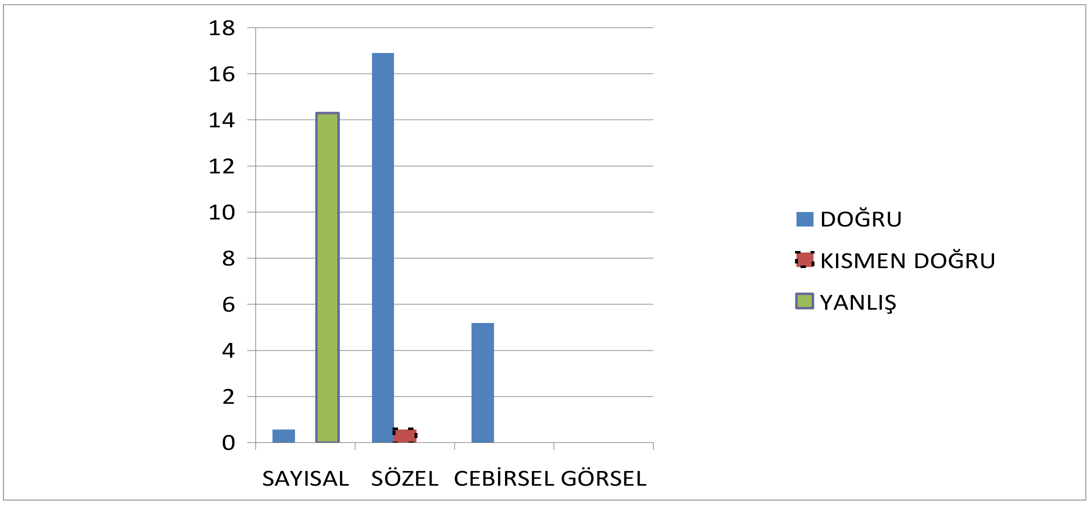
Şekil 4. 32 incelendiğinde araştırmanın birinci sorusunda, yazılı ankete katılan öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şeklinin sözel ve görsel ispat olduğunu görüyoruz. Sözel ve görsel ispatı tercih edip kısmen de olsa doğru yapanların oranının birbirine çok yakın olduğunu, %10 a yakın bir kısmının görsel ispatta yanlış yaptığını anlıyoruz.

Öğrencilerin araştırmanın ikinci sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve frekansları Çizelge 4. 10 da verilmiştir.

Çizelge 4. 10 Araştırmanın ikinci sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplardaki ispat temsil şekilleri

İspat temsil şekileri	İspatlama yolları	Doğru(n)	Kısmen doğru (n)	Yanlış(n)
Sayısal örnekleme	Tümevarım /Destekleyici örnek /Deney, gözlem ve ölçmeye dayalı	Mevcut değil 1	Mevcut değil Sunulmadı	22 Sunulmadı
Sözel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	26 Sunulmadı	Sunulmadı 1	Sunulmadı Sunulmadı
Cebirsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	8 Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı
Görsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı

Araştırmanın ikinci sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve yüzdelerine ait grafik Şekil 4. 33 de verilmiştir.



Şekil 4. 33 Araştırmanın ikinci sorusu için öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekilleri

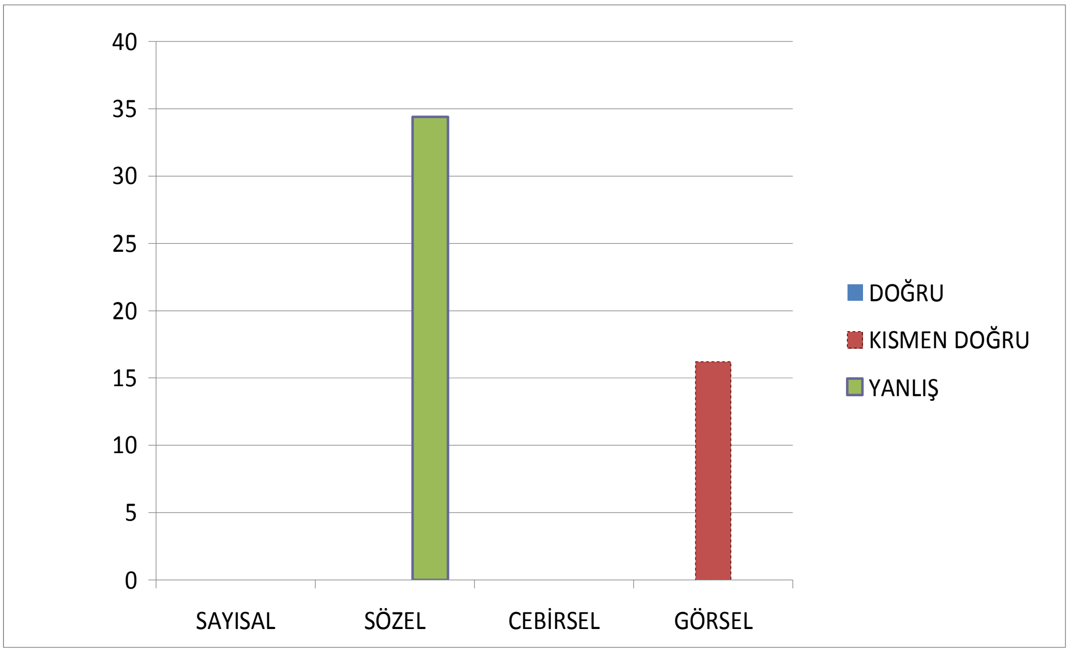
Şekil 4. 33 incelendiğinde araştırmanın ikinci sorusunda yazılı ankete katılan öğrencilerin sırasıyla en çok tercih ettikleri ispat temsil şeklinin sözel ispat, sayısal örnekleme ve cebirsel ispat olduğunu görüyoruz. En az tercih edilen ispat temsil şekli cebirsel ispattır. Bir öğrenci dolaylı ispatlama yolu ile sözel ispatı, tercih etmiş, kısmen de olsa doğru yapmıştır. Bir öğrenci de ölçmeye dayalı tümevarımsal yaklaşımı tercih etmiş ve doğru kabul edilmiştir.

Öğrencilerin araştırmanın üçüncü sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve frekansları Çizelge 4. 11 de verilmiştir.

Çizelge 4. 11 Araştırmanın üçüncü sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplardaki ispat temsil şekilleri

İspat temsil şekilleri	İspatlama yolları	Doğru (n)	Kısmen doğru (n)	Yanlış (n)
Sayısal örnekleme	Tümevarım /Destekleyici örnek /Deney,gözlem ve ölçmeye dayalı	Mevcut değil Sunulmadı	Mevcut değil Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı
Sözel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı	53 Sunulmadı
Cebirsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı
Görsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	Sunulmadı Sunulmadı	25 Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı

Araştırmanın üçüncü sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve yüzdelerine ait grafik Şekil 4. 34 de verilmiştir.



Şekil 4. 34 Araştırmanın üçüncü sorusu için öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekilleri

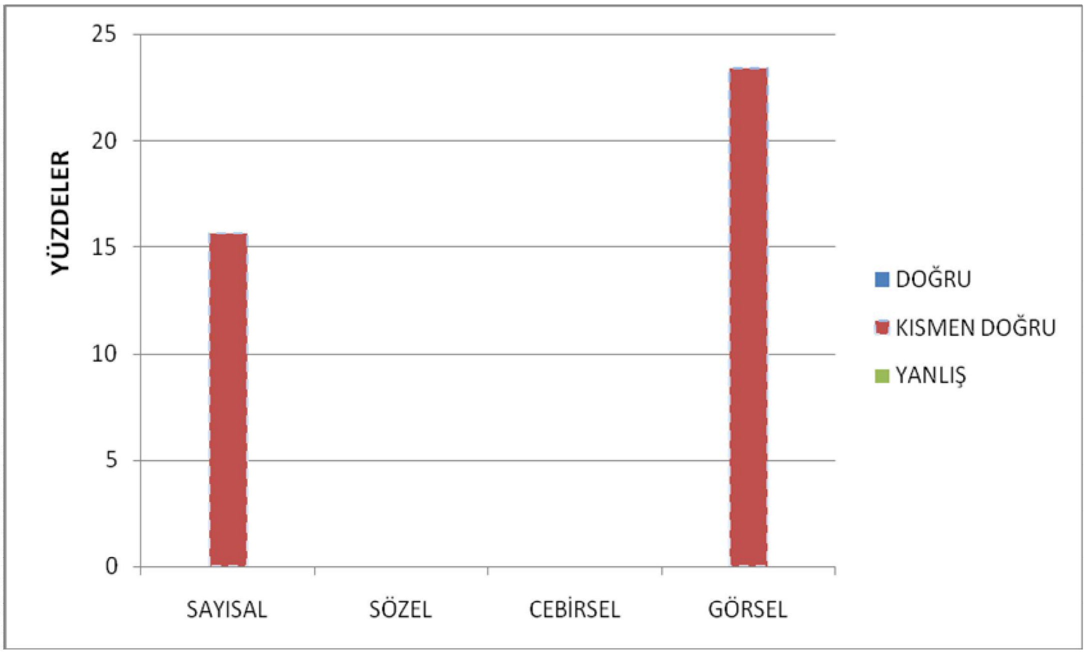
Şekil 4. 34 incelendiğinde, araştırmanın üçüncü sorusunda, yazılı ankete katılan öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekillerinin sözel ve görsel ispat olduğu görülmektedir. Mantıklı bir çıkarımda bulunmuş olsalar da (bakınız Çizelge 4. 11) kavram yanılgılarından dolayı açıklamaları geçerli değildir. En çok tercih ettikleri ispat temsil şekli ise sözel ispattır.

Öğrencilerin araştırmanın dördüncü sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve frekansları Çizelge 4. 12 de verilmiştir.

Çizelge 4. 12 Araştırmanın dördüncü sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplardaki ispat temsil şekilleri

İspat temsil şekilleri	İspatlama yolları	Doğru (n)	Kısmen doğru (n)	Yanlış (n)
Sayısal örnekleme	Tümevarım /Destekleyici örnek /Deney,gözlem ve ölçmeye dayalı	 Mevcut değil Sunulmadı	 Mevcut değil 24	 Sunulmadı Sunulmadı
Sözel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	 Sunulmadı Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı
Cebirsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	 Sunulmadı Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı
Görsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	 Sunulmadı Sunulmadı	 36 Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı

Araştırmanın dördüncü sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve yüzdelerine ait grafik Şekil 4. 35 de verilmiştir.



Şekil 4. 35 Araştırmanın dördüncü sorusu için öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekilleri

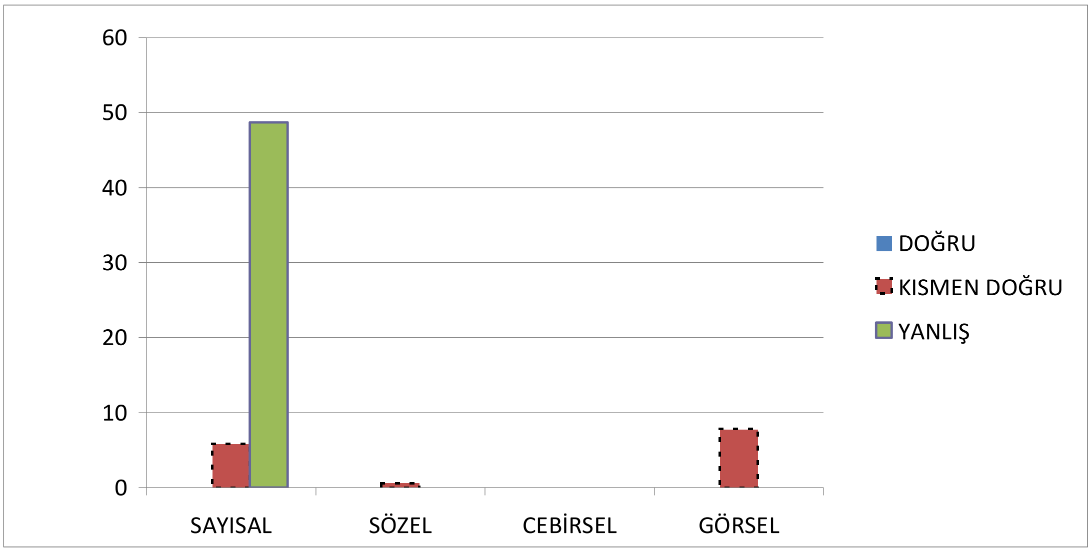
Şekil 4. 35 incelendiğinde, araştırmanın dördüncü sorusunda, yazılı ankete katılan öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekillerinin kısmen doğru olarak sözel ve görsel ispat olduğu görülmektedir. Oranlara bakıldığında, dördüncü soru için en çok tercih edilen ispat şeklinin görsel ispat olduğu görülmektedir.

Öğrencilerin araştırmanın beşinci sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve frekansları Çizelge 4. 13 de verilmiştir.

Çizelge 4. 13 Araştırmanın beşinci sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplardaki ispat temsil şekilleri

İspat temsil şekilleri	İspatlama yolları	Doğru (n)	Kısmen doğru (n)	Yanlış (n)
Sayısal örnekleme	Tümevarım /Destekleyici örnek /Deney, gözlem ve ölçmeye dayalı	Mevcut değil Sunulmadı	Mevcut değil 9	75 Sunulmadı
Sözel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı 1	Sunulmadı Sunulmadı
Cebirsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı
Görsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	Sunulmadı Sunulmadı	12 Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı

Araştırmanın beşinci sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve yüzdelerine ait grafik Şekil 4. 36 da verilmiştir.



Şekil 4. 36 Araştırmanın beşinci sorusu için öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekilleri

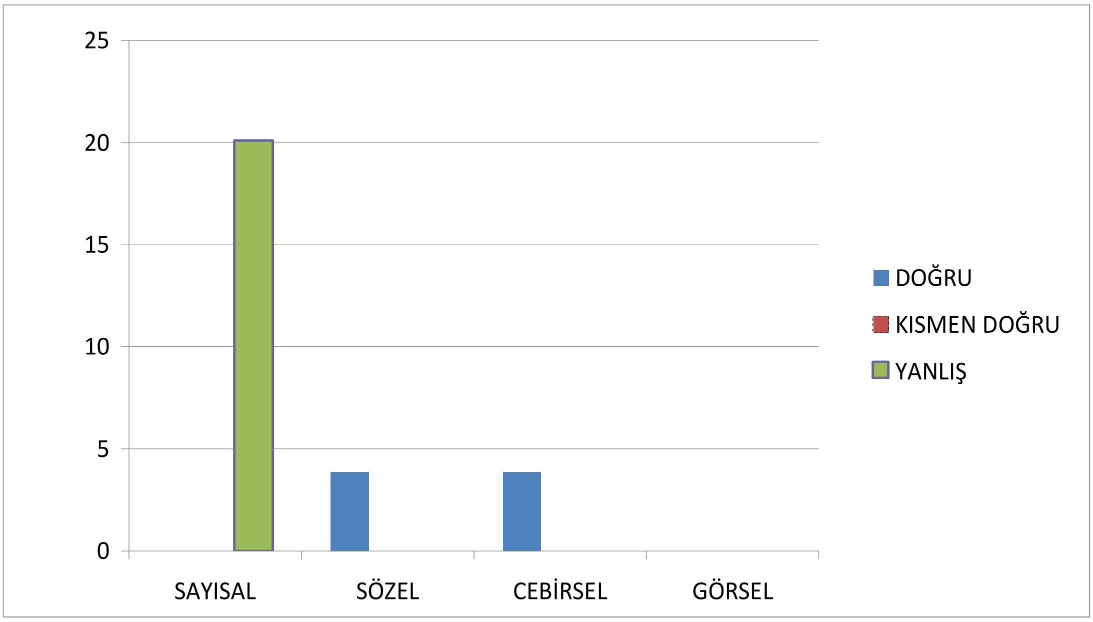
Şekil 4. 36 incelendiğinde, araştırmanın beşinci sorusunda, yazılı ankete katılan öğrencilerin tercih ettikleri ispat şekilleri sırasıyla sayısal örnekleme, görsel ispat ve sözel ispattır. En az tercih edilen ispat kısmen doğru olarak yapılan sözel ispattır. En çok doğru görsel ispatta yapılmıştır.

Öğrencilerin araştırmanın altıncı sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve frekansları Çizelge 4. 14 de verilmiştir.

Çizelge 4. 14 Araştırmanın altıncı sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplardaki ispat temsil şekilleri

İspat temsil şekilleri	İspatlama yolları	Doğru (n)	Kısmen doğru(n)	Yanlış (n)
Sayısal örnekleme	Tümevarım /Destekleyici örnek /Deney, gözlem ve ölçmeye dayalı	Mevcut değil Sunulmadı	Mevcut değil Sunulmadı	31 Sunulmadı
Sözel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	6 Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı
Cebirsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	6 Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı
Görsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı

Araştırmanın altıncı sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve yüzdelerine ait grafik Şekil 4. 37 de verilmiştir.



Şekil 4. 37 Araştırmanın altıncı sorusu için öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekilleri

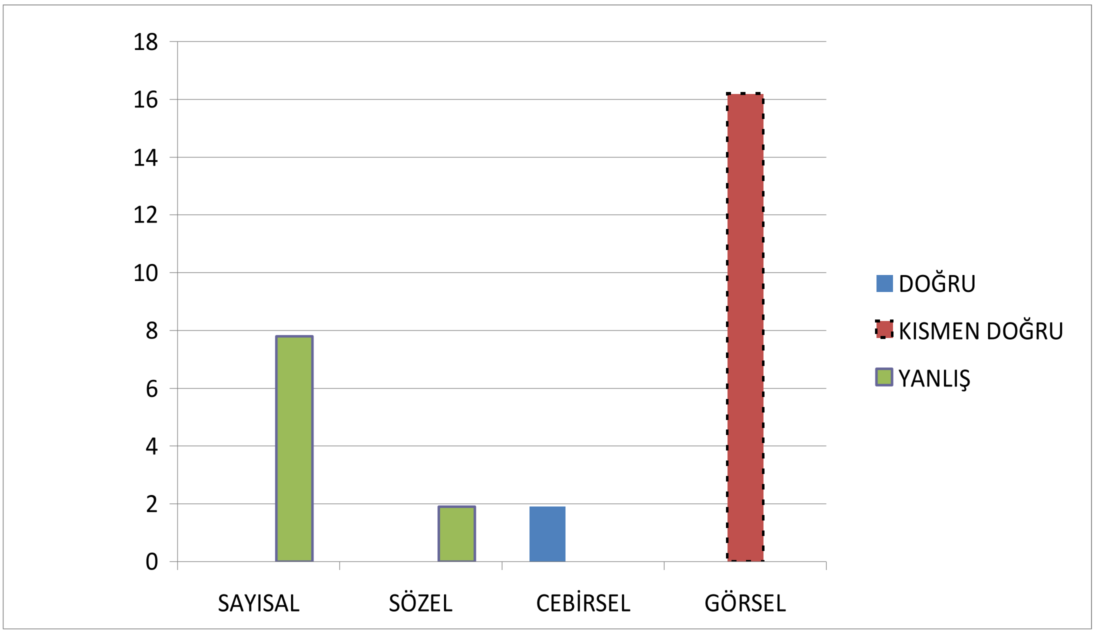
Şekil 4. 37 incelendiğinde, araştırmanın altıncı sorusunda, yazılı ankete katılan öğrencilerin en çok tercih ettikleri ispat şekli sayısal örneklemedir. Fakat, yapılan sayısal örnekleme, destekleyici örnekle doğrulama olduğundan yanlış sayılmıştır. Sözel ve cebirsel ispatların oranları birbirine oldukça yakındır.

Öğrencilerin araştırmanın yedinci sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve frekansları Çizelge 4. 15 de verilmiştir.

Çizelge 4. 15 Araştırmanın yedinci sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplardaki ispat temsil şekilleri

İspat temsil şekilleri	İspatlama yolları	Doğru (n)	Kısmen doğru (n)	Yanlış (n)
Sayısal örnekleme	Tümevarım /Destekleyici örnek /Deney, gözlem ve ölçmeye dayalı	 Mevcut değil Sunulmadı	 Mevcut değil Sunulmadı	 12 Sunulmadı
Sözel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	 Sunulmadı Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı	 3 Sunulmadı
Cebirsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	 3 Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı
Görsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	 Sunulmadı Sunulmadı	 25 Sunulmadı	 Sunulmadı Sunulmadı

Araştırmanın yedinci sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve yüzdelerine ait grafik Şekil 4. 38 de verilmiştir.



Şekil 4. 38 Araştırmanın yedinci sorusu için öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekilleri

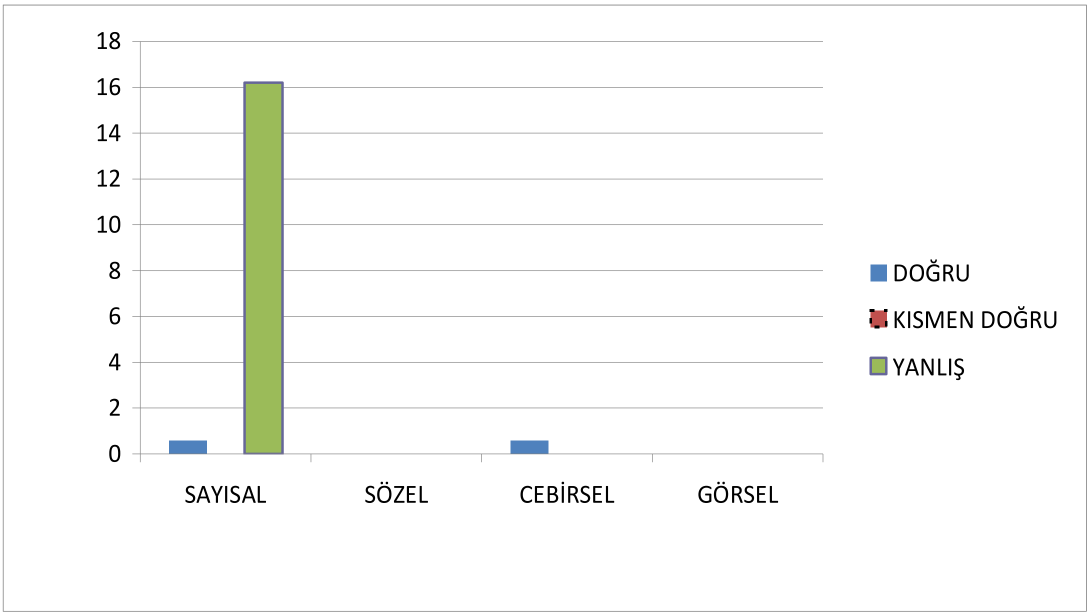
Şekil 4. 38 incelendiğinde, araştırmanın yedinci sorusunda, yazılı ankete katılan öğrencilerin,en çok tercih ettikleri ispat temsil şekli, kısmen doğru olsa da, görsel ispattır.Yapılan sayısal örneklemeler destekleyici örnekle doğrulama olduğundan yanlış sayılmıştır. En çok doğru cebirsel ispatta yapılmıştır.

Öğrencilerin araştırmanın sekizinci sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve frekansları Çizelge 4. 16 da verilmiştir.

Çizelge 4. 16 Araştırmanın sekizinci sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplardaki ispat temsil şekilleri

İspat temsil şekilleri	İspatlama yolları	Doğru(n)	Kısmen doğru (n)	Yanlış (n)
Sayısal örnekleme	Tümevarım /Destekleyici örnek /Deney, gözlem ve ölçmeye dayalı	Mevcut değil 1	Mevcut değil Sunulmadı	25 Sunulmadı
Sözel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı
Cebirsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	1 Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı
Görsel	Tümdengelim /Doğrudan /Dolaylı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı	Sunulmadı Sunulmadı

Araştırmanın sekizinci sorusuna ilişkin, ispat temsil şekillerine göre doğrulamaların sınıflandırılması ve yüzdelerine ait grafik Şekil 4. 39 da verilmiştir.



Şekil 4. 39 Araştırmanın sekizinci sorusu için öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekilleri

Şekil 4. 39 incelendiğinde, araştırmanın sekizinci sorusunda, yazılı ankete katılan öğrencilerin en çok tercih ettikleri ispat temsil şekli sayısal örneklemedir. Ancak yapılan sayısal örneklemelerin büyük bir kısmı destekleyici örnekle doğrulama olduğu için yanlış sayılmıştır. Bir öğrenci önermeler mantığından yola çıkarak dolaylı ispat yapmıştır. Bir öğrenci de cebirsel ispat yapmıştır.

Araştırmada kullanılan sekiz soruda, öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekillerinin kullanılma sıklıkları Çizelge 4. 17 de verilmiştir.

Çizelge 4. 17 Araştırmada kullanılan sekiz soruda, öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekillerinin kullanılma sıklıkları

	Sayısal örnekleme	Sözel	Cebirsel	Görsel
1. soru		42,4 %		52%
2. soru	14,9%	17,5%	5,2%	
3. soru		34,4%		16,2%
4. soru	15,6%			23,4%
5. soru	54,5%	0,6%		7,8%
6. soru	20,1%	3,9%	3,9%	
7. soru	7,8%	1,9%	1,9%	16,2%
8. soru	16,8%		0,6%	

Çizelge 4. 17 incelendiğinde, öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekillerinin yüzdelerine bakıldığında, en çok tercih edilen ispat türü sayısal örnekleme ve görsel ispat, en az tercih edilen ispat türünün cebirsel ispat olduğu anlaşılıyor. Sayısal örnekleme kategorisinde değerlendirilen cevaplamalarda öğrenciler örnekle, deney gözlem ve ölçmeye dayalı ispatlama yolunu kullanmışlardır. Görsel ispat kategorisinde, doğrudan sembolik olarak çıkarımda bulunmuşlardır. Sözel ispat kategorisinde ise, anlatımsal unsur söz konusudur. Bulgular öğrencilerin sayısal örneklemenin oranının fazlalığından yola çıkarak öğrencilerin çoğunun, tümevarımsal muhakeme yapmaya eğilimli olduklarını ve ispatın altında yatan mantığı tam kavrayamadıklarını ortaya koymuştur. En az tercih edilen ispat türü ise cebirsel ispattır.

Cebirsel ispat kategorisinde değerlendirilen cevaplamalarda doğrudan ve dolaylı ispatlama yolu kullanılmıştır. Bulgulara bakıldığında cebirsel ispatı yapanların oranının azlığı, öğrencilerin cebirsel ifade ve işlemleri de tam kavrayamadıklarını bununla birlikte, ispatın matematiksel anlamının boyutlarına bakıldığında; doğrulamayı kısmen yapabilmelerine rağmen, açıklama ve ötesinde daha matematiksel bir özellik olan sistematikleştirme boyutunda olmadıklarını, araştırmamızın ikinci alt probleme ilişkin bulguları incelendiğinde; doğrudan ve dolaylı ispat türlerinin analizi, dolaylı ispatlama yoluna girebilen öğrenci sayısının çok daha az olduğunu göstermektedir. Bu durum da öğrencilerin dolaylı yoldan akıl yürüterek, tümdengelimsel muhakeme becerilerini kullanmakta yetersiz olduklarını da ortaya koymuştur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Leonardo da Vinci' nin dediği gibi "Matematiksel ispattan geçmeyen hiçbir insan araştırması asıl ilim olarak adlandırılamaz.''

Çağımızda herkes karşılaştığı her cümlenin, her ifadenin, her teklifin, her önerinin kesin, inanılır, güvenilir, şüphe ve endişelere yer bırakmayan tarzda olmasını ister. Bu tip özelliklere sahip olmayan hiç bir şeyi de kabul etmezler. Dolayısıyla insanlar her şeyin **ispatlanmış** olduğunu isterler.

A. W. Bell (1976), '' A study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations'' adlı çalışmasında ispatın matematiksel anlamının üç boyut taşıdığını ve her birinin kendi açısından çok önemli olduğunu ifade etmiştir.

"İlki, bir önermenin doğruluğu ile ilgili olan geçerli kılma ya da *doğrulamadır;* ikincisi, *açıklamadır;* çünkü iyi bir ispattan bir önermenin neden doğru olduğuna dair bir öngörü taşıması beklenmektedir, bu ispatın geçerliliğini etkilemez fakat bir ispattaki varlığı estetik açıdan tercih edilmektedir. İspatın üçüncü boyutu daha matematiksel bir özellik olan *sistematikleştirmedir* ki bu, sonuçların aksiyomların, ana kavramların ve teoremlerin ve bunlardan türeyen küçük sonuçların tümdengelimsel bir sisteme dönüştürülmesidir. "

Bell' in belirlediği üç özellik ispatları incelemek için matematik eğitiminde bir araç olarak kullanılmaktadır.

Yeni bireyler tarafından incelendiğinde ve değerlendirildiğinde ispat, sürekli bir eleştiri ve yeniden doğrulanma süreçlerine tabi tutulmaktadır. Hatalar, belirsizlikler ve yanlış anlaşılmalar bu sürekli tabi olma sürecinde giderilmektedir. İspat konunun can alıcı noktasını ortaya çıkararak anlama yetisini arttırır. Son olarak, ispat "törenseldir'' ve saf akıl yürütme gücünün bir "törenidir''(Alıntılayan Tsamir et al. 2009).

Matematik doğru düşünme bilimidir. İspat ise, öğrencilerde saf akıl yürütme gücünün yansıtılabileceği önemli bir etkinliktir. İspat konusu değişik kaynaklar incelendiğinde, daha çok deney, gözlem ve ölçmeye dayalı bir uslamlama olan tümevarımsal ispat yöntemiyle, doğru olan veya doğru kabul edilen doğrulardan yeni bir doğru çıkarma olarak tanımlanan doğrudan ispat yöntemiyle, dolaylı yoldan doğruya ulaşılan dolaylı ispat yöntemlerinden oluşur. Geometri ise, ispatın her türlüsünün uygulanabileceği matematiğin en uygun öğrenme alanıdır.

Bu araştırma, ilköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimlerini incelemek amacıyla toplam 154 öğrenciyle gerçekleştirilmiştir.

Bu araştırma için ilköğretim 6. ve 7. sınıf geometri öğrenme alanı ve kazanımlarına uygun, geometri temelli, üçgen ve açıların daha ön planda tutulduğu toplam 8 soruluk bir çalışma hazırlanmıştır. Öğrencilerin ispat becerilerini araştırmak için açık uçlu sorular sorulmuştur. Cevaplandırmalardan elde edilen veriler, araştırmanın "İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin geometrik problemleri çözerken başvurdukları ispatlama yolları nelerdir?'' şeklindeki birinci alt problemine çözüm aramak için her bir soruda öğrencilerin verdikleri cevaplar tek tek irdelenmiş, doğru, kısmen doğru, yanlış ve soruyu boş bırakanlar olarak belirlenmiştir. Bu belirlemeden sonra, öğrencilerin cevaplamalarında kullandıkları ispatlama yolları (akıl yürütme metotları) her soruda, tek tek incelenmiş, kodlanmış ve bu kodlamaların yüzde ve frekansları hesaplanmış, tablo halinde gösterilmiştir. Her bir kodlamaya ilişkin öğrenci cevaplarından biri de örnek olarak sunulmuştur. Yorumlarda bu kodlamalar tümevarımsal ve tümdengelimsel muhakeme becerileri süzgecinden geçirilmiştir.

İkinci alt probleme çözüm aramak için her bir soruda, birinci alt problem bulgu ve yorumlarına bağlı kalınmış ve öğrencilerin verdikleri cevaplar; cebirsel, görsel, sözel ve sayısal örnekli ispat olmak üzere dört kategoriden oluşmuştur. Bu kategorilerin frekansları her soruda, tabloda gösterilmiş yüzdeleri ise grafiklerle sunulmuştur. Yine, cevaplamaların, temsil ettiği kategoriye göre doğru, yanlış, kısmen doğru olup olmadıkları ve ispatlama yolları tabloda belirtilmiştir. Soruları boş bırakarak cevaplandıramayanlar veya herhangi bir mantıksal çıkarımda bulunmayan öğrenciler herhangi bir kategoriye alınmamıştır.

İkinci alt probleme ilişkin bulgular, öğrencilerin tercih ettikleri ispat temsil şekillerinin yüzdelerine bakıldığında, en çok tercih edilen ispat türü sayısal örnekleme ve görsel ispat, en az tercih edilen ispat türünün cebirsel ispat olduğu anlaşılıyor. Sayısal örnekleme kategorisinde değerlendirilen cevaplamalarda öğrenciler örnekle ve deney gözlem ve ölçmeye dayalı ispatlama yolunu kullanmışlardır. Görsel ispatı, doğrudan sembolik olarak yapılan bir çıkarım olarak düşündüğümüzde, sayısal örneklemenin yüzdelerinin durumu, öğrencilerin çoğunun, tümevarımsal muhakeme yapmaya eğilimli oldukları yorumunu getirmekle birlikte cevaplamalarda destekleyici örneklemelerin fazlalığı ispatın altında yatan mantığı tam kavrayamadıklarını ortaya koymuştur. En az tercih edilen ispat türü ise cebirsel ispattır. Cebirsel ispat kategorisinde değerlendirilen cevaplamalarda doğrudan ve dolaylı ispatlama yolu kullanılmıştır. Bu durum, öğrencilerin cebirsel ifade ve işlemleri de tam kavrayamadıklarını bununla birlikte, ispatın matematiksel anlamının boyutlarına bakıldığında; doğrulamayı kısmen de olsa yapabilmelerine rağmen açıklama ve ötesinde daha matematiksel bir özellik olan sistematikleştirme boyutunda olmadıklarını, doğrudan ve dolaylı ispat türlerinin analizi, dolaylı ispatlama yoluna girebilen öğrenci sayısının neredeyse hiç olmadığını göstermektedir. Bu durum da öğrencilerin dolaylı yoldan (*olmayana ergi yöntemi, çelişki bulma yöntemi*) akıl yürüterek, tümdengelimsel muhakeme becerilerini kullanmakta yetersiz olduklarını ortaya koymuştur.

Birinci alt problemin bulguları, öğrencilerin büyük kısmının geçerli bir ifadenin doğrulamasını az da olsa yapabildiklerini fakat geçersiz ifadeyi çürütmeyi bilmediklerini de düşündürmüştür (özellikle bkz. Çizelge 4. 3). Bu da öğrencilerin geçersiz bir ifadeyi çürütmek için kullanılan *ters örnek bulma yöntemi*ni ve *çelişki bulma* yöntemini bilmedikleri veya hiç kullanmadıkları fikrini uyandırmıştır.

Öğrencilerin geometrik ispat sürecine ilişkin ispatlama yolları incelendiğinde, öğrencilerde bilinen doğrulardan yeni bir doğru çıkarma durumu az da olsa gerçekleşmesine karşın, doğruya dolaylı yollardan (olmayana ergi yöntemi, çelişki bulma yöntemi) ulaşma neredeyse hiç gerçekleşmemiştir. Geçersiz bir ifadeyi çürütmeyi hiç denemedikleri de ortadadır. Bu durum öğretim programının, sınıf içi yaşantıların, öğretmenlerin alan bilgisinin yeterlilik ve gereklilik koşullarının gözden geçirilmesi gerektiğine işaret etmektedir.

Özer ve Arıkan (2001), "Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri'' adlı araştırmalarında, Miyazaki ve Balacheff' in ispat konusunda yapmış oldukları çalışmalardan yararlanarak, lise 2 öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerilerini tespit ederek öğrencilerin ispat düzeylerini incelemişlerdir.

Klieme, Reiss ve Heinze (2003), TIMMS soruları üzerine bir araştırmalarında, ortaöğretimin üst basamağı seviyesindeki TIMMS geometri maddelerinin gerektirdiği özellikler üzerine bir çalışma yapmışlardır. Öğrencilerin ispatları açıklarken öyküsel ispatları, sadece deneysel argumanları veya yanlış dolaylı argumanları seçtikleri ortaya çıkmıştır.

Arslan (2007), "İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi'' adlı doktora tezinde ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhekeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimini incelemiştir. Sonuçta, ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme düzeylerinin literatürce desteklenen ortalama verilere göre düşük olduğu ve bu süreçte kullanılması beklenen stratejilerden yeterli düzeyde kullanamadıkları ortaya çıkmıştır.

Araştırmamızı, yapılan benzer araştırmalarla karşılaştırdığımızda, öğrencilerin ispat yöntem ve tekniklerini tam kavrayamadıkları, yapılan doğrulamalarda ise daha çok görsel doğrulamayı ve örneğe dayalı, deneysel argumanları kullandıkları, sonucuyla tutarlı olduğu ortaya çıkmıştır.

Ayrıca araştırmamız öğrencilerin geçerli bir ifadeyi doğrularken, doğrudan ispatı kısmen de olsa yapabilmelerine karşın dolaylı ispat yöntemlerini neredeyse hiç kullanmadıklarını, geçersiz bir ifadeyi çürütürken kullanılan ters örnek bulma ve çelişki bulma yöntemini bilmediklerini de ortaya koymuştur.

Her denemeden sonra ortaya çıkan eksiklikleri devam eden ders dönemi süresince sınıf içinde ayrıntılarıyla inceledik. Sonraki çalışmalarımızda, derslerimizde benzeri eksikliklerin bir daha karşımıza çıkmaması için çaba gösterdik. Sonuçta öğrencilerin bilgilerinde gereken gelişmelerin olduğunu, bilginin daha derinlemesine öğrenildiğini, daha kalıcı olduğunu ve derslerin daha zevkli hale geldiğini gördük.

6. ÖNERİLER

Bu çalışmada 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri incelenmiştir. Sonuç olarak, öğrencilerin örneğe, deney ve gözleme dayalı tümevarımsal yaklaşımı daha çok tercih ettikleri, bilinenlere dayalı doğrudan ispatı kısmen kullanabildikleri ancak dolaylı ispata dayalı akıl yürütme sürecini neredeyse hiç bilmedikleri ortaya çıkmıştır. Buna göre ülkemizde bu alandaki eksikliğin giderilebilmesi için;

1- 6-7 ve 8. sınıf matematik programı incelendiğinde müfredatın çok yoğun olduğu, bu aşamada öğretmenin akıl yürütmeye özellikle dolaylı yoldan akıl yürütmeye dayalı, bilgilerin, kavramların, tanımların derinliğine öğrenildiği bir ders sürecini gerçekleştirmekte zorlandığı ortadadır. Bu nedenle müfredattaki konu yoğunluğu azaltılmalı ya da ders saati arttırılmalıdır.

2- 6-7 ve 8. sınıf ders kitapları incelendiğinde etkinliklerin tümevarımsal yaklaşıma ve örneğe dayandırıldığı gözlenmiştir. Eğer etkinlikler dolaylı yoldan akıl yürütmeye dayalı (olmayana ergi, çelişki bulma ve ters örnek bulma) hazırlanırsa bu alandaki eksikliğin giderilmesine yardımcı olacağı düşünülmektedir.

3- Bu etkinlikleri öğretmenlerin hazırlayacağı düşünülürse, lisans döneminde öğretmen adaylarına bu tür etkinlikleri hazırlayabilecekleri özel öğretim yöntemleri verilmeli.

4- İlköğretim okullarında matematik dersinin önemi bilinse de, öğretmenin işini gereğince ve yeterince iyi yapabilmesi için uygun fiziksel ortam sağlanmalı. Ders araç, gereç ve metaryellerinin bulunduğu matematik sınıfları oluşturulmalı.

5- Orta öğretim sınavlarının öğrencilerin akıl yürütme ve ispat yapabilme konusundaki etkileri (özellikle negatif etkileri) araştırılmalıdır.

KAYNAKLAR

Altıparmak, K. ve Öziş, T. 2005. Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine bir İnceleme. Ege Eğitim Dergisi, 1(6); 25-37 s.

Arslan, Ç. 2007. İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi. Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Doktora Tezi, Bursa.

Baki, A. 2008. Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi. Harf Eğitim Yayıncılığı, 647, Ankara.

Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics, in D. Pimm (ed) Mathematics. Teachers and Children, Hodden & Stoughten, London, 216-235 s.

Barker, F. S. 2003. Matematik Felsefesi. Çev: Yücel Dursun, İmge Kitabevi Yayınları, Ankara.

Bell, A.W. 1976. A study of Pupils' Proof- Explanations in Mathematical Situations. Educational Studies in Mathematics, 7(1); 23-40 s.

Chinnapan, M. Lawson, M. J. 2000. Knowledge Connectedness in Geometry Problem Solving. Journal for Research in Mathematics Education, 31(1); 26-43 s.

Clements, D. H. & Battista, M. T. 1992. Geometry and spatial reasoning. In: D.A. Grouws (ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning, 420-464 s. Newyork: Mac-millian.

Çizenel, T. 1968. Geometri Lise 1. MEB Yayınları, 170, İstanbul.

Doğan-Dunlap, H. Özdemir, E. ve Kılıç, Ç. 2008. Matematiksel Tümevarım: Karşılaşılan Kavram Yanılgıları ve Öğrenme Güçlükleri. (Ed. M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Akkoç), Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri, Pegem Akademi, 291-328, Ankara.

Dönmez, A. 2002. "Yunan Matematiği'', Matematiğin Öyküsü ve Serüveni C.4, Toplumsal Dönüşüm Yayınları, 36-39, İstanbul.

Dubnow, J. S. 1955. Geometrik İspatlarda Hatalar. Gostekizdat, 68, Moskova.

Dubnow, J. S. 1962. Geometrik İspatlarda Hatalar, Çev.: A. Nazmi İLKER, Türk Matematik Derneği Yayınları, 61, İstanbul.

Fetisov, A. İ. 1954. Geometride İspatlar Hakkında. Gostekizdat, 60, Moskova.

Greeno, J.G. 1980. Some examples of cognitive task analysis with instructional implications. In: R.E. Snow, P. Frederico, W.E. Montague (Eds.) Aptitude, learning and instruction, 2: 1-21 s. Hills dale, NJ: Erlbaum.

Hoyles, C. & Küchemann, D. 2000. Group Students' Responses to 8 years old Proof. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 3(20) 1-8 s.

Klieme, E. Reiss, K. & Heinze, A. Geometrical Competence and Understanding of Proof. http://140.122.140.2/~cyc/mathedu/me1/Math_Sci2003/reisskliemeheinze.pdf Erişim Tarihi: 16. 08. 2011

Koedinger, R. K. 1998. Conjecturing and Argumentation in High- School Geometry Students (Ed. Richard Lehrer, Daniel Chazan). Routledge, 319-348, British.

Koedinger, R. K. & Anderson, J. R. 1990. Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry. Cognitive Science 14, 511-550 s.

Köğce, D. Aydın, M. ve Yıldız, C. 2010. The views of High School Students about Proof and Their Levels of Proof. Procedia Social and Behavioral Sciences, 2: 2544-2549 s.

Kuntze, S. 2008. Fostering Geometrical Proof Competency by Student- centred Writing Activities. Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME –NA XXX, 3: 289-296 s.

Lawson, M. J. & Chinnapan, M. 1994. Generative Activity during Geometry Problem Solving: Comparison of the Performance of High- Achieving and Low-Achieving High School Students. Cognition and Instruction, 12(1); 61-93 s.

Miyazaki, M. 2000. Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 41(1); 47-68 s.

Nasibov, F. ve Zaimoğlu Ş. 2010. Bilimde İspat, onun Eğitimde Yeri ve Önemi Hakkında. 9. Matematik Sempozyumu, Trabzon.

Nasibov, F. ve Kaçar, A. 2005. Matematik ve Matematik Eğitimi Hakkında. Kastamonu Eğitim Dergisi, 13(2); 339-346 s.

Özdemir, H. B. 1999. Soyut Matematik. Balıkesir Üniversitesi, 85, Balıkesir.

Özer, Ö. ve Arıkan, A. Lise Matematik Derslerinde Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri. http://www.fedu.metu.edu.tr/ufbmek-5/b_kitabi/pdf/matematik/bildiri/t245d.pdf

Erişim Tarihi: 25.06.2010

Özer, Ö. 2002. Orta Dereceli Okullarda Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyinin Matematik Eğitimi Açısından Önemi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Petersen, J. 1961. Geometrik Çizim Problemlerini Çözmek için Metotlar ve Teoriler. Çev.: Talat TUNCER, İstanbul Kitabevi Yayınları, 111, İstanbul.

Piaget, J. & Inhelder, B. 1971. The child's conception of space. Routledge Kegan Paul, London.

Reid, A. D. The Meaning of Proof ın Mathematics Education. http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/05Automne/CERME4Raid.pdf Erişim Tarihi: 15. 01. 2011.

Reiss, K. M. Heinze, A. Renkl, A. 2008. Reasoning and Proof in Geometry: Effects of a Learning Environment based on Heuristic Worked-out Examples. ZDM Mathematics Education, 40: 455-467 s.

Smogorzhevski, A. S. 1963. Yalnız Cetvel Kullanarak Yapılan Geometrik Çizimler. Çev.: Şükufe Yamantürk, Türk Matematik Derneği Yayınları, İstanbul.

Struik, D. J. 1969. Matematik Tarihi. Nauka, 328, Moskova.

Sowder, L. & Harel, G. 1998. Types of Students' Justifications. The Mathematics Teacher, 8: 670-675 s.

Stylianides, J. A. 2007. The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 65(1); 1-20 s.

TIMSS 2007 Ulusal Raporu http://earged.meb.gov.tr/arasayfa.php?g=114 Erişim Tarihi: 29. 11. 2011

Tsamir, P. Tirosh, D. Dreyfus, T. Barkai, R. & Tabach, M. 2009. Should proof be minimal? Ms T's evoluation of secondary school students' proofs. The Journal of Mathematical Behavior, 28: 58-67 s.

Ufer, S. , Heinze, A. & Reiss, K. 2008. Individual Predictors of Geometrical Proof Competence. Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, 4: 361-368 s.

Van Hiele, D. & Van Hiele, P. 1986. Structure and insight. A theory of mathematics education, Orlando, FL: Academic Press.

Weber, K. 2005. Problem-solving, proving and learning: The Relationship between problem-solving process and learning opportunities in the activity of proof construction. The Journal of Mathematical Behavior, 24: 351-360 s.

Yalnız Pergel ile Yapılan Çizimler, Türk Matematik Derneği Yayınları, İstanbul 1962.

Yeşildere, S.ve Türnüklü, E. B. 2007. Öğrencilerin Matematiksel Düşünme ve Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi. Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 1: 181-213 s.

Yıldırım, C. 1988. Matematiksel Düşünme. Remzi Kitabevi, 260, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : ŞERİFE ZAİMOĞLU
Doğum Yeri : SİLİFKE
Doğum Tarihi : 12.04.1983
Medeni Hali : BEKAR
Yabancı Dili : İNGİLİZCE
ALMANCA
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : ÖZEL SİLİFKE LİSESİ
Lisans : BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ-2005
Yüksek Lisans : KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ-2012
Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: KASTAMONU TAŞKÖPRÜ ŞEHİT MUTTALİP ÇEVİK İLKÖĞRETİM OKULU (2006-2010)
BURSA KARACABEY HACI AHMEDİYE ONUR İLKÖĞRETİM OKULU (2010-…)
Yayınları (SCI ve diğerleri) : Nasibov, F. ve Zaimoğlu, Ş. 2010. Bilimde İspat, onun Eğitimde Yeri ve Önemi Hakkında, 9. Matematik Sempozyumu, Trabzon.