T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONFORMAL ÜÇGENLER

Ömer ALSAN

Danışman	Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Ahmet EROĞLU
Jüri Üyesi	Yrd. Doç. Dr. Zafer ÜNAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASTAMONU –2015

TEZ ONAYI

Ömer ALSAN tarafından hazırlanan **"Konformal Üçgenler"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Ahmet EROĞLU Niğde Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Yrd. Doç. Dr. Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	....

04/06/2015

Enstitü Müdürü	Prof. Dr. Ömer KÜÇÜK	....

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

İmza

Ömer ALSAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONFORMAL ÜÇGENLER

Ömer ALSAN
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER

Bu tezde, öklidyen uzaydaki üçgenlerin konformal yapılarından yararlanılarak, bilinen tanım ve bağıntılar yardımı ile hiperbolik uzaydaki konformal üçgenlerin varlığı incelenmiştir. Hiperbolik uzaydaki üçgenlerin açı ve alan formülleri, hiperbolik uzaydaki konformal üçgenlere uyarlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Öklidyen uzay, hiperbolik uzay, konformal üçgen

2015, 55 sayfa
Bilim Kodu: 204

ABSTRACT

MSc. Thesis

CONFORMAL TRIANGLES

Ömer ALSAN
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathemathics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ümit TOKEŞER

In this thesis, by making use of the conformal structures of the triangles in euclidean space, the existence of conformal triangles in hyperbolic space have been analysised with the help of known definitions and formulas. The formulas of angle and field in hyperbolic space have been adapted to conformal triangles in hyperbolic space.

Keywords: Euclidean space, hyperbolic space, conformal triangles

2015, 55 pages
Science Code: 204

TEŞEKKÜR

Değerli fikir, yardım ve yol göstericiliği ile tezin sonuca ulaşmasında büyük katkıları olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü)'e teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan Eşim ve çocuklarıma gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı sonsuz teşekkürler.

Ömer ALSAN
Kastamonu, Haziran, 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathrm{boy}(X)$	X in boyutu
C	Konveks küme
C^{n-1}	Işık Konisi
d_E	Öklidyen uzunluk
d_H	Hiperbolik uzunluk
d_L	Lorentz uzunluğu
E^n	n boyutlu öklidyen uzay
G	Gramm matris
H^n	n boyutlu hiperbolik uzay
H_0^n	n boyutlu birim pseudo-hiperbolik uzay
M	Ayrıt matrisi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{R}_1^n$	Lorentz uzayı
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$\langle , \rangle_L$	Lorentz iç çarpımı
$\eta(x, y)$	x ile y arasındaki time-like açı
Ω_H	H^n de n boyutlu simpleks
θ_{ij}	P_i ve P_j köşelerinin karşısındaki dihedral açı
φ_{ij}	P_i ve P_j köşelerini birleştiren ayrıtın uzunluğu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

İki nokta arasındaki en kısa uzaklığın bu noktalar arasındaki doğru parçasının uzunluğu olduğu hipotezi Archimedes tarafından [1] de kullanılmıştır. Dokuzuncu yüzyıl sonunda bir yüzey üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren en kısa yolu bulma probleminden geodezik kavramı ortaya çıkmıştır. 1732 yılında Euler [2] de bir yüzey üzerindeki geodeziklerin diferansiyel denklemini yayınlamıştır. Böylece iki noktaya bağlı olarak verilen geodeziklerin sadece yüzeyin cinsine bağlı olarak verilebileceği gösterilmiştir. Archimedes ve Apollonius'un ortaçağdaki çalışmalarının Latin tercümeleri ve 1637 de Fermat ve Dekart'ın analitik geometriye girişleri 19. yüzyılın ilk yarısında düzlem eğrilerinin teğetlerini bulmak için kullanılan geometrik tekniklerin gelişmesini sağlamıştır. Bir lineer olmayan eğrinin uzunluğunu veren ve analitik geometri kullanılarak elde edilen cebirsel formül $y^2 = x^3$, 1658 civarında Neil van Heuraet ve Fermat tarafından ayrı ayrı bulunmuştur. 19. yüzyılın dördüncü çeyreğinde öklidyen yay uzunluğu elementi Newton ve Leibnitz tarafından bağımsız olarak bulunmuş ve bu iki geometrici düzlem eğrisinin yay uzunluğunu integral kullanarak hesaplamışlardır. Metrik uzaylarda yay uzunluğu kavramına 1930 yılında [3] de Menger tarafından girilmiştir.

Bu tezde, öklidyen uzaydaki konformal yapılanmadan faydalanılarak, hiperbolik uzaydaki konformal yapılanmaları ve hiperbolik uzayda özel konformal üçgenlerin alanları ile tepe noktalarının ve iç açılarının yarıçapları cinsinden ifadeleri incelenmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Öklidyen Uzay

Tanım 2.1.1.

X ve Y iki metrik uzay olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için $\phi : X \rightarrow Y$ dönüşümü

$$d_Y\left(\phi(x), \phi(y)\right) = d_X\left(x, y\right)$$

eşitliğini sağlıyor ise ϕ ye bir izometri denir. ϕ dönüşümü birebir ve örten bir dönüşümdür. E^n den kendisi üzerine tanımlı izometri, öklidyen izometri olarak adlandırılır [5].

Tanım 2.1.2.

$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

eşitliğini sağlıyorsa, ϕ ye ortogonal dönüşüm denir [5].

Tanım 2.1.3.

$[a, b]$, $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık ve $a < b$ olmak üzere $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ sürekli fonksiyonuna X metrik uzayında bir eğri denir.
Eğer X= E^n ise γ eğrisinin lineer olması için gerek ve yeter şart, $\forall t \in [a, b]$ için

$$\gamma\left(a + t(b - a)\right) = \gamma(a) + t\left(\gamma(b) - \gamma(a)\right)$$

olmasıdır [5].

Tanım 2.1.4.

E^n in x, y, z gibi üç noktası için

$$y = x + t(z - x)$$

olacak şekilde bir $t \in [0,1]$ reel sayısı varsa bu üç noktaya doğrusaldır denir [5].

Tanım 2.1.5.

$[a,b]$, $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık ve $a < b$ olmak üzere $\alpha:[a,b] \to X$ dönüşümü uzunluk koruyan sürekli bir fonksiyon ise α ya X metrik uzayında bir jeodezik yay denir [5].

Tanım 2.1.6.

Bir X metrik uzayında $x, y \in X$ için $\alpha:[a,b] \to X$ jeodezik yayının görüntüsüne, başlangıç noktası x, bitiş noktası y olan jeodezik parçası denir. E^n in jeodezik parçaları, kendisinin doğru parçalarıdır [5].

Tanım 2.1.7.

X bir metrik uzay olsun. $x, y \in X$ ayrık çifti için x ve y'yi içeren bir tek jeodezik parça varsa X metrik uzayına jeodezik olarak konvekstir denir [5].

Tanım 2.1.8.

X bir metrik uzay olmak üzere $\lambda : \mathbb{R} \to X$ jeodezik doğrusunun görüntüsüne X metrik uzayında bir jeodezik denir. E^n in jeodezikleri kendisinin doğrularıdır [5].

Tanım 2.1.9.

E^n öklidyen uzayında bir koordinat sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0$$

ile tanımlanan hiperdüzlem B olsun.

$$E^n \text{ de } B_1 = \left\{ P \middle| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i (P) + b > 0 (< 0), P \in E^n \right\}$$

şeklinde tanımlanan alt uzaya yarı-uzay denir [6]. $B \cup B_1$ kümesine kapalı yarı-uzay denir [5].

2.2. Lorentz Uzayı

$x, y \in \mathbb{R}^n$ iki vektör ve $n > 0$ olsun. x ile y'nin lorentzian iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

ile tanımlanan indefinit bir iç çarpımdır. Bu iç çarpımla birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına lorentz uzayı denir. $\mathbb{R}_1^n$ ile gösterilir [2]. $\mathbb{R}_1^n$ uzayında bir vektörün normu,

$$\|x\| = \left| \langle x, x \rangle_L \right|^{1/2}$$

ile tanımlanır. x ve y vektörünün lorentz uzunluğu

$$d_L(x, y) = \|x - y\|$$

ile tanımlanır [5].

Tanım 2.2.1.

$\mathbb{R}_1^n$ Lorentz uzayında $\|x\|=0$ olacak şekilde bütün x lerin kümesine, yani;

$$\left\{ x \in \mathbb{R}_1^n \;\middle|\; x_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \right\}$$

şeklindeki C^{n-1} kümesine ışık-konisi (light-cone) denir. $\|x\|=0$ ise x vektörüne ışık-benzeri (light-like veya null) vektör denir [5].

Tanım 2.2.2.

$x \in \mathbb{R}_1^n$ için $\langle x, x \rangle_L > 0$ ise x vektörüne uzay benzeri (space-like) vektör denir. C^{n-1} hiperkonisinin dışı, $\mathbb{R}_1^n$ in uzay benzeri vektörlerden oluşan açık alt kümesidir [5,8,9].

Tanım 2.2.3.

$x \in \mathbb{R}_1^n$ için $\langle x, x \rangle_L < 0$ oluyorsa x vektörüne zaman benzeri (time-like) vektör denir. C^{n-1} hiperkonisinin içi, $\mathbb{R}_1^n$ in zaman benzeri vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir. Eğer $x_1 > 0$ ise x vektörüne pozitif zaman benzeri, $x_1 < 0$ ise x vektörüne negatif zaman benzeri denir [5,8,9].

Tanım 2.2.4.

Sıfırdan farklı $x, y \in \mathbb{R}_1^n$ için $\langle x, y \rangle_L = 0$ oluyorsa x ve y vektörlerine lorentz ortogonaldir denir [2].

Teorem 2.2.1.

Sıfırdan farklı $x, y \in \mathbb{R}_1^n$ vektörleri Lorentz ortogonal olsun. eğer x vektörü zaman benzeri ise y vektörü uzay benzeridir [5].

İspat.

[5] de sayfa 60-61 de görülebilir.

Önerme 2.2.1.

$\mathbb{R}_1^n$ in bir V alt vektör uzayının, zaman benzeri olması için gerek ve yeter koşul V nin en az bir zaman benzeri vektöre sahip olmasıdır.
Uzay benzeri olması için gerek ve yeter koşul V deki sıfırdan farklı her vektörün uzay benzeri olmasıdır.
Işık benzeri olması için gerek ve yeter koşul V deki sıfırdan benzeri her vektör için $\langle x, x \rangle_L = 0$ olmasıdır [5,9].

Tanım 2.2.5.

x ve y, $\mathbb{R}_1^n$ de pozitif ya da negatif zaman benzeri iki vektör olsun.

$$\langle x, y \rangle_L = -\|x\|\|y\| \cosh \eta(x, y)$$

olacak şekilde negatif olmayan bir tek $\eta(x, y)$ reel sayısı vardır. x ve y arasındaki lorentz zaman benzeri (time-like) açı $\eta(x, y)$ olarak tanımlanır [5,8].

2.3. Hiperbolik Uzay

$$H_0^n = \left\{ x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \,\middle|\, \langle x, x \rangle_L = -1 \right\}$$

kümesine n boyutlu birim pseudo-hiperbolik uzay denir. H_0^n uzayının iki bağıntılı bileşeni $H_{0,+}^n$ ve $H_{0,-}^n$ olmak üzere, bu bileşenlerin her biri n-boyutlu hiperbolik uzayın bir bileşeni olarak alınabilir. Biz literatüre bağlı kalarak hiperbolik uzayın modeli olarak pozitif bileşeni göz önüne alacağız; yani $H_{0,+}^n = H^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ olarak alacağız [5].

Tanım 2.3.1.

$x, y \in H^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ ve x ile y arasında Lorentz zaman benzeri açı $\eta(x, y)$ olsun. x ile y arasındaki hiperbolik uzunluk

$$d_H(x, y) = \eta(x, y)$$

şeklinde tanımlı bir reel sayıdır.

$$\langle x, y \rangle_L = -\|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$$

olduğundan

$$\cosh d_H(x, y) = -\langle x, y \rangle_L$$

olur [5,9].

Teorem 2.3.1.

d_H uzunluk fonksiyonu H^n üzerinde bir metriktir [5].

İspat.

[5] den görülebilir.

Tanım 2.3.2.

d_H metriği ile birlikte H^n uzayı hiperbolik n-uzay olarak adlandırılır [5].

Tanım 2.3.3.

H^n in bir doğrusu $\mathbb{R}_1^{n+1}$ in iki boyutlu zaman benzeri alt vektör uzayı ile H^n in ara kesitidir. $x, y \in H^n$ vektörleri $\mathbb{R}^{n+1}$ in $V(x, y)$ ile gösterilen iki boyutlu bir zaman benzeri alt uzayını gererler. Böylece

$$L(x, y) = H^n \cap V(x, y)$$

x ve y den geçen H^n in bir doğrusudur. Buna göre, H^n in jeodezikleri onun doğrularıdır [5].

Tanım 2.3.4.

H^n in bir m-düzlemi $\mathbb{R}_1^{n+1}$ in $(m+1)$ boyutlu zaman benzeri alt vektör uzayı ile H^n in arakesitidir. H^n in bir hiperbolik 1-düzlemi onun hiperbolik doğruları, hiperbolik $(n-1)$-düzlemi onun hiperdüzlemi olarak adlandırılır [5].

2.4. Öklidyen ve Hiperbolik Uzayda Tanımlar

Burada $X = E^n, H^n$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.4.1.

X in bir alt cümlesi C olsun. $\forall x, y \in C$ ayrık çifti için x ve y yi içeren doğru parçası C de kalıyorsa, C kümesine konveks küme denir [5].

Tanım 2.4.2.

X in bir H hiperdüzlemi, X uzayını iki kapalı yarı-uzaya böler. Bu yarı-uzayların sınırı hiperdüzlemdir [5].

Teorem 2.4.1.

X de kapalı bir konveks küme yarı-uzayların arakesitidir [5].

Tanım 2.4.3.

X de bir konveks polihedron, boştan farklı sonlu sayıda H_i kapalı yarı uzayların arakesitinden oluşur ve

$$P = \bigcap_{i=1}^{k} H_i$$

şeklinde ifade edilir [9].

Tanım 2.4.4.

X de bir konveks alt küme C olsun. ∂C in boştan farklı en büyük konveks kümesine C nin bir kenarı denir [5].

Tanım 2.4.5.

X de n-boyutlu bir konveks polihedron P olsun, $k = 1, 2, ..., n+1$ için P nin bir k-yüzü (face), P nin (k+1)-yüzünün bir kenarı (side) olarak tanımlanır [5].

Tanım 2.4.6.

X de n-boyutlu bir konveks polihedron P olsun, P nin 0-yüzüne, P nin tepesi (vertex) denir [5].

Tanım 2.4.7.

X in bir A alt kümesi için, A yı içeren X in bütün konveks alt kümelerinin arakesitine A nın konvekslik bölgesi denir [5].

Tanım 2.4.8.

X de n-boyutlu bir polihedron P olsun. Eğer P nin sonlu sayıda tepe noktası varsa ve P bu tepelerin konvekslik bölgesi ise P ye bir çok köşeli (politop) denir [5].

Tanım 2.4.9.

Eğer $x_0, x_1, ..., x_n$ noktaları n den daha küçük bir düzlemde kapsanmıyorsa bu nokta kümesine genel durumludur denir [10].

Önerme 2.4.1.

X in boştan farklı bir alt kümesi S olsun. S tarafından gerilen ve S yi içeren bir en küçük alt uzay vardır ve $\langle S \rangle$ ile gösterilir. Bu uzay S yi içeren bütün alt uzayların arakesitidir [10].

Sonuç 2.4.1.

Eğer $\text{boy}(X)=n<\infty$ ise X in $\{x_0,x_1,...,x_n\}$, $(n+1)$ nokta kümesi oluşturması için gerek ve yeter şart $\langle x_0,x_1,...,x_n\rangle = X$ olmasıdır [10].

Tanım 2.4.10.

$X=E^n$ in bir $\{x_0,x_1,...,x_k\}$, $(k+1)$ nokta kümesine; $\text{boy}\langle x_0,x_1,...,x_k\rangle = k$ oluyorsa afin bağımsızdır denir [10].

Tanım 2.4.11.

X de $(n+1)$ tepe noktalı, n-boyutlu bir politop a bir n-simpleks denir [5].

Tanım 2.4.12.

$X=E^n$ de n-simpleks, $\{x_0,x_1,...,x_n\}$ gibi E^n in afin bağımsız $(n+1)$ noktasının konvekslik bölgesi olarak tanımlanır. İki boyutlu simplekse üçgen, üç boyutlu simplekse dörtyüzlü (tetrahedron) denir [10].

2.5. Hiperbolik n-Simpleksler

$\overrightarrow{OP_i} = P_i\,(i=1,2,...,n+1)$ olmak üzere, $P_1,P_2,...,P_{n+1}\in H^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ için P_i ler H^n in elemanı olduğundan (pozitif) zaman benzeri (time-like) vektörlerdir. Bu durumda $\langle P_i,P_i\rangle = 0$ olur. H^n de $(n+1)$ tepe noktalı,

$$\Omega_H = \langle P_1,P_2,...,P_{n+1}\rangle$$

kümesi genel durumludur ve konvekslik bölgesidir. Ω_H ya H^n de n boyutlu bir n-simpleks denir [10].

$$V_{P_j}^{i} = P_j + \langle P_i, P_j \rangle P_i \quad (i, j = 1, 2, ..., n+1)$$

vektörleri P_i tepesindeki P_j doğrultusundaki teğet vektörlerdir. Bu teğet vektörler uzay benzeri (space-like) vektörlerdir [10].

Tanım 2.5.1.

H^n hiperbolik uzayında herhangi iki nokta arasındaki hiperbolik uzunluk $P_i, P_j \in H^n$ olmak üzere

$$\varphi_{ij} = \operatorname{arccos} h\left(-\langle P_i, P_j \rangle_L\right)$$

şeklinde tanımlı reel sayıdır [4].

Tanım 2.5.2.

Ω_H, H^n uzayında $P_1, P_2, ..., P_{n+1}$ tepeli bir n-simpleks olsun.
Ω_H nin P_i ve P_j tepelerine zıt ij-y inci yüzlerinin arakesitinin eş boyutu 2 dir.
Bu iki yüz arasındaki açıya dihedral açı denir ve θ_{ij} ile gösterilir [4].

Tanım 2.5.3.

$$G = \left[-\cos\theta_{ij}\right]$$

simetrik matrisine Ω_H simpleksinin gram matrisi denir [4].

Tanım 2.5.4.

Ω_H nın herhangi iki P_i, P_j tepesi arasındaki uzaklık

$$\varphi = \operatorname{arccos} h\left(-\left\langle P_i, P_j \right\rangle_L\right)$$

şeklindedir ve Ω_H nın ayrıt uzunluğu olarak tanımlanır.

$P_1, P_2, ..., P_{n+1}$ tepeli Ω_H hiperbolik n-simpleksinin ayrıt matrisi

$$M = \left[\left\langle P_i, P_j \right\rangle_L\right] = \left[-\cosh\left\langle P_i, P_j \right\rangle_L\right]$$

şeklinde tanımlanır [4].

Lemma 2.5.1.

H^n de n_i ve n_j normallerine sahip H_{n_i} ve H_{n_j} düzlemlerinin kesişmesi için gerek ve yeter koşul

$$\left|\left\langle n_i, n_j \right\rangle_L\right| < 1$$

olmasıdır [10].

Tanım 2.5.5.

$\mathbb{R}_1^{n+1}$ (n+1)-boyutlu Lorentz uzayının n_i normalli hiperdüzlemi H_{n_i} olsun.

$$H_{n_i} \cap H^n$$

arakesitine n_i normalli (n-1)-boyutlu düzlemi denir [10].

Tanım 2.5.6.

$\mathbb{R}_1^{n+1}$ uzayının $H_{n_1}, H_{n_2}, ..., H_{n_k}$ düzlemleri için

$$\left(H_{n_1} \cap H_{n_2} \cap ... \cap H_{n_k}\right) \cap H^n$$

arakesitine H^n hiperbolik uzayının (n-k)-boyutlu düzlemi denir [10].

Tanım 2.5.7.

H^n hiperbolik uzayında Ω_H hiperbolik simpleksi için P_i noktasındaki *tepe açısı*

$$\left(P_i, V_{P_1}^i, ..., \hat{V}_{P_i}^i, ..., V_{P_{n+1}}^i \right)$$

şeklinde tanımlanır.
Burada

$$V_{P_j}^i \quad \left(i = 1, 2, ..., n+1\right)$$

vektörleri P_i tepe noktasından P_j tepe noktalarına çizilen teğet vektörlerdir [10].

3. ÖKLİD DÜZLEMİNDE KONFORMAL ÜÇGENLER

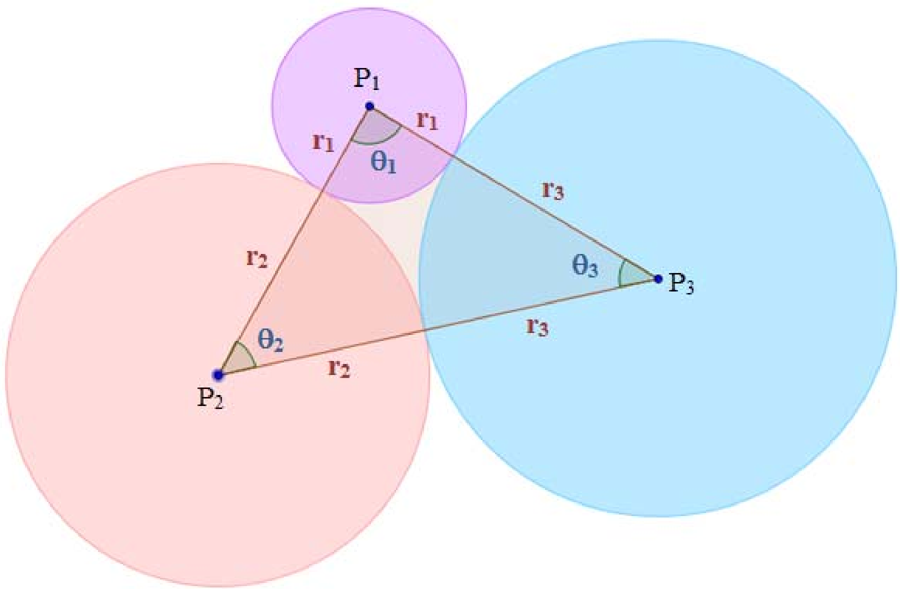
3.1. Öklidyen Konformal Üçgenler

Cooper ve Rivin [12] de Öklid uzayında konformal simpleks tanımı verip, bu tip simplekslerin tepe açılarının değişimini incelemişlerdir. Bu bölümde [12] deki tanımın konformal üçgenler için tanıtımını yapacağız.

Tanım 3.1.1 (Öklidyen uzayda konformal dörtyüzlü).

Δ, E^3 de bir simpleks olsun. P_1, P_2, P_3, P_4 ile Δ nin köşelerini, φ_{ij} ile P_i, P_j köşeleri arasındaki uzunluğu, P_i, P_j köşelerinin üzerinde bulunduğu ayrıttaki dihedral açıyı da θ_{ij} ile gösterelim. Bu durumda Δ konformal ise $\varphi_{ij} = r_i + r_j$, $i \neq j$ ve $r_1, ..., r_4 > 0$ dır [12].

Bu tanımı P_1, P_2, P_3 köşeli Δ üçgeni için düşünürsek aşağıdaki şekli elde ederiz.



Şekil 3.1. Öklidyen uzayda konformal üçgen

Bu modellemenin doğruluğunu gösterelim. İki çember düzlemde bir noktada teğet ise

$$\overrightarrow{P_iX} = \lambda\, \overrightarrow{P_jX} \text{ veya } X = \frac{P_i - \lambda P_j}{1-\lambda} \; .$$

$$\langle \overrightarrow{P_iX}, \overrightarrow{P_iX} \rangle = r_i^2$$

ifadesinden

$$a = \langle P_i, P_i \rangle + \langle P_j, P_j \rangle - 2\langle P_i, P_j \rangle - r_i^2 \;\; b = 2r_i^2 \;\; c = -r_i^2$$

olmak üzere

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

ifadesinden

$$\lambda_1 = \frac{-r_i}{\left\| \overrightarrow{P_iP_j} \right\| - r_i} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{r_i}{\left\| \overrightarrow{P_iP_j} \right\| - r_i}$$

bulunur. Bunları kullanarak,

$$\lambda = \frac{-r_i}{\left\| \overrightarrow{P_iP_j} \right\| - r_i}$$

olur. Buradan

$$X_{ij} = \frac{\left\| \overrightarrow{P_iP_j} \right\| P_i + r_i \left(P_j - P_i \right)}{\left\| \overrightarrow{P_iP_j} \right\|} \qquad i \neq j \text{ ve } i, j = 1, 2, 3$$

olur. Buradan $X_{ij} = X_{ji} \quad i \neq j$ ve $i, j = 1, 2, 3$ olmak üzere;

$$\left(\left\|\overrightarrow{P_iP_j}\right\| - r_i\right)P_i + r_iP_j = \left(\left\|\overrightarrow{P_iP_j}\right\| - r_j\right)P_j + r_jP_i$$

denklemindei $i \neq j$ ve $i = 1, j = 2$ değerini yerine yazarak,

$$\left(\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| - r_1\right)P_1 + r_1P_2 = \left(\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| - r_2\right)P_2 + r_2P_1$$

$$\left(\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| - (r_1 + r_2)\right)\overrightarrow{P_1P_2} = 0$$

$\overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$ olmak üzere

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = r_1 + r_2$$

elde edilir. Benzer şekilde $\left\|\overrightarrow{P_1P_3}\right\| = r_1 + r_3$ ve $\left\|\overrightarrow{P_2P_3}\right\| = r_2 + r_3$ olarak bulunur.

Bu modellemenin doğruluğunu gösterir. Buna göre 3 çemberin birbirine göre durumlarını inceleyelim: $X_{ij} = X_{ik}$ $\quad i \neq j \neq k$ ve $i, j, k = 1, 2, 3$ olmak üzere

$$\frac{\left(\left\|\overrightarrow{P_iP_j}\right\| - r_i\right)P_i + r_iP_j}{\left\|\overrightarrow{P_iP_j}\right\|} = \frac{\left(\left\|\overrightarrow{P_iP_k}\right\| - r_i\right)P_i + r_iP_k}{\left\|\overrightarrow{P_iP_k}\right\|}$$

olur. $\left\|\overrightarrow{P_iP_j}\right\| = r_i + r_j$ olduğunu kullanarak

$$\frac{r_iP_j + r_jP_i}{r_i + r_j} = \frac{r_iP_k + r_kP_i}{r_i + r_k}$$

eşitliğinden ve $\overrightarrow{P_k P_i} \neq 0$ ve $\overrightarrow{P_k P_j} \neq 0$ olduğundan

$$r_j - r_k = 0 \ , \ r_i + r_k = 0$$

veya

$$r_j = r_k \ \text{ve} \ r_k = -r_i .$$

Bu, yarıçap negatif değer alamayacağından üç çemberin birbirine aynı anda teğet olamayacağı anlamına gelir.

Şimdi çemberlerin merkezlerini köşe kabul eden üçgenin kenarlarını çemberlerin yarıçapları cinsinden ifade edelim.

$$\left\| \overrightarrow{P_i P_j} \right\| = r_i + r_j \ \text{ ve } \ \left\| \overrightarrow{P_i P_j} \right\| = \sqrt{\langle P_i, P_i \rangle + \langle P_j, P_j \rangle - 2\langle P_i, P_j \rangle}$$

olduğundan

$$r_i + r_j = \sqrt{\langle P_i, P_i \rangle + \langle P_j, P_j \rangle - 2\langle P_i, P_j \rangle}$$

ve

$$\langle P_i, P_j \rangle = \frac{\left\| P_i \right\|^2 + \left\| P_j \right\|^2 - \left(r_i + r_j \right)^2}{2} \tag{3.1}$$

olarak elde edilir.

Aynı zamanda bu çemberlerin teğet noktası

$$X = \frac{r_i P_j + r_j P_i}{r_i + r_j}$$

olduğundan

$$\langle X, P_1 \rangle = \langle X, P_2 \rangle$$

ve

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \frac{r_1 \|P_2\|^2 - r_2 \|P_1\|^2}{r_1 - r_2}.$$

Bu ifade Eş. 3.1 de $i = 1$ ve $j = 2$ değerlerine göre yerine yazıldığında

$$\|P_1\|^2 - \|P_2\|^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Buradan $i \neq j$ için

$$\|P_i\|^2 = \|P_j\|^2 + r_i^2 - r_j^2 \tag{3.2}$$

elde edilir. Eş. 3.2 yi Eş.3.1 de yerine yazarak

$$\langle P_i, P_j \rangle = \|P_i\|^2 - r_i^2 - r_i r_j \tag{3.3}$$

ifadesi bulunur.

Şimdi P_1, P_2, P_3 tepe noktalı üçgenin

$$M=\begin{bmatrix}\langle P_1,P_1\rangle & \langle P_1,P_2\rangle & \langle P_1,P_3\rangle\\ \langle P_1,P_2\rangle & \langle P_2,P_2\rangle & \langle P_2,P_3\rangle\\ \langle P_1,P_3\rangle & \langle P_2,P_3\rangle & \langle P_3,P_3\rangle\end{bmatrix}$$

ayrıt matrisini ve

$$\langle P_1,P_1\rangle=\|P_1\|^2,$$
$$\langle P_1,P_2\rangle=\|P_1\|^2-r_1^2-r_1r_2,$$
$$\langle P_1,P_3\rangle=\|P_1\|^2-r_1^2-r_1r_3,$$
$$\langle P_2,P_2\rangle=\|P_1\|^2+r_2^2-r_1^2,$$
$$\langle P_2,P_3\rangle=\|P_1\|^2-r_1^2-r_2r_3,$$
$$\langle P_3,P_3\rangle=\|P_1\|^2+r_3^2-r_1^2$$

eşitlikleri kullanılarak da M ayrıt matrisini

$$M=\begin{bmatrix}\|P_1\|^2 & \|P_1\|^2-r_1^2-r_1r_2 & \|P_1\|^2-r_1^2-r_1r_3\\ \|P_1\|^2-r_1^2-r_1r_2 & \|P_1\|^2+r_2^2-r_1^2 & \|P_1\|^2-r_1^2-r_2r_3\\ \|P_1\|^2-r_1^2-r_1r_3 & \|P_1\|^2-r_1^2-r_2r_3 & \|P_1\|^2+r_3^2-r_1^2\end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Öklidyen üçgen için $|M|=0$ olduğundan

$$4r_1r_2r_3\left(\|P_1\|^2r_1+\|P_1\|^2r_2+\|P_1\|^2r_3-r_1^3-r_1^2r_2-r_1^2r_3-r_1r_2r_3\right)=0$$

bulunur.

$r_1r_2r_3\neq 0$ olmak üzere

$$\left\|P_1\right\|^2 = r_1\left(r_1 + r_2\right)\left(\frac{r_1 + r_3}{r_1 + r_2 + r_3}\right)$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$$\langle P_1, P_2 \rangle = -r_1 r_2\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 + r_2 + r_3}\right),$$

$$\langle P_1, P_3 \rangle = -r_1 r_3\left(\frac{r_1 + r_3}{r_1 + r_2 + r_3}\right),$$

$$\langle P_2, P_3 \rangle = -r_2 r_3\left(\frac{r_2 + r_3}{r_1 + r_2 + r_3}\right),$$

$$\left\|P_2\right\|^2 = r_2\left(r_1 + r_2\right)\left(\frac{r_2 + r_3}{r_1 + r_2 + r_3}\right),$$

$$\left\|P_3\right\|^2 = r_3\left(r_1 + r_3\right)\left(\frac{r_2 + r_3}{r_1 + r_2 + r_3}\right)$$

elde edilir. Bunları kullanarak

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| &= r_1 + r_2, \\ \left\|\overrightarrow{P_1P_3}\right\| &= r_1 + r_3, \\ \left\|\overrightarrow{P_2P_3}\right\| &= r_2 + r_3 \end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur.

3.2. Öklid Uzayında Konformal Üçgenin Alanı

Teorem 3.2.1.

Ökidyen konformal üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı

$$R=\frac{\left(r_1+r_2\right)\left(r_1+r_3\right)\left(r_2+r_3\right)}{4\sqrt{r_1r_2r_3\left(r_1+r_2+r_3\right)}}$$

olmak üzere alanı

$$A=\sqrt{r_1r_2r_3\left(r_1+r_2+r_3\right)}$$

şeklindedir [13].

İspat.

Eş. 3.4 ve [13] den görülür.

4. HİPERBOLİK DÜZLEMDE ÜÇGENLER

4.1. Hiperbolik Düzlemde Doğru ve Üçgen Kavramı

Tanım 4.1.1.

$\alpha : \mathbb{R} \to H^n$ ve $x, y \in H^n$ için

$$\alpha(t) = \cosh t\, x + \sinh t \frac{\left(y + \langle x, y\rangle x\right)}{\left\| y + \langle x, y\rangle x \right\|}$$

eğrisine H^n nin x, y den geçen doğrusu denir [30].

Tanım 4.1.2.

$\alpha : \mathbb{R} \to H^n$ ve $x, y \in H^n$ için

$$\alpha(t) = \cosh t\, x + \sinh t \frac{\left(y - \cosh t_1\, x\right)}{\sinh t_1}, \quad t \in [0, t_1]$$

eğri parçasına H^n nin x, y ile sınırlı doğru parçası denir [30].

Tanım 4.1.3.

x, y, z üçü aynı hiperbolik doğru üzerinde bulunmayan üç nokta olmak üzere;

$$\alpha(t) = \cosh t\, x + \sinh t \frac{\left(y - \cosh t_1\, x\right)}{\sinh t_1}, \quad t \in [0, t_1]$$

$$\beta(s) = \cosh s\, y + \sinh s \frac{(z - \cosh s_1\, y)}{\sinh s_1}, \quad s \in [0, s_1]$$

$$\gamma(u) = \cosh u\, z + \sinh u \frac{(x - \cosh u_1\, z)}{\sinh u_1}, \quad u \in [0, u_1]$$

$\alpha(t_1) = \beta(0), \beta(s_1) = \gamma(0)$ ve $\gamma(u_1) = \alpha(0)$ özelliğindeki doğru parçalarının birleşimine hiperbolik üçgen, üçgenin sınırladığı hiperbolik bölgeye de hiperbolik üçgensel bölge denir [30].

Tanım 4.1.4.

P_i, P_j Ω nın iki köşe noktası olmak üzere;

$$\cosh \varphi_{ij} = -\langle P_i, P_j \rangle$$

özelliğindeki φ_{ij} reel sayısına Ω nın P_i, P_j ile sınırlı ayrıt uzunluğu denir [4].

Tanım 4.1.5.

P_1, P_2, P_3 köşe noktalı hiperbolik üçgen Ω olmak üzere;

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -\cosh \varphi_{12} & -\cosh \varphi_{13} \\ -\cosh \varphi_{12} & -1 & -\cosh \varphi_{23} \\ -\cosh \varphi_{13} & -\cosh \varphi_{23} & -1 \end{bmatrix}$$

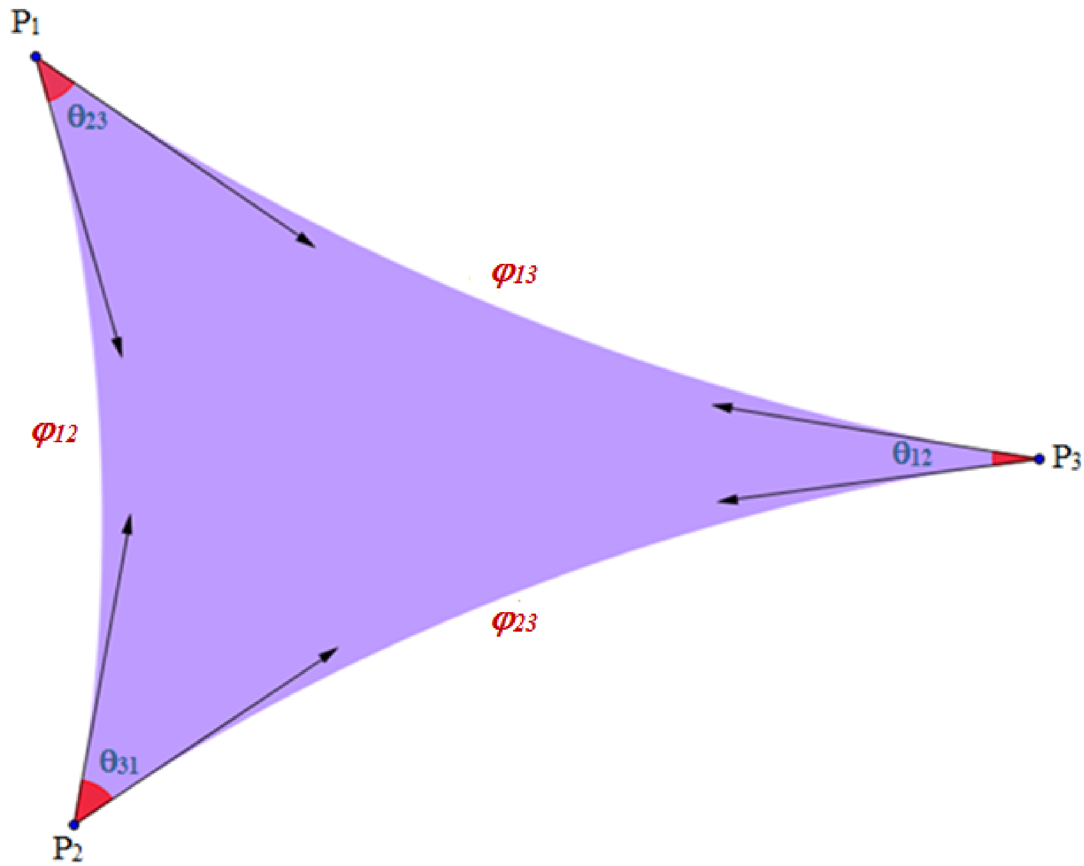
matrisine Ω nın ayrıt matrisi denir [4].

Tanım 4.1.6.

P_i, P_j, P_k köşeli Ω hiperbolik üçgeninin P_k noktasından geçen kenarları da $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow H^n$, $\beta : \mathbb{R} \rightarrow H^n$ ise

$$\langle \alpha'(t)\big|_{P_k}, \langle \beta'(s)\big|_{P_k} \rangle = \cos\theta_{ij}$$

olacak şekildeki θ_{ij} açısına Ω nın P_k noktasındaki iç açısı denir [30].



Şekil 4.1. Hiperbolik uzayda üçgen

Tanım 4.1.7.

P_1, P_2, P_3 köşe noktalı hiperbolik üçgen Ω olmak üzere ve $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ de Ω nın iç açıları olmak üzere;

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -\cos\theta_{12} & -\cos\theta_{13} \\ -\cos\theta_{12} & 1 & -\cos\theta_{23} \\ -\cos\theta_{13} & -\cos\theta_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine Ω nın gramm matrisi denir [4].

Teorem 4.1.1.

$\frac{n(n+1)}{2}$ tane $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n+1$ pozitif reel sayıların bir Ω hiperbolik simpleksin ayrıtları olması için gerek ve yeter şart Ω nın $M = \left[-\cosh\varphi_{ij}\right]$ ayrıt matrisinin

i) $|M| < 0$

ii) M^{-1} in tüm asli alt matrisleri pozitif tanımlı

iii) $M_{ij} > 0$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$

özelliklerini sağlamasıdır [4].

Lemma 4.1.1.

$\theta_{ij}, \theta_{jk}, \theta_{ki}$ hiperbolik üçgenin sırası ile P_i, P_j, P_k noktalarındaki iç açıları ve $\varphi_{ki}, \varphi_{ij}, \varphi_{jk}$ da Ω nın ayrıtları olmak üzere;

1. $\varphi_{ki}\left(P_k \otimes P_i, P_i \otimes P_j\right) = \pi - \theta_{ij}$

2. $\varphi_{ij}\left(P_i \otimes P_j, P_j \otimes P_k\right) = \pi - \theta_{jk}$

3. $\varphi_{jk}\left(P_j \otimes P_k, P_k \otimes P_i\right) = \pi - \theta_{ki}$ [5].

Lemma 4.1.2.

P_i ve P_j , $\mathbb{R}^3$ de space-like vektörler olsun. $P_i \otimes P_j$ time-like vektör olmak üzere

$$\left\|P_i \otimes P_j\right\| = \left\|P_i\right\|\left\|P_j\right\| \sinh \varphi_{ij}$$

dir [5].

Teorem 4.1.2.

θ_{ij}, θ_{jk} ve θ_{ki} hiperbolik üçgenin iç açıları olmak üzere;

$$\theta_{ij} + \theta_{jk} + \theta_{ki} < \pi \quad [5].$$

İspat.

θ_{ij}, θ_{jk} ve θ_{ki} Ω hiperbolik üçgenin iç açıları olsun. $P_i \otimes P_j$, $P_k \otimes P_j$ ve $P_k \otimes P_i$ vektörleri lineer bağımsız iseler

$$u = \frac{P_i \otimes P_j}{\left\|P_i \otimes P_j\right\|}, \; v = \frac{P_k \otimes P_j}{\left\|P_k \otimes P_j\right\|} , \; w = \frac{P_k \otimes P_i}{\left\|P_k \otimes P_i\right\|}$$

şeklinde yazılabilir. O zaman

$$\left(P_i \otimes P_j\right) \otimes \left(P_k \otimes P_j\right) = \left(\left(P_i \otimes P_j\right) \circ P_k\right) P_j$$

ve

$$\left(P_k \otimes P_j\right) \otimes \left(P_k \otimes P_i\right) = \left(\left(P_i \otimes P_j\right) \circ P_k\right) P_k$$

olduğunda $u \otimes v$ ve $v \otimes w$ time-like vektörlerdir. Lemma 4.1.2 den

$$\cos\left(\eta(u,v)+\eta(v,w)\right)=\cos\eta(u,v)\cos\eta(v,w)-\sin\eta(u,v)\sin\eta(v,w)$$

$$=(u\circ v)(v\circ w)+\|u\otimes v\|\|v\otimes w\|$$

$$>(u\circ v)(v\circ w)+\left((u\otimes v)\circ(v\otimes w)\right)$$

$$=(u\circ v)(v\circ w)+\left((u\circ w)(v\circ v)-(v\circ w)(u\circ v)\right)$$

$$=u\circ w$$

$$=\cos\eta(u,w)$$

olur. Buna göre

$$\eta(u,w)>\eta(u,v)+\eta(v,w)$$

veya

$$2\pi-\eta(u,w)<\eta(u,v)+\eta(v,w)$$

olur.

Lemma 4.1.1 den $\eta(u,w)=\pi-\theta_{ij}$, $\eta(u,v)=\pi-\theta_{jk}$ ve $\eta(v,w)=\pi-\theta_{ki}$ elde edilir.

Böylece $\pi>\theta_{ij}+\theta_{jk}+\theta_{ki}$ veya $\pi+\theta_{ij}<\theta_{jk}+\theta_{ki}$ dır.

θ_{ij} açısını en büyük açı olarak kabul etmek genelliği bozmaz.

$\pi+\theta_{ij}<\theta_{jk}+\theta_{ki}$ ise $\pi+\theta_{ij}<\theta_{jk}+\theta_{ki}<\pi+\theta_{ij}$ çelişkisi elde edilir.

O halde yalnızca $\theta_{ij}+\theta_{jk}+\theta_{ki}<\pi$ olur.

Teorem 4.1.3 (Hiperbolik üçgen için sinüs kuralı).

θ_{ij},θ_{jk} ve θ_{ki} Ω hiperbolik üçgenin iç açıları ve $\varphi_{ij},\varphi_{jk},\varphi_{ki}$ de sırası ile P_k,P_i ve P_j köşelerinin karşısındaki kenarların uzunlukları olmak üzere;

$$\frac{\sinh\varphi_{ij}}{\sin\theta_{ij}}=\frac{\sinh\varphi_{jk}}{\sin\theta_{jk}}=\frac{\sinh\varphi_{ki}}{\sin\theta_{ki}}\ [5].$$

Teorem 4.1.4.

Ω P_1, P_2, P_3 köşe noktalı hiperbolik üçgen, M ve G de Ω nın sırası ile ayrıt ve gramm matrisleri olsun. $M_{ii}\left(i=1,2,3\right)$, M nin asli minörleri olmak üzere;

$$G = -\left[\frac{M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}}\right]$$

dir [4].

Sonuç 4.1.1 (Hiperbolik üçgen için kosinüslerin birinci kuralı).

θ_{ij}, θ_{jk} ve θ_{ki} Ω hiperbolik üçgenin açıları ve $\varphi_{ij}, \varphi_{jk}, \varphi_{ki}$ de sırası ile P_k, P_i ve P_j köşelerinin karşısındaki kenarların uzunlukları olmak üzere;

$$\cos\theta_{ij} = \frac{\cosh\varphi_{ki}\cosh\varphi_{ij} - \cosh\varphi_{jk}}{\sinh\varphi_{ki}\sinh\varphi_{ij}}$$

dir (Burada $\{i,j,k\}$, $\{1,2,3\}$ kümesinin bir permütasyonudur) [5].

İspat.

Teorem 4.1.4 den açıktır.

Teorem 4.1.5.

Ω ; P_1, P_2, P_3 köşe noktalı hiperbolik üçgen,
M ve G de Ω nın sırası ile ayrıt ve gramm matrisleri olsun.
$G_{ii}\left(i=1,2,3\right)$, G nin asli minörleri olmak üzere;

$$M = -\left[\frac{G_{ij}}{\sqrt{G_{ii} G_{jj}}} \right]$$

dir [4].

Sonuç 4.1.2 (Hiperbolik üçgen için kosinüslerin ikinci kuralı).

θ_{ij}, θ_{jk} ve θ_{ki} , Ω hiperbolik üçgenin açıları ve $\varphi_{ij}, \varphi_{jk}, \varphi_{ki}$ de sırası ile P_k, P_i ve P_j köşelerinin karşısındaki kenarların uzunlukları olmak üzere;

$$\cosh \varphi_{ki} = \frac{\cos \varphi_{ij} \cos \varphi_{jk} + \cos \varphi_{ki}}{\sin \varphi_{ij} \sin \varphi_{jk}}$$

dir [5].

İspat.

Teorem 4.1.5 den açıktır.

4.2. Özel Hiperbolik Üçgenler

Tanım 4.2.1.

Ω; P_1, P_2, P_3 tepeli, $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ dihedral açılı ve $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ ayrıt uzunluklu bir hiperbolik üçgen olsun. $\Omega \in H^2$ olmak üzere $\theta_{12} = \theta_{13} = \theta_{23}$, $\varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{23}$ ve $\theta_{12} < \frac{\pi}{3}$ ise Ω ya eşkenar hiperbolik üçgen denir [14].

Tanım 4.2.2.

$\Omega \in H^2$ olmak üzere $\theta_{12} = \theta_{13}$ ve $2\theta_{12} < \pi - \theta_{23}$ ise Ω ya ikizkenar hiperbolik üçgen denir [14].

Tanım 4.2.3.

$\Omega \in H^2$ olmak üzere $\cosh\varphi_{12} = \cosh\varphi_{13}\cosh\varphi_{23}$ ise Ω ya hiperbolik dik üçgen denir[14].

4.3. Özel Hiperbolik Üçgenlerin Alanları

Hiperbolik eşkenar üçgenin alanı

$\Omega \in H^2$ ve $\cosh\varphi_{12} = \cosh\varphi_{13} = \cosh\varphi_{23} = a$ olmak üzere hiperbolik eşkenar üçgenin alanı

$$\text{Alan}(\Omega) = \pi - \arctan\left(\frac{(a-1)(3a+1)\sqrt{2a+1}}{a\left(a^2-6a-3\right)}\right)$$

şeklindedir [14].

Hiperbolik ikizkenar üçgenin alanı

$\Omega \in H^2$, $\cosh\varphi_{12} = \cosh\varphi_{13} = a$ ve $\cosh\varphi_{23} = c$ olmak üzere hiperbolik ikizkenar üçgenin alanı

$$\text{Alan}(\Omega) = \pi - \arctan\left(\frac{-\sqrt{(c-1)\left(2a^2-c-1\right)}(2a+c+1)}{3a^2-a^2c+2ac+2a+c^2+c}\right)$$

şeklindedir [14].

Hiperbolik dik üçgenin alanı

$a=\cosh\varphi_{12}, b=\cosh\varphi_{13}, c=\cosh\varphi_{23}$ ve $a=bc$ özelliğindeki $\Omega\in H^2$ hiperbolik dik üçgenin alanı

$$\text{Alan}(\Omega)=\pi-\arctan\left(\frac{-\sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}(b+c+bc+1)}{(c+1)(b+1)(b+c)}\right)$$

şeklindedir [14].

4.4. Hiperbolik Uzayda Konformal Üçgenler

Tanım 4.4.1.

$m\in H^2$ ve $r\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $\left\{P\in H^2:\langle m,P\rangle=-\cosh r\right\}$ kümesine H^2 de m merkezli r hiperbolik yarıçaplı çember denir [30].

Tanım 4.4.2.

Ω, P_1,P_2,P_3 köşe noktalı hiperbolik üçgen olsun.
P_i,P_j ile sınırlı ayrıt uzunluğu φ_{ij} olmak üzere

$$\varphi_{ij}=r_i+r_j$$

olacak şekilde $r_1,r_2,r_3\in\mathbb{R}^+$ reel sayıları varsa Ω ya konformal hiperbolik üçgen denir [30].

Teorem 4.4.1.

Ω, P_1, P_2, P_3 köşe noktalı hiperbolik üçgen olsun. Ω nın konformal olması için gerek ve yeter şart

$$r_i > \ln\sqrt{2} \quad , \quad i = 1,2,3 \tag{4.1}$$

olacak şekilde $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^+$ sayılarının bulunmasıdır [30].

İspat.

Ω konformal hiperbolik üçgen olsun. $\varphi_{ij} = r_i + r_j$ olacak şekilde $r_i, r_j \in \mathbb{R}^+$ vardır. Tanım 4.1.5 den

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -\cosh(r_1+r_2) & -\cosh(r_1+r_3) \\ -\cosh(r_1+r_2) & -1 & -\cosh(r_2+r_3) \\ -\cosh(r_1+r_3) & -\cosh(r_2+r_3) & -1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Teorem 4.1.1 den

i) $|M| = -4\sinh r_1 \sinh r_2 \sinh r_3 \sinh(r_1+r_2+r_3) < 0$

ii) M^{-1} in asli alt matrisleri $\left(\frac{1}{4}\operatorname{csch} r_1 \operatorname{csch} r_2 \operatorname{csch} r_3 \operatorname{csch}(r_1+r_2+r_3) = k \text{ olmak üzere}\right)$

$$\left(M^{1}\right)_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}k\sinh^2(r_1+r_3) & \frac{1}{8}\left(\cosh(r_2-r_3)-2\cosh(r_2+r_3)+\cosh(2r_1+r_2+r_3)\right)k \\ \frac{1}{8}\left(\cosh(r_2-r_3)-2\cosh(r_2+r_3)+\cosh(2r_1+r_2+r_3)\right)k & \frac{1}{4}k\sinh^2(r_1+r_2) \end{bmatrix}$$

$$\left(M^{1}\right)_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}k\sinh^2(r_2+r_3) & \frac{1}{8}\left(\cosh(r_1-r_3)-2\cosh(r_1+r_3)+\cosh(r_1+2r_2+r_3)\right)k \\ \frac{1}{8}\left(\cosh(r_1-r_3)-2\cosh(r_1+r_3)+\cosh(r_1+2r_2+r_3)\right)k & \frac{1}{4}k\sinh^2(r_1+r_2) \end{bmatrix}$$

$$\left(M^{-1}\right)_{33} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}k\sinh^2(r_2+r_3) & \frac{1}{8}\left(\cosh(r_1-r_2)-2\cosh(r_1+r_2)+\cosh(r_1+r_2+2r_3)\right)k \\ \frac{1}{8}\left(\cosh(r_1-r_2)-2\cosh(r_1+r_2)+\cosh(r_1+r_2+2r_3)\right)k & \frac{1}{4}k\sinh^2(r_1+r_3) \end{bmatrix}$$

$$\left(M^{-1}\right)_{11,22} = \left[\frac{1}{4}\sinh^2(r_1+r_2)\right]$$

$$\left(M^{-1}\right)_{11,33} = \left[\frac{1}{4}\sinh^2(r_1+r_3)\right]$$

$$\left(M^{-1}\right)_{22,33} = \left[\frac{1}{4}\sinh^2(r_2+r_3)\right]$$

olup, bu matrisler pozitif tanımlıdır.

$$\text{iii) } M_{12} = \cosh(r_1+r_3)\cosh(r_2+r_3) - \cosh(r_1+r_2) > 0 \tag{4.3}$$

$$M_{13} = \cosh(r_1+r_2)\cosh(r_2+r_3) - \cosh(r_1+r_3) > 0 \tag{4.4}$$

$$M_{23} = \cosh(r_1+r_2)\cosh(r_1+r_3) - \cosh(r_2+r_3) > 0 \tag{4.5}$$

$$M_{11} = -\sinh^2(r_2+r_3),\ M_{22} = -\sinh^2(r_1+r_3),\ M_{33} = -\sinh^2(r_1+r_2) \tag{4.6}$$

eşitsizlik sisteminden

$$\frac{1}{4}e^{-(r_1+r_2+r_3)}\left[1+e^{2r_3}\left(-2+e^{2r_1}+e^{2r_2}\left(1+e^{2r_1}\left(-2+e^{2r_3}\right)\right)\right)\right] > 0 \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{4}e^{-(r_1+r_2+r_3)}\left[1+e^{2r_2}\left(-2+e^{2r_1}+e^{2r_3}\left(1+e^{2r_1}\left(-2+e^{2r_2}\right)\right)\right)\right] > 0 \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{4}e^{-(r_1+r_2+r_3)}\left[1+e^{2r_1}\left(-2+e^{2r_2}+e^{2r_3}\left(1+e^{2r_2}\left(-2+e^{2r_1}\right)\right)\right)\right]>0 \tag{4.9}$$

eşitlik sistemi elde edilir. Bu sistemi çözerek

$$r_i > \ln\sqrt{2} \quad , \quad i=1,2,3$$

bulunur.

Tersine, $r_i > \ln\sqrt{2}$, $i=1,2,3$ ise Eş. 4.7- Eş. 4.9 eşitsizlikleri sağlanır. Bu nedenle de Eş. 4.3-Eş. 4.6 eşitsizlikleri de sağlanmış olur. Buradan

$$\tilde{M}=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix}$$

ve Teorem 4.1.4 kullanılarak

$$M=\begin{bmatrix} -1 & -\cosh(r_1+r_2) & -\cosh(r_1+r_3) \\ -\cosh(r_1+r_2) & -1 & -\cosh(r_2+r_3) \\ -\cosh(r_1+r_3) & -\cosh(r_2+r_3) & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu ise ayrıt uzunlukları $\varphi_{12}=r_1+r_2$, $\varphi_{13}=r_1+r_3$, $\varphi_{23}=r_2+r_3$ olan Ω hiperbolik üçgeninin konformal olduğunu gösterir.

Teorem 4.4.2.

Ω konformal hiperbolik üçgenin iç açıları ile çemberlerin yarıçapları arasındaki bağıntılar

$$\cos\theta_{ij}=\frac{\cosh(r_i+r_k)-\cosh(r_i+r_j)\cosh(r_j+r_k)}{\sinh(r_i+r_k)\sinh(r_i+r_j)}$$

şeklindedir [30].

İspat.

Sonuç 4.1.1' den açıktır.

4.5. Hiperbolik Uzayda Özel Konformal Üçgenlerin Varlığı

<u>*Teorem 4.5.1 (Konformal hiperbolik eşkenar üçgen).*</u>

Ω, P_1, P_2, P_3 köşe noktalı ve P_i, P_j ile sınırlı ayrıt uzunluğu φ_{ij} olan konformal hiperbolik eşkenar üçgen vardır [30].

İspat.

Ω konformal hiperbolik eşkenar üçgen olsun. Bu durumda $\varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{23}$ olup

$$\cosh \varphi_{12} = \cosh \varphi_{13} = \cosh \varphi_{23} = \cosh\left(r_1 + r_2\right)$$

olacağından

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -\cosh\left(r_1 + r_2\right) & -\cosh\left(r_1 + r_2\right) \\ -\cosh\left(r_1 + r_2\right) & -1 & -\cosh\left(r_1 + r_2\right) \\ -\cosh\left(r_1 + r_2\right) & -\cosh\left(r_1 + r_2\right) & -1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

olur. M, Ω nın ayrıt matrisi olduğundan

i) $\left|M\right| = -\left(-1 + \cosh\left(r_1 + r_2\right)\right)^2 \left(1 + \cosh\left(r_1 + r_2\right)\right) < 0$

ii) M^{-1} in asli alt matrisleri $\left(-1 + 3\cosh^2\left(r_1 + r_2\right) - 2\cosh^3\left(r_1 + r_2\right) = m \text{ olmak üzere}\right)$

$$\left(M^{-1}\right)_{11}=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} & \dfrac{-\cosh\left(r_1+r_2\right)+\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} \\ \dfrac{-\cosh\left(r_1+r_2\right)+\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} & \dfrac{1-\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} \end{bmatrix}$$

$$\left(M^{-1}\right)_{22}=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} & \dfrac{-\cosh\left(r_1+r_2\right)+\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} \\ \dfrac{-\cosh\left(r_1+r_2\right)+\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} & \dfrac{1-\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} \end{bmatrix}$$

$$\left(M^{-1}\right)_{33}=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} & \dfrac{-\cosh\left(r_1+r_2\right)+\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} \\ \dfrac{-\cosh\left(r_1+r_2\right)+\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} & \dfrac{1-\cosh^2\left(r_1+r_2\right)}{m} \end{bmatrix}$$

$$\left(M^{-1}\right)_{11,22}=\left[\frac{-\sinh^2\left(r_1+r_2\right)}{|M|}\right]$$

$$\left(M^{-1}\right)_{11,33}=\left[\frac{-\sinh^2\left(r_1+r_2\right)}{|M|}\right]$$

$$\left(M^{-1}\right)_{22,33}=\left[\frac{-\sinh^2\left(r_1+r_2\right)}{|M|}\right]$$

olup, bu matrisler pozitif tanımlıdır.

iii) $M_{12}=\cosh\left(r_1+r_2\right)\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)-1\right)>0$ (4.11)

$$M_{13}=\cosh\left(r_1+r_2\right)\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)-1\right)>0 \quad (4.12)$$

$$M_{23}=\cosh\left(r_1+r_2\right)\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)-1\right)>0 \quad (4.13)$$

eşitsizlik sistemi de bütün $r_i \in IR^+$ için geçerlidir.

Teorem 4.5.2 (Konformal hiperbolik ikizkenar üçgen).

Ω, P_1, P_2, P_3 köşe noktalı ve P_i, P_j ile sınırlı ayrıt uzunluğu φ_{ij} olan konformal hiperbolik ikizkenar üçgen vardır [30].

İspat.

Ω konformal hiperbolik ikizkenar üçgen olsun. Bu durumda $\varphi_{12} = \varphi_{13}$ olup

$$\cosh\varphi_{12} = \cosh\varphi_{13} = \cosh(r_1 + r_2)$$

ve

$$\cosh\varphi_{23} = \cosh(r_2 + r_3)$$

olacağından

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -\cosh(r_1 + r_2) & -\cosh(r_1 + r_2) \\ -\cosh(r_1 + r_2) & -1 & -\cosh(r_2 + r_3) \\ -\cosh(r_1 + r_2) & -\cosh(r_2 + r_3) & -1 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

olur.

M, Ω nın ayrıt matrisi olduğundan

i) $|M| = -4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh(r_1 + r_2) < 0$

ii) M^{-1} in asli alt matrisleri $\left(-4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh(r_1 + r_2) = k \text{ olmak üzere}\right)$

$$\left(M^{-1}\right)_{11}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-\cosh^2(r_1+r_2)}{k} & \dfrac{-\cosh(r_2+r_3)+\cosh^2(r_1+r_2)}{k}\\ \dfrac{-\cosh(r_2+r_3)+\cosh^2(r_1+r_2)}{k} & \dfrac{1-\cosh^2(r_1+r_2)}{k}\end{bmatrix}$$

$$\left(M^{-1}\right)_{22}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-\cosh^2(r_2+r_3)}{k} & \dfrac{-\cosh(r_1+r_2)\left(1-\cosh(r_2+r_3)\right)}{k}\\ \dfrac{-\cosh(r_1+r_2)\left(1-\cosh(r_2+r_3)\right)}{k} & \dfrac{1-\cosh^2(r_1+r_2)}{k}\end{bmatrix}$$

$$\left(M^{-1}\right)_{33}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-\cosh^2(r_2+r_3)}{k} & \dfrac{-\cosh(r_1+r_2)\left(1-\cosh(r_2+r_3)\right)}{k}\\ \dfrac{-\cosh(r_1+r_2)\left(1-\cosh(r_2+r_3)\right)}{k} & \dfrac{1-\cosh^2(r_1+r_2)}{k}\end{bmatrix}$$

$$\left(M^{-1}\right)_{11,22}=\left[\frac{-\sinh^2(r_1+r_2)}{|M|}\right]$$

$$\left(M^{-1}\right)_{11,33}=\left[\frac{-\sinh^2(r_1+r_2)}{|M|}\right]$$

$$\left(M^{-1}\right)_{22,33}=\left[\frac{-\sinh^2(r_2+r_3)}{|M|}\right]$$

olup, bu matrisler pozitif tanımlıdır.

iii) $M_{12}=\cosh(r_1+r_2)\left(\cosh(r_2+r_3)-1\right)>0$ (4.15)

$$M_{13}=\cosh(r_1+r_2)\left(\cosh(r_2+r_3)-1\right)>0 \quad (4.16)$$

ve $r_2 = r_3 > \dfrac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}, r_1 > \ln\sqrt{2}$ olmak üzere

$$M_{23} = \cosh^2\left(r_1 + r_2\right) - \cosh\left(r_2 + r_3\right) > 0 \tag{4.17}$$

olduğundan konformal hiperbolik ikizkenar üçgen vardır.

Teorem 4.5.3.

Ω, P_1, P_2, P_3 köşe noktalı ve P_i, P_j ile sınırlı ayrıt uzunluğu φ_{ij} olan konformal hiperbolik dik üçgen yoktur [30].

İspat.

Ω konformal hiperbolik dik üçgen olsun. Bu durumda $\cosh\varphi_{12} = \cosh\varphi_{13}\cosh\varphi_{23}$ olup

$$\cosh\left(r_1 + r_2\right) = \cosh\left(r_1 + r_3\right)\cosh\left(r_2 + r_3\right)$$

olacağından

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -\cosh\left(r_1 + r_3\right)\cosh\left(r_2 + r_3\right) & -\cosh\left(r_1 + r_3\right) \\ -\cosh\left(r_1 + r_3\right)\cosh\left(r_2 + r_3\right) & -1 & -\cosh\left(r_2 + r_3\right) \\ -\cosh\left(r_1 + r_3\right) & -\cosh\left(r_2 + r_3\right) & -1 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

olur. M, Ω nın ayrıt matrisi olduğundan

i) $|M| = -\sinh^2\left(r_1 + r_3\right)\sinh^2\left(r_2 + r_3\right) < 0$

ii) M^{-1} in asli alt matrisleri $\left(-\sinh^2\left(r_1 + r_3\right)\sinh^2\left(r_2 + r_3\right) = n \text{ olmak üzere}\right)$

$$\left(M^{-1}\right)_{11}=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cosh^2(r_1+r_3)}{n} & \dfrac{-\cosh(r_2+r_3)\left(1-\cosh^2(r_1+r_3)\right)}{n} \\ \dfrac{-\cosh(r_2+r_3)\left(1-\cosh^2(r_1+r_3)\right)}{n} & \dfrac{1-\cosh^2(r_1+r_3)\cosh^2(r_2+r_3)}{n} \end{bmatrix}$$

$$\left(M^{-1}\right)_{22}=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cosh^2(r_2+r_3)}{n} & \dfrac{-\cosh(r_1+r_3)\left(1-\cosh^2(r_2+r_3)\right)}{n} \\ \dfrac{-\cosh(r_1+r_3)\left(1-\cosh^2(r_2+r_3)\right)}{n} & \dfrac{1-\cosh^2(r_1+r_3)\cosh^2(r_2+r_3)}{n} \end{bmatrix}$$

$$\left(M^{-1}\right)_{33}=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cosh^2(r_2+r_3)}{n} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\cosh^2(r_1+r_3)}{n} \end{bmatrix}$$

$$\left(M^{-1}\right)_{11,22}=\left[\frac{1-\cosh^2(r_1+r_3)\cosh^2(r_2+r_3)}{|M|}\right]$$

$$\left(M^{-1}\right)_{11,33}=\left[\frac{-\sinh^2(r_1+r_3)}{|M|}\right]$$

$$\left(M^{-1}\right)_{22,33}=\left[\frac{-\sinh^2(r_2+r_3)}{|M|}\right]$$

olup, bu matrisler pozitif tanımlıdır. Fakat

iii) $M_{12}=0$ (4.19)

olduğundan konformal hiperbolik dik üçgen yoktur.

[4] den

$$\cos\theta_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \quad , i \neq j;\ i,j = 1,2,3 \qquad (4.20)$$

ve [15] deki (8) eşitliğinden

$$\sin\theta_{ij} = \frac{\sqrt{-|M|}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \quad , i \neq j;\ i,j = 1,2,3\ . \qquad (4.21)$$

4.6. Konformal Hiperbolik Üçgende İç Açıların Yarıçaplar İle İfadesi

Eş. 4.20 ve Eş. 4.21 taraf tarafa oranlanır ve M_{ij}, M_{ii}, M_{jj} ve $|M|$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\theta_{12} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh r_2 \sinh r_3 \sinh(r_1 + r_2 + r_3)}}{\cosh(r_1 + r_3)\cosh(r_2 + r_3) - \cosh(r_1 + r_2)}\right),$$

$$\theta_{13} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh r_2 \sinh r_3 \sinh(r_1 + r_2 + r_3)}}{\cosh(r_1 + r_2)\cosh(r_2 + r_3) - \cosh(r_1 + r_3)}\right),$$

$$\theta_{23} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh r_2 \sinh r_3 \sinh(r_1 + r_2 + r_3)}}{\cosh(r_1 + r_2)\cosh(r_1 + r_3) - \cosh(r_2 + r_3)}\right)$$

elde edilir.

4.7. Özel Konformal Hiperbolik Üçgenlerde İç Açıların Yarıçaplar İle İfadesi

Konformal hiperbolik eşkenar üçgende iç açıların yarıçaplar ile ifadesi

Eş. 4.20 ve Eş. 4.21 taraf tarafa oranlanır ve M_{ij}, M_{ii}, M_{jj} ve $|M|$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\theta_{12} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\cosh(r_1 + r_2) + 1}}{\cosh(r_1 + r_2)}\right),$$

$$\theta_{13} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\cosh(r_1 + r_2) + 1}}{\cosh(r_1 + r_2)}\right)$$

ve

$$\theta_{23} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\cosh(r_1 + r_2) + 1}}{\cosh(r_1 + r_2)}\right)$$

elde edilir.

Konformal hiperbolik ikizkenar üçgende iç açıların yarıçaplar ile ifadesi

Eş. 4.20 ve Eş. 4.21 taraf tarafa oranlanır ve M_{ij}, M_{ii}, M_{jj} ve $|M|$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\theta_{12} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh(r_1 + r_2)}}{\cosh(r_1 + r_2)(\cosh(r_2 + r_3) - 1)}\right),$$

$$\theta_{13} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh(r_1+r_2)}}{\cosh(r_1+r_2)(\cosh(r_2+r_3)-1)}\right)$$

ve

$$\theta_{23} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh(r_1+r_2)}}{\cosh^2(r_1+r_2)-\cosh(r_2+r_3)}\right)$$

elde edilir.

4.8. Konformal Hiperbolik Üçgenlerde İç Açıların ve Tepe Noktalarının Eşitliği

Eş. 4.20 de

$$\cos\theta_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \qquad , i \neq j;\ i,j = 1,2,3$$

verilmişti.

$$\sin P_k = \frac{\sqrt{-|M|}}{\sqrt{(-M_{ii})(-M_{jj})}} \qquad ,i \neq j, i \neq k, j \neq k;\ i,j,k = 1,2,3 \tag{4.22}$$

olmak üzere

$$\cos\theta_{12} = \frac{M_{12}}{\sqrt{M_{11}M_{22}}}$$

Eş. 4.2 den M_{11}, M_{12} ve M_{22} hesaplanıp yerine yazılırsa

$$\cos\theta_{12} = \frac{\cosh(r_1+r_3)\cosh(r_2+r_3)-\cosh(r_1+r_2)}{\sqrt{\sinh^2(r_2+r_3)\sinh^2(r_1+r_3)}}$$

bulunur.

Benzer şekilde Eş 4.2 den hesaplanan M_{11}, M_{22} ve $|M|$ Eş 4.22 de kullanılırsa

$$\sin P_3 = \frac{\sqrt{-|M|}}{\sqrt{M_{11}\, M_{22}}}$$

$$\sin P_3 = \frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh r_2 \sinh r_3 \sinh\left(r_1 + r_2 + r_3\right)}}{\sqrt{\sinh^2\left(r_2 + r_3\right)\sinh^2\left(r_1 + r_3\right)}}$$

şeklinde olur. Buradan

$$\theta_{12} = \arccos\left(\frac{\cosh\left(r_1 + r_3\right)\cosh\left(r_2 + r_3\right) - \cosh\left(r_1 + r_2\right)}{\sqrt{\sinh^2\left(r_2 + r_3\right)\sinh^2\left(r_1 + r_3\right)}}\right),$$

$$P_3 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh r_2 \sinh r_3 \sinh\left(r_1 + r_2 + r_3\right)}}{\sqrt{\sinh^2\left(r_2 + r_3\right)\sinh^2\left(r_1 + r_3\right)}}\right) \tag{4.23}$$

bulunur.

Eş 4.23 ün sağ tarafının cosinüsü hesaplayalım.

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh r_2 \sinh r_3 \sinh\left(r_1 + r_2 + r_3\right)}}{\sqrt{\sinh^2\left(r_2 + r_3\right)\sinh^2\left(r_1 + r_3\right)}}\right)\right)$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh r_2 \sinh r_3 \sinh\left(r_1 + r_2 + r_3\right)}}{\sqrt{\sinh^2\left(r_2 + r_3\right)\sinh^2\left(r_1 + r_3\right)}}\right)\right)}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh r_2 \sinh r_3 \sinh\left(r_1+r_2+r_3\right)}}{\sqrt{\sinh^2\left(r_2+r_3\right)\sinh^2\left(r_1+r_3\right)}}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\sinh^2\left(r_1+r_2\right)\sinh^2\left(r_1+r_3\right)-4\sinh r_1 \sinh r_2 \sinh r_3 \sinh\left(r_1+r_2+r_3\right)}}{\sinh\left(r_1+r_2\right)\sinh\left(r_1+r_3\right)}$$

olur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\sinh^2\left(r_1+r_2\right)\sinh^2\left(r_1+r_3\right)-4\sinh r_1 \sinh r_2 \sinh r_3 \sinh\left(r_1+r_2+r_3\right)=\left(\cosh\left(r_1+r_3\right)\cosh\left(r_2+r_3\right)-\cosh\left(r_1+r_2\right)\right)^2$$

olarak bulunur. Böylece

$\theta_{12}=P_3$

eşitliği elde edilir. Benzer işlemler yapıldığında

$\theta_{23}=P_1$

ve

$\theta_{13}=P_2$

olur.

4.9. Özel Konformal Hiperbolik Üçgenlerde İç Açıların ve Tepe Noktalarının Eşitliği

Konformal hiperbolik eşkenar üçgende iç açıların ve tepe noktalarının eşitliği

Eş. 4.20 de

$$\cos\theta_{ij}=\frac{M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \quad , i\neq j;\ i,j=1,2,3$$

verilmişti.

$$\sin P_k = \frac{\sqrt{-|M|}}{\sqrt{(-M_{ii})(-M_{jj})}} \qquad , i \neq j, i \neq k, j \neq k \,;\, i, j, k = 1, 2, 3 \tag{4.24}$$

olmak üzere

$$\cos\theta_{12} = \frac{M_{12}}{\sqrt{M_{11}M_{22}}}$$

Eş. 4.10 dan M_{11}, M_{12} ve M_{22} hesaplanıp yerine yazılırsa

$$\cos\theta_{12} = \frac{\cosh(r_1+r_2)\left(\cosh(r_1+r_2)-1\right)}{\sqrt{\sinh^4(r_1+r_2)}}$$

bulunur.

Benzer şekilde Eş. 4.10 dan hesaplanan M_{11}, M_{22} ve $|M|$ Eş. 4.24 de kullanılırsa

$$\sin P_3 = \frac{\sqrt{-|M|}}{\sqrt{M_{11}\,M_{22}}}$$

$$\sin P_3 = \frac{\sqrt{\left(\cosh(r_1+r_2)-1\right)^2\left(\cosh(r_1+r_2)+1\right)}}{\sqrt{\sinh^4(r_1+r_2)}}$$

şekinde olur. Buradan

$$\theta_{12} = \arccos\left(\frac{\cosh(r_1+r_2)\left(\cosh(r_1+r_2)-1\right)}{\sqrt{\sinh^4(r_1+r_2)}}\right),$$

$$P_3 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)+1\right)}}{\sqrt{\sinh^4\left(r_1+r_2\right)}}\right) \tag{4.25}$$

bulunur.

Eş. 4.25 in sağ tarafının cosinüsü hesaplayalım.

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)+1\right)}}{\sqrt{\sinh^4\left(r_1+r_2\right)}}\right)\right)$$

$$=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)+1\right)}}{\sqrt{\sinh^4\left(r_1+r_2\right)}}\right)\right)}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)+1\right)}}{\sqrt{\sinh^4\left(r_1+r_2\right)}}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\sinh^2\left(r_1+r_2\right)-\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)+1\right)}}{\sinh^2\left(r_1+r_2\right)}$$

olur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\sinh^2\left(r_1+r_2\right)-\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)+1\right)=\cosh^2\left(r_1+r_2\right)\left(\cosh\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2$$

olarak bulunur.

Böylece

$\theta_{12} = P_3$

eşitliği elde edilir. Benzer işlemler yapıldığında

$\theta_{23} = P_1$

ve

$\theta_{13} = P_2$

olur.

Konformal hiperbolik ikizkenar üçgende iç açıların ve tepe noktalarının eşitliği

Eş. 4.20 de

$$\cos\theta_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \quad , i \neq j;\ i,j = 1,2,3$$

verilmişti.

$$\sin P_k = \frac{\sqrt{-|M|}}{\sqrt{(-M_{ii})(-M_{jj})}} \quad ,i \neq j, i \neq k, j \neq k;\ i,j,k = 1,2,3 \tag{4.26}$$

olmak üzere

$$\cos\theta_{12} = \frac{M_{12}}{\sqrt{M_{11}M_{22}}}$$

Eş. 4.14 den M_{11}, M_{12} ve M_{22} hesaplanıp yerine yazılırsa

$$\cos\theta_{12} = \frac{\cosh(r_1 + r_2)\left(\cosh(r_2 + r_3) - 1\right)}{\sqrt{\sinh^2(r_2 + r_3)\sinh^2(r_1 + r_2)}}$$

bulunur.

Benzer şekilde Eş. 4.14 dan hesaplanan M_{11}, M_{22} ve $|M|$ Eş. 4.26 da kullanılırsa

$$\sin P_3 = \frac{\sqrt{-|M|}}{\sqrt{M_{11}\,M_{22}}}$$

$$\sin P_3 = \frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh(r_1+r_2)}}{\sqrt{\sinh^2(r_2+r_3)\sinh^2(r_1+r_2)}}$$

şeklinde olur. Buradan

$$\theta_{12} = \arccos\left(\frac{\cosh(r_1+r_2)\left(\cosh(r_2+r_3)-1\right)}{\sqrt{\sinh^2(r_2+r_3)\sinh^2(r_1+r_2)}}\right),$$

$$P_3 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh(r_1+r_2)}}{\sqrt{\sinh^2(r_2+r_3)\sinh^2(r_1+r_2)}}\right) \tag{4.27}$$

bulunur.

Eş. 4.27 nin sağ tarafının kosinüsünü hesaplayalım.

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh(r_1+r_2)}}{\sqrt{\sinh^2(r_2+r_3)\sinh^2(r_1+r_2)}}\right)\right)$$

$$= \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh(r_1+r_2)}}{\sqrt{\sinh^2(r_2+r_3)\sinh^2(r_1+r_2)}}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh\left(r_1+r_2\right)}}{\sqrt{\sinh^2\left(r_2+r_3\right)\sinh^2\left(r_1+r_2\right)}}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\sinh^2\left(r_2+r_3\right)\sinh^2\left(r_1+r_2\right)-4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh\left(r_1+r_2\right)}}{\sinh^2\left(r_2+r_3\right)\sinh^2\left(r_1+r_2\right)}$$

olur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\sinh^2\left(r_2+r_3\right)\sinh^2\left(r_1+r_2\right)-4\sinh r_1 \sinh^2 r_2 \sinh\left(r_1+r_2\right) = \cosh^2\left(r_1+r_2\right)\left(\cosh\left(r_2+r_3\right)-1\right)^2$$

olarak bulunur.

Böylece

$\theta_{12} = P_3$

eşitliği elde edilir. Benzer işlemler yapıldığında

$\theta_{23} = P_1$

ve

$\theta_{13} = P_2$

olur.

4.10. Hiperbolik Uzayda Konformal ve Özel Konformal Üçgenlerin Alanları

Konformal hiperbolik üçgenin alanı

Ω konformal hiperbolik eşkenar üçgen olsun. Bu durumda $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ ayrıt uzunluklar ve

$$\cosh\varphi_{12} = \cosh(r_1+r_2),$$
$$\cosh\varphi_{13} = \cosh(r_1+r_3),$$
$$\cosh\varphi_{23} = \cosh(r_2+r_3)$$

olmak üzere

$$\mathrm{Alan}(\Omega)=\pi-\arctan\left(\frac{\sqrt{4\sinh r_1\sinh r_2\sinh r_3\sinh(r_1+r_2+r_3)}\left(\cosh(r_1+r_2)+\cosh(r_1+r_3)+\cosh(r_2+r_3)+1\right)}{4\sinh r_1\sinh r_2\sinh r_3\sinh(r_1+r_2+r_3)-\left(\left(\cosh(r_1+r_2)+1\right)\left(\cosh(r_1+r_3)+1\right)\left(\cosh(r_2+r_3)+1\right)\right)}\right)$$

şeklinde elde edilir.

Konformal hiperbolik eşkenar üçgenin alanı

Ω konformal hiperbolik eşkenar üçgen olsun. Bu durumda $\varphi_{12}=\varphi_{13}=\varphi_{23}$ ve $\cosh\varphi_{12}=\cosh\varphi_{13}=\cosh\varphi_{23}=\cosh(r_1+r_2)$ olup

$$\mathrm{Alan}(\Omega)=\pi-\arctan\left(\frac{\left(\cosh(r_1+r_2)-1\right)\left(3\cosh(r_1+r_2)+1\right)\sqrt{2\cosh(r_1+r_2)+1}}{\cosh(r_1+r_2)\left(\cosh^2(r_1+r_2)-6\cosh(r_1+r_2)-3\right)}\right)$$

şeklinde elde edilir.

Konformal hiperbolik ikizkenar üçgenin alanı

Ω konformal hiperbolik ikizkenar üçgen olsun. Bu durumda $\varphi_{12}=\varphi_{13}$ ve $\cosh\varphi_{12}=\cosh\varphi_{13}=\cosh(r_1+r_2)$, $\cosh\varphi_{23}=\cosh(r_2+r_3)$ olup

$$\mathrm{Alan}(\Omega)=\pi-\arctan\left(\frac{-\sqrt{\left(\cosh(r_2+r_3)-1\right)\left(2\cosh^2(r_1+r_2)-\cosh(r_2+r_3)-1\right)}\left(2\cosh(r_1+r_2)+\cosh(r_2+r_3)+1\right)}{\cosh^2(r_1+r_2)\left(3-\cosh(r_2+r_3)\right)+2\cosh(r_1+r_2)\left(\cosh(r_2+r_3)+1\right)+\cosh(r_2+r_3)\left(\cosh(r_2+r_3)+1\right)}\right)$$

şeklinde elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Archimedes. (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge: Cambridge University Press.

2. Euler, L. (1732). De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 3*, 110-124 .

3. Menger, K. (1930). Untersuchungen über allgemeine Metrik, Vierte Untersuchung, Zur Metrik der Kurven. *Mathematische Annalen, 103*, 466-501.

4. Karlığa, B. (2004). Edge matrix of hyperbolic simplices. *Geometriae Dedicata, 109*, 1-6.

5. Ratcliffe, J.G. (1994). *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Berlin: Springer-Verlag.

6. Hacısalihoğlu, H.H. (1998). *İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler.* Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

7. Bluemental, L. (1970). *Theory and Applications of Distance Geometry*. New York: Chelsea Publishing Company.

8. O'neil, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry*. London: Academic Press.

9. Vinberg, E.B. (1993). *Geometry II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Berlin: Springer-Verlag.

10. Yakut, A.T. (2004). Hiperbolik Uzayda Simplekslerin Tepe Açıları. Doktora Tezi. *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.* Ankara.

11. Suarez-Peiro, E. (2000). A Schlafli Differential Formula for Implices in Semi-Riemannian Hyperquadrics, Gauss-Bonnet Formulas for Simplices in the de Sitter Sphere and the Dual Volume of a Hyperbolic Simplex. *Pacific Journal of Mathematics,194*(1), 229.

12. Rivin, I. & Cooper, D. (1996). Combinatorial scalar curvature and rigidity of ball packings. *Mathematical Research Letters, 3*(1), 51-60.

13. Berger, M. (1987). *Geometry-I*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

14. Karlığa, B. & Savaş, M. (2006). Hiperbolik ve Küresel Üçgenlerin Kenar Uzunluklarına Bağlı Alan Formülleri. *Gazi Üniversitesi Matematik Bölüm Semineri*, 1-6, Ankara.

15. Karlığa, B. & Yakut, A.T. (2006). Vertex angles of a simplex in hyperbolic space H^n. *Geometriae Dedicata, 120*, 49-58.

16. d'Ovidio, E. (1877). Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvature constante. *The Reale Accademia dei Licei, 3*(1), 929-986.

17. Gram, J. P. (1884). Undersøgelser angaaende Maengden af Primtal under en given Graeense. *Det Kongelige Videnskabernes Selskab, 2*, 183-308.

18. Erikson, F. (1978). The law of sines for tedrahedra and n-simplices. *Geometriae Dedicata, 7*, 71-80.

19. Coxeter, H. S. M. (1932). The polytopes with regular-prismatic vertex figures II. *Proceding London Mathematical Society, 34*, 126-189.

20. Witt, E. (1941). Spiegelungsgruppen und Aufz¨ahlung halbeinfacher Liescher Ringe. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, *14*, 289-322.

21. Aleksandrov, A. D. (1954). On the filling of space by polyhedra (Russian). *Vestnik Leningrad University, 9*, 33-43.

22. Dyck,W. (1883). Vorlaufige Mittheilungen uber die durch Gruppen linearer Transformationen gegebenen regularen Gebietseintheilungen des Raumes. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse,* 61-75.

23. Goursat, E. (1889). Sur les substitutions orthogonales et les divisions regulieres de l'espace. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 6*, 9-102.

24. Coxeter, H. S. M. (1931). Groups whose fundamental regions are simplexes. *Journal of the London Mathematical Society, 6*, 133-136.

25. Vinberg, E. B. (1967). Discrete groups generated by reflections in Lobacevskii spaces. *Mathematics of the USSR-Sbornik, 1*, 429-444.

26. Hsiang, W.Y. (1993). On the volume ormula of Spherical Simplices, revisited. *Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93*, 117-127, Seoul.

27. Feng, L. (1997). On a Problem of Fenchel. *Geometriae Dedicata, 64*, 277.

28. Asmus, I. (2008). *Duality Between Hyperbolic and de-Sitter Geometry*. New York : Cornell University.

29. Lopez, R. (2008). *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space*, Brasil: Instituto de Matematica e Estatıstica (IME-USP) University of Sao Paulo.

30. Tokeşer, Ü. (2013). Küresel, Hiperbolik ve de-Sitter Düzleminde Üçgenler. Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*. Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ömer ALSAN
Doğum Yeri ve Yılı : Kastamonu 1976
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : omeralsan76@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Bağcılar Teknik Lisesi Bilgisayar Bölümü - 1994
Lisans : Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü -2000

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Bahri Alp İlköğretim Okulu (2000 – 2005)
İş Yeri : Kastamonu Ticaret Meslek Lisesi (2005 – 2007)
İş Yeri : Göl Anadolu Öğretmen Lisesi (2007 – 2014)
İş Yeri : Göl Anadolu Lisesi (2014 – Halen)