KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SINIR KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN SELFADJOİNT OLMAYAN FARK DENKLEMLERİ SİSTEMİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Ahmet Turgut KELEŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2015
KASTAMONU

TEZ ONAYI

Ahmet Turgut KELEŞ tarafından hazırlanan "**Sınır Koşulunda Spektral Parametre Bulunan Selfadjoint Olmayan Fark Denklemleri Sisteminin Spektral Analizi**" adlı YÜKSEK LİSANS tez çalışmasının uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Turhan KÖPRÜBAŞI ....

Tez Danışmanı, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yaşar BOLAT ....
Fen Edebiyat Fakültesi, KÜ

Doç. Dr. Harun KARSLI ....
Fen Edebiyat Fakültesi, AİBÜ

Yrd. Doç. Dr. Turhan KÖPRÜBAŞI ....
Fen Edebiyat Fakültesi, KÜ

Tarih: 15/01/2015

Bu tez ile K.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu YÜKSEK LİSANS DERECESİNİ onamıştır.

Prof. Dr. Ömer KÜÇÜK
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez içerisindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ahmet Turgut KELEŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SINIR KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN SELFADJOİNT OLMAYAN FARK DENKLEMLERİ SİSTEMİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Ahmet Turgut KELEŞ
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Turhan KÖPRÜBAŞI

Bu yüksek lisans çalışmasında, $n \in \mathbb{N}$ için $\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$ vektör değerli diziler ve $a_n \neq 0,\ b_n \neq 0$ olmak üzere $(a_n),\ (b_n),\ (p_n),\ (q_n)$ kompleks değerli diziler ve $i = 0,1$ için $\gamma_i,\ \beta_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere birinci mertebeden fark denklemleri sistemi için;

$$\begin{cases} a_{n+1}y_{n+1}^{(2)} + b_n y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ a_{n-1}y_{n-1}^{(1)} + b_n y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)} \end{cases},\quad n \in \mathbb{N}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1\lambda)y_1^{(2)} + (\beta_0 + \beta_1\lambda)y_0^{(1)} = 0$$

sınır değer problemi incelenmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.İkinci bölümde, spektral analizin temel tanım ve teoremleri hatırlatılmıştır. Üçüncü ve dördüncü bölümde analitik fonksiyonların birebirlik teoremleri kullanılarak, yukarıdaki sınır değer probleminin Jost çözümleri, Jost fonksiyonları, özdeğerleri, spektral tekillikleri ve esas fonksiyonları incelenmiştir.

2015, 54 sayfa
Bilim Kodu: 204
Anahtar Kelimeler: spektral analiz, fark denklemi, Jost çözümü, Jost fonksiyonu, özdeğer, spektral tekillik, esas fonksiyon

ABSTRACT

MSc. Thesis

SPECTRAL ANALYSIS OF NON-SELFADJOINT DIFFERENCE EQUATIONS SYSTEM WITH SPECTRAL PARAMETER IN BOUNDARY CONDITIONS

Ahmet Turgut KELEŞ
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Adviser: Assist. Prof. Dr. Turhan KÖPRÜBAŞI

Abstract: In this study, the boundary value problem for the system of difference equations of first order

$$\begin{cases} a_{n+1}y_{n+1}^{(2)} + b_n y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ a_{n-1}y_{n-1}^{(1)} + b_n y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1\lambda)y_1^{(2)} + (\beta_0 + \beta_1\lambda)y_0^{(1)} = 0$$

where $\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$ are vector sequences, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ for all n, γ_i, $\beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 0,1$ is researched.

This thesis consist of four chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, some basic definitions and main theorems of spectral analysis have been recalled. In third and fourth chapters, using the uniqueness theorems of analytic functions, Jost solutions, Jost functions, eigenvalues, spectral singularities and principal functions of boundary value problem at above are investigated.

2015, 54 pages
Science Code: 204
Key Words: Spectral analysis, difference equation, Jost solution, Jost function, eigenvalue, spectral singularity, principal function

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, büyük fedakarlık göstererek çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve destekleri ile beni yönlendiren değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Turhan KÖPRÜBAŞI (Kastamonu Üniversitesi Fen Fakültesi)'na, bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan, aldığım her kararda arkamda durup beni destekleyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ahmet Turgut KELEŞ
Kastamonu, Ocak 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_+$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}_+}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$L_2(\mathbb{R}_+)$	$\left\{ y : y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C},\ \int_0^\infty \lvert y(x)\rvert^2\, dx < \infty \right\}$
$L_2(\mathbb{N})$	$\left\{ y = (y_0, y_1, y_2, ...) : i = 0,1,2,... \text{ için } y_i \in \mathbb{C} \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} \lvert y_n \rvert^2 < \infty \right\}$
$L_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$	$\left\{ y = \begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix} : i = 0,1,2,... \text{ ; j=1,2 için } \mathrm{y}_i^{(j)} \in \mathbb{C} \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} \lvert \mathrm{y}_n^{(j)} \rvert^2 < \infty \right\}$
$\sigma_d(L)$	L operatörünün diskre (nokta) spektrumu
$\sigma_c(L)$	L operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_{ss}(L)$	L operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi
$D(L)$	L operatörünün tanım kümesi
$R_\lambda(L)$	L operatörünün resolvent operatörü
$\mu(G)$	G kümesinin Lebesgue ölçüsü
$[\![x]\!]$	x reel sayısının tam değeri

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematiğin ve kuantum mekaniğinin çoğu probleminin çözümünde diferensiyel denklemlerin ve diferensiyel operatörlerin spektral analizi kullanılmaktadır. Bu sebeple Sturm-Liouville, Dirac, Schrödinger ve Klein-Gordon diferensiyel denklemleri yardımıyla elde edilen diferensiyel operatörlerin spektral analizi günümüze kadar birçok matematikçinin araştırma konusu olmuştur. Hilbert uzaylarında tanımlı lineer, sınırlı, selfadjoint operatörlerin spektral özellikleri ile ilgili günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bununla birlikte bazı fiziksel problemlerin incelenmesi sırasında karşılaşılan diferensiyel operatörlerin birçoğu ise sınırsız ve selfadjoint olmayan olarak ortaya çıkmıştır.

Selfadjoint olmayan diferensiyel denklemler yardımıyla tanımlanan operatörlerin spektral analizi ilk kez Naimark tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada q kompleks değerli bir fonksiyon, $h \in \mathbb{C}$ ve λ bir spektral parametre olmak üzere $\ell^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ uzayında;

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda^2 y \ , \ 0 \le x < \infty \\ y'(0) \ - \ hy(0) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemi göz önüne alınmış ve bu sınır değer probleminin spektrumunun sürekli spektrum, özdeğerler ve spektral tekilliklerden oluştuğu görülmüştür. Ayrıca bu sınır değer probleminin spektral tekilliklerinin, resolventin kutup noktaları olup sürekli spektrumun üzerinde bulunduğu fakat özdeğer olmadığı elde edilmiştir. Bununla birlikte bu çalışmada, q potansiyel fonksiyonunun en az bir $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon x} \left| q(x) \right| dx < \infty$$

şartını sağlaması durumunda, söz konusu sınır değer probleminin spektral tekilliklerinin ve özdeğerlerinin sonlu sayıda ve sonlu katlı olduğu ispatlanmıştır (Naimark,1960).

Pavlov ise Naimark'ın bu çalışmasında göz önüne aldığı operatörün spektral tekilliklerinin yapısal olarak potansiyel fonksiyonunun azalma hızına bağlı olduğunu göstererek, özdeğer ve spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonlar cinsinden bir spektral açılım elde etmiştir. Spektral tekillikler dikkate alınarak spektral açılım verilen ilk çalışma olması nedeniyle Pavlov'un bu araştırması, spektral analiz incelemeleri bakımından önemli bir adım olarak kabul edilmektedir (Pavlov, 1967).

Son yıllarda özellikle kontrol teorisi, yörünge denklemleri, bilgisayar bilimi, mühendislik, ekonomi, biyoloji ve diğer birçok bilim dalının modelleme çalışmalarındaki gelişmelerle birlikte fark operatörlerinin spektral analizinin yapılması önem kazanmıştır.

Bairamov ve Çelebi, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli diziler olmak üzere $\ell^2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right)$ uzayında

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(2)} - y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ -y_n^{(1)} + y_{n-1}^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)} \\ \qquad y_0^{(1)} = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemi yardımıyla üretilen Dirac operatörünün

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\exp\left(\varepsilon\sqrt{n}\right)\left(|p_n|+|q_n|\right)\right\} < \infty \quad , \quad \varepsilon > 0$$

koşulu altında özdeğerlerinin, spektral tekilliklerinin ve bunların katlarının sonlu olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca Dirac operatörünün Weyl fonksiyonu için elde ettikleri bir integral gösterimden yararlanarak bir spektral açılım vermişlerdir (Bairamov and Celebi, 1999).

Bairamov vd. ise, (a_n), (b_n), (h_n) kompleks terimli diziler ve $a_0 = 1,\ h_0 \neq 0$ olmak üzere $\ell^2(\mathbb{N})$ uzayında

$$a_{n\text{-}1} y_{n\text{-}1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n$$

fark denklemi ve

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n y_n = 0$$

sınır şartı yardımıyla üretilen, selfadjoint olmayan diskre L operatörünün özdeğerlerinin, spektral tekilliklerinin ve bunların katlarının sonlu olduğunu

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{\varepsilon n^{\beta}} \left(|1-a_n|+|b_n|+|h_n|\right) < \infty, \quad \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{2} \le \beta \le 1$$

koşulu altında ispatlamışlardır. Ayrıca mevcut koşul altında L operatörünün sürekli spektrumunun $[-2,2]$ aralığında bulunduğunu da göstermişlerdir (Bairamov vd., 2001).

Bununla beraber Krall vd., $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli dizi olmak üzere $\ell^2(\mathbb{N})$ uzayında

$$\begin{aligned} (\ell y)_n &= y_{n-1} + y_{n+1} + b_n y_n \ , \ n \in \mathbb{N} \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

sınır değer problemi tarafından üretilen fark operatörünün Weyl-Titchmarsh fonksiyonunu incelemişler ve bu fonksiyon ile operatörün Marchenko anlamında genelleştirilmiş spektral fonksiyonu arasında bir ilişki elde etmişlerdir. Ayrıca Weyl-Titchmarsh fonksiyonunun Cauchy tipinde bir integral gösterimi yardımıyla bir spektral açılım vermişlerdir (Krall vd., 2001).

Görüldüğü üzere yukarıda değinilen çalışmalarda göz önüne alınan problemlerin hepsinde sınır koşulları spektral parametreden bağımsız olmuştur. Son yıllarda ise, sınır koşullarında spektral parametre olan diferensiyel operatörler üzerinde çalışmalar yapılmaya başlanmıştır.

Şimdi selfadjoint olmayan birinci mertebeden fark denklemleri sistemi için ;

$$\begin{cases} a_{n+1} y_{n+1}^{(2)} + b_n y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ a_{n-1} y_{n-1}^{(1)} + b_n y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1 \lambda) y_1^{(2)} + (\beta_0 + \beta_1 \lambda) y_0^{(1)} = 0, \quad \gamma_0 \beta_1 - \gamma_1 \beta_0 \neq 0, \quad \gamma_1 \neq a_0^{-1} \beta_0 \tag{1.2}$$

sınır değer problemi göz önüne alınsın. Burada $\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$ için vektör değerli diziler ve $a_n \neq 0,\ b_n \neq 0$ olmak üzere $(a_n),\ (b_n),\ (p_n),\ (q_n)$ kompleks değerli dizilerdir. Ayrıca $i = 0,1$ için $\gamma_i,\ \beta_i \in \mathbb{C}$ ve λ bir spektral parametredir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \equiv 1$ ve $b_n \equiv -1$ ve ileri fark operatörü; $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$ kullanılırsa (1.1) sistemi için;

$$\begin{cases} \Delta y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ -\Delta y_{n-1}^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)} \end{cases} \tag{1.3}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & q(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

bulunur ki, bu da Dirac denklem sistemi olarak bilinir. (1.3) sistemine diskre Dirac sistemi denir.

Bu çalışmada, (1.1), (1.2) sınır değer probleminin bazı $\varepsilon > 0$ ve $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$ olmak üzere;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\varepsilon n^{\delta}\right)\left(|1-a_n| + |1+b_n| + |p_n| + |q_n|\right) < \infty$$

şartı altında sonlu sayıda, sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahip olduğu incelenmiş ve bunlara karşılık gelen esas fonksiyonların yapısı öğrenilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileride ihtiyaç duyulacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 (Resolvent)**:** $X \neq \{0\}$ kompleks normlu bir uzay,

$$T : D(T) \subset X \to X$$

lineer bir operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$R_\lambda(T) = \left(T - \lambda I\right)^{-1}$$

operatörüne T operatörünün *resolvent operatörü* ya da kısaca *resolventi* denir (Lusternik, 1974).

Tanım 2.2 (Regüler Değer) **:** $R_\lambda(T)$ mevcut, sınırlı ve tanım kümesi X uzayında yoğun ise $\lambda \in \mathbb{C}$ değerine T operatörünün *regüler değeri* denir. T operatörünün regüler değerlerinden oluşan kümeye ise T operatörünün *resolvent kümesi* adı verilir ve $\rho(T)$ ile gösterilir. $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ kümesine T nin *spektrumu*, $\forall \lambda \in \sigma(T)$ elemanına ise T nin *spektral değeri* denir (Lusternik, 1974).

Tanım 2.3 (Diskre Spektrum)**:** $R_\lambda(T)$ mevcut olmayacak şekilde λ kompleks sayılarının kümesine, T operatörünün *diskre spektrumu* ya da *nokta spektrumu* adı verilir (Lusternik, 1974).

Tanım 2.4 (Sürekli spektrum)**:** $R_\lambda(T)$ mevcut, sınırsız ve $R_\lambda(T)$ operatörünün tanım kümesi X uzayında yoğun olacak şekilde λ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye, T operatörünün *sürekli spektrumu* denir (Lusternik, 1974).

Tanım 2.5 (Özdeğer)**:** X bir kompleks vektör uzay ve $T : X \to X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks sayısı için $Tx = \lambda x$ denkleminin aşikar olmayan bir $x \in X$ çözümü varsa, λ ya T nin *özdeğeri* denir. Bu x çözümüne ise T nin λ özdeğerine karşılık gelen *özfonksiyonu* denir (Lusternik, 1974).

Tanım 2.6 (Spektral Tekillikler)**:** Bir T operatörünün resolventinin çekirdeğinin kutup noktaları olup, sürekli spektrumda da bulunan, fakat özdeğer olmayan noktalara T operatörünün *spektral tekillikleri* denir (Naimark, 1960).

Teorem 2.1: Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrıktır (Dolzhenko, 1979).

Teorem 2.2: Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko, 1979).

Teorem 2.3: Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, sonsuz katlı sıfırları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko, 1979).

Teorem 2.4 (Privalov Teoremi)**:** Açık üst düzlemde özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, reel eksendeki Lebesgue ölçüsü sıfırdır (Dolzhenko, 1979).

Teorem 2.5 (Pavlov Teoremi)**:** g fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da her mertebeden türeve sahip bir fonksiyon ve $\mu\left(G=\left\{x\in\mathbb{R}: g^{(n)}(x)=0, \forall n\in\mathbb{N}\right\}\right)=0$ olsun. Ayrıca,

$$\left|g^{(k)}(z)\right|\leq\eta_k \ , \ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde η_k sayıları mevcut olmakla birlikte G_s, G kümesinin s-komşuluğu , $t(s)=\inf\limits_k \dfrac{\eta_k s^k}{k!}$ ve ω > 0 olmak üzere;

$$\int_0^{\omega}\ln t(s)d\mu\left(G_s\right) = -\infty \tag{2.1}$$

sağlansın. Bu durumda g fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da özdeş olarak sıfırdır (Pavlov, 1975).
(2.1) ifadesindeki integral, sıfır noktasını içeren herhangi bir aralık üzerinden alınmaktadır.

3. SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN DİSKRE DİRAC DENKLEMLERİ İLE SPEKTRAL TEKİLLİKLER

3.1. (1.1), (1.2) Sınır Değer Probleminin Jost Çözümü

$\varepsilon > 0$ ve $\dfrac{1}{2} \leq \delta \leq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\varepsilon n^{\delta}\right)\left(\left|1-a_n\right| + \left|1+b_n\right| + \left|p_n\right| + \left|q_n\right|\right) < \infty \tag{3.1}$$

koşulu göz önüne alınsın. (3.1) koşulu altında ;

$\lambda = 2\sin\dfrac{z}{2}$ ve $z \in \overline{\mathbb{C}}_{+} = \left\{z : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \geq 0\right\}$ olmak üzere (1.1) sistemi:

$$f_n(z) = \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix} = \alpha_n \left(\mathrm{I}_2 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \right) \begin{pmatrix} e^{\frac{iz}{2}} \\ -i \end{pmatrix} e^{inz}, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

$$f_0^{(1)}(z) = \alpha_0^{11} \left\{ e^{\frac{iz}{2}} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{om}^{11} e^{imz} \right] - i \sum_{m=1}^{\infty} A_{om}^{12} e^{imz} \right\}, \tag{3.3}$$

şeklinde sınırlı çözümlere sahiptir.

$$f(z) = \left(f_n(z)\right) = \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix}$$

çözümüne (1.1) denklem sisteminin *Jost çözümü* denir. Burada ;

$$\alpha_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^{11} & \alpha_n^{12} \\ \alpha_n^{21} & \alpha_n^{22} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{nm} = \begin{pmatrix} A_{nm}^{11} & A_{nm}^{12} \\ A_{nm}^{21} & A_{nm}^{22} \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $i, j = 1, 2$ için α_n^{ij} ve A_{nm}^{ij} ifadeleri;

$$\alpha_n^{11} = \left[\prod_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n-k} b_k a_{k-1} \right]^{-1},$$

$$\alpha_n^{12} = 0,$$

$$\alpha_n^{22} = \left[b_n \prod_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n-k+1} b_k a_{k-1} \right]^{-1},$$

$$\alpha_n^{21} = \alpha_n^{22} \left[p_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} (p_k + q_k) \right],$$

$$A_{n1}^{12} = -\sum_{k=n+1}^{\infty} (p_k + q_k),$$

$$A_{n1}^{11} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(a_{k+1} a_k + b_k^{\,2} - p_k q_k + (p_k + q_k) A_{k1}^{12} - 2 \right),$$

$$A_{n1}^{22} = -1 + a_{n+1} a_n + \left(A_{n1}^{12} \right)^2 + A_{n1}^{11},$$

$$\begin{aligned}
A_{n1}^{21} = &-\sum_{k=n}^{\infty} \Big\{ \left(q_{k+1} + A_{k1}^{12} \right) \Big[a_{k+1} a_k + q_{k+1} (p_{k+1} + q_{k+1}) + q_{k+1} A_{k1}^{12} \\
&+ b_{k+1}^2 + A_{k+1,1}^{11} - 1 \Big] - A_{k1}^{12} \left(1 + A_{k1}^{11} \right) \Big\} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(q_k A_{k1}^{22} - b_k^2 p_k \right),
\end{aligned}$$

$$A_{n2}^{12} = -a_{n+1} a_n \left(q_{n+1} + A_{n1}^{12} \right) + A_{n1}^{12} A_{n1}^{11} + A_{n1}^{12} - A_{n1}^{21}$$

$$\begin{aligned}
A_{n2}^{11} = &\sum_{k=n+1}^{\infty} \Big\{ \left(b_k^2 - 1 \right) A_{k1}^{11} - a_{k+1} a_k \left[\left(q_{k+1} + A_{k1}^{12} \right) A_{k+1,1}^{12} - A_{k+1,1}^{22} \right] \\
&- \left(p_k - A_{k1}^{12} \right) \left[q_k A_{k1}^{11} + A_{k1}^{12} - A_{k2}^{12} \right] - q_k A_{k1}^{21} + A_{k1}^{12} A_{k2}^{12} - A_{k1}^{22} \Big\},
\end{aligned}$$

$$A_{n2}^{22} = -a_{n+1} a_n \left(q_{n+1} + A_{n1}^{12} \right) A_{n+1,1}^{12} + a_{n+1} a_n A_{n+1,1}^{22} + A_{n1}^{12} A_{n2}^{12} - A_{n1}^{11} + A_{n2}^{11}$$

$$\begin{aligned}
A_{n2}^{21} = &\sum_{k=n}^{\infty} \Big\{ A_{k1}^{12} A_{k2}^{11} + A_{k2}^{21} - a_{k+1} a_k \left[\left(q_{k+1} + A_{k1}^{12} \right) A_{k+1,1}^{11} - A_{k+1,1}^{21} \right] \Big\} \\
&- \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\left(q_k + A_{k-1,1}^{12} \right) \left(q_k A_{k2}^{12} - A_{k1}^{11} + A_{k2}^{11} \right) + b_k^2 A_{k2}^{21} - p_k A_{k2}^{22} + A_{k1}^{21} \right],
\end{aligned}$$

ve $m \geq 3$ için;

$$\begin{aligned}
A_{nm}^{12} = &-a_{n+1} a_n \left[\left(q_{n+1} + A_{n1}^{12} \right) A_{n+1,m-2}^{11} + A_{n+1,m-2}^{21} \right] \\
&+ A_{n1}^{12} A_{n,m-1}^{11} + A_{n,m-1}^{12} - A_{n,m-1}^{21},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{nm}^{11} = &-\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k+1} a_k \left[\left(q_{k+1} + A_{k1}^{12} \right) A_{k+1,m-1}^{12} - A_{k+1,m-1}^{22} \right] \\
&- \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(p_k - A_{k1}^{12} \right) \left(q_k A_{k,m-1}^{11} + A_{k,m-1}^{12} - A_{km}^{12} \right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(b_k^{\,2} - 1 \right) A_{k,m-1}^{11}
\end{aligned}$$

$$-\sum_{k=n+1}^{\infty} q_k A_{k,m-1}^{21} + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k1}^{12} A_{km}^{12} - \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k,m-1}^{22} \ ,$$

$$A_{nm}^{22} = -a_{n+1} a_n \left[\left(q_{n+1} + A_{n1}^{12} \right) A_{n+1,m-1}^{11} + A_{n+1,m-1}^{22} \right] + A_{n1}^{12} A_{nm}^{12} + A_{nm}^{11} - A_{n,m-1}^{11}$$

$$A_{nm}^{21} = -\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k+1} a_k \left[\left(q_{k+1} + A_{k1}^{12} \right) A_{k+1,m-1}^{12} - A_{k+1,m-1}^{21} \right]$$

$$-\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(q_k - A_{k-1,1}^{12} \right) \left(q_k A_{km}^{21} + A_{k,m-1}^{11} - A_{km}^{22} \right) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(b_k^{\ 2} - 1 \right) A_{km}^{12}$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty} A_{k1}^{12} A_{km}^{22} + \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k A_{km}^{22} + \sum_{k=n}^{\infty} A_{km}^{12} - \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k,m-1}^{21}$$

biçiminde (a_n), (b_n), (p_n), (q_n) ifadelerine bağlı olarak yazılır.

Açıkça $n \in \mathbb{N}$ için,

$$f_n^{(1)}(z) = \alpha_n^{11} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{11} \left(A_{nm}^{11} e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z} - i A_{nm}^{12} e^{i(m+n)z} \right)$$

$$f_n^{(2)}(z) = \alpha_n^{21} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} - i\alpha_n^{22} e^{inz} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\alpha_n^{21} \left(A_{nm}^{11} e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z} - i A_{nm}^{12} e^{i(m+n)z} \right) \right.$$

$$\left. + \alpha_n^{22} \left(A_{nm}^{21} e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z} - i A_{nm}^{22} e^{i(m+n)z} \right) \right]$$

şeklinde olup, ayrıca $c > 0$ bir sabit ve $\left[\!\left[\frac{m}{2} \right]\!\right]$ ifadesi $\frac{m}{2}$ nin tam kısmı olmak üzere $i, j = 1, 2$ için

$$\left| A_{nm}^{ij} \right| \le C \sum_{k=n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}^{\infty} \left(|1 - a_k| + |1 + b_k| + |p_k| + |q_k| \right) \tag{3.4}$$

elde edilir (Bairamov and Coskun, 2004).

3.2. (1.1), (1.2) Sınır Değer Probleminin Özdeğerleri Ve Spektral Tekillikleri

(1.2), (3.2) ve (3.3)'den

$$F(z)=\left(\gamma_0+2\gamma_1\sin\frac{z}{2}\right)f_1^{(2)}(z)+\left(\beta_0+2\beta_1\sin\frac{z}{2}\right)f_0^{(1)}(z) \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda F fonksiyonu, $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik olup, $\overline{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde süreklidir ve

$$F(z+4\pi)=F(z)$$

eşitliğini sağlar. Bu fonksiyona (1.1), (1.2) sınır değer probleminin *Jost fonksiyonu* denir.

$$P_0:=\{\, z:\ z\in\mathbb{C},\ z=x+iy,\ 0\le x\le 4\pi,\ y>0\,\}$$

$$P:=P_0\cup[0,4\pi]$$

bölgeleri tanımlansın. Bu durumda (1.1), (1.2) sınır değer probleminin özdeğerler ve spektral tekillikler kümesi ;

$$\sigma_d=\left\{\lambda\ :\ \lambda=2\sin\frac{z}{2}\ ,\ z\in P_0\ ,\ F(z)=0\right\} \tag{3.6}$$

$$\sigma_{ss}=\left\{\lambda\ :\ \lambda=2\sin\frac{z}{2}\ ,\ z\in[0,4\pi]\ ,\ F(z)=0\right\} \tag{3.7}$$

şeklinde olur. Eğer (3.2), (3.3) ve (3.5) kullanılarak *F(z)* açıkça yazılırsa;

$$\begin{aligned}F(z)&=i\alpha_0^{11}\beta_1+\left(\gamma_1\alpha_1^{22}+\alpha_0^{11}\beta_0\right)e^{i\frac{z}{2}}+i\left(-\gamma_0\alpha_1^{22}+\gamma_1\alpha_1^{22}-\alpha_0^{11}\beta_1\right)e^{iz}\\&+\left(\gamma_0\alpha_1^{21}-\gamma_1\alpha_1^{22}\right)e^{i\frac{3z}{2}}-i\gamma_1\alpha_1^{21}e^{2iz}\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{12}e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}+i\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\alpha_0^{11}\beta_0A_{0m}^{12}+\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{11}\right)e^{imz}\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}+\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}+\alpha_0^{11}\beta_0A_{0m}^{11}-\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{12}\right)e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z}\end{aligned}$$

$$+\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\gamma_0\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}-\gamma_0\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}+\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}+\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}-\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{11}\right)e^{i(m+1)z}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\gamma_0\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}+\gamma_0\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}\right)e^{i\left(m+\frac{3}{2}\right)z}$$
$$+\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}\right)e^{i(m+2)z} \tag{3.8}$$

bulunur.

Tanım 3.1: *F* fonksiyonunun *P* bölgesindeki sıfırlarının katına, (1.1), (1.2) sınır değer probleminin özdeğerinin veya spektral tekilliğinin katı denir (Bairamov and Koprubasi, 2010).

Dolayısıyla (3.6) ve (3.7)'den görülür ki; (1.1), (1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri ve spektral tekilliklerinin sayısal özelliklerini araştırmak için, *F* fonksiyonunun *P* bölgesindeki sıfırlarının sayısal özelliklerini incelemek gerekir. Bu sıfırlar için;

$M_1 := \{z: z\epsilon P_0 , F(z)=0\}$

$M_2 := \{z: z\epsilon[0,4\pi] , F(z)=0\}$

$M_3 :=$ {M_1 kümesinin limit noktalarının kümesi}

$M_4 :=$ {$F(z)$ fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırlarının kümesi} (3.9)

kümeleri tanımlansın. (3.6), (3.7) ve (3.9)'den;

$$\sigma_d=\left\{\lambda : \lambda=2\sin\frac{z}{2}\ ,\ \mathrm{z}\in M_1\right\}$$
$$\sigma_{ss}=\left\{\lambda : \lambda=2\sin\frac{z}{2}\ ,\ \mathrm{z}\in M_2\right\} \tag{3.10}$$

elde edilir.

Teorem 3.1: (3.1) koşulu altında;

i) M_1 sınırlı ve sayılabilirdir.

ii) $M_1\cap M_3=\varnothing$ ve $M_1\cap M_4=\varnothing$ olur.

iii) M_2 kümesi kompakttır ve reel eksen üzerindeki Lebesque ölçüsü μ olmak üzere $\mu\left(M_2\right)=0$ olur.

iv) $M_3 \subset M_2$, $M_4 \subset M_2$ ve $\mu\left(M_3\right)=\mu\left(M_4\right)=0$

v) $M_3 \subset M_4$ olur (Bairamov and Koprubasi, 2010).

İspat: i) (1.2), (3.4) ve (3.8) kullanılarak;

$$F(z)=\begin{cases} i\alpha_0^{11}\beta_1+\mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-y/2}\right), & \beta_1 \neq 0,\ \mathrm{z}\in \mathrm{P},\ \mathrm{y}\to\infty \\ \left(\gamma_1\alpha_1^{22}+\alpha_0^{11}\beta_0\right)e^{i\frac{z}{2}}+\mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-y}\right), & \beta_1=0,\ \mathrm{z}\in \mathrm{P},\ \mathrm{y}\to\infty \end{cases} \tag{3.11}$$

bulunur ki bu asimptotik eşitlik ise F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının sınırlı bir bölgede olduğunu; yani M_1 kümesinin sınırlı olduğunu gösterir. F fonksiyonu P_0 bölgesinde analitik olup Teorem 2.1 gereğince F fonksiyonunun P_0 daki sıfırları ayrıktır. Bu da M_1 kümesinin sayılabilir olduğunu gösterir.

ii) F fonksiyonu P_0 bölgesinde analitik olup, Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 gereğince F fonksiyonunun P_0 daki sıfırlarının limit noktaları ile P_0 daki sonsuz katlı sıfırları P_0 ın sınırında; yani $[0,4\pi]$ aralığında olur. Dolayısıyla $M_1 \cap M_3=\varnothing$ ve $M_1 \cap M_4=\varnothing$ olur.

iii) $\forall z\in M_2$ için $z\in[0,4\pi]$ olduğundan M_2 kümesi sınırlıdır. Bununla beraber F fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli olup M_2 kümesinin limit noktaları yine M_2 de olur. Yani M_2 kapalıdır. Dolayısıyla M_2 kümesi kompakttır. Ayrıca Teorem 2.4 (Privalov Teoremi) gereğince $\mu\left(M_2\right)=0$ dır.

iv) F, $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli olduğundan *F(z)*'in P_0 daki sıfırlarının limit noktaları yine *F(z)* in sıfırı olup $[0,4\pi]$ aralığına düşer. Yani $M_3 \subset M_2$ dir. Ayrıca Teorem 2.3 gereğince $M_4 \subset M_2$ olduğu açık olup, dolayısıyla $\mu\left(M_3\right)=\mu\left(M_4\right)=0$ bulunur.

v) Keyfi $z_0 \in M_3$ alalım. Bu durumda $z_0 \neq z_n \in M_1$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ olur. $z_n \in M_1$ olduğundan $F\left(z_n\right)=0$ olup ayrıca F fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} F(z_n) = F(z_0)$ bulunur. Dolayısıyla $F(z_0)$=0 olur; yani z_0, *F(z)* fonksiyonunun sıfırıdır. Şimdi $z_0 \in M_4$; yani z_0 ifadesinin *F(z)* fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırı olduğu gösterilirse ispat biter. Tersine z_0, *F(z)* fonksiyonunun sonlu katlı sıfırı olsun. Bu durumda $\mathbb{C}_+$ da analitik $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli öyle bir *h* fonksiyonu vardır ki;

$$F(z) = \left(z - z_0\right)^k h(z), \quad h(z_0) \neq 0, \ \ 1 \leq k < \infty$$

sağlanır. Buradan görülür ki, tüm z_n ler *h* fonksiyonunun da sıfırıdır. Bu durumda

$$h(z) = \frac{F(z)}{\left(z - z_0\right)^k}$$

olur, bu ise

$$h(z_n) = 0$$

olduğunu verir. Dolayısıyla *h* fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli olduğundan;

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} h(z_n) \\ &= h(z_0) \end{aligned}$$

bulunur ki, bu bir çelişkidir. O halde $z_0 \in M_4$ olup $M_3 \subset M_4$ elde edilir.

Teorem 3.2: (3.1) koşulu altında;

i) (1.1), (1.2) sınır değer probleminin özdeğerler kümesi sınırlıdır, sayılabilirdir ve limit noktaları [-2,2] aralığındadır.

ii) $\sigma_{ss} \subset [-2, 2]$, $\sigma_{ss} = \overline{\sigma_{ss}}$ ve $\mu\left(\sigma_{ss}\right) = 0$ dır (Bairamov and Koprubasi, 2010).

Şimdi (1.1),(1.2) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sayısal özelliklerini incelemek için (3.1) koşulunda $\delta=1$ ve $\frac{1}{2}\leq\delta<1$ durumları göz önüne alınacaktır. Öncelikle $\delta=1$ olsun. Bu durumda;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\exp(\varepsilon n)\left(|1-a_n|+|1+b_n|+|p_n|+|q_n|\right)<\infty \tag{3.12}$$

olur.

Teorem 3.3: (3.12) koşulu altında (1.1), (1.2) sınır değer problemi sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir (Bairamov and Koprubasi, 2010).

İspat: C>0 bir sabit olmak üzere $i,j=1,2$ ve $n,m\in\mathbb{N}$ için (3.4) eşitsizliği kullanılarak; $k\geq n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]\geq\frac{1}{4}(n+m)$ durumu göz önüne alındığında;

$$\begin{aligned}
\left|A_{nm}^{ij}\right| &\leq C\sum_{k=n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}^{\infty}\left(|1-a_k|+|1+b_k|+|p_k|+|q_k|\right)\\
&=C\sum_{k=n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}^{\infty}\exp(-\varepsilon k)\exp(\varepsilon k)\left(|1-a_k|+|1+b_k|+|p_k|+|q_k|\right)\\
&\leq C\exp\left[-\frac{\varepsilon}{4}(n+m)\right]\sum_{k=n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}^{\infty}\exp(\varepsilon k)\left(|1-a_k|+|1+b_k|+|p_k|+|q_k|\right)\\
&\leq C\exp\left[-\frac{\varepsilon}{4}(n+m)\right]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. Buradan ise $n\geq 0$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}^{ij}e^{imz}\right| &\leq\sum_{m=1}^{\infty}\left|A_{nm}^{ij}\right|\left|e^{imz}\right|\\
&\leq C\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varepsilon}{4}(n+m)\right]\exp(-m\operatorname{Im}z)\\
&\leq C\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left[-m\left(\frac{\varepsilon}{4}+\operatorname{Im}z\right)\right]
\end{aligned}$$

olup $\operatorname{Im} z+\frac{\varepsilon}{4}>0$ yani $\operatorname{Im} z>-\frac{\varepsilon}{4}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}^{ij} e^{imz}$ serisi, z ye göre bu bölgede düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla (3.8) ve (3.13)'den F fonksiyonu $\operatorname{Im} z>-\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesinde analitiktir. Yani F fonksiyonu, $\mathbb{C}_+$ dan $\operatorname{Im} z>-\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesine analitik devama sahiptir. Bu durumda Teorem 2.2 gereğince, F fonksiyonunun P deki sıfırlarının limit noktaları $[0,4\pi]$ aralığında olamaz. Bu nedenle Teorem 3.1 gereğince M_1 ve M_2 kümeleri sınırlı olup Bolzano-Weierstrass teoremi gereğince M_1 ve M_2 sonlu sayıda elemana sahiptirler. Ayrıca F fonksiyonu $\operatorname{Im} z>-\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesinde analitik olduğundan, F fonksiyonunun P deki sıfırları sonlu katlıdır. O halde (3.10)'dan (1.1), (1.2) sınır değer probleminin sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerleri ve spektral tekillikleri olması sonucu elde edilir.

Görülmektedir ki, (3.12) koşulu F fonksiyonunun reel eksenden alt yarı düzleme analitik devamını sağlar. Dolayısıyla (1.1), (1.2) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonlu olması sonucu ortaya çıkar.

Şimdi $\varepsilon>0$ ve $\frac{1}{2}\leq\delta<1$ olmak üzere (3.12)'den daha zayıf olan,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(\varepsilon n^{\delta}\right)\left(|1-a_n|+|1+b_n|+|p_n|+|q_n|\right)<\infty \tag{3.14}$$

koşulu göz önüne alınsın. (3.14) koşulu altında F fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik ve reel eksende sonsuz türevlenebilir olduğu açıktır. Fakat (3.14) koşulu altında F fonksiyonu, reel eksenden alt yarı düzleme analitik devama sahip değildir. Bu nedenle (3.14) koşulu altında, (1.1), (1.2) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonlu olması Teorem 3.3'den farklı bir yolla gösterilecektir. Bunun için Teorem 2.5 (Pavlov Teoremi)'den faydalanılacaktır. Burada, Teorem 2.5'e uygun olması amacıyla g fonksiyonu yerine 4π periyotlu F fonksiyonu ve G kümesi yerine $M_4\subset\left[0,4\pi\right]$ kümesi düşünülecek olup ayrıca bu teoremdeki η_k ifadesinin de belirlenmesi gerekecektir. Dolayısıyla $F(z)$ fonksiyonunun türevlerinin incelenmesi gerekmektedir. O halde (3.14) koşulu göz önüne alınsın. Buradan $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ olmak üzere (3.8) eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
\left|F^{(k)}(z)\right| \le & \left(\frac{1}{2}\right)^k \left|\gamma_1\alpha_1^{22}+\alpha_0^{11}\beta_0\right| + \left|-\gamma_0\alpha_1^{22}+\gamma_1\alpha_1^{22}-\alpha_0^{11}\beta_1\right| \\
& +\left(\frac{3}{2}\right)^k \left|\gamma_0\alpha_1^{21}-\gamma_1\alpha_1^{22}\right| + 2^k \left|\gamma_1\alpha_1^{21}\right| \\
& +\sum_{m=1}^{\infty}\left(m-\frac{1}{2}\right)^k \left|\alpha_0^{11}\beta_1 A_{0m}^{12}\right| \left|e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}\right| \\
& +\sum_{m=1}^{\infty} m^k \left|-\alpha_0^{11}\beta_0 A_{0m}^{12}+\alpha_0^{11}\beta_1 A_{0m}^{11}\right| \left|e^{imz}\right| \\
& +\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)^k \left|\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}+\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}+\alpha_0^{11}\beta_0 A_{0m}^{11}-\alpha_0^{11}\beta_1 A_{0m}^{12}\right| \left|e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z}\right| \\
& +\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+1\right)^k \left|-\gamma_0\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}-\gamma_0\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}+\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}+\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}-\alpha_0^{11}\beta_1 A_{0m}^{11}\right| \left|e^{i(m+1)z}\right| \\
& +\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+\frac{3}{2}\right)^k \left|\gamma_0\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}+\gamma_0\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}\right| \left|e^{i\left(m+\frac{3}{2}\right)z}\right| \\
& +\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+2\right)^k \left|-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}\right| \left|e^{i(m+2)z}\right|
\end{aligned}
$$

olup $m \ge 1$ için $2m \ge 2$ olduğundan;

$$
\begin{aligned}
\left|F^{(k)}(z)\right| \le & \, 4^k \left(\left|\gamma_1\alpha_1^{22}+\alpha_0^{11}\beta_0\right| + \left|-\gamma_0\alpha_1^{22}+\gamma_1\alpha_1^{22}-\alpha_0^{11}\beta_1\right| + \left|\gamma_0\alpha_1^{21}-\gamma_1\alpha_1^{22}\right| \right. \\
& \left. + \left|\gamma_1\alpha_1^{21}\right|\right) + 4^k \left\{ \sum_{m=1}^{\infty}\left[\left|\alpha_0^{11}\beta_0 A_{0m}^{12}\right| + \sum_{m=1}^{\infty}\left|-\alpha_0^{11}\beta_0 A_{0m}^{12}+\alpha_0^{11}\beta_1 A_{0m}^{11}\right| \right.\right. \\
& +\sum_{m=1}^{\infty}\left|\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}+\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}+\alpha_0^{11}\beta_0 A_{0m}^{11}-\alpha_0^{11}\beta_1 A_{0m}^{12}\right| \\
& +\sum_{m=1}^{\infty}\left|-\gamma_0\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}-\gamma_0\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}+\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}+\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}-\alpha_0^{11}\beta_1 A_{0m}^{11}\right| \\
& +\sum_{m=1}^{\infty}\left|\gamma_0\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}+\gamma_0\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}\right| \\
& \left.\left. +\sum_{m=1}^{\infty}\left|-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}\right|\right]\right\}
\end{aligned}
$$

bulunur. Ayrıca $n \ge 0$ olmak üzere; $k \ge n + \left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right] \ge \frac{m}{4}$ ve buradan $\frac{1}{2} \le \delta < 1$ olmak üzere $-k^{\delta} \le -\frac{m^{\delta}}{4}$ olup (3.4) eşitsizliği kullanılarak;

$$\left|A_{nm}^{ij}\right| \leq \sum_{k=n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}^{\infty} \exp\left(-\varepsilon k^{\delta}\right)\exp\left(\varepsilon k^{\delta}\right)\left(\left|1-a_k\right|+\left|1+b_k\right|+\left|p_k\right|+\left|q_k\right|\right)$$
$$\leq C.\exp\left[-\frac{\varepsilon}{4}\left(m^{\delta}\right)\right]$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$\left|F^{(k)}(z)\right| \leq C4^k + C4^k \sum_{m=1}^{\infty} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}\left(m^{\delta}\right)}$$

bulunur. Burada;

$$D_k = C4^k \sum_{m=1}^{\infty} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}\left(m^{\delta}\right)}$$

olsun. Literatürde $G:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{m=0}^{n} G\left(a+m\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b G(t)dt$$

durumunun sağlandığı bilinmektedir. O halde $a=0,\ b=n$ ve

$$G(t) = t^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}\left(t^{\delta}\right)}$$

için;

$$D_k = C4^k \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}\left(m^{\delta}\right)}$$
$$= C4^k \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} G(m)$$
$$= C4^k \int_0^n t^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}\left(t^{\delta}\right)} dt$$
$$\leq C4^k \int_0^{\infty} t^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}\left(t^{\delta}\right)} dt$$

olup,

$$y = \frac{\varepsilon}{4} t^{\delta}$$

dönüşümü yapılarak;

$$t=\left(\frac{4y}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}} \quad \Rightarrow dt=\ \frac{1}{\delta}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}} y^{\frac{1}{\delta}-1}$$

olduğundan;

$$D_k \le C4^k \int_0^\infty \left(\frac{4y}{\varepsilon}\right)^{\frac{k}{\delta}} e^{-y}\,\frac{1}{\delta}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}} y^{\frac{1}{\delta}-1}dy$$

$$\le C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}\int_0^\infty y^{\frac{k+1}{\delta}-1} e^{-y}dy$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte,

$$a=\frac{k+1}{\delta}-1$$

için $a>1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla;

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty y^{a-1}.e^{-y}.dy$$

Gamma fonksiyonu olmak üzere $\Gamma(a+1)=a!$ olduğundan;

$$D_k \le C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}\Gamma(a+1)$$

$$\le C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}a!$$

$$\le C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}a^a$$

$$\le C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}\left(a+1\right)^a$$

$$\le C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}\left(\frac{k+1}{\delta}\right)^{\frac{k+1}{\delta}-1}$$

$$\le C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{-1}\left[\frac{1}{\delta}(k+1)\right]^{\frac{k+1}{\delta}}$$

olur. Burada $\frac{1}{2} \leq \delta < 1 \Rightarrow 2 \geq \frac{1}{\delta}$ için;

$$D_k \leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} 2^{\frac{1}{\delta}(k+1)} (k+1)^{-1} (k+1)^{\frac{k+1}{\delta}}$$
$$\leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{-1} 2^{2(k+1)} (k+1)^{\frac{k}{\delta}} (k+1)^{\frac{1}{\delta}}$$
$$\leq C4^{2k+1} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{\frac{1}{\delta}-1} (k+1)^{\frac{k}{\delta}}$$

olup literatürdeki

$$(1+k)^{\frac{1}{\delta}-1} < e^{\frac{k}{\delta}}$$

eşitsizliği kullanılarak;

$$D_k \leq C4^{2k+1} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}} (k+1)^{\frac{k}{\delta}}$$

yazılabilir. Yine literatürdeki

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e$$

eşitsizliğinden

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{\delta}} < e^{\frac{1}{\delta}}$$

olup

$$\left(k+1\right)^{\frac{k}{\delta}} < k^{\frac{k}{\delta}}.e^{\frac{1}{\delta}} \tag{3.15}$$

durumu elde edilir. Ayrıca

$$k^k < k!e^k$$

olduğundan

$$k^{\frac{k}{\delta}} < (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}}$$

olup (3.15)'den

$$(k+1)^{\frac{k}{\delta}} < (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k+1}{\delta}}$$

bulunur. O halde son eşitsizlik;

$$\begin{aligned}
D_k &\leq C4^{2k+1}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}}(k+1)^{\frac{k}{\delta}} \\
&\leq C4^{2k+1}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}}(k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k+1}{\delta}} \\
&= C4^{2k+1}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{2k+1}{\delta}} k!(k!)^{\frac{1}{\delta}-1} \\
&= 4Ce^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left[16e^{\frac{2}{\delta}}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]^k k!(k!)^{\frac{1}{\delta}-1} \\
&= Dd^k k!(k!)^{\frac{1}{\delta}-1} \\
&\leq Dd^k k!k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}
\end{aligned}$$

olup $k \geq 1$ için,

$$k!k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \geq 1$$

durumu da göz önünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned}
\left|F^{(k)}(z)\right| &\leq C4^k + C4^k \sum_{m=1}^{\infty} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}\left(m^{\delta}\right)} \\
&\leq C4^k + Dd^k k!k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \\
&\leq Dd^k k!k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $D > 0$ ve $d > 0$ ifadeleri C, ε, δ ifadelerine bağlıdır.

Teorem 2.5 deki η_k ifadesi için;

$$\eta_k = Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}$$

alınacaktır.

Teorem 3.4: (3.14) sağlandığı taktirde $M_4 = \varnothing$ dir (Bairamov and Koprubasi, 2010).

İspat: F fonksiyonu özdeş olarak sıfır değildir. Dolayısıyla Pavlov teoremi kullanılırsa; $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için;

$$\begin{aligned} t(s) &= \inf_k \frac{\eta_k s^k}{k!} \\ &= \inf_k \frac{Dk! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^k}{k!} \\ &= D \inf_k \left[k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^k \right] \end{aligned}$$

olmak üzere, Pavlov teoremindeki aralık ω>0 için $[0, \omega)$ olarak alınırsa;

$$\int_0^{\omega} \ln t(s) d\mu\left(M_{4,s}\right) > -\infty$$

bulunur. Burada *t(s)* fonksiyonuna paralel olarak $x \in [0, \infty)$ için;

$$h(x) = x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^x$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. *t(s)* fonksiyonunun açıkça yazılabilmesi için *h(x)* fonksiyonunun minimumunun bulunması yeterlidir. Bunun için *h(x)* in ekstremum noktaları bulunmalıdır.

$$\begin{aligned} h(x) &= x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^x \\ \ln h(x) &= x \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right) + \frac{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)dsx^{\frac{1}{\delta}-2}}{dsx^{\frac{1}{\delta}-1}}$$

$$= \frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)$$

bulunur. Yani ;

$$h'(x) = x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}\left(ds\right)^{x}\left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]$$

şeklindedir. O halde; $h'(x_0) = 0$ için;

$$\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx_0^{\frac{1}{\delta}-1}\right) = 0$$

$$\ln\left(dsx_0^{\frac{1}{\delta}-1}\right) = \frac{\delta - 1}{\delta}$$

$$x_0^{\frac{1-\delta}{\delta}} = e^{\frac{\delta-1}{\delta}}\left(ds\right)^{-1}$$

yazılır. Buradan *h(x)* in ekstremum noktası;

$$x_0 = e^{-1}\left(ds\right)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}$$

olarak bulunur. Ayrıca;

$$h''(x) = x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}\left(ds\right)^{x}\left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]^2 + x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}\left(ds\right)^{x}\frac{\left(\frac{1}{\delta}-1\right)dsx^{\frac{1}{\delta}-2}}{dsx^{\frac{1}{\delta}-1}}$$

$$= x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}\left(ds\right)^{x}\left\{\left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{\delta}-1\right)x^{-1}\right\}$$

olup $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ için $\frac{1}{\delta} > 1$ olduğundan;

$$h''(x_0) = e^{\left(\frac{1}{\delta}-1\right)e^{-1}\left(ds\right)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}}\left[\left(\frac{1}{\delta}-1\right)e\left(ds\right)^{\frac{\delta}{1-\delta}}\right]$$

$$> 0$$

elde edilir. Yani x_0, *h(x)* fonksiyonunun minimum noktasıdır. O halde;

$$\min_{x\in[0,\infty)} h(x) = h(x_0)$$

$$= \left[e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}} \right]^{\frac{1-\delta}{\delta} e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} (ds)^{e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}}$$

$$= \exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} d^{\frac{-\delta}{1-\delta}} s^{\frac{-\delta}{1-\delta}} \right) (ds)^{-e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} (ds)^{e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}}$$

$$= \exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} d^{-\frac{\delta}{1-\delta}} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} \right)$$

bulunur. Dolayısıyla;

$$t(s) = D\exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} d^{-\frac{\delta}{1-\delta}} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} \right)$$

olur. O halde;

$$\int_0^{\omega} \ln t(s) d\mu\left(M_{4,s}\right) > -\infty$$

ise;

$$\int_0^{\omega} \ln\left[D\exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} d^{-\frac{\delta}{1-\delta}} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} \right)\right] d\mu\left(M_{4,s}\right) > -\infty$$

olur. Ayrıca teorem 3.1'den $\mu\left(M_4\right) = 0$ olduğundan;

$$\infty > -\int_0^{\omega} \ln\left[D\exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} d^{-\frac{\delta}{1-\delta}} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} \right)\right] d\mu\left(M_{4,s}\right)$$

$$= -\ln D \int_0^{\omega} d\mu\left(M_{4,s}\right) + \int_0^{\omega} \frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} d^{-\frac{\delta}{1-\delta}} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} d\mu\left(M_{4,s}\right)$$

$$= -\ln D\left[\mu\left(M_{4,s}\right) - \mu\left(M_4\right)\right] + \frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} d^{-\frac{\delta}{1-\delta}} \int_0^{\omega} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} d\mu\left(M_{4,s}\right)$$

$$= -\mu\left(M_{4,s}\right)\ln D + \frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} d^{-\frac{\delta}{1-\delta}} \int_0^{\omega} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} d\mu\left(M_{4,s}\right)$$

elde edilir. Bu durum ise;

$$\int_0^{\omega} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} d\mu\left(M_{4,s}\right) < \infty \tag{3.16}$$

olmasını gerektirir. Fakat burada $\frac{\delta}{1-\delta} \geq 1$ olduğundan (3.16) koşulu ancak $M_4 = \varnothing$ olduğunda, yani $\mu\left(M_{4,s}\right) = 0$ olduğunda sağlanır. Gerçekten; eğer $M_4 \neq \varnothing$ olsaydı;

$$\mu\left(M_{4,s}\right) \geq 2s$$

ve buradan,

$$d\mu\left(M_{4,s}\right) \geq 2ds$$

olurdu. Dolayısıyla $1 - \frac{\delta}{1-\delta} < 0$ eşitsizliği göz önünde bulundurularak;

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_0^{\omega} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} d\mu\left(M_{4,s}\right) \\
&\geq 2\int_0^{\omega} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} ds \\
&= \left.\frac{2(1-\delta)s^{1-\frac{\delta}{1-\delta}}}{1-2\delta}\right|_0^{\omega} \\
&= \left.\frac{2(1-\delta)}{(1-2\delta)s^{\frac{\delta}{1-\delta}-1}}\right|_0^{\omega}
\end{aligned}$$

olur. Bu ise bir çelişkidir. Yani; $M_4 = \varnothing$ ’ dir.

Teorem 3.5: (3.14) koşulu altında, (1.1), (1.2) sınır değer problemi sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir (Bairamov and Koprubasi, 2010).

İspat: (3.6) ve (3.7) eşitlikleri gereğince teoremin ispatı için (3.14) koşulu altında F fonksiyonunun P bölgesinde sonlu sayıda sonlu katlı sıfırlara sahip olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Teorem 3.1 ($M_3 \subset M_4$) ve Teorem 3.4 ($M_4 = \varnothing$) gereğince $M_3 = \varnothing$ olur. O halde

i) $M_3 = \varnothing$ ise M_1'in herhangi bir limit noktasının olmadığı açıktır.

ii) Keyfi $z_n \in M_2$ alınsın.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

olacak şekilde bir $z_0 \neq z_n \in [0, 4\pi]$ noktası olduğu varsayılsın. $z_n \in M_2$ olduğundan $F(z_n) = 0$ dır. Ayrıca F fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}_+}$ da sürekli olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = F(z_0) \;\Rightarrow\; F(z_0) = 0$$

olup, buradan z_0 noktasının F fonksiyonunun bir sıfırı olduğu sonucu çıkar. $M_4 = \varnothing$ olduğundan z_0, F fonksiyonunun sonlu katlı sıfırıdır. Bu durumda $\mathbb{C}_+$ da analitik, $\overline{\mathbb{C}_+}$ da sürekli öyle bir h fonksiyonu vardır ki;

$$F(z_n) = (z_n - z_0)^k h(z_n) \quad , \quad h(z_0) \neq 0$$

sağlanır. O halde

$$0 = (z_n - z_0)^k h(z_n) \quad , \quad h(z_0) \neq 0$$

olup, buradan $z_n \neq z_0$ olduğundan $h(z_0) = 0$ sonucuna ulaşılır. Ayrıca h fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}_+}$ da sürekli olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} h(z_n) = h(z_0) \;\Rightarrow\; \mathrm{h}(z_0) = 0$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir.

(i) ve (ii)' den M_1 ve M_2 sınırlı kümelerinin herhangi bir limit noktaları yoktur. Dolayısıyla Bolzano – Weierstrass teoremi gereğince, M_1 ve M_2 kümeleri sonlu olmalıdır. Yani; F fonksiyonu P bölgesinde sonlu sayıda sıfıra sahiptir. Ayrıca

Teorem 3.4$\left(M_4 = \varnothing\right)$ gereğince de F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırları sonlu katlıdır. Dolayısıyla (3.14) koşulu altında (1.1), (1.2) sınır değer problemi sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir.

4. SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN DİSKRE DİRAC DENKLEMLERİNİN ESAS FONKSİYONLARI

(3.1) şartı altında $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ ve $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, ..., \lambda_\upsilon$ sırasıyla F in P_0 ve $[0, 4\pi]$ deki sıfırları ve yine sırasıyla $m_1, m_2, ..., m_k$ ve $m_{k+1}, m_{k+2}, ..., m_\upsilon$ de F in P_0 ve $[0, 4\pi]$ deki sıfırlarının katları olsun.

Şimdi $\ell := \begin{pmatrix} \tilde{\ell} \\ \hat{\ell} \end{pmatrix}$ yi tanımlayalım;

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\ell}_y\right)_n &= a_{n+1} y_{n+1}^{(2)} + b_n y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N} \\ \left(\hat{\ell}_y\right)_n &= a_{n-1} y_{n-1}^{(1)} + b_n y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklindedir.

Tanım 4.1 : $\lambda = \lambda_0$, ℓ nin özdeğeri olsun. Eğer;

$$y_n, \frac{d}{d\lambda y_n}, \frac{d^2}{d\lambda^2 y_n}, ..., \frac{d^\upsilon}{d\lambda^\upsilon y_n}$$

veya daha genel olarak,

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} y := \left\{ \frac{d^j}{d\lambda^j} y_n \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad , \quad \left(j = 0,1,...,\upsilon, \quad n \in \mathbb{N} \right) \tag{4.2}$$

vektörleri,

$$(\ell y)_n - \lambda_0 y_n = 0$$

$$\left(\ell \left(\frac{d^j}{d\lambda^j} y \right)_n \right) - \lambda_0 \frac{d^j}{d\lambda^j} y_n - \frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}} y_n = 0 \quad , \left(j = 0,1,...,\upsilon, \quad n \in \mathbb{N} \right) \tag{4.3}$$

denklemlerini gerçeklerse, bu durumda y_n vektörüne ℓ nin $\lambda = \lambda_0$ özdeğerine karşılık gelen *özvektörü* denir. $\left(\frac{d}{d\lambda} \right) y_n, \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} \right) y_n, ..., \left(\frac{d^\upsilon}{d\lambda^\upsilon} \right) y_n$ vektörlerine ise $\lambda = \lambda_0$

özdeğerine karşılık gelen *bağımlı vektörler* denir. $\lambda=\lambda_0$ özdeğerine karşılık gelen özvektör ve bağımlı vektörlere, $\lambda=\lambda_0$ özdeğerinin *esas vektörleri* denir. ℓ nin spektral tekilliklerinin esas vektörleri de benzer şekilde tanımlanır (Aygar vd., 2012).

Şimdi bir vektör tanımlayalım;

$n\in\mathbb{N}$, $j=0,1,...,m_i-1$ ve $i=1,2,\ \dots\ ,\ k,k+1,\ \dots\ ,\upsilon$ için;

$$\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n\left(\lambda_i\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{d\lambda^j}E_n^{(1)}\left(\lambda\right)\right\}_{\lambda=\lambda_i}\\ \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{d\lambda^j}E_n^{(2)}\left(\lambda\right)\right\}_{\lambda=\lambda_i}\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlansın. Burada;

$$\begin{aligned}&\lambda=2\sin\frac{z}{2}\Rightarrow\sin\frac{z}{2}=\frac{\lambda}{2}\\ &\quad\Rightarrow\arcsin\frac{\lambda}{2}=\frac{z}{2}\\ &\quad\Rightarrow z=2\arcsin\frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

olup;

$$E_n\left(\lambda\right)=\begin{pmatrix}E_n^{(1)}\left(\lambda\right)\\ E_n^{(2)}\left(\lambda\right)\end{pmatrix}:=f_n\left(2\arcsin\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}f_n^{(1)}\left(2\arcsin\frac{\lambda}{2}\right)\\ f_n^{(2)}\left(2\arcsin\frac{\lambda}{2}\right)\end{pmatrix} \tag{4.5}$$

eşitliği vardır. Öte yandan (1.1) sisteminin çözümü olan;

$$y\left(\lambda\right)=\left(y_n\left(\lambda\right)\right):=\begin{pmatrix}y_n^{(1)}(\lambda)\\ y_n^{(2)}(\lambda)\end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.6}$$

için;

$$\frac{d^j}{d\lambda^j}y(\lambda)=\left\{\left(\frac{d^j}{d\lambda^j}\right)y_n(\lambda)\right\}:=\begin{Bmatrix}\left(\frac{d^j}{d\lambda^j}\right)y_n^{(1)}(\lambda)\\ \left(\frac{d^j}{d\lambda^j}\right)y_n^{(2)}(\lambda)\end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

yazılabilir. Ayrıca (1.1) sisteminde art arda türevler alınırsa,

1.denklemi için;

- $a_{n+1}\frac{d}{d\lambda}y_{n+1}^{(2)}+b_n\frac{d}{d\lambda}y_n^{(2)}+p_n\frac{d}{d\lambda}y_n^{(1)}=y_n^{(1)}+\lambda\frac{d}{d\lambda}y_n^{(1)}$
- $a_{n+1}\frac{d^2}{d\lambda^2}y_{n+1}^{(2)}+b_n\frac{d^2}{d\lambda^2}y_n^{(2)}+p_n\frac{d^2}{d\lambda^2}y_n^{(1)}=2\frac{d}{d\lambda}y_n^{(1)}+\lambda\frac{d^2}{d\lambda^2}y_n^{(1)}$
- $a_{n+1}\frac{d^3}{d\lambda^3}y_{n+1}^{(2)}+b_n\frac{d^3}{d\lambda^3}y_n^{(2)}+p_n\frac{d^3}{d\lambda^3}y_n^{(1)}=3\frac{d^2}{d\lambda^2}y_n^{(1)}+\lambda\frac{d^3}{d\lambda^3}y_n^{(1)}$

.

.

.

- $a_{n+1}\frac{d^j}{d\lambda^j}y_{n+1}^{(2)}+b_n\frac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(2)}+p_n\frac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(1)}=j\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}y_n^{(1)}+\lambda\frac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(1)}$ (4.8)

elde edilir. 2.denklem için;

- $a_{n-1}\frac{d}{d\lambda}y_{n-1}^{(1)}+b_n\frac{d}{d\lambda}y_n^{(1)}+q_n\frac{d}{d\lambda}y_n^{(2)}=y_n^{(2)}+\lambda\frac{d}{d\lambda}y_n^{(2)}$
- $a_{n-1}\frac{d^2}{d\lambda^2}y_{n-1}^{(1)}+b_n\frac{d^2}{d\lambda^2}y_n^{(1)}+q_n\frac{d^2}{d\lambda^2}y_n^{(2)}=2\frac{d}{d\lambda}y_n^{(2)}+\lambda\frac{d^2}{d\lambda^2}y_n^{(2)}$
- $a_{n-1}\frac{d^3}{d\lambda^3}y_{n-1}^{(1)}+b_n\frac{d^3}{d\lambda^3}y_n^{(1)}+q_n\frac{d^3}{d\lambda^3}y_n^{(2)}=3\frac{d^2}{d\lambda^2}y_n^{(2)}+\lambda\frac{d^3}{d\lambda^3}y_n^{(2)}$

.

.

.

- $a_{n-1}\frac{d^j}{d\lambda^j}y_{n-1}^{(1)}+b_n\frac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(1)}+q_n\frac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(2)}=j\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}y_n^{(2)}+\lambda\frac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(2)}$ (4.9) bulunur. (4.8) ve (4.9) bir arada düşünülürse;

$$\begin{pmatrix} a_{n+1}\dfrac{d^j}{d\lambda^j}y_{n+1}^{(2)}+b_n\dfrac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(2)}+p_n\dfrac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(1)} \\ a_{n-1}\dfrac{d^j}{d\lambda^j}y_{n-1}^{(1)}+b_n\dfrac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(1)}+q_n\dfrac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda\dfrac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(1)}+j\dfrac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}y_n^{(1)} \\ \lambda\dfrac{d^j}{d\lambda^j}y_n^{(2)}+j\dfrac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}y_n^{(2)} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

yazılır. (4.4) ve (4.5) arasındaki bağlantıdan; $f_n(z)$, (1.1) sisteminin bir çözümü ise, $\dfrac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i)$ de (1.1) sisteminin bir çözümüdür. O halde $\dfrac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i)$, (1.1) sisteminin j.türevinde yerine yazılırsa;

1.denklem için;

$$\begin{aligned} &j!a_{n+1}\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i)+j!b_n\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i)+j!p_n\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i) \\ &\qquad = j(j-1)!\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}v_n(\lambda_i)+j!\lambda\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i) \end{aligned} \tag{4.11}$$

bulunur. 2.denklem için ise;

$$\begin{aligned} &j!a_{n-1}\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i)+j!b_n\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i)+j!q_n\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i) \\ &\qquad = j(j-1)!\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}v_n(\lambda_i)+j!\lambda\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i) \end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitliği elde edilir. (4.11) ve (4.12) ve λ_0 ın özdeğer olması birlikte düşünülürse;

$n\in\mathbb{N}$, $j=1,2,...,m_i-1$ ve $i=1,2,\ \dots\ ,\upsilon$ için;

$$(\ell v(\lambda_i))_n-\lambda_0 v(\lambda_i)=0$$

$$\left(\ell\left(\frac{d^j}{d\lambda^j}v(\lambda_i)\right)_n\right)-\lambda_0\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i)-\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}v_n(\lambda_i)=0 \tag{4.13}$$

gerçeklenir. O halde;

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} v_n\left(\lambda_i\right), \quad j=0,1,2, \ \dots \ , m_i-1, \ \ i=1,2, \ \dots \ ,k$$

ve

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} v_n\left(\lambda_i\right), \quad j=0,1,2, \ \dots \ , m_i-1, \ \ i=k+1,k+2, \ \dots \ ,\upsilon$$

vektörleri sırasıyla ℓ nin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin esas vektörleridir.

Şimdi ileride kullanmak adına bir eşitlik ispat edilecektir.

Teorem 3.1: $\lambda_i = 2\sin\frac{z_i}{2}$, $z_i \in P = P_0 \cup \left[0, 4\pi\right]$, $i=1,2, \ \dots \ ,k$, $n\in\mathbb{N}$ ve C_t ve D_t , λ ya bağlı sabitler olmak üzere;

$$\textbf{a)} \left\{\frac{d^j}{d\lambda^j} E_n^{(1)}\left(\lambda\right)\right\}_{\lambda=\lambda_i} = \sum_{t=0}^{j} C_t \left\{\frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(1)}\left(z\right)\right\}_{z=z_i}$$

$$\textbf{b)} \left\{\frac{d^j}{d\lambda^j} E_n^{(2)}\left(\lambda\right)\right\}_{\lambda=\lambda_i} = \sum_{t=0}^{j} D_t \left\{\frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(2)}\left(z\right)\right\}_{z=z_i} \tag{4.14}$$

eşitlikleri vardır (Aygar vd., 2012).

İspat: İspat için tümevarım metodu kullanılacaktır.

$$\textbf{a)} \left\{\frac{d^j}{d\lambda^j} E_n^{(1)}\left(\lambda\right)\right\}_{\lambda=\lambda_i} = \sum_{t=0}^{j} C_t \left\{\frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(1)}\left(z\right)\right\}_{z=z_i}$$

i) $j=0$ için;

$$E_n^{(1)}\left(\lambda\right) = C_0 f_n^{(1)}\left(z\right)$$

olup, eşitliğin doğruluğu açıktır.

ii) $j=k$ için;

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} E_n^{(1)}\left(\lambda\right) = \sum_{t=0}^{k} C_t \left\{\frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(1)}\left(z\right)\right\}$$

olsun.

iii) $j=k+1$ için;

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}E_n^{(1)}(\lambda)=\sum_{t=0}^{k}C_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(1)}(z)\right\}$$
$$=\ C_0 f_n^{(1)}(z)+C_1\frac{d}{d\lambda}f_n^{(1)}(z)$$
$$+\ C_2\frac{d^2}{d\lambda^2}f_n^{(1)}(z)+\ldots+C_k\frac{d^k}{d\lambda^k}f_n^{(1)}(z)$$

olup her iki tarafın λ ya göre türevi alınırsa;

$$\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}E_n^{(1)}(\lambda)=\frac{dC_0}{d\lambda}f_n^{(1)}(z)+C_0\frac{d}{d\lambda}f_n^{(1)}(z)$$
$$+\frac{dC_1}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}f_n^{(1)}(z)+C_1\frac{d}{d\lambda}f_n^{(1)}(z)$$
$$+\frac{dC_2}{d\lambda}\frac{d^2}{d\lambda^2}f_n^{(1)}(z)+C_2\frac{d^3}{d\lambda^3}f_n^{(1)}(z)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$+\frac{dC_k}{d\lambda}\frac{d^k}{d\lambda^k}f_n^{(1)}(z)+C_k\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}f_n^{(1)}(z)$$
$$=\sum_{t=0}^{k+1}C_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(1)}(z)\right\}_{z=z_i}$$

elde edilir. (i), (ii) ve (iii) den teoremin ilk kısmı için ispat tamamlanır.

b) $$\left\{\frac{d^j}{d\lambda^j}E_n^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_i}=\sum_{t=0}^{j}D_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(2)}(z)\right\}_{z=z_i}$$

i) $j=0$ için;

$$E_n^{(2)}(\lambda)=D_0 f_n^{(2)}(z)$$

olup, eşitliğin doğruluğu açıktır.

ii) $j=k$ için;

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}E_n^{(2)}(\lambda)=\sum_{t=0}^{k}D_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(2)}(z)\right\}$$

olsun.

iii) $j=k+1$ için;

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{d\lambda^k}E_n^{(2)}(\lambda)&=\sum_{t=0}^{k}D_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(2)}(z)\right\}\\&=D_0 f_n^{(2)}(z)+D_1\frac{d}{d\lambda}f_n^{(2)}(z)\\&+\mathrm{D}_2\frac{d^2}{d\lambda^2}f_n^{(2)}(z)+\ldots+D_k\frac{d^k}{d\lambda^k}f_n^{(2)}(z)\end{aligned}$$

olup her iki tarafın λ ya göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}E_n^{(2)}(\lambda)&=\frac{dD_0}{d\lambda}f_n^{(2)}(z)+D_0\frac{d}{d\lambda}f_n^{(2)}(z)\\&+\frac{dD_1}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}f_n^{(2)}(z)+D_1\frac{d}{d\lambda}f_n^{(2)}(z)\\&+\frac{dD_2}{d\lambda}\frac{d^2}{d\lambda^2}f_n^{(2)}(z)+D_2\frac{d^3}{d\lambda^3}f_n^{(2)}(z)\\&.\\&.\\&.\\&+\frac{dD_k}{d\lambda}\frac{d^k}{d\lambda^k}f_n^{(2)}(z)+D_k\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}f_n^{(2)}(z)\\&=\sum_{t=0}^{k+1}D_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(2)}(z)\right\}_{z=z_i}\end{aligned}$$

elde edilir. (i), (ii) ve (iii) den teoremin ikinci kısmı için de ispat tamamlanır.

Teorem 3.2:

$$\begin{aligned}&\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i)\in\ell_2(\mathbb{N},\mathbb{C}^2),\quad j=0,1,2,\ldots,m_i-1\ ,\ i=1,2,\ldots,k\\&\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i)\notin\ell_2(\mathbb{N},\mathbb{C}^2),\quad j=0,1,2,\ldots,m_i-1\ ,\ i=k+1,k+2,\ldots,\upsilon\end{aligned}\tag{4.15}$$

dir (Aygar vd., 2012).

İspat: (4.14) eşitliklerinin sağ tarafları için (3.2)'den;

$$\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(1)}(z)\right\}_{z=z_i} = \alpha_n^{11} i^t \left(n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z_i}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{11}\left(A_{nm}^{11} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} - A_{nm}^{12} i^{t+1} (m+n)^t e^{i(m+n)z_i}\right) \quad (4.16)$$

$$\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(2)}(z)\right\}_{z=z_i} = \alpha_n^{21} i^t \left(n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z_i} - \alpha_n^{22} i^{t+1} (n)^t e^{inz_i}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{21}\left\{ A_{nm}^{11} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} - A_{nm}^{12} i^{t+1} (m+n)^t e^{i(m+n)z_i}\right\}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{22}\left\{ A_{nm}^{21} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} - A_{nm}^{22} i^{t+1} (m+n)^t e^{i(m+n)z_i}\right\} \quad (4.17)$$

elde edilir. ℓ nin özdeğerlerine karşılık gelen;

$j=0,1,2,...,m_i-1$, $i=1,2,...,k$

$$\left(\frac{d^j}{d\lambda^j}\right) v_n(\lambda_i) = \left\{\left(\frac{d^j}{d\lambda^j}\right) v_n(\lambda_i)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

esas vektörleri için;

$$\begin{aligned} \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{d\lambda^j} E_n^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_i} &= \frac{1}{j!}\sum_{t=0}^{j} C_t \left\{\frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(1)}(z_i)\right\} \\ \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{d\lambda^j} E_n^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_i} &= \frac{1}{j!}\sum_{t=0}^{j} D_t \left\{\frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(2)}(z_i)\right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

bulunur. $\operatorname{Im}\lambda_i > 0$ olduğundan (4.18)'den, $i=1,2,...,k$ için;

$$\left\|\frac{d^j}{d\lambda^j} v_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{d\lambda^j} E_n^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_i}\right|^2 + \left|\frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{d\lambda^j} E_n^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_i}\right|^2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{j!}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\sum_{t=0}^{j} C_t \left\{\frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(1)}(z_i)\right\}\right|^2 + \left|\sum_{t=0}^{j} D_t \left\{\frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(2)}(z_i)\right\}\right|^2\right)$$

$$\leq\left(\frac{1}{j!}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\sum_{t=0}^{j}\left|C_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(1)}(z_i)\right\}\right|^2\right)+\left(\sum_{t=0}^{j}\left|D_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(2)}(z_i)\right\}\right|^2\right)\right\}$$

$$\leq\left(\frac{1}{j!}\right)^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{j}\max\{C_t,D_t\}\left(\left|\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(1)}(z_i)\right\}\right|+\left|\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(2)}(z_i)\right\}\right|\right)\right)^2 \tag{4.19}$$

yazılır ve buradan;

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n\right\|^2\leq\left(\frac{1}{j!}\right)^2&\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{t=0}^{j}\max\{|C_t|,|D_t|\}\right.\right.\\
&+\left\{\left(|\alpha_n^{11}|+|\alpha_n^{21}|\right)\left(\left|n+\frac{1}{2}\right|e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im}z_i}+|\alpha_n^{22}||n|^t e^{-n\operatorname{Im}z_i}\right)\right\}\\
&+\sum_{t=0}^{j}\max\{|C_t|,|D_t|\}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left(|\alpha_n^{11}|+|\alpha_n^{21}|\right)\left(|A_{nm}^{11}|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t e^{-\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im}z_i}\right.\right.\\
&\left.\left.+|A_{nm}^{12}||m+n|^t e^{-(m+n)\operatorname{Im}z_i}\right)\right\}\\
&+\sum_{t=0}^{j}|D_t|\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|\alpha_n^{22}|\left(|A_{nm}^{21}|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t e^{-\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im}z_i}\right.\right.\\
&\left.\left.\left.\left.+|A_{nm}^{22}||m+n|^t e^{-(m+n)\operatorname{Im}z_i}\right)\right\}\right]\right\}^2\end{aligned} \tag{4.20}$$

bulunur. Şimdi (4.20)'nin ilk ifadesi dikkate alınırsa;

$$\left(\frac{1}{j!}\right)^2\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{j}\max\{|C_t|,|D_t|\}\left\{\begin{array}{r}\left(|\alpha_n^{11}|+|\alpha_n^{21}|\right)\left(\left|n+\frac{1}{2}\right|e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im}z_i}\right.\\ \left.+|\alpha_n^{22}||n|^t e^{-n\operatorname{Im}z_i}\right)\end{array}\right\}\right\}^2$$

$$\begin{aligned}&\leq\frac{A}{(j!)^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(n+\frac{1}{2}\right)+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(n+\frac{1}{2}\right)^j\right]e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im}z_i}\right.\\
&\qquad\left.+\left(1+n+n^2+\ldots+n^j\right)e^{-n\operatorname{Im}z_i}\right\}^2\\
&\leq\frac{A(j+1)^2}{(j!)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^j e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im}z_i}+n^j e^{-n\operatorname{Im}z_i}\right]<\infty\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada;

$$A=\max\{|C_t|,|D_t|\}\max\left\{\left(|\alpha_n^{11}|+|\alpha_n^{21}|\right),|\alpha_n^{22}|\right\} \tag{4.22}$$

dir. Şimdi yeni bir fonksiyon tanımlayalım;

$$g_n(z)=\sum_{t=0}^{j}\max\left\{|C_t|,|D_t|\right\}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left(|\alpha_n^{11}|+|\alpha_n^{21}|\right)\left(|A_{nm}^{11}|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t e^{-\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im} z_i}\right.\right.$$

$$\left.\left.+|A_{nm}^{12}|\,|m+n|^t e^{-(m+n)\operatorname{Im} z_i}\right)\right\}$$

$$+\sum_{t=0}^{j}|D_t|\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|\alpha_n^{22}|\left(|A_{nm}^{21}|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t e^{-\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im} z_i}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+|A_{nm}^{22}|\,|m+n|^t e^{-(m+n)\operatorname{Im} z_i}\right)\right\}\right\}^2 \tag{4.23}$$

olsun. Böylece (4.20)'nin ikinci ve üçüncü terimi için;

$$\left(\frac{1}{j!}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{t=0}^{j}\max\left\{|C_t|,|D_t|\right\}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left(|\alpha_n^{11}|+|\alpha_n^{21}|\right)\left(|A_{nm}^{11}|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t e^{-\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im} z_i}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+|A_{nm}^{12}|\,|m+n|^t e^{-(m+n)\operatorname{Im} z_i}\right)\right\}$$

$$+\sum_{t=0}^{j}|D_t|\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|\alpha_n^{22}|\left(|A_{nm}^{21}|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t e^{-\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im} z_i}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+|A_{nm}^{22}|\,|m+n|^t e^{-(m+n)\operatorname{Im} z_i}\right)\right\}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{j!}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}g_n(z) \tag{4.24}$$

elde edilir. A_{nm}^{ij} ve α_n^{ij} nin $i,j=0,1$ için sınırlılığı kullanılırsa;

$$g_n(z)\le\max\left\{|C_t|,|D_t|\right\}M\sum_{t=0}^{j}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t e^{-\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im} z_i}+|m+n|^t e^{-(m+n)\operatorname{Im} z_i}\right\} \tag{4.25}$$

bulunur. Burada;

$$M=\max\left\{\left(|\alpha_n^{11}|+|\alpha_n^{21}|\right)|A_{nm}^{11}|,|\alpha_n^{22}|\,|A_{nm}^{21}|,\left(|\alpha_n^{11}|+|\alpha_n^{21}|\right)|A_{nm}^{12}|,|\alpha_n^{22}|\,|A_{nm}^{22}|\right\} \tag{4.26}$$

dir. $\max\left\{|C_t|,|D_t|\right\}M=N$ alınırsa;

$$g_n(z)\le N\sum_{t=0}^{j}e^{-n\operatorname{Im} z_i}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{-m\operatorname{Im} z_i}+(m+n)^t e^{-m\operatorname{Im} z_i}\right\}$$

$$=\mathrm{N}e^{-n\operatorname{Im} z_i}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}2e^{-m\operatorname{Im} z_i}+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m\operatorname{Im} z_i}\left(\left(m+n+\frac{1}{2}\right)+(m+n)\right)+\ldots\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\operatorname{Im} z_i}\left(\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^{j}+(m+n)^{j}\right)$$

$$\leq \mathrm{N} e^{-n\operatorname{Im} z_i}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{j} e^{-m\operatorname{Im} z_i}\left(\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^{t}+(m+n)^{t}\right)$$

$$\leq B e^{-n\operatorname{Im} z_i} \tag{4.27}$$

yazılabilir. Burada;

$$B = N\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{j} e^{-m\operatorname{Im} z_i}\left(\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^{t}+(m+n)^{t}\right) \tag{4.28}$$

dir. Sonuç olarak;

$$\left(\frac{1}{j!}\right)^{2}\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) \leq \left(\frac{1}{j!}\right)^{2}\sum_{n=1}^{\infty} B e^{-n\operatorname{Im} z_i} < \infty \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.21) ve (4.29)'dan;

$j = 0,1,2,\ldots,m_i - 1$ ve $i = 1,2,\ldots,k$ için;

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} v_n(\lambda_i) \in \ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right)$$

yazılır.

Şimdi teoremin ikinci kısmı ele alınacak olursa;

$j = 0,1,2,\ldots,m_i - 1$ ve $i = k+1, k+2,\ldots,\upsilon$ için $\operatorname{Im}\lambda_i = 0$ dır. (4,4) ve (4.14) den;

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} v_n(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{j!}\left\{\dfrac{d^j}{d\lambda^j} E_n^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_i} \\ \dfrac{1}{j!}\left\{\dfrac{d^j}{d\lambda^j} E_n^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{j!}\displaystyle\sum_{t=0}^{j} C_t\left\{\dfrac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(1)}(z)\right\}_{z=z_i} \\ \dfrac{1}{j!}\displaystyle\sum_{t=0}^{j} D_t\left\{\dfrac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(2)}(z)\right\}_{z=z_i} \end{pmatrix}$$

olup $\dfrac{d^j}{d\lambda^j} v_n(\lambda_i)$ nin $\ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right)$ de olup olmadığını incelemek için, iki bileşeninde ayrı ayrı $\ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right)$ de olup olmadığını incelemek gerekir. Şimdi ilk bileşenden başlanırsa;

$$\sum_{t=0}^{j} C_t \left\{ \frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(1)}(z_i) \right\} = \sum_{t=0}^{j} C_t \left\{ \alpha_n^{11} i^t \left(n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z_i} \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{11} \left(A_{nm}^{11} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} - A_{nm}^{12} i^{t+1} (m+n)^t e^{i(m+n)z_i} \right) \right\}$$

$$= \sum_{t=0}^{j} C_t \alpha_n^{11} i^t \left(n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z_i} + \sum_{t=0}^{j} C_t \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{11} \begin{pmatrix} A_{nm}^{11} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} \\ - A_{nm}^{12} i^{t+1} (m+n)^t e^{i(m+n)z_i} \end{pmatrix}$$

olur. Burada her iki terim ayrı ayrı ele alınacaktır.

$$A_1 = \sum_{t=0}^{j} C_t \alpha_n^{11} i^t \left(n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z_i}$$

olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{t=0}^{j} C_t \alpha_n^{11} i^t \left(n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z_i} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{j} |C_t| \left|\alpha_n^{11}\right| \left|n+\frac{1}{2}\right|^t \right)^2$$

$$= \mathrm{C}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{j} \left|n+\frac{1}{2}\right|^t \right)^2$$

$$= \infty$$

olup,

$$A_1 \notin \ell_2\left(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2\right) \tag{4.30}$$

elde edilir. Şimdi;

$$A_2 = \sum_{t=0}^{j} C_t \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{11} \left(A_{nm}^{11} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} - A_{nm}^{12} i^{t+1} (m+n)^t e^{i(m+n)z_i} \right)$$

olsun.

$$|A_2| = \left| \sum_{t=0}^{j} C_t \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{11} \left(A_{nm}^{11} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} - A_{nm}^{12} i^{t+1} (m+n)^t e^{i(m+n)z_i} \right) \right|$$

$$\le \sum_{t=0}^{j} C_t \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{11} \left| \left(A_{nm}^{11} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} + A_{nm}^{12} i^{t+1} (m+n)^t e^{i(m+n)z_i} \right) \right|$$

$$\le C_1 \sum_{t=0}^{j} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left| A_{nm}^{11} \right| \left| m+n+\frac{1}{2} \right|^{t} + \left| A_{nm}^{12} \right| \left| m+n \right|^{t} \right)$$

$$\le C_1 (j+1) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left| A_{nm}^{11} \right| + \left| A_{nm}^{12} \right| \right) \left| m+n+\frac{1}{2} \right|^{j} \qquad (4.31)$$

bulunur. Ayrıca (3.4)'den;

$$\left| A_{nm}^{ij} \right| \le C \sum_{j=n+\left[\!\left[\frac{m}{2} \right]\!\right]}^{\infty} \left(\left|1-a_j\right| + \left|1+b_j\right| + \left|p_j\right| + \left|q_j\right| \right)$$

$$= C \sum_{j=n+\left[\!\left[\frac{m}{2} \right]\!\right]}^{\infty} \exp\left(-\varepsilon j^{\delta}\right) \exp\left(\varepsilon j^{\delta}\right) \left(\left|1-a_j\right| + \left|1+b_j\right| + \left|p_j\right| + \left|q_j\right| \right)$$

$$\le C.\exp\left[-\varepsilon \left(n + \left[\!\left[\frac{m}{2} \right]\!\right] \right)^{\delta} \right] \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(\varepsilon j^{\delta}\right) \left(\left|1-a_j\right| + \left|1+b_j\right| + \left|p_j\right| + \left|q_j\right| \right)$$

$$\le M \exp\left[-\varepsilon \left(n + \left[\!\left[\frac{m}{2} \right]\!\right] \right)^{\delta} \right] \qquad (4.32)$$

elde edilir. (4.31) ve (4.32) beraber düşünülürse;

$$\left| A_2 \right| \le C_1 (j+1) M \sum_{m=1}^{\infty} \left| m+n+\frac{1}{2} \right|^{j} \exp\left[-\varepsilon \left(n + \left[\!\left[\frac{m}{2} \right]\!\right] \right)^{\delta} \right]$$

$$\le C_2 (j+1) \sum_{m=1}^{\infty} \left| m+n+\frac{1}{2} \right|^{j} \exp\left[-\frac{\varepsilon}{2} \left(n + \left[\!\left[\frac{m}{2} \right]\!\right] \right)^{\delta} \right] \exp\left[-\frac{\varepsilon}{2} \left(n + \left[\!\left[\frac{m}{2} \right]\!\right] \right)^{\delta} \right]$$

$$\le C_2 (j+1) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} n^{\delta} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left| m+n+\frac{1}{2} \right|^{j} \exp\left[-\frac{\varepsilon}{2} \left(n + \left[\!\left[\frac{m}{2} \right]\!\right] \right)^{\delta} \right]$$

$$\le C_3 (j+1) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} n^{\delta} \right)$$

bulunur. Buradan;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| A_2 \right|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} C_3^2 (j+1)^2 \exp(-\varepsilon n^{\delta})$$

$$\le C_3^2 (j+1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\varepsilon n^{\delta})$$

$$< \infty$$

olup;

$$A_2 \in \ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right) \tag{4.33}$$

elde edilir. (4.30) ve (4.33)'den;

$$\sum_{t=0}^{j} C_t \left\{ \frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(1)}(z_i) \right\} \notin \ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right)$$

ve buradan da;

$$\frac{1}{j!}\left\{ \frac{d^t}{d\lambda^t} E_n^{(1)}(\lambda) \right\} \notin \ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right) \tag{4.34}$$

elde edilir. Şimdi ikinci bileşen ele alınırsa;

$$\sum_{t=0}^{j} D_t \left\{ \frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(2)}(z_i) \right\} = \sum_{t=0}^{j} D_t \left\{ \left[\alpha_n^{21} i^t \left(n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z_i} - \alpha_n^{22} i^{t+1} (n)^t e^{inz_i} \right] \right.$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{21} \left[A_{nm}^{11} \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} - A_{nm}^{12} i^{t+1} (m+n)^t e^{i(m+n)z_i} \right]$$
$$\left. +\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{22} \left[A_{nm}^{21} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} - A_{nm}^{22} i^{t+1} (m+n)^t e^{i(m+n)z_i} \right] \right\}$$

olur. Burada her üç terimde ayrı ayrı incelenecektir. Şimdi birinci terim için;

$$B_1 = \sum_{t=0}^{j} D_t \left[\alpha_n^{21} i^t \left(n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z_i} - \alpha_n^{22} i^{t+1} (n)^t e^{inz_i} \right]$$

olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{t=0}^{j} D_t \left[\alpha_n^{21} i^t \left(n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z_i} - \alpha_n^{22} i^{t+1} (n)^t e^{inz_i} \right] \right|^2$$
$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{j} |D_t| \left[\left|\alpha_n^{21}\right| \left|n+\frac{1}{2}\right|^t - \left|\alpha_n^{22}\right| |n|^t \right] \right)^2$$
$$\geq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{j} \left|\alpha_n^{21}\right| \left|n+\frac{1}{2}\right|^t - \left|\alpha_n^{22}\right| \left|n+\frac{1}{2}\right|^t \right)^2$$

$$\geq C_1\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{t=0}^{j}\left(\left|\alpha_n^{21}\right|-\left|\alpha_n^{22}\right|\right)\left|n+\frac{1}{2}\right|^t\right)^2$$

$$\geq C_2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{t=0}^{j}\left|n+\frac{1}{2}\right|^t\right)^2=\infty$$

olup,

$$B_1\notin \ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right) \tag{4.35}$$

elde edilir. Şimdi ikinci terim için;

$$B_2=\sum_{t=0}^{j}D_t\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_n^{21}\left[A_{nm}^{11}i^t\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i}-A_{nm}^{12}i^{t+1}\left(m+n\right)^t e^{i(m+n)z_i}\right]\right\}$$

olsun.

$$\left|B_2\right|=\left|\sum_{t=0}^{j}D_t\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_n^{21}\left[A_{nm}^{11}i^t\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i}-A_{nm}^{12}i^{t+1}\left(m+n\right)^t e^{i(m+n)z_i}\right]\right|$$

$$\leq\sum_{t=0}^{j}D_t\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_n^{21}\left|\left[A_{nm}^{11}i^t\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i}+A_{nm}^{12}i^{t+1}\left(m+n\right)^t e^{i(m+n)z_i}\right]\right|$$

$$\leq C_1\sum_{t=0}^{j}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{11}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t+\left|A_{nm}^{12}\right|\left|m+n\right|^t\right)$$

$$\leq C_1(j+1)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{11}\right|+\left|A_{nm}^{12}\right|\right)\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^j \tag{4.36}$$

bulunur. (4.32) ve (4.36) birlikte düşünülürse;

$$\left|B_2\right|\leq C_1(j+1)M\sum_{m=1}^{\infty}\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^j\exp\left(-\varepsilon\left(n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]\right)^\delta\right)$$

$$\leq C_2(j+1)\sum_{m=1}^{\infty}\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^j\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]\right)^\delta\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]\right)^\delta\right)$$

$$\leq C_2(j+1)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}n^\delta\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^j\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]\right)^\delta\right)$$

$$\leq C_3(j+1)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}n^\delta\right)$$

bulunur. Buradan;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|B_2\right|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} C_3^2 (j+1)^2 \exp\left(-\varepsilon n^{\delta}\right)$$
$$\le C_3^2 (j+1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\varepsilon n^{\delta}\right)$$
$$< \infty$$

olup,

$$B_2 \in \ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right) \tag{4.37}$$

elde edilir. Şimdi üçüncü terim dikkate alınırsa;

$$B_3 = \sum_{t=0}^{j} D_t \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{22} \left[A_{nm}^{21} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} - A_{nm}^{22} i^{t+1} \left(m+n\right)^t e^{i(m+n)z_i} \right] \right\}$$

olsun.

$$\left|B_3\right| = \left| \sum_{t=0}^{j} D_t \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{22} \left[A_{nm}^{21} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} - A_{nm}^{22} i^{t+1} \left(m+n\right)^t e^{i(m+n)z_i} \right] \right|$$
$$\le \sum_{t=0}^{j} D_t \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{22} \left\| \left[A_{nm}^{21} i^t \left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t e^{i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)z_i} + A_{nm}^{22} i^{t+1} \left(m+n\right)^t e^{i(m+n)z_i} \right] \right\|$$
$$\le C_1 \sum_{t=0}^{j} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left|A_{nm}^{21}\right| \left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t + \left|A_{nm}^{22}\right| \left|m+n\right|^t \right)$$
$$\le C_1 (j+1) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left|A_{nm}^{21}\right| + \left|A_{nm}^{22}\right| \right) \left|m+n+\frac{1}{2}\right|^j \tag{4.38}$$

bulunur. (4.32) ve (4.38) birlikte düşünülürse;

$$\left|B_3\right| \le C_1 (j+1) M \sum_{m=1}^{\infty} \left|m+n+\frac{1}{2}\right|^j \exp\left(-\varepsilon\left(n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]\right)^{\delta}\right)$$
$$\le C_2 (j+1) \sum_{m=1}^{\infty} \left|m+n+\frac{1}{2}\right|^j \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]\right)^{\delta}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]\right)^{\delta}\right)$$
$$\le C_2 (j+1) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} n^{\delta}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left|m+n+\frac{1}{2}\right|^j \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]\right)^{\delta}\right)$$
$$\le C_3 (j+1) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} n^{\delta}\right)$$

bulunur. Buradan;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|B_3\right|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} C_3^2 (j+1)^2 \exp\left(-\varepsilon n^{\delta}\right)$$
$$\le C_3^2 (j+1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\varepsilon n^{\delta}\right)$$
$$<\infty$$

olup,

$$B_3 \in \ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right) \tag{4.39}$$

elde edilir. (4.35), (4.37) ve (4.39)'dan;

$$\sum_{t=0}^{j} D_t \left\{ \frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(2)}(z_i) \right\} \notin \ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right)$$

ve buradan da;

$$\frac{1}{j!}\left\{ \frac{d^j}{d\lambda^j} E_n^{(2)}(\lambda) \right\} \notin \ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right) \tag{4.40}$$

elde edilir. (4.34) ve (4.40)'dan

$j = 0,1,2,\dots,m_i - 1$ ve $i = k+1, k+2,\dots,\upsilon$ için;

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} v_n(\lambda_i) \notin \ell_2\left(\mathbb{N},\mathbb{C}^2\right)$$

yazılır.

Şimdi $j = 0,1,2,\dots$ için Hilbert uzayı;

$$H_{-j}\left(\mathbb{N}\right) = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(1+|n|\right)^{-2j} \left(\left|y_n^{(1)}\right|^2 + \left|y_n^{(2)}\right|^2 \right) < \infty \right\} \tag{4.41}$$

şeklinde tanımlansın. Burada;

$$\|y\|_{-j}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(1+|n|\right)^{-2j} \left(\left|y_n^{(1)}\right|^2 + \left|y_n^{(2)}\right|^2 \right) \tag{4.42}$$

dir.

Teorem 3.3: $j=0,1,2,\dots,m_i-1$ ve $i=k+1,k+2,\dots,\upsilon$ için;

$$\frac{d^j}{d\lambda^j}v_n(\lambda_i)\in H_{-j+1}\left(\mathbb{N}\right)$$

dir (Aygar vd., 2012).

İspat: (4.4) ve (4.14) birlikte düşünülürse;

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)}\left\{\left|\frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{d\lambda^j}E_n^{(1)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_i}\right|^2+\left|\frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{d\lambda^j}E_n^{(2)}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_i}\right|^2\right\}$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)}}{(j!)^2}\left\{\left|\sum_{t=0}^{j}C_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(1)}(z)\right\}_{z=z_i}\right|^2+\left|\sum_{t=0}^{j}D_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(2)}(z)\right\}_{z=z_i}\right|^2\right\}$$

$$\le\frac{1}{(j!)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)}\left\{\left(\sum_{t=0}^{j}\left|C_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(1)}(z_i)\right\}\right|\right)^2+\left(\sum_{t=0}^{j}\left|D_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(2)}(z_i)\right\}\right|\right)^2\right\}\quad(4.43)$$

elde edilir. Burada teoremin ispatı için her iki terimde ayrı ayrı incelenecektir. Şimdi ilk olarak birinci terim düşünülürse;

$j=0,1,2,\dots,m_i-1$ ve $i=k+1,k+2,\dots,\upsilon$ için $\operatorname{Im}z_i=0$ olup (4.43) ten;

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)}\frac{1}{(j!)^2}\left(\sum_{t=0}^{j}\left|C_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(1)}(z_i)\right\}\right|\right)^2$$

$$=\frac{1}{(j!)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{t=0}^{j}\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left(n+\frac{1}{2}\right)^t\left|\alpha_n^{11}\right|\left|C_t\right|\right.$$

$$\left.+\sum_{t=0}^{j}\left|\alpha_n^{11}\right|\left|C_t\right|\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left|A_{nm}^{11}\right|\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t+\left|A_{nm}^{12}\right|\left(m+n\right)^t\right]\right\}^2$$

$$=\frac{1}{(j!)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\sum_{t=0}^{j}\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left(n+\frac{1}{2}\right)^t\left|\alpha_n^{11}\right|\left|C_t\right|\right)^2\right.$$

$$+2\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)}\left|\alpha_n^{11}\right|^2\left[\sum_{t=0}^{j}\left(n+\frac{1}{2}\right)^t\left|C_t\right|\right]$$

$$\left[\sum_{t=0}^{j}\left|C_t\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left|A_{nm}^{11}\right|\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t+\left|A_{nm}^{12}\right|\left(m+n\right)^t\right]\right]$$

$$+\left(\sum_{t=0}^{j}|C_t|\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left|\alpha_n^{11}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left|A_{nm}^{11}\right|\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t+\left|A_{nm}^{12}\right|\left(m+n\right)^t\right]\right)^2\Bigg\} \tag{4.44}$$

elde edilir. Yine burada üç terimde ayrı ayrı ele alınacaktır. Şimdi ilk olarak (3.1), (3.4) ve (4.44)'den;

$$\left(\sum_{t=0}^{j}|C_t|\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left|\alpha_n^{11}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left|A_{nm}^{11}\right|\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t+\left|A_{nm}^{12}\right|\left(m+n\right)^t\right]\right)^2$$

$$\leq 4\left(\sum_{t=0}^{j}|C_t|\left|\alpha_n^{11}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t C\right.$$

$$\left. x\sum_{j=n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}\left(\left|1-a_j\right|+\left|1+b_j\right|+\left|p_j\right|+\left|q_j\right|\right)\exp\left(-\varepsilon j^{\delta}\right)\exp\left(\varepsilon j^{\delta}\right)\right)^2$$

$$\leq 4\left\{\sum_{t=0}^{j}\left|\alpha_n^{11}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t C\exp\left(-\varepsilon\left(\frac{m+n}{4}\right)^{\delta}\right)\right.$$

$$\left. x\sum_{j=n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}\exp\left(\varepsilon j^{\delta}\right)\left(\left|1-a_j\right|+\left|1+b_j\right|+\left|p_j\right|+\left|q_j\right|\right)\right)^2$$

$$\leq C_1\left\{\sum_{t=0}^{j}\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t\exp\left(-\varepsilon\left(\frac{m+n}{4}\right)^{\delta}\right)\right\}^2$$

$$\leq C_1\left\{\sum_{t=0}^{j}\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t\exp\left(-\varepsilon\left(\frac{m+n}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\}^2$$

$$\leq C_1\left\{\sum_{t=0}^{j}\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t\exp\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{4}\left(n^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right\}^2$$

$$\leq C_1\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)}\exp\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}n^{\frac{1}{2}}\right)\left(\sum_{t=0}^{j}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t\exp\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{4}m^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2$$

$$=G\exp\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}n^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)} \tag{4.45}$$

bulunur. Burada;

$$C_1=\left(2C\left|\alpha_n^{11}\right|\sum_{j=n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}^{\infty}\exp\left(\varepsilon j^{\delta}\right)\left(\left|1-a_j\right|+\left|1+b_j\right|+\left|p_j\right|+\left|q_j\right|\right)\right)^2$$

$$G = C_1 \left(\sum_{t=0}^{j} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^t \exp\left(-\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} m^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \tag{4.46}$$

dir. G ve C_1 in yakınsak olduğu açıktır. (4.45)'den devam edilirse;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{j} |C_t| (1+|n|)^{-(j+1)} |\alpha_n^{11}| \sum_{m=1}^{\infty} \left[|A_{nm}^{11}| \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^t + |A_{nm}^{12}| (m+n)^t \right] \right)^2$$

$$\leq G \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} n^{\frac{1}{2}} \right) (1+|n|)^{-2(j+1)} < \infty \tag{4.47}$$

elde edilir. Ayrıca (4.44) ve (4.45)'den;

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \left\{ \left[\sum_{t=0}^{j} |\alpha_n^{11}| |C_t| (1+|n|)^{-(j+1)} \left(n+\frac{1}{2} \right)^t \right] \right.$$

$$\left. \mathrm{x} \left[\sum_{t=0}^{j} |\alpha_n^{11}| |C_t| \sum_{m=1}^{\infty} (1+|n|)^{-(j+1)} \left(|A_{nm}^{11}| \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^t + |A_{nm}^{12}| (m+n)^t \right) \right] \right\}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{t=0}^{j} (1+|n|)^{-2(j+1)} \left(n+\frac{1}{2} \right)^t \exp\left(-\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} n^{\frac{1}{2}} \right) G^{\frac{1}{2}} \right] < \infty \tag{4.48}$$

ve yine (4.45)'in ilk terimi için;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{j} |1+|n||^{-(j+1)} \left(n+\frac{1}{2} \right)^t |\alpha_n^{11}| |C_t| \right)^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |1+|n||^{-2(j+1)} \left(\left[1+\left(n+\frac{1}{2} \right)+\ldots+\left(n+\frac{1}{2} \right)^j \right] |\alpha_n^{11}| |C_t| \right)^2$$

$$\leq (j+1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |1+n|^{-2(j+1)} \left(n+\frac{1}{2} \right)^{2j} |\alpha_n^{11}|^2 |C_t|^2$$

$$\leq (j+1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |1+n|^{-2(j+1)} (n+1)^{2j} |\alpha_n^{11}|^2 |C_t|^2$$

$$\leq (j+1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |1+n|^{-2} |\alpha_n^{11}|^2 |C_t|^2 < \infty \tag{4.49}$$

olup (4.47), (4.48) ve (4.49)'dan;

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (1+|n|)^{-2(j+1)} \frac{1}{(j!)^2} \left(\sum_{t=0}^{j} \left| C_t \left\{ \frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(1)}(z_i) \right\} \right| \right)^2 < \infty \tag{4.50}$$

bulunur. Şimdi (4.43)'ün ikinci terimi ele alınırsa;

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)}\frac{1}{(j!)^2}\left(\sum_{t=0}^{j}\left|D_t\left\{\frac{d^t}{d\lambda^t}f_n^{(2)}(z_i)\right\}\right|\right)^2$$

$$=\frac{1}{(j!)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{t=0}^{j}\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}|D_t|\left(\left|\alpha_n^{21}\right|\left|n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|\alpha_n^{22}\right||n|^t\right)\right.$$

$$+\sum_{t=0}^{j}|D_t|\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left[\left|\alpha_n^{21}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{11}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|A_{nm}^{12}\right||m+n|^t\right)\right.$$

$$\left.\left.+\left|\alpha_n^{22}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{21}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|A_{nm}^{22}\right||m+n|^t\right)\right]\right\}^2$$

$$=\frac{1}{(j!)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\sum_{t=0}^{j}\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}|D_t|\left[\left|\alpha_n^{21}\right|\left|n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|\alpha_n^{22}\right||n|^t\right]\right)^2\right.$$

$$+2\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)}\sum_{t=0}^{j}|D_t|\left(\left|\alpha_n^{21}\right|\left|n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|\alpha_n^{22}\right||n|^t\right)$$

$$\text{x}\sum_{t=0}^{j}|D_t|\left[\left|\alpha_n^{21}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{11}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|A_{nm}^{12}\right||m+n|^t\right)\right.$$

$$\left.+\left|\alpha_n^{22}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{21}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|A_{nm}^{22}\right||m+n|^t\right)\right]$$

$$+\left(\sum_{t=0}^{j}|D_t|\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left[\left|\alpha_n^{21}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{11}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|A_{nm}^{12}\right||m+n|^t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\alpha_n^{22}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{21}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|A_{nm}^{22}\right||m+n|^t\right)\right]\right)^2 \quad (4.51)$$

olup (4.51)’de ki üç terimde ayrı ayrı ele alınırsa, (3.1), (3.4) ve (4.51)’den;

$$\left(\sum_{t=0}^{j}|D_t|\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left[\left|\alpha_n^{21}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{11}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|A_{nm}^{12}\right||m+n|^t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\alpha_n^{22}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{21}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|A_{nm}^{22}\right||m+n|^t\right)\right]\right)^2$$

$$\leq\left(\sum_{t=0}^{j}|D_t|\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left[\left|\alpha_n^{21}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{11}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t+\left|A_{nm}^{12}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\alpha_n^{22}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{21}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t+\left|A_{nm}^{22}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t\right)\right]\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{t=0}^{j} \left| D_t \right| \left(1+|n|\right)^{-(j+1)} \left[\left|\alpha_n^{21}\right| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left|A_{nm}^{11}\right| + \left|A_{nm}^{12}\right| \right) \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{t} \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \left|\alpha_n^{22}\right| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left|A_{nm}^{21}\right| + \left|A_{nm}^{22}\right| \right) \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{t} \right] \right)^{2} \\
&\leq \left(\sum_{t=0}^{j} \left| D_t \right| \left(1+|n|\right)^{-(j+1)} \left[\max\left(\left|\alpha_n^{21}\right|, \left|\alpha_n^{22}\right| \right) \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. \mathrm{x} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left|A_{nm}^{11}\right| + \left|A_{nm}^{12}\right| + \left|A_{nm}^{21}\right| + \left|A_{nm}^{22}\right| \right) \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{t} \right] \right)^{2} \\
&\leq 16 \left(\sum_{t=0}^{j} \left| D_t \right| \left(1+|n|\right)^{-(j+1)} \left[\max\left(\left|\alpha_n^{21}\right|, \left|\alpha_n^{22}\right| \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{t} \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. \mathrm{x}\ \mathrm{C} \sum_{j=n+\left[\!\left[\frac{m}{2} \right]\!\right]} \left(\left|1-a_j\right| + \left|1+b_j\right| + \left|p_j\right| + \left|q_j\right| \right) \exp\left(-\varepsilon j^{\delta}\right) \exp\left(\varepsilon j^{\delta}\right) \right] \right)^{2} \\
&\leq 16 \left(\sum_{t=0}^{j} \left| D_t \right| \left(1+|n|\right)^{-(j+1)} \left[\max\left(\left|\alpha_n^{21}\right|, \left|\alpha_n^{22}\right| \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{t} C \exp\left(-\varepsilon \left(\frac{m+n}{4} \right)^{\delta} \right) \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. \mathrm{x}\ \mathrm{C} \sum_{j=n+\left[\!\left[\frac{m}{2} \right]\!\right]} \exp\left(\varepsilon j^{\delta}\right) \left(\left|1-a_j\right| + \left|1+b_j\right| + \left|p_j\right| + \left|q_j\right| \right) \right] \right)^{2} \\
&\leq C_{\Delta} \left(\sum_{t=0}^{j} \left(1+|n|\right)^{-(j+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{t} \exp\left(-\varepsilon \left(\frac{m+n}{4} \right)^{\delta} \right) \right)^{2} \\
&\leq C_{\Delta} \left(\sum_{t=0}^{j} \left(1+|n|\right)^{-(j+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{t} \exp\left(-\varepsilon \left(\frac{m+n}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right)^{2} \\
&\leq C_{\Delta} \left(\sum_{t=0}^{j} \left(1+|n|\right)^{-(j+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{t} \exp\left(-\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{4} \left(n^{\frac{1}{2}} + m^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right)^{2} \\
&= C_{\Delta} \left(1+|n|\right)^{-2(j+1)} \exp\left(-\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} n^{\frac{1}{2}} \right) \left(\sum_{t=0}^{j} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{t} \exp\left(-\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{4} m^{\frac{1}{2}} \right) \right)^{2} \\
&= H \exp\left(-\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} n^{\frac{1}{2}} \right) \left(1+|n|\right)^{-2(j+1)} \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada;

$$C_\Delta = \left(4C\left|D_t\right| \max\left(\left|\alpha_n^{21}\right|,\left|\alpha_n^{22}\right|\right) \sum_{j=n+\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]} \exp\left(\varepsilon j^{\delta}\right)\left(\left|1-a_j\right|+\left|1+b_j\right|+\left|p_j\right|+\left|q_j\right|\right) \right)^2$$

$$< \infty$$

$$H = C_\Delta \left(\sum_{t=0}^{j}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t \exp\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{4}m^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2 \tag{4.53}$$

olup;

$$\left(\sum_{t=0}^{j}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^t \exp\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{4}m^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+\left(m+n+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^j\right)\exp\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{4}m^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2$$

$$\leq \left(j+1\right)^2\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^j \exp\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{4}m^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2 < \infty \tag{4.54}$$

elde edilir. (4.54)'ten; $H<\infty$ bulunur. Devam edilirse (4.52)'den;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{t=0}^{j}\left|D_t\right|\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left[\left|\alpha_n^{21}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{11}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|A_{nm}^{12}\right|\left|m+n\right|^t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. +\left|\alpha_n^{22}\right|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}^{21}\right|\left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|A_{nm}^{22}\right|\left|m+n\right|^t\right)\right]\right)^2$$

$$\leq H\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}n^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)} < \infty \tag{4.55}$$

bulunur. Şimdi (4.51)'den diğer bir terim incelenirse;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{t=0}^{j}\left(1+|n|\right)^{-(j+1)}\left|D_t\right|\left[\left|\alpha_n^{21}\right|\left|n+\frac{1}{2}\right|^t-\left|\alpha_n^{22}\right|\left|n\right|^t\right]\right)^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)}\left|D_t\right|^2\left(\sum_{t=0}^{j}\left[\left|\alpha_n^{21}\right|\left|n+1\right|^t+\left|\alpha_n^{22}\right|\left|n+1\right|^t\right]\right)^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)}\left|D_t\right|^2\left(\sum_{t=0}^{j}\left(\left|\alpha_n^{21}\right|+\left|\alpha_n^{22}\right|\right)\left|n+1\right|^t\right)^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+|n|\right)^{-2(j+1)}\left|D_t\right|^2\left(\sum_{t=0}^{j}\left(\left|\alpha_n^{21}\right|+\left|\alpha_n^{22}\right|\right)\left(1+(n+1)+\ldots+(n+1)^j\right)\right)^2$$

$$\leq (j+1)^2 |D_t|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (1+|n|)^{-2(j+1)} (n+1)^{2j} \left(|\alpha_n^{21}|+|\alpha_n^{22}|\right)^2$$

$$\leq (j+1)^2 |D_t|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-2} \left(|\alpha_n^{21}|+|\alpha_n^{22}|\right)^2 < \infty \tag{4.56}$$

elde edilir. Şimdi (4.52) dikkate alınarak (4.51)'in kalan son terimi için;

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\sum_{t=0}^{j} (1+|n|)^{-(j+1)} |D_t| \left(|\alpha_n^{21}| \left|n+\frac{1}{2}\right|^t - |\alpha_n^{22}| |n|^t \right)\right)$$

$$\text{x} \sum_{t=0}^{j} (1+|n|)^{-(j+1)} |D_t| \left[|\alpha_n^{21}| \sum_{m=1}^{\infty} \left(|A_{nm}^{11}| \left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t - |A_{nm}^{12}| |m+n|^t \right) \right.$$

$$\left. + |\alpha_n^{22}| \sum_{m=1}^{\infty} \left(|A_{nm}^{21}| \left|m+n+\frac{1}{2}\right|^t - |A_{nm}^{22}| |m+n|^t \right) \right]$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} (1+|n|)^{-2(j+1)} \exp\left(-\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{4} n^{\frac{1}{2}}\right) H^{\frac{1}{2}} \sum_{t=0}^{j} \left(|\alpha_n^{21}| \left|n+\frac{1}{2}\right|^t - |\alpha_n^{22}| |n|^t \right) < \infty \tag{4.57}$$

elde edilir. (4.55), (4.56) ve (4.57)'den;

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (1+|n|)^{-2(j+1)} \frac{1}{(j!)^2} \left(\sum_{t=0}^{j} \left| D_t \left\{ \frac{d^t}{d\lambda^t} f_n^{(2)}(z_i) \right\} \right| \right)^2 < \infty \tag{4.58}$$

bulunur. Buradan da (4.43), (4.50) ve (4.58) birlikte düşünülürse;

$j = 0,1,2,\ldots,m_i - 1$ ve $i = k+1, k+2, \ldots, \upsilon$ için;

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} v_n(\lambda_i) \in H_{-j+1}(\mathbb{N})$$

sonucuna varılır.

KAYNAKLAR

Adivar, M. & Bairamov, E. (2001). Spectral properties of non-selfadjoint difference operators. *Journal Mathematical Analysis and Applications 261*, 461–478.

Adivar, M. & Bairamov, E. (2003). Difference equations of second order with spectral singularities. *Journal Mathematical Analysis and Applications 277,* 714–721.

Adivar, M. & Bohner, M. (2006). Spectral analysis of q-difference equations with spectral singularities. *Mathematical and Computer Modelling 43*(7–9), 695–703.

Adivar, M. & Bohner, M. (2006). Spectrum and principal vectors of second order q-difference equations. *Indian Journal of Mathematics 48*(1), 17–33.

Adivar, M. (2010). Quadratic pencil of difference equations: jost solutions, spectrum, and principal vectors. *Quaestiones Mathematicae 33*(3), 305–323.

Agarwal, R. P. & Wong, P. J. Y. (1997). *Advanced Topics in Difference Equations*. Dordrecht: Kluwer.

Agarwal, R. P. (2000). *Difference equation and inequalities: Theory Methods and Applications*. New York, Basel: Marcel Dekker Inc.

Akbulut, A., Adivar, M. & Bairamov, E. (2005). On the spectrum of the difference equations of second order. *Publicationes Mathematicae Debrecen 67*(3–4), 253–263.

Akhiezer, N. I. (1965). *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*. New York: Hafner Publishing Co.

Aygar, Y., Olgun, M. & Koprubasi, T. (2012). Principal functions of nonselfadjoint discrete Dirac equations with spectral parameter in boundary conditions. *Abstract and Applied Analysis 2012*, Article ID 924628. doi:10.1155/2012/924628

Bairamov, E., Aygar, Y. & Koprubasi, T. (2011). The spectrum of eigenparameter-dependent discrete Sturm–Liouville equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics 235*(16), 4519–4523.

Bairamov, E. & Celebi, A. O. (1999). Spectrum and spectral expansion for the non-selfadjoint discrete Dirac operators. *Quaterly Journal of Mathematics 50*(2), 371-384.

Bairamov, E., Cakar, O. & Krall, A. M. (2001). Non-selfadjoint difference operators and Jacobi matrices with spectral singularities. *Mathematische Nachrichten 229*, 5-14.

Bairamov, E. & Coskun, C. (2004). Jost solutions and the spectrum of the system of difference equations. *Applied Mathematics Letters 17*, 1039-1045.

Bairamov, E. & Coskun, C. (2005). The structure of the spectrum of a system of difference equations. *Applied Mathematics Letters 18*, 387–394.

Bairamov, E. & Koprubasi, T. (2010). Eigenparameter dependent discrete Dirac equations with spectral singularities. *Applied Mathematics and Computation 215*, 4216-4220.

Balcı, M. (1999). *Matematik Analiz I*. Ankara: Balcı Yayınları.

Berezanski, Y. M. (1985). Integration of nonlinear difference equations by the inverse spectral problem method. *Soviet Mathematics Doklady 31*, 264-267.

Dolzhenko, E. P. (1979). Boundary value uniqueness theorems for analytic functions. *Mathematical Notes 26*(6), 437-442.

Guseinov, G. S. (1976). The determination of an infinite Jacobi matrix from the scattering date. *Soviet Mathematics Doklady 17*, 596–600.

Guseinov, G. S. (1976). The inverse problem of scattering theory for a second order difference equation on the whole axis. *Soviet Mathematics Doklady 17*, 1684–1688.

Kelley, W. G. & Peterson, A. C. (2001). *Difference Equations: An Introduction with Applications*. San Diego: Academic Press.

Krall, A. M., Bairamov, E. & Cakar, O. (2001). Spectral analysis of non-selfadjoint discrete Schrödinger operator with spectral singularities. *Mathematische Nachrichten 231*, 89-104.

Levitan, B. M. & Sargsjan, I. S. (1975). Introduction to Spectral Theory. *Translations of Mathematical Monographs 39*.

Lusternik, L. A. & Sobolev, V. J. (1974). *Elements of functional analysis. Trans. of elementy funktsional'nogo analiza*.

Lyance, V. E. (1967). A differential operator with spectral singularities I-II. *AMS Translation Journals 60* (2), 185–225, 227–283.

Naimark, M. A. (1960). Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis. *AMS Translation Journals 2*(16), 103–193.

Naimark, M. A. (1968). *Linear Differential Operators II*. New York: Ungar.

Olgun, M., Koprubasi, T. & Aygar, Y. (2011). Principal functions of non-selfadjoint difference operator with spectral parameter in boundary conditions. *Abstract and Applied Analysis 2011*. Article ID 608329.doi:10.1155/2011/608329

Pavlov, B. S. (1967). Topics in Mathematics and Physics I. *The non-selfadjoint Schrödinger operator*. (pp. 87-114). New York: Consultants Bureau.

Pavlov, B. S. (1975). On seperation conditions for spectral components of a dissipative operator. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Ser- Mat. 39(1),* 123–148.

Toda, M. (1981). *Theory of Nonlinear Lattices*. Berlin: Springer.

Tunca, G. B. & Bairamov, E. (1999). Discrete spectrum and principal functions of non-selfadjoint differential operator. *Czechoslovak Mathematical Journal 49*(4), 689–700.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Ahmet Turgut KELEŞ

Doğum Yeri **:** Ankara

Doğum Tarihi **:** 05.01.1989

Medeni Hali **:** Bekar

Yabancı Dili **:** İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Mezuniyet Yılı)

Lise **:** Ankara Kılıçarslan Lisesi (2003-2006)

Lisans **:** Erciyes Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2008-2012)