T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK OPERATÖRÜ İÇEREN FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

Aysun NAR

Danışman	**Prof. Dr. Yaşar BOLAT**
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Nurettin DOĞAN**
Jüri Üyesi	**Yrd. Doç. Dr. Ahmet DAŞDEMİR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KASTAMONU – 2015

TEZ ONAYI

Aysun NAR tarafından hazırlanan "**Genelleştirilmiş Fark Operatörü İçeren Fark Denklemlerinin Bir Sınıfının Çözümlerinin Davranışı Üzerine**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Prof. Dr.Yaşar BOLAT Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Nurettin DOĞAN Gazi Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Yrd. Doç. Dr. Ahmet DAŞDEMİR Kastamonu Üniversitesi	....

20/11/2015

Enstitü Müdürü	Prof. Dr. Ömer KÜÇÜK	....

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

İmza
Aysun NAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK OPERATÖRÜ İÇEREN FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

Aysun NAR
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yaşar BOLAT

Bu yüksek lisans tezinde $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $k \geq 1$, p_n sıfırdan farklı reel bir dizi ve $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+2} \to \mathbb{R}$ olmak üzere, genelleştirilmiş fark operatörü içeren yüksek mertebeden

$$\Delta_a^k(p_n \Delta_a^2 y_n) = f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n)$$

fark denkleminin çözümlerinin salınımlı ve salınımsızlık davranışı üzerine bazı yeni sonuçlar verilmiştir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, fark denklemlerinin temel tanım ve teoremleri hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, yukarıda verilen fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ve salınımsızlığı için bazı sonuçlar ve örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemleri, genelleştirilmiş fark operatörü, salınımlılık, salınımsızlık

2015, 36 sayfa
Bilim Kodu: 204

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON THE BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF A CLASS OF DIFFERENCE EQUATIONS INVOLVING GENERALIZED DIFFERENCE OPERATOR

Aysun NAR
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathemathics

Supervisor: Prof. Dr. Yaşar BOLAT

In this master's thesis, some new results are given for nonoscillation and oscillation of all solutions of higher-order difference equation involving generalized difference operator of the form

$$\Delta_a^k(p_n\Delta_a^2 y_n) = f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n)$$

where $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $k \geq 1$ and $\{p_n\}$ is real sequence with $p_n \neq 0$ for $n \in \mathbb{N}$ and $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+2} \to \mathbb{R}$.

This thesis has three parts. The first part consists of the preamble. In the second part, basic definitions and theorems for difference equations are reminded and finally, in the third part, some results and examples are given for nonoscillation and oscillation of all solutions of the above difference equation.

Key Words: Difference equations, generalized difference operator, oscillation, nonoscillation

2015, 36 pages
Science Code: 204

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Yaşar BOLAT (Kastamonu Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü)'a teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan, gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı aileme sonsuz teşekkür ederim.

Aysun NAR
Kastamonu, Kasım, 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\dots\}$ biçiminde tanımlanan doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ biçiminde tanımlanan doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ biçiminde tanımlanan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan kartezyen çarpımı
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ biçiminde tamsayılar kümesi
Δ	$\Delta x(n) = x(n+h) - x(n)$ biçiminde tanımlanan ileri fark operatörü
Δ_a	a bir reel sabit olmak üzere, $\Delta_a x_n = x_{n+1} - a x_n$ biçiminde tanımlanan genelleştirilmiş fark operatörü
$X - X_1$	$X - X_1 = \{x \in X : x \notin X_1\}$ kümesi
$\binom{k}{j}$	$k \geq j$ olmak üzere $\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!}$

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler, herhangi bir olayın sürekli değişkenler yardımıyla matematiksel modellemesi ile ortaya çıkar. Fakat öyle olaylar vardır ki, fonksiyon bazı süreksizlik değerlerine sahip olur. Diferensiyel denklem ile ifade edilemeyen bu durumlar fark denklemlerin ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Fark denklemleri sadece diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde değil aynı zamanda biyoloji, mühendislik, ekonomi, savunma, demografi ve benzeri alanlarda ortaya çıkan matematiksel modellerde ya doğrudan ya da dolaylı olarak yer alırlar. Bu denklemlerde bağımsız değişken tamsayılar üzerinde tanımlanır. Dolayısıyla fark denklemlerinde türev terimleri yerine bilinmeyen fonksiyonun farkları bulunur. Bu bakımdan, fark denklemleri daha ziyade sürekli olmayan problemleri karakterize eder. Örneğin, genetik alanda kuşaklar arasındaki genetik başkalaşım ile ekonomide fiyat değişim problemleri açıkça sürekli olmayan problemlerdir. Zira, bağımsız değişkenler birinde kuşak; diğerinde duruma göre gün, hafta, ay veya yıldır ve ikiside doğal olarak ayrık (discrete) cümleler üzerinde tanımlıdır [1].

Fark denklemleri geniş bir uygulama alanına sahiptir. Örneğin; biyolojide canlı popülasyon sayısının araştırılmasında, tıpta hücre hareketlerinin takibinde, kontrol teorisinde kararlılık durumunun tespitinde ve daha birçok alanda fark denklemleriyle karşılaşılmaktadır.

Bilinen önemli bir fark denklemi örneği $x(n)$ fibonacci dizisidir. Bu dizi

$$x(n+2) = x(n+1) + x(n),\ x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ n \geq 0,$$

fark denkleminin tek çözümüdür ve bu çözüm için

$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} \cong 1{,}618$ dir. Bu ise altın oranı ifade etmektedir [2].

Ekonomi ile ilgili bir örnek ele alalım.

$y(k)$: k. yıldaki milli gelir,

$c(k)$: k. yıldaki tüketici harcamaları,

$p(k)$: k. yıldaki yatırımlar,

$u(k)$: k. yıldaki hükümet harcamaları

olmak üzere, tüketici harcamalarının önceki yılın milli geliri ile orantılı, yatırımların ise, önceki yıldaki tüketici harcamalarının bir öncekine göre artışı ile orantılı olduğu varsayımı altında,

$$c(k) = ay(k-1)$$

$$p(k) = \beta[c(k) - c(k-1)]$$

$$y(k) = c(k) + p(k) + u(k)$$

bağıntıları yazılabilir. Buradan,

$$y(k+2) - \alpha(1+\beta)y(k+1) + a\beta y(k) = u(k+2),\ y(0) = c_0,\ y(1) = c_1$$

fark denklemi (indirgeme bağıntısı) modeli yazılabilir [3].

Fark denklemleri son 35 yıl içerisinde pek çok bilim adamının ilgisini çekmiştir ve bu durum zengin bir literatürün ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bununla ilgili olarak Popenda [4], Tan ve Yang [5], Parhi ve Panda [6], Agarwal [7], Goldberg [8], Elaydi [9], Akın ve Bulgak [10], Elaydi ve Peterson [11], Gordon [12], LaSalle [13], Mickens [14], Miller [15], Peterson [16], Sugiyama [17], Bolat [18], Zafer [19] gibi isimlerin makalelerinden ve kitaplarından söz edilebilir.

Fark denklemlerinin çözümlerinin davranışlarıyla ilgili önemli çalışmalar yapılmasına rağmen, genelleştirilmiş fark operatörü içeren fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı üzerine az sayıda çalışma vardır.

Popenda [4] 1987 yılında $\Delta_a^2 x_n = F(n, x_n, \Delta_b x_n)$ formunda genelleştirilmiş fark içeren lineer olmayan ve homojen olmayan ikinci mertebeden fark denklemlerinin bir sınıfının çözümlerinin salınım ve salınımsızlık durumlarını veren yeter koşullar elde etmiştir.

Tan ve Yang [5] 2002 yılında

$$\Delta_a(p_n \Delta_a x_n) + q_n \Delta_a x_n = F(n, x_n, \Delta_b x_n)$$

denklemini ele alarak Popenda'nın sonuçlarını genişletmiş ve genellemiştir.

N. Parhi ve A. Panda [6] 2006 yılında

$$\Delta_a(p_n \Delta_a^2 y_n) + q_n \Delta_a^2 y_n = f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n)$$

biçiminde lineer olmayan üçüncü mertebeden fark denkleminin bir sınıfının bütün çözümlerinin salınım ve salınımsızlığını veren yeter koşullar elde etmiştir .

Bu tez çalışmasında ise genelleştirilmiş fark operatörü içeren yüksek mertebeden

$$\Delta_a^k(p_n \Delta_a^2 y_n) = f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n)$$

fark denkleminin çözümlerinin salınımlığı ve salınımsızlığı üzerine yeni sonuçlar verilmektedir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1

Bir $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü veya x in birinci basamaktan farkı

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre x in ikinci basamaktan farkı $(\Delta^2 x)$

$$\Delta^2 x(n) = \Delta\big(\Delta x(n)\big)$$

$$= x(n+2) - 2x(n+1) + x(n),$$

olur. Böyle devam ederek x in k yıncı basamaktan farkı $(\Delta^k x)$

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} x(n+k-j)$$

olarak hesaplanır [1].

Tanım 2.2

$n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$F\big(n, x(n), x(n+1), \ldots, x(n+k)\big) = 0 \tag{2.1}$$

bağıntısına bir *fark denklemi* denir. Fark denklemleri literatüründe $x(n)$ yerine sık sık x_n sembolü kullanılabilmektedir [1].

Tanım 2.3

Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o *denklemin basamağı (mertebesi)* denir.

Örneğin, $x(n+3) - 4x(n+2) + 5x(n+1) = 0$ ve $x(n+4) + x(n)x(n+2) = 1$ denklemlerinin basamakları, sırasıyla, $n + 3 - (n+1) = 2$ ve $n + 4 - n = 4$ dür. $x(n+7) = n(n-2)$ ise sıfırıncı basamaktan bir denklemdir; yani, açık olarak bir fonksiyondur [1].

Tanım 2.4

$a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0 + 1, n_0+2, \dots\}$ üzerinde tanımlı

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \cdots + a_k(n)x(n) = g(n)$$

biçimindeki bir denkleme k yıncı basamaktan lineer fark denklem denir. Bu denklem, $g(n) \equiv 0$ olduğu zaman *homojen denklem*, aksi durumda *homojen olmayan denklem* olarak adlandırılır. Buna göre k yıncı basamaktan bir lineer homojen fark denklemi

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \cdots + a_k(n)x(n) = 0$$

şeklinde ifade edilir [1].

Tanım 2.5

$\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı bir $x(n)$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için (2.1) deki fark denklemini sağlıyorsa, o zaman $x(n)$ fonksiyonuna $\mathbb{N}$ üzerinde bu fark denkleminin bir çözümü denir. k yıncı basamaktan bir fark denklemin,

$$\psi(n, x, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0$$

veya

$$x = \varphi(n, c_1, c_2, \dots, c_k)$$

şeklinde k tane $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ keyfi sabit içeren çözümüne *genel çözüm* adı verilir. Genel çözümden elde edilemeyen çözümlere de *özel çözüm* denir [1].

Tanım 2.6

y reel değerli bir dizi (fonksiyon) olmak üzere $y = y(n) = (\{y_n\}_{n=1}^{\infty}): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olsun. $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere bu y fonksiyonu için Δ, Δ_a ve Δ^k fark operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

$$\Delta_a y_n = y_{n+1} - a y_n,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n,\ k \geq 1, \quad \Delta^1 = \Delta$$

[7].

Tanım 2.7

Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n y_{n+k} < 0$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ varsa, y dizisine *sıfır etrafında kesin salınımlı* veya sadece *salınımlıdır*, denir. Ayrıca y, eninde sonunda hep aynı işaretli oluyorsa *salınımsızdır* diye adlandırılır [7].

Teorem 2.1

m ve n negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,

$$\Delta^m \Delta^n \equiv \Delta^n \Delta^m \equiv \Delta^{n+m}$$

dir [8].

Teorem 2.2

c, herhangi bir sabit olmak üzere

$$\Delta[cy(x)] = c\Delta y(x)$$

[8].

Teorem 2.3

İki fonksiyonun toplamının farkı, farklarının toplamına eşittir. Yani y_1 ve y_2 iki fonksiyon olmak üzere

$$\Delta[y_1(x) + y_2(x)] = \Delta y_1(x) + \Delta y_2(x)$$

dir [8].

Sonuç 2.1

c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$\Delta[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = c_1 \Delta y_1(x) + c_2 \Delta y_2(x)$$

dir [8].

Lemma 2.1

$\{y_n\}$ reel bir dizi olsun. $b > 0$ olmak üzere $\{\Delta_b y_n\}$ eninde sonunda hep aynı işaretli oluyorsa o zaman $\{y_n\}$ de eninde sonunda hep aynı işaretli olur [6].

Lemma 2.2

$b > 0$ ve $l \geq 0$ tam sayı olmak üzere $\{\Delta_b^l y_n\}$ nin salınımlı olması için gerek ve yeter şart $\{y_n\}$ dizisinin salınımlı olmasıdır. Burada $\Delta_b^0 y_n \equiv y_n$ dir [6].

Lemma 2.3

$b < 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman $l \in \mathbb{N}$ olmak üzere herhangi bir reel $\{y_n\}$ dizisi için

$$\Delta_b^k y_l = b^{l+k}\,\Delta^k(\frac{y_l}{b^l})$$

dir [6].

İspat

İspat tümevarımla yapılabilir. Açıkça, $k = 1$ için

$$\frac{\Delta_b y_l}{b^{l+1}} = \frac{y_{l+1} - b y_l}{b^{l+1}} = \frac{y_{l+1}}{b^{l+1}} - \frac{y_l}{b^l} = \Delta\left(\frac{y_l}{b^l}\right)$$

dir. k için eşitliğin sağlandığı varsayılsın. $k+1$ için de eşitliğin sağlandığını gösterelim. Tümevarım hipotezinden,

$$\Delta_b^{k+1} y_l = \Delta_b\left(\Delta_b^k y_l\right) = \Delta_b^k y_{l+1} - b\,\Delta_b^k y_l$$

$$= b^{l+k+1}\Delta^k(\frac{y_{l+1}}{b^{l+1}}) - b^{l+k+1}\Delta^k(\frac{y_l}{b^l})$$

$$= b^{l+k+1}\Delta^k(\frac{y_{l+1}}{b^{l+1}} - \frac{y_l}{b^l})$$

$$= b^{l+k+1}\Delta^k\left(\Delta\left(\frac{y_l}{b^l}\right)\right) = b^{l+k+1}\Delta^k\left(\frac{y_l}{b^l}\right)$$

dir. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için önermenin doğruluğu gösterilmiş olur.

$\Delta_a z_n$' in tanımından aşağıdaki özdeşlikler yazılabilir.

i. $m \geq 1$ olmak üzere

$$\Delta_a^m(p_n \Delta_a^2 y_n) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} a^i p_{n+m-i} \Delta_a^2 y_{n+m-i}$$

dir.

ii. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$\Delta_a^2 y_n = \Delta_a(y_{n+1} - a y_n)$ olup, buradan

$$\Delta_a y_{n+1} = \Delta_a^2 y_n + a\Delta_a y_n \tag{2.2}$$

elde edilir.

iii. (2.2)'nin genelleştirilmesi sonucu $k \geq 1$ için

$$\Delta_a y_l = \sum_{i=0}^{k} a^i \binom{k}{i} \Delta_a^{k+1-i} y_{l-k} \tag{2.3}$$

elde edilir.

iv. $n \in \mathbb{N}$ ve $k \geq 1$ olmak üzere (2.2)'nin kullanılması ile

$$\Delta_a^2 y_{n+k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} a^i \Delta_a^{k+1-i} y_n \tag{2.4}$$

yazılabilir.

v. (2.4)'den $k \geq 1$ için

$$\Delta_a^2 y_n = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} a^j \Delta_a^{k+1-j} y_{n-k+1} \tag{2.5}$$

yazılabilir.

vi . $n \in \mathbb{N}$ ve $k \geq 1$ olmak üzere

$$\Delta_a^k y_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i a^i y_{n+k-i}$$

dir.

<u>Tanım 2.8</u>

$p_1, p_2, \dots, p_k$ sabitler, $p_k \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, sabit katsayılı

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + \cdots + p_k x(n) = 0 \tag{2.6}$$

denkleminde $x(n)$ yerine λ^n yazılarak elde edilen $P(\lambda) = \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0$ denklemine (2.6) denkleminin *karakteristik denklemi*, bu denklemin λ köklerine de *karakteristik kökler* denir [9].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK OPERATÖRÜ İÇEREN YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI ve SALINIMSIZLIĞI ÜZERİNE SONUÇLAR

Bu bölümde; $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $k \geq 1$, p_n sıfırdan farklı reel bir dizi, y_n , $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı reel değerli bir dizi ve $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+2} \to \mathbb{R}$ olmak üzere genelleştirilmiş fark operatörü içeren yüksek mertebeden

$$\Delta_a^k(p_n \Delta_a^2 y_n) = f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) \tag{3.1}$$

fark denklemi göz önüne alınmakta ve bu denklemin y_n çözümlerinin salınımlılığı ve salınımsızlığı üzerine bazı yeni sonuçlar verilmektedir.

3.1. Çözümlerin Salınımsızlığı

Bu kesimde; (3.1) denkleminin çözümlerinin salınımsızlığını veren bazı sonuçlar verilmektedir.

Teorem 3.1

$a > 0$ olsun ve

$$\frac{\sum_{i=0}^{k} a^i \binom{k}{i} \Delta_a^{k+1-i} y_n}{p_{n+k}} \Big[f(n, y_n, \Delta_a y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j \big(\sum_{m=1}^{j} \binom{j}{m} (-1)^{m+1} p_{n+k-m}\big) \Delta_a^{k+2-m} y_n \Big] \geq 0 \tag{3.2}$$

sağlansın. O zaman (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınımsızdır.

İspat

İspat olmayana ergi yöntemi ile yapılacaktır. $\{y_n\}$'nin (3.1) denkleminin salınımlı bir çözümü olduğu kabul edilsin. O zaman, her $s \in \mathbb{N}$ için $y_l \geq 0$ ve $y_{l+1} < 0$ veya

$y_l > 0$ ve $y_{l+1} \leq 0$ olacak şekilde bir $l \geq s$ vardır. Her iki durumda da $\Delta_a y_l < 0$ dır. $n \geq l$ ler için (3.1) denklemi fark operatörünün i. özelliği kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i} a^i p_{n+k-i}\Delta_a^2 y_{n+k-i} = f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) \qquad (3.3)$$

biçiminde yazılır. (3.3)'den

$$p_{n+k}\Delta_a^2 y_{n+k} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i} a^i p_{n+k-i}\Delta_a^2 y_{n+k-i} = f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n \qquad (3.4)$$

veya açık olarak

$$p_{n+k}\Delta_a^2 y_{n+k} - \binom{k}{1} a p_{n+k-1}\Delta_a^2 y_{n+k-1} + \binom{k}{2} a^2 p_{n+k-2}\Delta_a^2 y_{n+k-2} + \dots + (-1)^k\binom{k}{k} a^k p_n \Delta_a^2 y_n$$

$$= f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) \qquad (3.5)$$

yazılır. (3.5) düzenlenirse

$$p_{n+k}\Delta_a^2 y_{n+k} = f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) + \binom{k}{1} a p_{n+k-1}\Delta_a^2 y_{n+k-1} - \binom{k}{2} a^2 p_{n+k-2}\Delta_a^2 y_{n+k-2} + \dots - (-1)^k\binom{k}{k} a^k p_n \Delta_a^2 y_n \qquad (3.6)$$

elde edilir. (3.6)'dan

$$p_{n+k}\left(\Delta_a\left(\Delta_a(y_{n+k})\right)\right) = f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) + \binom{k}{1} a p_{n+k-1}\Delta_a^2 y_{n+k-1} - \binom{k}{2} a^2 p_{n+k-2}\Delta_a^2 y_{n+k-2} + \dots - (-1)^k\binom{k}{k} a^k p_n \Delta_a^2 y_n$$

veya

$$p_{n+k}\left(\Delta_a(y_{n+k+1} - a y_{n+k})\right) = f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) + \binom{k}{1} a p_{n+k-1}\Delta_a^2 y_{n+k-1} - \binom{k}{2} a^2 p_{n+k-2}\Delta_a^2 y_{n+k-2} + \dots - (-1)^k\binom{k}{k} a^k p_n \Delta_a^2 y_n \qquad (3.7)$$

yazılır. (3.7)'nin düzenlenmesiyle de

$$p_{n+k}\Delta_a y_{n+k+1} - a p_{n+k}\Delta_a y_{n+k} = f\left(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n\right) + \binom{k}{1} a p_{n+k-1}\Delta_a^2 y_{n+k-1} - \binom{k}{2} a^2 p_{n+k-2}\Delta_a^2 y_{n+k-2} + \dots - (-1)^k \binom{k}{k} a^k p_n \Delta_a^2 y_n$$

veya fark operatörünün iv. özelliği gereği

$$p_{n+k}\Delta_a y_{n+k+1} = a p_{n+k}\Delta_a y_{n+k} + f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) + \binom{k}{1} a p_{n+k-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i} a^i \Delta_a^{k+1-i} y_n\right) - \binom{k}{2} a^2 p_{n+k-2}\left(\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-2}{i} a^i \Delta_a^{k-i} y_n\right) + \cdots - (-1)^k \binom{k}{k} a^k p_n \Delta_a^2 y_n \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8)'den

$$p_{n+k}\Delta_a y_{n+k+1} = a p_{n+k}\Delta_a y_{n+k} + f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) + \binom{k}{1} a p_{n+k-1} \ (\Delta_a^{k+1} y_n + \binom{k-1}{1} a \Delta_a^k y_n + \binom{k-1}{2} a^2 \Delta_a^{k-1} y_n + \ \dots + \binom{k-1}{k-1} a^{k-1}\Delta_a^2 y_n) - \binom{k}{2} a^2 p_{n+k-2}\left(\Delta_a^k y_n + \binom{k-2}{1} a \Delta_a^{k-1} y_n + \binom{k-2}{2} a^2 \Delta_a^{k-2} y_n + \cdots \binom{k-2}{k-2} a^{k-2}\Delta_a^2 y_n\right) + \cdots - (-1)^k \binom{k}{k} a^k p_n \Delta_a^2 y_n$$

veya buradan

$$p_{n+k}\Delta_a y_{n+k+1} = a p_{n+k}\Delta_a y_{n+k} + f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) + \binom{k}{1} a p_{n+k-1}\Delta_a^{k+1} y_n + \binom{k}{1}\binom{k-1}{1} a^2 p_{n+k-1}\Delta_a^k y_n + \binom{k}{1}\binom{k-1}{2} a^3 p_{n+k-1}\Delta_a^{k-1} y_n + \binom{k}{1}\binom{k-1}{3} a^4 p_{n+k-1}\Delta_a^{k-2} y_n + \dots + \binom{k}{1}\binom{k-1}{k-1} a^k p_{n+k-1}\Delta_a^2 y_n - \binom{k}{2} a^2 p_{n+k-2}\Delta_a^k y_n - \binom{k}{2}\binom{k-2}{1} a^3 p_{n+k-2}\Delta_a^{k-1} y_n - \binom{k}{2}\binom{k-2}{2} a^4 p_{n+k-2}\Delta_a^{k-2} y_n - \dots - \binom{k}{2}\binom{k-2}{k-2} a^k p_{n+k-2}\Delta_a^2 y_n + \cdots - (-1)^k \binom{k}{k} a^k p_n \Delta_a^2 y_n \tag{3.9}$$

yazılır. (3.9)'un düzenlenmesi ile

$$p_{n+k}\Delta_a y_{n+k+1} = a p_{n+k}\Delta_a y_{n+k} + f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) +$$

$$\binom{k}{1}ap_{n+k-1}\Delta_a^{k+1}y_n + a^2\left(\binom{k}{1}\binom{k-1}{1}p_{n+k-1} - \binom{k}{2}p_{n+k-2}\right)\Delta_a^k y_n +$$
$$a^3(\binom{k}{1}\binom{k-1}{2}p_{n+k-1} - \binom{k}{2}\binom{k-2}{1}p_{n+k-2} +$$
$$\binom{k}{3}\binom{k-3}{0}p_{n+k-3})\Delta_a^{k-1}y_n +$$
$$a^4\left(\binom{k}{1}\binom{k-1}{3}p_{n+k-1} - \binom{k}{2}\binom{k-2}{2}p_{n+k-2} + \binom{k}{3}\binom{k-3}{1}p_{n+k-2} -\right.$$
$$\left.\binom{k}{4}\binom{k-4}{0}p_{n+k-4}\right)\Delta_a^{k-2}y_n +$$
$$\dots + a^k\left(\binom{k}{1}\binom{k-1}{k-1}p_{n+k-1} - \binom{k}{2}\binom{k-2}{k-2}p_{n+k-2} + \binom{k}{3}\binom{k-3}{k-3}p_{n+k-3} +\right.$$
$$\left.\dots - (-1)^k\binom{k}{k}p_n\right)\Delta_a^2 y_n \qquad (3.10)$$

elde edilir. (3.10) açık biçimde

$$p_{n+k}\Delta_a y_{n+k+1} = ap_{n+k}\Delta_a y_{n+k} + f\left(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1}y_n\right) +$$
$$\frac{k!}{(k-1)!}ap_{n+k-1}\Delta_a^{k+1}y_n + a^2\frac{k!}{(k-2)!}\left(p_{n+k-1} - \frac{1}{2!}p_{n+k-2}\right)\Delta_a^k y_n +$$
$$a^3\frac{k!}{(k-3)!2!}\left(p_{n+k-1} - p_{n+k-2} + \frac{1}{3}p_{n+k-3}\right)\Delta_a^{k-1}y_n +$$
$$a^4\frac{k!}{(k-4)!2!}\left(\frac{1}{3}p_{n+k-1} - \frac{1}{2}p_{n+k-2} + \frac{1}{3}p_{n+k-3} - \frac{1}{12}p_{n+k-4}\right)\Delta_a^{k-2}y_n \dots +$$
$$a^k k!\left(\frac{1}{(k-1)!}p_{n+k-1} - \frac{1}{(k-2)!}p_{n+k-2} + \frac{1}{(k-3)!}p_{n+k-3} + \dots -\right.$$
$$\left.(-1)^k p_n\right)\Delta_a^2 y_n$$

veya buradan

$$p_{n+k}\Delta_a y_{n+k+1} = ap_{n+k}\Delta_a y_{n+k} + f\left(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1}y_n\right) +$$
$$\frac{k!}{(k-1)!}ap_{n+k-1}\Delta_a^{k+1}y_n + a^2\frac{k!}{(k-2)!2!}(2p_{n+k-1} - p_{n+k-2})\Delta_a^k y_n +$$
$$a^3\frac{k!}{(k-3)!3!}(3p_{n+k-1} - 3p_{n+k-2} + p_{n+k-3})\Delta_a^{k-1}y_n +$$
$$a^4\frac{k!}{(k-4)!4!}(4p_{n+k-1} - 6p_{n+k-2} + 4p_{n+k-3} - p_{n+k-4})\Delta_a^{k-2}y_n$$
$$\dots + a^k\left(\binom{k}{1}p_{n+k-1} - \binom{k}{2}p_{n+k-2} + \binom{k}{3}p_{n+k-3} + \dots + \binom{k}{k}p_n\right)\Delta_a^2 y_n.$$

$$\Delta_a y_{n+k+1} = a\Delta_a y_{n+k} + \frac{1}{p_{n+k}}\Big[f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1}y_n) +$$
$$\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}a^j\left(\sum_{m=1}^{j}\binom{j}{m}(-1)^{m+1}p_{n+k-m}\right)\Delta_a^{k+2-m}y_n\Big] \qquad (3.11)$$

biçiminde de yazılabilir. (3.11) de $n \to n-k$ alınırsa, (3.1) denklemi

$$\Delta_a y_{n+1} = a\Delta_a y_n + \frac{1}{p_n}\Big[f(n-k, y_{n-k}, \dots, \Delta_a^{k+1} y_{n-k}) + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} a^j \Big(\sum_{m=1}^{j}\binom{j}{m}(-1)^{m+1} p_{n-m}\Big)\Delta_a^{k+2-m} y_{n-k}\Big] \tag{3.12}$$

biçimine getirilmiş olur.

(3.12) de $n \to l$ alınır ve her iki yanı $\Delta_a y_l$ ile çarpılırsa ,

$$\Delta_a y_l \Delta_a y_{l+1} = a(\Delta_a y_l)^2 + \frac{\Delta_a y_l}{p_l}\Big[f(l-k, y_{l-k}, \dots, \Delta_a^{k+1} y_{l-k}) + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} a^j \Big(\sum_{m=1}^{j}\binom{j}{m}(-1)^{m+1} p_{l-m}\Big)\Delta_a^{k+2-m} y_{l-k}\Big]$$

olur. Fark operatörünün iii. özelliği gereği $\Delta_a y_l = \sum_{i=0}^{k} a^i \binom{k}{i}\Delta_a^{k+1-i} y_{l-k}$ biçiminde yazılabildiği göz önünde bulundurularak

$$\Delta_a y_l \Delta_a y_{l+1} = a(\Delta_a y_l)^2 + \frac{\Delta_a y_l}{p_l}\Big[f(l-k, y_{l-k}, \dots, \Delta_a^{k+1} y_{l-k}) + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} a^j \Big(\sum_{m=1}^{j}\binom{j}{m}(-1)^{m+1} p_{l-m}\Big)\Delta_a^{k+2-m} y_{l-k}\Big] > 0 \tag{3.13}$$

elde edilir. Teorem 3.1 deki (3.2) koşulu gereği (3.13)'ün sağ tarafı pozitif olacağından ve $\Delta_a y_l < 0$ olduğundan $\Delta_a y_{l+1} < 0$ olur. (3.12) denkleminde $n = l+1$ alınarak yukarıdaki işlemlerin tekrarıyla $\Delta_a y_{l+1}\Delta_a y_{l+2} > 0$ elde edilir. Böylece $\Delta_a y_{l+2} < 0$ olur. Genellemeyle, $t \in \mathbb{N}$ için $\Delta_a y_{l+t} < 0$ olduğu görülür. Lemma 2.1 gereği $\{y_n\}$'in eninde sonunda hep aynı işaretli olduğu sonucuna varılır. Bu ise $\{y_n\}$' in salınımlı olması kabulü ile çelişir. Böylece teorem ispatlanır.

Örnek 3.1

(3.1) denkleminde $a > 0$, $p_n = 4$, $k = 2$ ve

$$f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n) = (1-8a)\Delta_a^3 y_n + 2a(1-2a)\Delta_a^2 y_n + a^2 \Delta_a y_n$$

almak suretiyle

$$4\Delta_a^4 y_n = (1-8a)\Delta_a^3 y_n + 2a(1-2a)\Delta_a^2 y_n + a^2 \Delta_a y_n \qquad (3.14)$$

denklemini göz önünde bulunduralım. $k = 2$ için Teorem 3.1 deki koşul

$$\frac{\Delta_a^3 y_n + 2a\Delta_a^2 y_n + a^2\Delta_a y_n}{p_{n+2}} \begin{bmatrix} f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n) + 2ap_{n+1}\Delta_a^3 y_n + \\ a^2(2p_{n+1} - p_n)\Delta_a^2 y_n \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. Yani;

$$\frac{\Delta_a^3 y_n + 2a\Delta_a^2 y_n + a^2\Delta_a y_n}{4} \begin{bmatrix} (1-8a)\Delta_a^3 y_n + 2a(1-2a)\Delta_a^2 y_n + a^2\Delta_a y_n + \\ 8a\Delta_a^3 y_n + 4a^2\Delta_a^2 y_n \end{bmatrix}$$

dır. Bu ifade düzenlenirse,

$$\frac{(\Delta_a^3 y_n + 2a\Delta_a^2 y_n + a^2\Delta_a y_n)^2}{4} \geq 0$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.1'e göre (3.14)'ün bütün çözümleri salınımsızdır. Gerçekten, eğer (3.14) denklemi

$$4(y_{n+4} - 4ay_{n+3} + 6a^2 y_{n+2} - 4a^3 y_{n+1} + a^4 y_n) = (1-8a)(y_{n+3} - 3ay_{n+2} + 3a^2 y_{n+1} - a^3 y_n) + 2a(1-2a)(y_{n+2} - 2ay_{n+1} + a^2 y_n) + a^2(y_{n+1} - ay_n)$$

biçiminde açık olarak yazılırsa buradan,

$$4y_{n+4} + (-1-8a)y_{n+3} + (4a^2 + a)y_{n+2} = 0$$

denklemine varılır. Bu fark denkleminin karakteristik denklemi

$$4\lambda^4 + (-1-8a)\lambda^3 + (4a^2 + a)\lambda^2 = 0$$

biçiminde yazılır. Bu ifade düzenlenirse

$(\lambda - a)(4\lambda^3 + (-1 - 4a)\lambda^2) = 0$

elde edilir. (3.14) denkleminin çözüm uzayının tabanı $\left\{\{(a^n)\}, \left\{(\frac{1+4a}{4})^n\right\}\right\}$ dir. $a > 0$ olduğundan (3.14)' ün bütün çözümlerinin salınımsız olduğu görülür.

Teorem 3.2

$a > 0$ olsun. Eğer

$$\frac{1}{p_{n+k}}\left[f(n, y_n, \Delta_a y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} a^j (\sum_{m=1}^{j}\binom{j}{m}(-1)^{m+1} p_{n+k-m})\Delta_a^{k+2-m} y_n\right] < 0 \qquad (3.15)$$

ve

$$\frac{1}{p_{n+k}}\left[f(n, y_n, \Delta_a y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} a^j (\sum_{m=1}^{j}\binom{j}{m}(-1)^{m+1} p_{n+k-m})\Delta_a^{k+2-m} y_n\right] > 0 \qquad (3.16)$$

ise o zaman (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınımsızdır.

İspat

İspat, olmayana ergi metodu ile yapılacaktır. Yani, $\{y_n\}$'in (3.1)'in salınımlı bir çözümü olduğu kabul edilsin. Bu durumda ya her $s \in \mathbb{N}$ için $y_l \geq 0$ ve $y_{l+1} < 0$ veya $y_l > 0$ ve $y_{l+1} \leq 0$ olacak şekilde $l > s$ vardır veya $y_l \leq 0$ ve $y_{l+1} > 0$ veya her $s \in \mathbb{N}$ için $y_l < 0$ ve $y_{l+1} \geq 0$ olacak şekilde $l > s$ vardır. İspat birinci duruma göre yapılacaktır. Kabul edelim ki her $s \in \mathbb{N}$ için $y_l \geq 0$ ve $y_{l+1} < 0$ veya $y_l > 0$ ve $y_{l+1} \leq 0$ olacak şekilde $l > s$ var olsun. Bu her iki durumda da $\Delta_a y_l < 0$ dır.

$n \geq l$ için (3.1) denklemi (3.12) olarak yazılabilir. O zaman (3.15)'den ve $\Delta_a y_l < 0$ olduğundan

$$\Delta_a y_{l+1} = a\Delta_a y_l + \frac{1}{p_l}\left[f(l-k, y_{l-k}, \dots, \Delta_a^{k+1} y_{l-k}) + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} a^j (\sum_{m=1}^{j}\binom{j}{m}(-1)^{m+1} p_{l-m})\Delta_a^{k+2-m} y_{l-k}\right] < 0$$

olur.

(3.12) de $n = l + 1$ alınıp (3.15) kullanılarak $\Delta_a y_{l+2} < 0$ elde edilir. (3.15)'in tekrarlı kullanımı ile $s \in \mathbb{N}$ için $\Delta_a y_{l+s} < 0$ olduğu sonucuna varılır. Böylece Lemma 2.1 gereğince $\{y_n\}$ eninde sonunda hep aynı işaretli olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınımsızdır.

İkinci durumun yani $y_l \leq 0$ ve $y_{l+1} > 0$ veya $y_l < 0$ ve $y_{l+1} \geq 0$ kabulü ve (3.16) koşulunun kullanımıyla da benzer çelişkiye ulaşılır. Yani, (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınımsızdır.

Not 3.1

$$\frac{1}{p_{n+k}}\left[f(n, y_n, \Delta_a y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j \left(\sum_{m=1}^{j} \binom{j}{m} (-1)^{m+1} p_{n+k-m}\right) \Delta_a^{k+2-m} y_n\right] = 0$$

olması durumu ancak ve ancak $y_n = 0$ olması yani aşikar çözüm ile mümkündür ki burada aşikar olmayan çözümlerin salınımsızlığı incelenmektedir.

Örnek 3.2

(3.1) denkleminde $a = 1 > 0,\ p_n = -2,\ k = 3$ ve

$$f(n, y_n, \Delta_a y_n, \dots, \Delta_a^4 y_n) = 6\Delta^4 y_n + 6\Delta^3 y_n + 2\Delta^2 y_n + (\Delta y_n)^2$$

almak suretiyle,

$$-2\Delta^5 y_n = 6\Delta^4 y_n + 6\Delta^3 y_n + 2\Delta^2 y_n + (\Delta y_n)^2 \tag{3.17}$$

denklemini göz önünde bulunduralım. $k = 3$ için Teorem 3.2 deki koşul

$$\frac{1}{p_{n+3}}\left[\begin{matrix} f(n, y_n, \Delta_a y_n, \dots, \Delta_a^4 y_n) + 3ap_{n+2}\Delta_a^4 y_n + 3a^2(2p_{n+2} - p_{n+1})\Delta_a^3 y_n + \\ a^3(3p_{n+2} - 3p_{n+1} + p_n)\Delta_a^2 y_n \end{matrix}\right]$$

halini alır. Düzenlenirse,

$\frac{1}{-2}[6\Delta^4 y_n + 6\Delta^3 y_n + 2\Delta^2 y_n + (\Delta y_n)^2 - 6\Delta^4 y_n - 6\Delta^3 y_n - 2\Delta^2 y_n]$

olur. Buradan

$-\frac{(\Delta y_n)^2}{2} \leq 0$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2'den (3.16)'nın bütün çözümleri salınımsızdır. Özellikle, $c \neq 0$ olmak üzere $y_n \equiv c$, bu denklemin salınımsız bir çözümüdür.

Örnek 3.3

$-2\Delta^5 y_n = 6\Delta^4 y_n + 6\Delta^3 y_n + 2\Delta^2 y_n - (\Delta y_n)^2$ denklemini ele alalım. (3.1) denklemine göre $a = 1 > 0,\ p_n = -2,\ k = 3$ ve

$f(n, y_n, \Delta_a y_n, \dots, \Delta_a^4 y_n) = 6\Delta^4 y_n + 6\Delta^3 y_n + 2\Delta^2 y_n - (\Delta y_n)^2$

dir.

$k = 3$ için Teorem 3.2 koşulu

$$\frac{1}{p_{n+3}}\left[\begin{array}{c} f(n, y_n, \Delta_a y_n, \dots, \Delta_a^4 y_n) + 3ap_{n+2}\Delta_a^4 y_n + 3a^2(2p_{n+2} - p_{n+1})\Delta_a^3 y_n + \\ a^3(3p_{n+2} - 3p_{n+1} + p_n)\Delta_a^2 y_n \end{array}\right]$$

olarak yazılır. Bu ifade düzenlenirse,

$\frac{(\Delta y_n)^2}{2} \geq 0$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2'e göre verilen denklemin bütün çözümlerinin salınımsız olduğu sonucuna varılır.

Teorem 3.3

$a > 0$ olsun ve aşağıdaki

$\Delta_a^2 y_n = 0$ ise $f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) = 0,$

$\Delta_a^2 y_n \neq 0$ ise

$$\frac{\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j} a^j \Delta_a^{k+1-j} y_n}{p_{n+k}}\Big[f\big(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n\big) + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} a^j \big(\sum_{m=1}^{j}\binom{j}{m}(-1)^{m+1} p_{n+k-m}\big)\Delta_a^{k+2-m} y_n\Big] > 0, \qquad (3.18)$$

sağlansın. O zaman (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınımsızdır.

İspat

X, (3.1)'in bütün $y = \{y_n\}$ çözümlerinin kümesi olsun. $X_1 = \{y \in X : \Delta_a^2 y_n = 0, \exists n \in \mathbb{N}\}$ ve $X_2 = X - X_1$ olsun. $y = \{y_n\}$, (3.1)' in bir çözümü olsun. $y \in X_1$ ise $\Delta_a^2 y_t = 0$ olacak şekilde $t \in \mathbb{N}$ vardır. (3.18)'nin ilk kısmından $f(t, y_t, \Delta_a y_t, \Delta_a^2 y_t, \dots, \Delta_a^{k+1} y_t) = 0$ olduğu çıkar. Böylece (3.1)'den $\Delta_a^k(p_t \Delta_a^2 y_t) = 0$ elde edilir. Fark operatörünün i. özelliği gereği $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} a^i p_{t+k-i}\Delta_a^2 y_{t+k-i} = 0$ yazılır. Buradan,

$$p_{t+k}\Delta_a^2 y_{t+k} - \binom{k}{1} a p_{t+k-1}\Delta_a^2 y_{t+k-1} + \binom{k}{2} a^2 p_{t+k-2}\Delta_a^2 y_{t+k-2} + \dots + (-1)^k a^k p_t \Delta_a^2 y_t = 0$$

dır.

$$p_{t+k}\Delta_a^2 y_{t+k} = \binom{k}{1} a p_{t+k-1}\Delta_a^2 y_{t+k-1} - \binom{k}{2} a^2 p_{t+k-2}\Delta_a^2 y_{t+k-2} + \dots - (-1)^k a^k p_t \Delta_a^2 y_t$$

$\Delta_a^2 y_t = 0$ ise

$$\Delta_a(\Delta_a y_t) = 0$$

$$\Delta_a(y_{t+1} - a y_t) = 0$$

$$\Delta_a y_{t+1} = a\Delta_a y_t$$

dir. Bu eşitliğin her iki yanına Δ_a operatörü uygulanırsa,

$$\Delta_a^2 y_{t+1} = a\Delta_a^2 y_t$$

elde edilir. $\Delta_a^2 y_t = 0$ olduğundan, $\Delta_a^2 y_{t+1} = 0$ dır.

$\Delta_a^2 y_{t+1} = 0$ ise

$$\Delta_a(\Delta_a y_{t+1}) = 0$$

$$\Delta_a(y_{t+2} - a y_{t+1}) = 0$$

$\Delta_a y_{t+2} = a\Delta_a y_{t+1}$ dir. Bu eşitliğin her iki yanına Δ_a operatörü uygulanırsa, $\Delta_a^2 y_{t+2} = a\Delta_a^2 y_{t+1}$ elde edilir. $\Delta_a^2 y_{t+1} = 0$ olduğundan, $\Delta_a^2 y_{t+2} = 0$ dır. Bu işlemlerin tekrarıyla, $p_{t+k}\Delta_a^2 y_{t+k} = 0$ yani $\Delta_a^2 y_{t+k} = 0$ olduğu görülür. (3.1) de n yerine $t+k$ yazılırsa ve (3.18)'nin ilk kısmından $\Delta_a^k(p_{t+k}\Delta_a^2 y_{t+k}) = 0$ yani fark operatörünün i. özelliği gereği

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} a^i p_{t+2k-i}\, \Delta_a^2 y_{t+2k-i} = 0$$

elde edilir.

$\Delta_a^2 y_{t+k} = 0$ ise

$$\Delta_a(\Delta_a y_{t+k}) = 0$$

$$\Delta_a(y_{t+k+1} - a y_{t+k}) = 0$$

$$\Delta_a y_{t+k+1} = a\Delta_a y_{t+k}$$

dır. Eşitliğin her iki tarafına Δ_a operatörünün uygulanmasıyla,

$$\Delta_a^2 y_{t+k+1} = a\Delta_a^2 y_{t+k}$$

elde edilir. $\Delta_a^2 y_{t+k} = 0$ olduğundan $\Delta_a^2 y_{t+k+1} = 0$ dır. Bu şekilde devam edilirse (3.18)' in ilk kısmının tekrarlı kullanımı, her $s \in \mathbb{N}$ için $\Delta_a^2 y_{t+s} = 0$ olduğu sonucunu verir. $\Delta_a^2 y_{t+1} = 0$ ise $\Delta_a y_{t+2} = a\Delta_a y_{t+1}$ dır. $\Delta_a^2 y_{t+2} = 0$ ise $\Delta_a y_{t+3} = a\Delta_a y_{t+2} = a^2\Delta_a y_{t+1}$ dır. Genellemeyle,

$$\Delta_a y_{t+l} = a^{l-1}\Delta_a y_{t+1}, \qquad l \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

elde edilir. $\Delta_a y_{t+1} = 0$ ise $l \in \mathbb{N}$ için $\Delta_a y_{t+l} = 0$ dır. Böylece

$$y_{t+l+1} = ay_{t+l}, \qquad l \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

dir. $\{y_n\}$, (3.1)'in aşikar olmayan çözümü olduğu için $y_n \neq 0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n_0 \geq t+1$ bulabiliriz. l yerine (3.20) de $n_0 - t, n_0 - t + 1, \ldots.$ yazılırsa $y_{n_0+1} = ay_{n_0}$, $y_{n_0+2} = ay_{n_0+1} = a^2 y_{n_0}, \ldots$ elde edilir. Genellemeyle, $s \in \mathbb{N}$ için $y_{n_0+s} = a^s y_{n_0}$ dır. Böylece $\{y_n\}$ eninde sonunda hep aynı işaretlidir. (3.19)'dan $\Delta_a y_{t+1} > 0$ ise $\Delta_a y_{t+l} > 0$ veya $\Delta_a y_{t+1} < 0$ ise $\Delta_a y_{t+l} < 0$ çıkar. Böylece $\{\Delta_a y_n\}$ eninde sonunda hep aynı işaretlidir. Böylece Lemma 2.1'den $\{y_n\}$ eninde sonunda hep aynı işaretlidir. Sonuç olarak $\{y_n\}$ salınımsızdır.

$y \in X_2$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\Delta_a^2 y_n \neq 0$ dır. (3.1) denklemi

$$\Delta_a^2 y_{n+k} = \frac{1}{p_{n+k}}\left[\begin{array}{c} f(n, y_n, \ldots, \Delta_a^{k+1} y_n) \\ + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} a^j \left(\sum_{m=1}^{j}\binom{j}{m}(-1)^{m+1} p_{n+k-m}\right)\Delta_a^{k+2-m}\, y_n \end{array}\right] \tag{3.21}$$

olarak yazılabilir. (3.21) de bir l sabiti için, $n = l - k + 1$ alınıp, eşitliğin her iki tarafı $\Delta_a^2 y_l$ ile çarpılırsa

$$\Delta_a^2 y_l \Delta_a^2 y_{l+1} = \frac{\Delta_a^2 y_l}{p_{l+1}} \Bigg[f(l-k+1, y_{l-k+1}, \dots, \Delta_a^{k+1} y_{l-k+1}) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j \left(\sum_{m=1}^{j} \binom{j}{m} (-1)^{m+1} p_{l-m+1} \right) \Delta_a^{k+2-m} y_{l-k+1} \Bigg]$$

olur. Fark operatörünün v. özelliği gereği $\Delta_a^2 y_l = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} a^j \Delta_a^{k+1-j} y_{l-k+1}$ biçiminde yazılabildiği için ve (3.18)'in ikinci kısmından

$$\Delta_a^2 y_l \Delta_a^2 y_{l+1} = \frac{\Delta_a^2 y_l}{p_{l+1}} \left[\begin{array}{c} f(l-k+1, y_{l-k+1}, \dots, \Delta_a^{k+1} y_{l-k+1}) \\ + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j (\sum_{m=1}^{j} \binom{j}{m} (-1)^{m+1} p_{l-m+1}) \Delta_a^{k+2-m} y_{l-k+1} \end{array} \right] > 0$$

elde edilir. $\Delta_a^2 y_l \neq 0$ olduğu için $\Delta_a^2 y_l > 0$ iken $\Delta_a^2 y_{l+1} > 0$, $\Delta_a^2 y_l < 0$ iken $\Delta_a^2 y_{l+1} < 0$ dir. (3.21) de $n = l - k + 2$ alınıp, (3.18)'in ikinci ilişkisi kullanılarak, $\Delta_a^2 y_{l+2} \Delta_a^2 y_{l+1} > 0$ elde edilir. $\Delta_a^2 y_l > 0$ iken $\Delta_a^2 y_{l+1} > 0$ ise $\Delta_a^2 y_{l+2} > 0$ veya $\Delta_a^2 y_l < 0$ iken $\Delta_a^2 y_{l+1} < 0$ ise $\Delta_a^2 y_{l+2} < 0$ dır. (3.18)'in ikinci kısmının tekrarlı kullanımı $t \in \mathbb{N}$ için $\Delta_a^2 y_l > 0$ iken $\Delta_a^2 y_{l+t} > 0$ veya $\Delta_a^2 y_l < 0$ iken $\Delta_a^2 y_{l+t} < 0$ olduğu sonucunu verir. Böylece $\{\Delta_a^2 y_n\}$ salınımsızdır. Lemma 2.2'den dolayı $\{y_n\}$ salınımsızdır. Böylece teorem ispatlanır.

Örnek 3.4

(3.1) denkleminde $p_n = 3$, $f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n) = 2\Delta_a^2 y_n$ almak suretiyle

$$3\Delta_a^3 y_n = 2\Delta_a^2 y_n, \quad a > 0 \tag{3.22}$$

denklemini göz önünde bulunduralım. $\Delta_a^2 y_n = 0$ ise $f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n) = 0$ dır. $k = 1$ için Teorem 3.3' ün ikinci koşulu

$$\frac{\Delta_a^2 y_n}{p_{n+1}} [f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n) + a p_n \Delta_a^2 y_n]$$

halini alır. Bu ifade düzenlenirse

$\frac{\Delta_a^2 y_n}{3}[2\Delta_a^2 y_n + 3a\Delta_a^2 y_n]$

olur. $\Delta_a^2 y_n \neq 0$ ve $a > 0$ olduğundan

$\frac{(\Delta_a^2 y_n)^2 (2+3a)}{3} > 0$ dır.

Teorem 3.3'e göre (3.22)'nin bütün çözümlerinin salınımsız olduğu sonucuna varılır. Gerçekten, (3.22) denklemi

$$3(y_{n+3} - 3ay_{n+2} + 3a^2 y_{n+1} - a^3 y_n) = 2(y_{n+2} - 2ay_{n+1} + a^2 y_n)$$

biçiminde açık olarak yazılırsa buradan

$$3y_{n+3} - (9a+2)y_{n+2} + (9a^2 + 4a)y_{n+1} - (2a^2 + 3a^3)y_n = 0$$

denklemine varılır. Bu fark denkleminin karakteristik denklemi

$$3\lambda^3 - (9a+2)\lambda^2 + (9a^2 + 4a)\lambda - (2a^2 + 3a^3) = 0$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifade düzenlenirse

$$(\lambda - a)(3\lambda^2 - (6a+2)\lambda + 3a^2 + 2a) = 0$$

elde edilir. Buradan (3.22)'nin çözüm uzayının tabanı $\left\{\{a^n\}, \{na^n\}, \left\{\left(\frac{3a+2}{3}\right)^n\right\}\right\}$ olarak bulunur. $a > 0$ olduğundan (3.22)' nin bütün çözümlerinin salınımsız olduğu görülür.

3.2. Çözümlerin Salınımlılığı

Teorem 3.4

$a < 0$ olsun ve aşağıdaki

$$\frac{\sum_{i=0}^{k} a^i \binom{k}{i} \Delta_a^{k+1-i} y_n}{p_{n+k}} \Big[f\big(n, y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n\big) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j \Big(\sum_{m=1}^{j} \binom{j}{m} (-1)^{m+1} p_{n+k-m}\Big) \Delta_a^{k+2-m} y_n \Big] \le 0 \qquad (3.23)$$

sağlansın. O zaman (3.1)'in bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat

$\{y_n\}$, (3.1)'in bir çözümü olsun. $\Delta_a y_n = 0$ ise $y_{n+1} = a y_n$ ve $a < 0$ olduğu için $\{y_n\}$ salınımlıdır. $\Delta_a y_n \neq 0$ olduğunu varsayalım. (3.1) denklemi, (3.12) olarak yazılabilir. Böylece,

$$\Delta_a y_{n+1} = a \Delta_a y_n + \frac{1}{p_n} \Big[f(n-k, y_{n-k}, \dots, \Delta_a^{k+1} y_{n-k}) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j \Big(\sum_{m=1}^{j} \binom{j}{m} (-1)^{m+1} p_{n-m}\Big) \Delta_a^{k+2-m} y_{n-k} \Big]$$

eşitliğinin her iki yanı $\Delta_a y_n$ ile çarpılırsa, $\Delta_a y_n \neq 0$ olduğu için ve (3.23) sağlandığından

$$\Delta_a y_n \Delta_a y_{n+1} = a (\Delta_a y_n)^2 + \frac{\Delta_a y_n}{p_n} \Big[f(n-k, y_{n-k}, \dots, \Delta_a^{k+1} y_{n-k}) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j \Big(\sum_{m=1}^{j} \binom{j}{m} (-1)^{m+1} p_{n-m}\Big) \Delta_a^{k+2-m} y_{n-k} \Big] < 0$$

dir. Burada fark operatörünün iii. özelliği gereği

$$\Delta_a y_n = \sum_{i=0}^{k} a^i \binom{k}{i} \Delta_a^{k+1-i} y_{n-k}$$

dir.

Lemma 2.3'ün bir uygulaması olarak

$$a^{n+1}\Delta\left(\frac{y_n}{a^n}\right)a^{n+2}\Delta\left(\frac{y_{n+1}}{a^{n+1}}\right) < 0,$$

yani

$$a^{2n+3}\Delta\left(\frac{y_n}{a^n}\right)\Delta\left(\frac{y_{n+1}}{a^{n+1}}\right) < 0$$

dır. $a < 0$ olduğu için

$$\Delta\left(\frac{y_n}{a^n}\right)\Delta\left(\frac{y_{n+1}}{a^{n+1}}\right) > 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.24}$$

dır. $\Delta\left(\frac{y_n}{a^n}\right) > 0$ ise $\Delta\left(\frac{y_{n+1}}{a^{n+1}}\right) > 0$ dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için (3.24) sağlandığından $\Delta\left(\frac{y_{n+1}}{a^{n+1}}\right) > 0$ ise $\Delta\left(\frac{y_{n+2}}{a^{n+2}}\right) > 0$ dır ve böyle devam eder. Bu yüzden $\left\{\Delta\left(\frac{y_n}{a^n}\right)\right\}$ eninde sonunda hep aynı işaretlidir. Sonuç olarak $b = 1$ için Lemma 2.1'den $\left\{\frac{y_n}{a^n}\right\}$ eninde sonunda hep aynı işaretlidir. $a < 0$ olduğu için $\{y_n\}$ salınımlıdır. Benzer şekilde $\Delta\left(\frac{y_n}{a^n}\right) < 0$ ise $\{y_n\}$ salınımlıdır. Böylece teorem ispatlanır.

Örnek 3.5

$a < 0$ için

$$\Delta_a^3 y_n = -(1+a)\Delta_a^2 y_n - a\Delta_a y_n \tag{3.25}$$

denklemini ele alalım. (3.1) denklemiyle karşılaştırılırsa $p_n = 1$, $k = 1$ ve $f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n) = -(1+a)\Delta_a^2 y_n - a\Delta_a y_n$ olduğu görülür. $k = 1$ için Teorem 3.4 koşulu

$$\frac{\Delta_a^2 y_n + a\Delta_a y_n}{p_{n+1}}\left[f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n) + a p_n \Delta_a^2 y_n\right]$$

halini alır. Bu ifade düzenlenirse,

$$\Delta_a^2 y_n + a\Delta_a y_n[-(1+a)\Delta_a^2 y_n - a\Delta_a y_n + a\Delta_a^2 y_n]$$

olur. Buradan

$$-(\Delta_a^2 y_n + a\Delta_a y_n)^2 \leq 0$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.4'e göre verilen denklemin bütün çözümlerinin salınımlı olduğu sonucuna varılır. Ayrıca (3.14) denklemi

$$y_{n+3} - 3ay_{n+2} + 3a^2 y_{n+1} - a^3 y_n \;= -(1+a)(y_{n+2} - 2ay_{n+1} + a^2 y_n) - a(y_{n+1} - ay_n),$$

$y_{n+3} + (-4a-1)y_{n+2} + (5a^2+a)y_{n+1} - 2a^3 y_n = 0$ şeklinde yazılabilir. Bu fark denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 + (-4a-1)\lambda^2 + (5a^2+a)\lambda - 2a^3 = 0$$

biçimindedir. Bu ifade düzenlenirse

$$(\lambda - a)(\lambda^2 + (-3a-1)\lambda + 2a^2) = 0$$

elde edilir. Buradan (3.24) denkleminin çözüm uzayının tabanı $\left\{\{(a^n)\}, \left\{\left(\frac{3a+1+\sqrt{a^2-6a+1}}{2}\right)^n\right\}, \left\{\left(\frac{3a+1-\sqrt{a^2-6a+1}}{2}\right)^n\right\}\right\}$ olarak bulunur. $a < 0$ olduğundan verilen denklemin bütün çözümleri salınımlıdır.

Uyarı 3.1

$a < 0$ ve

$$\frac{1}{p_{n+k}}\Big[f(n, y_n, \Delta_a y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} a^j \Big(\sum_{m=1}^{j}\binom{j}{m}(-1)^{m+1} p_{n+k-m}\Big)\Delta_a^{k+2-m} y_n\Big] = 0 \qquad (3.26)$$

olsun. O zaman (3.1)' in bütün çözümleri salınımlıdır.

$\{y_n\}$, (3.1)'in salınımsız bir çözümü ise, $n \geq k_0$ için $y_n > 0$ veya $y_n < 0$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (3.1) denklemi

$$\Delta_a^2 y_{n+k} = \frac{1}{p_{n+k}}\left[\begin{array}{c} f(n, y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) \\ + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j \left(\sum_{m=1}^{j} \binom{j}{m} (-1)^{m+1} p_{n+k-m}\right) \Delta_a^{k+2-m} y_n \end{array}\right]$$

olarak yazılabildiği için, (3.26)'dan $n \in \mathbb{N}$ için $\Delta_a^2 y_{n+k} = 0$ elde edilir. $n \geq k_0$ olsun. $k \geq 1$ için $\Delta_a^2 y_{n+1} = 0$, $\Delta_a y_{n+2} = a\Delta_a y_{n+1}$ olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde $\Delta_a^2 y_{n+2} = 0$ ise $\Delta_a y_{n+3} = a\Delta_a y_{n+2} = a^2 \Delta_a y_{n+1}$ dir. Genellersek, $\Delta_a^2 y_{n+k} = 0$ ise $\Delta_a y_{n+k+1} = a^k \Delta_a y_{n+1}$, $k \in \mathbb{N}$ dir. Özellikle, $\Delta_a y_{k_0+k+1} = a^k \Delta_a y_{k_0+1}$ dır. $n \geq k_0$ için $y_n > 0$ olsun. $\Delta_a y_{k_0+1}$ için, $\Delta_a y_{k_0+1} = 0$, $\Delta_a y_{k_0+1} < 0$ ve $\Delta_a y_{k_0+1} > 0$ olması durumlarını düşünelim. Her bir durumda bir çelişki elde edilir. $\Delta_a y_{k_0+1} = 0$ ise $\Delta_a y_{k_0+k+1} = 0$, yani $y_{k_0+k+2} = a y_{k_0+k+1} < 0$ dır. $n \geq k_0$ için $y_n > 0$ olması ile çelişir. $\Delta_a y_{k_0+1} > 0$ olsun. O zaman $\Delta_a y_{k_0+2k+2} = a^{2k+1} \Delta_a y_{k_0+1} < 0$ dır. Yani, $y_{k_0+2k+3} = a y_{k_0+2k+2} < 0$ olup, bir çelişkidir. $\Delta_a y_{k_0+1} < 0$ ise, $\Delta_a y_{k_0+2k+1} = a^{2k} \Delta_a y_{k_0+1} < 0$ dır. $y_{k_0+2k+2} = a y_{k_0+2k+1} < 0$ olduğu anlamına gelir ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden $n \geq k_0$ için $y_n > 0$ olması mümkün değildir. O halde $n \geq k_0$ için $y_n < 0$ olsun. Yukarıdaki gibi işlemlerle aynı üç durumun her birinde yine bir çelişkiye ulaşılır. Böylece $n \geq k_0$ için $y_n < 0$ olması da mümkün değildir. Bu yüzden $\{y_n\}$ salınımlıdır.

Örnek 3.6

$a < 0$ için

$$2\Delta_a^4 y_n = -(4a\Delta_a^3 y_n + 2a^2 \Delta_a^2 y_n)$$

denklemini ele alalım. (3.1) denklemiyle karşılaştırılırsa $p_n = 2$, $k = 2$ ve $f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n) = -(4a\Delta_a^3 y_n + 2a^2 \Delta_a^2 y_n)$ olduğu görülür. $k = 2$ için Uyarı 3.1 deki koşul

$\frac{1}{p_{n+2}}[f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \Delta_a^3 y_n) + 2ap_{n+1}\Delta_a^3 y_n + a^2(2p_{n+1} - p_n)\Delta_a^2 y_n]$

halini alır. Buradan

$\frac{1}{2}[-(4a\Delta_a^3 y_n + 2a^2\Delta_a^2 y_n) + 4a\Delta_a^3 y_n + 2a^2\Delta_a^2 y_n] = 0$

olur. Yukarıdaki uyarının ışığında verilen denklemin bütün çözümleri salınımlıdır. $\{a^n\}$ ve $\{na^n\}$, bu denklemin salınımlı iki çözümüdür.

Teorem 3.5

$a < 0$ olsun ve aşağıdaki

$\Delta_a^2 y_n = 0$ ise $f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) = 0,$

$\Delta_a^2 y_n \neq 0$ ise

$$\frac{\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}a^j\Delta_a^{k+1-j}y_n}{p_{n+k}}\Big[f\big(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n\big) + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}a^j\Big(\sum_{m=1}^{j}\binom{j}{m}(-1)^{m+1}p_{n+k-m}\Big)\Delta_a^{k+2-m}y_n\Big] < 0 \qquad (3.27)$$

sağlansın. O zaman (3.1)' in bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat

X, (3.1)'in bütün $y = \{y_n\}$ çözümlerinin kümesi olsun. $X_1 = \{y \in X: \Delta_a^2 y_n = 0, \exists n \in \mathbb{N}\}$ ve $X_2 = X - X_1$ olsun. $y = \{y_n\}$, (3.1)' in salınımsız bir çözümü olsun. Böylece $\{y_n\}$ eninde sonunda hep aynı işaretlidir.

$y \in X_1$ ise $\Delta_a^2 y_t = 0$ olacak şekilde $t \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece (3.1) ve (3.27)'den $\Delta_a^k(p_t\Delta_a^2 y_t) = 0$ olduğu çıkar. Fark operatörünün i. özelliği gereği

$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a^i p_{t+k-i}\Delta_a^2 y_{t+k-i} = 0$

olup,

$$p_{t+k}\Delta_a^2 y_{t+k} - \binom{k}{1} a p_{t+k-1}\Delta_a^2 y_{t+k-1} + \binom{k}{2} a^2 p_{t+k-2}\Delta_a^2 y_{t+k-2} + \cdots + (-1)^k a^k p_t \Delta_a^2 y_t = 0$$

dir.

$$p_{t+k}\Delta_a^2 y_{t+k} = \binom{k}{1} a p_{t+k-1}\Delta_a^2 y_{t+k-1} - \binom{k}{2} a^2 p_{t+k-2}\Delta_a^2 y_{t+k-2} + \cdots - (-1)^k a^k p_t \Delta_a^2 y_t.$$

$\Delta_a^2 y_t = 0$ ise

$$\Delta_a(\Delta_a y_t) = 0$$

$$\Delta_a(y_{t+1} - a y_t) = 0$$

$$\Delta_a y_{t+1} = a\Delta_a y_t$$

dir. Bu eşitliğin her iki yanına Δ_a operatörü uygulanırsa,

$$\Delta_a^2 y_{t+1} = a\Delta_a^2 y_t$$

elde edilir. $\Delta_a^2 y_t = 0$ olduğundan, $\Delta_a^2 y_{t+1} = 0$ dır.

$\Delta_a^2 y_{t+1} = 0$ ise

$$\Delta_a(\Delta_a y_{t+1}) = 0$$

$$\Delta_a(y_{t+2} - a y_{t+1}) = 0$$

$$\Delta_a y_{t+2} = a\Delta_a y_{t+1}$$

dir. Bu eşitliğin her iki yanına Δ_a operatörü uygulanırsa,

$$\Delta_a^2 y_{t+2} = a\Delta_a^2 y_{t+1}$$

elde edilir. $\Delta_a^2 y_{t+1} = 0$ olduğundan, $\Delta_a^2 y_{t+2} = 0$ dır. Bu işlemlerin tekrarıyla, $p_{t+k}\Delta_a^2 y_{t+k} = 0$ yani $\Delta_a^2 y_{t+k} = 0$ dır. $k \geq 1$ için $\Delta_a^2 y_{t+1} = 0$ ise $\Delta_a y_{t+2} = a\Delta_a y_{t+1}$ dir. $\Delta_a^2 y_{t+2}$= 0 ise $\Delta_a y_{t+3} = a\Delta_a y_{t+2} = a^2\Delta_a y_{t+1}$ dir ve böyle devam eder. Genellemeyle, $\Delta_a y_{t+k} = a^{k-1}\Delta_a y_{t+1}$ elde ederiz. $k \geq k_0$ için $y_k > 0$ veya $y_k < 0$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. $k \geq k_0$ için $y_k > 0$ olsun. $\Delta_a y_{t+1} = 0$ ise $\Delta_a y_{t+k_0} = 0$ dır yani $y_{t+k_0+1} = ay_{t+k_0} < 0$, bir çelişkidir. $\Delta_a y_{t+1} > 0$ ise $\Delta_a y_{t+2k_0} = a^{2k_0-1}\Delta_a y_{t+1} < 0$ dır ve böylece $y_{t+2k_0+1} = ay_{t+2k_0} < 0,$ bir çelişkidir. $\Delta_a y_{t+1} < 0$ ise $\Delta_a y_{t+2k_0+1} = a^{2k_0}\Delta_a y_{t+1} < 0$ dır yani $y_{t+2k_0+2} = ay_{t+2k_0+1} < 0$ olur ki bu da bir çelişkidir. Benzer çelişki $k \geq k_0$ için $y_k < 0$ olması durumunda da elde edilir. Böylece $y \notin X_1$ dir.

$y \in X_2$ olsun. Bu yüzden her $n \in \mathbb{N}$ için $\Delta_a^2 y_n \neq 0$ dır. (3.1) denklemi

$$\Delta_a^2 y_{n+k} = \frac{1}{p_{n+k}}\left[\begin{array}{c} f(n, y_n, \dots, \Delta_a^{k+1} y_n) \\ + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j \left(\sum_{m=1}^{j} \binom{j}{m} (-1)^{m+1} p_{n+k-m}\right) \Delta_a^{k+2-m}\, y_n \end{array}\right]$$

olarak yazılabilir. $n \to n-k+1$ alıp yukarıdaki eşitliğin her iki yanı $\Delta_a^2 y_n$ ile çarpılırsa

$$\Delta_a^2 y_n\ \Delta_a^2 y_{n+1} = \frac{\Delta_a^2 y_n}{p_{n+1}}\left[\begin{array}{c} f(n-k+1, y_{n-k+1}, \dots, \Delta_a^{k+1} y_{n-k+1} \\ + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j \left(\sum_{m=1}^{j} \binom{j}{m} (-1)^{m+1} p_{n-m+1}\right) \Delta_a^{k+2-m}\, y_{n-k+1} \end{array}\right]$$

olur. Fark operatörünün v. özelliği gereği $\Delta_a^2 y_n = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} a^j \Delta_a^{k+1-j} y_{n-k+1}$ olarak yazılabildiği göz önünde bulundurularak (3.27)'nin ikinci kısmından

$$\Delta_a^2 y_n\ \Delta_a^2 y_{n+1} = \frac{\Delta_a^2 y_n}{p_{n+1}}\left[\begin{array}{c} f(n-k+1, y_{n-k+1}, \dots, \Delta_a^{k+1} y_{n-k+1} \\ + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j \left(\sum_{m=1}^{j} \binom{j}{m} (-1)^{m+1} p_{n-m+1}\right) \Delta_a^{k+2-m}\, y_{n-k+1} \end{array}\right] < 0$$

elde edilir. Lemma 2.3'ün bir uygulaması olarak $a^{n+2}\Delta^2\left(\frac{y_n}{a^n}\right) a^{n+3}\Delta^2\left(\frac{y_{n+1}}{a^{n+1}}\right) < 0$ yani, $a^{2n+5}\Delta^2\left(\frac{y_n}{a^n}\right)\Delta^2\left(\frac{y_{n+1}}{a^{n+1}}\right) < 0$ dır. $a < 0$ olduğundan, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$\Delta^2\left(\frac{y_n}{a^n}\right)\Delta^2\left(\frac{y_{n+1}}{a^{n+1}}\right) > 0$ dır. $\Delta^2\left(\frac{y_n}{a^n}\right) > 0$ ise $\Delta^2\left(\frac{y_{n+1}}{a^{n+1}}\right) > 0$ ve $\Delta^2\left(\frac{y_{n+2}}{a^{n+2}}\right) > 0$ dır ve böyle devam eder. Aynı şekilde, $\Delta^2\left(\frac{y_n}{a^n}\right) < 0$ ise $\Delta^2\left(\frac{y_{n+1}}{a^{n+1}}\right) < 0$ ve $\Delta^2\left(\frac{y_{n+2}}{a^{n+2}}\right) < 0$ dır ve böyle devam eder. Böylece $\left\{\Delta^2\left(\frac{y_n}{a^n}\right)\right\}$ aynı işaretlidir. Lemma 2.2'e göre $\left\{\Delta\left(\frac{y_n}{a^n}\right)\right\}$ eninde sonunda hep aynı işaretliyse, $\left\{\frac{y_n}{a^n}\right\}$ eninde sonunda hep aynı işaretlidir. Sonuç olarak $\{y_n\}$ salınımlıdır, bu bir çelişkidir. Bu yüzden $y \notin X_2$ dir. Böylece (3.1)' in bütün çözümleri salınımlıdır ve bu teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 3.7

$a < 0$ için

$$3\Delta_a^3 y_n = -2\Delta_a^2 y_n \tag{3.28}$$

denklemini ele alalım. (3.1) denklemiyle karşılaştırılsa $k = 1,\ p_n = 3$ ve $f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n) = -2\Delta_a^2 y_n$ olduğu görülür. Teorem 3.5'in ilk kısmından $\Delta_a^2 y_n = 0$ ise, $f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n) = 0$ dır. Aynı şekilde Teorem 3.5'in ikinci koşulu $k = 1$ için

$$\frac{\Delta_a^2 y_n}{p_{n+1}}\left[f(n, y_n, \Delta_a y_n, \Delta_a^2 y_n) + a p_n \Delta_a^2 y_n\right]$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\frac{\Delta_a^2 y_n}{3}\left[-2\Delta_a^2 y_n + 3a\Delta_a^2 y_n\right]$$

dır. $\Delta_a^2 y_n \neq 0$ ve $a < 0$ olduğundan dolayı

$$(\Delta_a^2 y_n)^2\left(\frac{-2+3a}{3}\right) < 0$$

sonucuna varılır. Böylece Teorem 3.5'e göre (3.28)'in bütün çözümleri salınımlıdır. Ayrıca (3.28) fark denkleminin karakteristik denklemi

$$(\lambda - a)^2(3\lambda^2 + (2 - 6a)\lambda + 3a^2 - 2a) = 0$$

dır. Böylece verilen denklemin çözüm uzayının tabanı $\left\{\{a^n\}, \{na^n\}, \left\{\left(\frac{3a-2}{3}\right)^n\right\}\right\}$ dir. $a < 0$ olduğu için verilen denklemin bütün çözümleri salınımlıdır.

4. KAYNAKLAR

1. Bereketoğlu, H., ve Kutay, V. (2012). *Fark denklemleri.* Ankara: Gazi Kitabevi

2. Kutay, V. (2010). Fark denklemleri. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.* Ankara.

3. URL-1. Bazı Ekonometrik Modeller, 12/10/2015 tarihinde http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/Dersler/ist402/Ders7/Ders7.pdf adresinden alınmıştır.

4. Popenda, J. (1987). Oscillation and nonoscillation theorems for second-order difference equations. *Journal of mathematical analysis and applications, 123,* 34-38.

5. Tan, M., & Yang, E. (2002). Oscillation and nonoscillation theorems for second order nonlinear difference equations. *Journal of mathematical analysis and applications, 276*, 239-247.

6. Parhi, N., & Panda, A. (2007). Nonoscillation and oscillation of solutions of a class of third order difference equations. *J.Math. Anal. Appl., 336,* 213-223. doi:10.1016/j.jmaa. 2007.02. 054

7. Agarwal, R. P., & Grace, S. R., & O'Regan, Donal. (2000). *Oscillation theory for difference and functional differential equations.* London : Kluwer Academic Publishers.

8. Goldberg, S. (1958). *Introduction to difference equations with illustrative example from economics,psychology and sociology.* New York.

9. Elaydi, S. (2005). *An introduction to difference equations*. USA : Springer.

10. Akın, Ö., ve Bulgak, H. (1998). *Lineer fark denklemleri ve kararlılık teorisi.* Konya: Selçuk Üniversitesi Rektörlüğü Basımevi.

11. Elaydi, S., and Peterson, A. (1988). Stability of difference equations. *Proceeding of the international conference on theory and applications of differential equations, edited by Aftabizadeh R.*, 417-422.

12. Gordon, S. (1971). Stability and summability of solutions of difference equations. *Math. Syst. Theory*. 5, 56-75.

13. Lasalle, J. P. (1977). Stability theory for difference equations. *MAA studies in mathematics.* 14, 1-31.

14. Mickens, R. (1990). Difference equations. New York.

15. Miller, K. S. (1968). Linear difference equations. New York.

16. Peterson, A. (1987). Existence and uniqueness theorems for nonlinear difference equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 125, 185-191.

17. Sugiyama, S. (1969). On the stability problems on difference equations. *Bull. Sci. Enq. Research Lab. Woseda Univ.*, 45, 140-144.

18. Bolat, Y. (2005). Oscillation criteri for nonlinear second-order difference equations with a nonlinear damped term. *Applied Mathematics Letters.*18, 329-338.

19. Zafer, A. (1998). The existence of positive solutions and oscillation of solutions of higher order difference equations with forcing terms. *Comput. Math. Appl.*, 36, 10-12, 27-35.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Aysun NAR
Doğum Yeri ve Yılı : Kastamonu 1990
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : aysun_nar.90@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Mustafa Kaya Anadolu Lisesi, 2004
Lisans : Bülent Ecevit Üniversitesi, 2012

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Mat-Fen Dershanesi (2012-2014)