T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFINININ ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI ÜZERİNE

Murat GEVGEŞOĞLU

Danışman	**Prof. Dr. Yaşar BOLAT**
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Kemal AYDIN**
Jüri Üyesi	**Yrd. Doç. Dr. Turhan KÖPRÜBAŞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASTAMONU – 2016

TEZ ONAYI

Murat GEVGEŞOĞLU tarafından hazırlanan **"Fark Denklemlerinin Bir Sınıfının Çözümlerinin Kararlılığı Üzerine"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Prof. Dr. Yaşar BOLAT Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Kemal AYDIN Selçuk Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Yrd. Doç. Dr. Turhan KÖPRÜBAŞI Kastamonu Üniversitesi	....

20/05/2016

Enstitü Müdürü Prof. Dr. Temel SARIYILDIZ ....

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

Murat GEVGEŞOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFINININ ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI ÜZERİNE

Murat GEVGEŞOĞLU
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yaşar BOLAT

Bu tezde, Schur-Cohn kriteri kullanılarak genelleştirilmiş fark operatörü içeren bazı lineer homojen fark denklemlerinin asimtotik kararlılığı için bazı yeni sonuçlar verilmiştir.

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fark denklemlerinin tarihi gelişim süreci ve uygulama alanları hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili temel tanım, teoremler ve Schur-Cohn kriteri hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde Schur-Cohn kriteri kullanılarak genelleştirilmiş fark operatörü içeren bazı lineer homojen fark denklemlerinin asimtotik kararlılığı incelenmiş ve bazı yeni sonuçlar elde edilerek örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemleri, denge noktası**,** asimtotik kararlılık.

2016, 53 Sayfa
Bilim Kodu: 204

ABSTRACT

MSc. Thesis

ON THE STABILITY OF A CLASS OF SOLUTIONS OF DIFFERENCE EQUATIONS

Murat GEVGEŞOĞLU
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathemathics

Supervisor: Prof. Dr. Yaşar BOLAT

In this thesis, using Schur-Cohn criteria some stability results are given for some linear, homogeneous difference equations including generalized difference operator.

Thesis has three parts. In the first part historical background about difference equations and the application area of difference equations are given. In the second part, basic definitions, theorems for difference equations and Schur-Cohn criteria are reminded. In the third part, using Schur-Cohn criteria some stability results are given for some linear, homogeneous difference equations including generalized difference operator and some new results are obtained.

Keywords: Difference equations, equilibrium point, asymptotic stability
2016, 53 pages
Science Code: 204

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Yaşar BOLAT (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü) 'a ve maddi katkısından dolayı TÜBİTAK' a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Her zaman yanımda olan eşim ve biricik kızıma gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Murat GEVGEŞOĞLU
Kastamonu, Mayıs, 2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

E	$Ey(x) = y(x+h)$ biçiminde tanımlanan öteleme(kaydırma) operatörü
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ biçiminde tanımlanan doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\dots\}$ biçiminde tanımlanan doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ biçiminde tanımlanan reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} = \{a + ib: a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ biçiminde tanımlanan karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan kartezyen kümesi
$\bar{x}$	Denge noktası
$W(n)$	$x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$ çözümlerinin Casoratian determinantı
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$=$\{\dots, -2, -1,0,1,2,,\dots\}$ biçiminde tanımlı tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{Z}^+$=$\{1,2,3,\dots\}$ biçiminde tanımlı pozitif tamsayılar kümesi
Δ	$\Delta x(n) = x(n+h) - x(n)$ biçiminde tanımlanan ileri fark operatörü
$\Delta_{l,a}$	$\Delta_{l,a} x(n) = x(n+l) - ax(n)$ biçiminde tanımlanan genelleştirilmiş fark operatörü
$\Delta_{l,a}^m$	m. mertebeden genelleştirilmiş fark operatörü
Δ^0	Birim operatör

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Fark denklemi, bir ya da birden fazla değişkenli bir fonksiyonun sonlu farkları ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenleri arasındaki ilişkiyi veren cebirsel bir bağıntıdır. Diferensiyel denklemler fiziksel olaylardaki sürekli değişim oranlarının arasındaki ilişkiyi verir. Ancak doğadaki olayların tamamı süreklilik arz etmez. Fark denklemleri süreklilik arz etmeyen, eşit aralıklı zamana göre değişen olayların matematiksel modellemesinde kullanılır. Çünkü zamana göre değişen, gelişen birçok durum ayrıktır (discrete). Bunun yanında fark denklemleri diferensiyel denklemlerin ayrıklaştırılması (discretization) yöntemlerinde de karşımıza çıkar.

Fonksiyonel denklemler olarak da isimlendirilen fark denklemleri, diferensiyel denklemlere benzerlik gösterirler. Fakat inceleme süreci yönünden, diferensiyel denklemlerden daha yenidir. Diferensiyel denklemler 200 yılı aşan bir sürede incelendiği halde, fark denklemler 100 yıllık bir inceleme sürecinde sistematik hale gelmiştir [1].

Diferensiyel denklemlerin vazgeçilmez bilimsel öneminde “doğada kopukluklar yoktur” yanlış varsayımına yer veriliyordu. Bu eski hipoteze göre, fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Bu nedenle diferensiyel denklemler, fizik bilimine özgü matematiksel ifadeler olarak kabul ediliyordu. Fakat 20. yüzyıl başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Böylece doğadaki bazı olaylar fark denklemleri kullanılarak ifade edilmeye başlanmıştır [1].

Fark denklemleri ve rekürans (özyinelemeli) bağıntılarının tarihsel gelişimini dönem dönem şu şekilde inceleyebiliriz:

M.Ö 600-0 yılları arasında fark denklemleri, rekürans bağıntıları ve onların özellikleri ilk kez antik Yunan da Pythagoras[1], Archimedes[2] ve

---

[1] Pythagoras (MÖ 570-MÖ 495) İyonyalı filozof, matematikçi.
[2] Archimedes (MÖ 287-M.Ö 212) Yunan matematikçi, fizikçi, astronom, filozof, mühendis.

Euclid[3] tarafından incelenmiştir. Pythagoras'ın en önemli katkısı üçgensel sistem biçimindeki sayılar düşüncesini ortaya koymasıdır. Pythagoras üçgensel sistem biçimindeki sayıları , t_n üçgensel sistemin n. sayısını göstermek ve $t_1 = 1$ olmak üzere

$$t_n = t_{n-1} + n$$

kuralı ile vermiştir. Archimedes in π sayısını hesaplayabilmek için bulduğu yöntem 9. yüzyılın sonlarına kadar kullanılmıştır. Bu metoda göre bir çemberin içine çevrel çemberi bu çember olan düzgün çokgenler ve çemberin etrafına iç teğet çemberi bu çember olan düzgün çokgenler yerleştirilir. Çokgenlerin kenar sayıları artırıldığında dıştaki ve içteki düzgün çokgenlerin alanları giderek dairenin alanına yaklaşır. Böylece π nin yaklaşık değeri bulunmuş olur. Euclid ise özyinelemeli bağıntılarını sürekli kesirlerin değerini hesaplamak için kullanmıştır [2].

0-400 yılları arasında rekürans bağıntılarına en önemli katkıyı Heron[4], Smyrnalı (İzmirli) Theon[5] ve Diophantus[6] yapmıştır. Heron, kendi adıyla anılan formülde, pozitif a sayısının karekökünün yaklaşık değerini hesaplamak için

$$x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$$

bağıntısını kullanmıştır. Smyrnalı Theon da pozitif a sayısının yaklaşık değerini bulmak için lineer sistemleri ve köklü sayıları kullanmıştır. Diophantus ise Diophanten denklemleri olarak bilinen denklemlerin çözümünde rekürans bağıntılarını kullanmıştır [2].

400-1200 arasındaki yıllar matematik için kara çağ olarak da ifade edilir. Bu dönemde matematiğe Avrupa'da yaşamış matematikçilerin önemli bir katkısı görülmemektedir. Bu çağda rekürans bağıntılarına en önemli katkıyı Orta Doğu coğrafyasında yaşamış matematikçiler yapmışlardır. Bu matematikçiler arasında

---

[3] Euclid (MÖ 330-MÖ 275) İskenderiyeli matematikçi.
[4] Heron (10-70) Yunan matematikçi ve mühendis.
[5] Smyrnalı(İzmirli) Theon (70-135) Yunan matematikçi.
[6] Diophantus (200-284) Yunan matematikçi.

Brahmagupta[7], Al-Karaji[8], Omar Khayyam[9], Bhaskara[10], Al-Samaval[11], Al-Tusi[12] gösterilebilir. Brahmagupta matrisi olarak bilinen

$$B(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \\ \pm ty & \pm tx \end{bmatrix}$$

matrisinin kuvvetlerini alarak oluşturulan Brahmagupta polinomları

$$x_{n+1} = xx_n + tyy_n$$

ve

$$y_{n+1} = xy_n + yx_n$$

rekürans bağıntılarını sağlar [2].

1200-1600 yılları arasında fark denklemleri ve rekürans bağıntılarına en önemli katkıyı Fibonacci[13], Nasir Al-Tusi[14], Yang Hui[15], Al-Banna[16], Al-Farisi[17] ve Shih-Chieh[18] yapmıştır. Fibonacci,

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1),\ \ F(1) = F(2) = 1,\ \ n = 2,3,\dots$$

denklemini ele alarak biyolojide tavşan problemi olarak bilinen problemin ilk matematiksel modelini ortaya koymuştur [2].

---

[7] Brahmagupta (598-670) Hint matematikçi ve gökbilimci.
[8] Al-Karaji (953-1029) İran lı Müslüman matematikçi ve mühendis.
[9] Omar Khayyam (1048-1131) Persli matematikçi, şair, filozof.
[10] Bhaskara (1114-1185) Hintli matematikçi
[11] Al-Samawʾal ibn Yaḥyā al-Maghribī (1130-1180) Müslüman matematikçi, astronom, fizikçi.
[12] Nasîrüddin Tûsî (1201-1274) Türk bilgin, İslam filozofu.
[13] Leonardo Pisano Fibonacci (1170-1250) İtalyan matematikçi.
[14] Nasüriddin Tüsi (1201-1274) Fars Bilgin, İslam filozofu.
[15] Yang Hui (1238-1298) Çinli matematikçi.
[16] Al-Marrakushi ibn Al-Banna (1256-1321) Faslı matematikçi.
[17] Kemaleddin Hasan ibn Ali ibn Hasan el Farisi (1267-1319) İranlı matematikçi ve fizikçi.
[18] Chu Shih-Chieh (1249-1314) Çinli matematikçi.

1600-1700 yılları arasında fark denklemleri ve rekürans bağıntılarına Bernoulli[19], Moivre[20], Newton[21] ve Pascal[22] katkı sağlamışlardır. Jacob Bernoullinin "Bernoulli sayıları" olarak bilinen sayıları rekürans bağıntısı olarak ifade edilebilir. Newton metodu yardımı ile diferensiyellenebilir bir fonksiyonun sıfırları teğet doğru yaklaşımıyla yaklaşık olarak bulunabilir. Newton metodunda x_n, $f(r) = 0$ eşitliğini sağlayan r değerine yakın bir sayı olarak seçildiğinde

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

rekürans bağıntısı yardımı ile r ye daha yakın bir yaklaşım elde edilir. Newton metodu $|x_0 - r|$ değeri küçük olduğu durumda sonuç vermektedir. Blaise Pascal binom katsayıları üzerine kayda değer çalışmalar yapmış ve ${a^n}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ olmak üzere

$${a^n}_k = {a^{n-1}}_{k-1} + {a^{n-1}}_k$$

rekürans formülünün kullanılması ile Pascal üçgeni tablosunun sonsuz bir şekilde genişletilebileceğini göstermiştir [2].

1700-1800 yılları arasında fark denklemleri ve rekürans bağıntılarına katkı yapanlar arasında Riccati[23], Simson[24], Euler[25], Johann Bernoulli[26], G. Monge[27], Laplace[28] ve Lagrange[29] bulunur. Riccati'nin çalışmaları temel olarak analiz ve özel olarak da diferensiyel denklemler üzerine olmuştur. Denklemlerin mertebelerinin düşürülmesi ve parametrelerin değişimi ile ilgili kayda değer sonuçlar elde etmiştir.

[19] Jacob Bernoulli (1655-1705) İsviçreli matematikçi.
[20] Abraham de Moivre (1667-1754) Fransız matematikçi.
[21] Sir Isaac Newton (1643-1727) İngiliz fizikçi, matematikçi, astronom, filozof, mucit ve ilahiyatçı.
[22] Blaise Pascal (1623 –1662) Fransız matematikçi ve fizikçi.
[23] Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) İtalyan matematikçi.
[24] Robert Simson (1687-1768) İskoç matematikçi.
[25] Leonhard Euler (1707-1783) İsviçreli matematikçi ve fizikçi.
[26] Johann Bernoulli (1667-1748) İsviçreli matematikçi.
[27] Gaspard Monge (1746-1818) Fransız matematikçi
[28] Pierre-Simon (Marquis de) Laplace(1749-1827) Fransız matematikçi.
[29] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) İtalyan matematikçi ve astronom.

$$x_{n+1} = \frac{a+bx_n}{c+dx_n}$$

biçimindeki fark denklemi Riccati fark denklemi olarak anılmaktadır. Yine bu dönemin matematikçilerinden olan Roberts Simson 1753 tarihli bir notunda Fibonacci sayıları büyüdükçe ardışık iki Fibonacci sayısının oranının altın oran olarak bilinen $(1+\sqrt{5})/2 = 1{,}6180\ldots$ sayısına yakınsadığını belirtmiştir. Euler farklar için ilk defa Δ operatörünü kullanmıştır. 1771 yılından başlayarak birkaç yıl boyunca Monge, Academie de kısmi türevli denklemler ve sonlu fark denklemlerinin geometrisi ile ilgili önemli yayınlar yayınlamıştır. 1794 de Laplace ve Lagrange homojen olmayan değişken katsayılı fark denklemlerini çözmek için parametrelerin değişimi yöntemini kullanmışlardır [2].

1801-1900 yılları arasında Babbage[30], Bessel[31], Farey[32], Gauss[33], Gompertz[34] ve Legendre[35], Cauchy[36], Sturm[37], Verhulst[38], Jacobi[39], Dirichlet[40], Liouville[41], Catalan[42], Heine[43], Casorati[44] ve Riemann[45], Hermite[46], Christoffel[47], Routh[48], Laguerre[49], Lucas[50], Gegenbauer[51], Poincare[52], Markov[53], Chebychev[54] ve

[30] Charles Babbage (1791-1871) İngiliz matematikçi, analitik filozof, makine mühendisi.
[31] Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) Alman gökbilimci, matematikçi.
[32] John Farey (1766-1826) İngiliz matematikçi.
[33] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Alman matematikçi.
[34] Benjamin Gompertz (1779-1865) İngiliz matematikçi.
[35] Adrien-Marie Legendre (1752-1833) Fransız matematikçi.
[36] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) Fransız matematikçi.
[37] Jacques Charles-François Sturm (1803-1855) İsviçreli matematikçi.
[38] Pierre François Verhulst (1804-1849) Belçikalı matematikçi.
[39] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) Alman matematikçi.
[40] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) Alman matematikçi.
[41] Joseph Liouville (1809-1882) Fransız matematikçi.
[42] Eugène Charles Catalan (1814-1894) Belçikalı matematikçi.
[43] Heinrich Eduard Heine (1824-1881) Alman matematikçi.
[44] Felice Casorati (1835-1890) İtalyan matematikçi.
[45] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) Alman matematikçi.
[46] Charles Hermite (1822-1901) Fransız matematikçi.
[47] Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) Alman matematikçi.
[48] Edward John Routh (1831-1907) Kanadalı matematikçi.
[49] Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886) Fransız matematikçi
[50] François Édouard Anatole Lucas (1842-1891) Fransız matematikçi.
[51] Leopold Bernhard Gegenbauer (1849-1903) Avusturyalı matematikçi.
[52] Jules HenriPoincaré (1854- 1912) Fransız matematikçi, fizikçi, mühendis.
[53] Andrey (Andrei) Andreyevich Markov (1856-1922) Rus matematikçi.
[54] Pafnutiy Lvoviç Çebışov (1821-1894) Rus matematikçi.

Peano[55] nın çalışmalarını görmekteyiz. Charles Babbage $f(x)$ fonksiyonunun $Df(x)$ farkını $x_1 \neq x_2$ için $Df(x) = f(x_1) - f(x_2)$ şeklinde tanımlayarak bu bağıntıyı basit bir polinom biçiminde ifade edilen bir fonksiyonun nümerik değerini hesaplamak için kullanmıştır. Sturm $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{2n}$ ve $S: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ simplektik matris olmak üzere $x_{k+1} = S_k x_k$ biçimindeki simplektik fark sistemleri üzerine çalışmıştır. Simplektik fark sistemleri birçok fark denklemi ve sistemini kapsamaktadır. Bunlar arasında özel bir durum olan

$$\Delta\big(r_k \Delta(s_k)\big) = p_k s_{k+1}, \quad \Delta(s_k) := s_{k+1} - s_k$$

Sturm-Liouville fark denkleminin salınımlılığı ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu dönemde Verhulst bir jenerasyonun popülasyon büyüklüğünün bir önceki jenerasyonun popülasyon büyüklüğü ile orantılı olduğunu ifade eden temel matematiksel modeli oluşturmuştur. Bunu matematiksel olarak

$$p_{t+1} = r p_t$$

denklemi ile ifade etmiştir. Burada t zaman periyodunu (ele alınan cinse göre dakika, hafta, ay, yıl olabilir), p_t t zamanındaki popülasyon büyüklüğünü, p_{t+1} bir sonraki zaman periyodundaki popülasyon büyüklüğünü, r ise Malthusian olarak bilinen büyüme oranını göstermektedir. Verhulst 1846 yılında yaptığı araştırmada popülasyondaki büyümenin sadece popülasyonun büyüklüğüne bağlı olmadığını bu büyüklüğün üst limitinden ne kadar uzak olduğu ile de ilgili olduğunu göstermiştir. Verhulst bir önceki denklemine

$$(K - p_t)/K$$

terimini ekleyerek lojistik fark denklemi olarak bilinen lineer olmayan

$$p_{t+1} = r p_t\,(K - p_t)/K$$

[55] Giuseppe Peano (1852-1938) İtalyan matematikçi, felsefeci.

denklemini oluşturmuştur. Burada K, yaşam çevresinin destekleyebileceği maksimum popülasyon büyüklüğünü göstermektedir. Liouville, Sturm ile beraber fark denklemlerinin salınımlılık teorisinin kurulmasında katkılar sağlamıştır. Eugene Charles Catalan'ın ismi ile anılan Catalan sayıları (1,2,5,14,42,132,429,…) kombinatorikteki bazı problemlerde karşımıza çıkar ve

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{n}{2}$$

formülü ile elde edilir. Catalan sayılarının her biri kendisinden önceki sayılara bağlıdır. Bu sayılar arasında $C(0) = 1$ olmak üzere

$$C(n+1) = \sum_{i=0}^{n} c(i)C(n-i)\,, n \geq 0$$

bağıntısı vardır. Süper Catalan sayıları ise $S(1) = S(2) = 1$ olmak üzere

$$S(n) = \frac{3(2n-3)S(n-1) - (n-3)S(n-2)}{n}$$

rekürans formülü ile verilir. Bu dönemde Heine, Legendre polinomları, Lame fonksiyonları ve Bessel fonksiyonları üzerine çalışmalar yapmıştır. Cosarati, fark denklemleri ve diferensiyel denklemlerin birçok benzer özelliklere sahip olduklarını fark etmiş ve lineer fark denklemleri için Cosarati formülünü ortaya koymuştur. Lineer fark denklemlerdeki Cosarati matrisi lineer diferensiyel denklemlerdeki Wronskian matrisi ile benzer özelliğe sahiptir. n sabit bir sayı olmak üzere Hermite denklemi olarak bilinen

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

denkleminin $H_n(x)$ çözümleri, n pozitif tamsayı olduğu durumda Hermite polinomu olarak adlandırılır ve bu çözümler

$$2nH_{n-1}(x) = H'_n(x) \text{ ve } 2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$$

bağıntısını sağlar. Edmund Laguerre, Laguerre denklemini ve Laguerre polinomunu bulmuştur. Laguuerre denklemi

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$$

biçimindedir ve denkleminin $L_n(x)$ çözümleri, n pozitif tamsayı olduğu durumda Laguerre polinomu olarak adlandırılır ve bu çözümler

$$L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \ ,$$

$$L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

bağıntılarını sağlar. Francois Lucas, Hanoi kule problemine katkı sağlamış ve 2,1,3,4,7,11,18,…biçimindeki Lucas dizisini oluşturmuştur. Bu dizi başlangıç iki terimi dışında Fibonacci dizisine benzemektedir ve bu iki dizinin terimleri arasındaki ilişkiyi ifade eden yüzlerce bağıntı mevcuttur. Pafnuty Cbebychev, Cbebychev polinomları olarak bilinen iki cins polinomu ortaya koymuştur. Birinci cins Chebychev polinomları

$$T_n(x) = cos\left(ncos^{-1}(x)\right), x \in [-1,1]$$

biçiminde tanımlanır. İkinci cins Chebychev polinomları ise

$$U_n(cosq) = sin(n+1)q/sinq,\ cosq = x, x \in [-1,1]$$

biçiminde tanımlanır. z_n yukarıdaki T_n ya da U_n olmak üzere

$$z_{n+1}(x) = 2xz_n(x) - z_{n-1}(x)$$

bağıntısı Chebychev polinomunun ilk üç terimi arasındaki ilişkiyi verir.[2]

1901-1950 yılları arasında rekürans denklemlerin kullanılması ile bazı matematiksel harikalar elde edilmiştir. Bunlardan ilki düzlem doldurma eğrileri ya da fraktal olarak bilinen düzlemi hiç boşluk bırakmadan dolduran eğrilerdir. Bu tipteki eğriler ilk olarak 1890 da Giuseppe Peano tarafından keşfedilmiştir. Çalışmalarında fark denklemlerini düzlem dolduran eğrilerle kullanan matematikçiler arasında David Hilbert[56] ve Niels Fabian Von Koch[57] vardır. Fraktallar ve düzlem dolduran eğriler fark denklemlerinin birçok uygulamalarından ikisidir. Bir diğer önemli uygulaması da diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin bulunmasıdır. Bu metodlardan en önemli ikisi Martin Kutta[58]nın yaptığı çalışmalara dayandırılan Runge-Kutta metodu ve Emile Picard[59]ın yaptığı çalışmalara dayandırılan ardışık yaklaşımlar metodudur. Bu yıllarda fark denklemleri ve rekürans bağıntıları Fatou[60] ve Julia[61] tarafından ele alınmış olup bu matematikçiler rasyonel fonksiyonların kompleks tanım kümeleri üzerinde çalışmışlardır. Gaston Julia ve Pierre Fatou yinelemeli süreçler üzerine önemli katkıda bulunmuşlardır [2].

Fark denklemlerinin sistematik hale getirilip incelenmesinde 1950 den günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu dönemde birçok matematikçi fark ile ilgili çok sayıda çalışma yapmış ve hatırı sayılır bir literatür oluşmuştur. Bunlardan bazıları [3], [4], [5], [6], [7], [8] , [9] olarak verilebilir.

Günümüzde fark denklemleri hareket analizinde, ekonomide arz ve talep denklemlerini oluşturmada, lojistik denklemlerinin oluşturulmasında, ekonomik dalgalanmaları ve dönemsel ekonomik hareketleri incelemede, işsizlik oranı hesabında, biyolojide canlı kitle sayısının araştırılması ve yorumlanması gibi birçok alanda kullanılır. Fark denklemlerinin kullanıldığı bazı özel durumları aşağıdaki gibi örnekleyebiliriz:

Ekonomide bileşik faiz hesabında, amortisman[62] hesabında ve ulusal gelir modellemelerinde fark denklemleri kullanılır [3]. Ayrıca ekonomide arz-talep

---

[56] David Hilbert (1862-1943) Alman matematikçi.
[57] Niels Fabian Helgevon Koch (1870-1924) İsveçli matematikçi.
[58] Martin Wilhelm Kutta (1867-1944) Alman matematikçi.
[59] Charles Émile Picard (1856-1941) Fransız matematikçi.
[60] Pierre Joseph Louis Fatou (1878 – 1929) Fransız matematikçi ve astronom.
[61] Gaston Maurice Julia (1893–1978) Fransız matematikçi.
[62] Amortisman, genel olarak, üretim faaliyetleri sonucunda mal ve hizmetler oluşturulurken geçmiş yıllardan devralınan sermaye mallarında meydana gelen aşınma ve eskimenin parasal değeridir.

ilişkisini incelerken yine fark denklemlerinden faydalanılır. Arz–talep ilişkisi incelenirken örümcek ağı şemalarından faydalanılarak arz ve talebin denge noktasının kararlı olup olmadığı gösterilebilir [4].

Richardson silahlanma yarış modelinde, rekabet halinde olan X ve Y gibi iki ülkenin askeri bütçeleri arasındaki ilişki matematiksel olarak modellendiğinde

$$\Delta x_n = K y_n - \alpha x_n + g$$
$$\Delta y_n = L x_n - \beta y_n + h$$

biçiminde lineer fark denklem sistemi ortaya çıkmaktadır. Burada K ve L sırasıyla X ve Y ülkelerinin savunma katsayıları olmak üzere bir ülkenin mevcut askeri bütçesine diğer ülkenin verdiği tepki göstergeleridir. α ve β sırasıyla X ve Y ülkelerinin yorgunluk katsayıları olup eylemsizlik ve askeri bütçelerdeki artışın olası negatif ekonomik bedel ölçütleri, g ve h ise askeri olmayan ve siyasi kaygıları gösteren düşmanlık hisleridir [10].

Birbiri ile savaşan iki ordu arasındaki savaş da “Lancester savaş modeli” ile modellenebilir [10].

Fark denklemlerinin sıklıkla kullanıldığı bir diğer önemli saha ise matematiksel biyolojidir. Ardışık jenerasyonların üst üste gelmediği tek türlü bir popülasyon modeli, k. jenerasyondaki popülasyon N_k ve f doğum oranına bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$N_{k+1} = f(N_k)$$

biçiminde ifade edilebilir [5]. Balıkçılık ekonomisinde elde edilen gelirin optimizasyonu ve balık türünün korunması için fark denklemleri ve fark denklemlerinin kararlılığı kullanılır [5]. Kanda bulunan alyuvarlar oksijenin taşınması ile görevlidirler ve hayat süreleri sınırlıdır. Dolayısıyla alyuvarlar düzenli olarak parçalanır ve yeniden üretilir. Bundan dolayı kanda bulunan alyuvar sayısını hesaplamak için fark denklemlerinden faydalanılır [5]. Bir salgın hastalığın görüldüğü bir toplulukta hastalığın yayılma hızının modellenmesinde de fark denklemleri kullanılır [5].

Fark denklemlerinin kullanıldığı en popüler olan konulardan birisi de “tavşan problemi” olarak bilinen problemdir. Bu problemin çözümü olan ve “Fibonacci dizisi” olarak bilinen dizi çok ilginçtir ve birçok uygulaması mevcuttur. Problem şu şekildedir: “ Her yeni bir çift tavşan iki aylık olduğunda her ay bir çift tavşan yavrulayabiliyorsa bir yılda toplam kaç çift tavşan üremiş olur.” Bu problemin matematiksel modeli bize ikinci mertebeden bir fark denklemi verir. Bu

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \;\; y(0) = 1, y(1) = 2, \;\; 0 \leq n \leq 10$$

şeklinde iki-nokta fark sınır değer problemidir. Buradaki denklem

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \;\; y(0) = 1, y(1) = 1, \qquad n \geq 0$$

şeklinde verilen Fibonacci dizisinin özel bir halidir [11].

Sosyal bilimlerin birçoğunda da fark denklemlerinin kullanıldığı yerler vardır. Uyarıcının alınması ile başlayan, tepkinin verilmesi (butona basma, labirentte koşma gibi) ile devam eden ve çevresel bir sonuçla (yiyecek veya elektrik şoku verilmesi gibi) sonuçlanan bir öğrenme deneyi, n. denemedeki öğrenme olasılığı p_n ve a ile m sabitler olmak üzere

$$p_{n+1} = a + mp_n \, , n = 0,1,2, \ldots$$

fark denklemi ile modellenebilir [3].

Köylü ve şehirli olarak ikiye ayrılan bir topluluk arasındaki göçler sonucunda nüfus dağılımının değişimini ortaya koymak için fark denklemlerinden faydalanılır [5].

İki kişinin karşılıklı oynadığı bir şans oyununda oyuncuların kaybetme olasılıklarını hesaplamak için ikinci dereceden lineer fark denklemi kullanılır [5].

Bir verinin elektronik sinyaller gönderilerek aktarımında, k anındaki mümkün olan tüm veri dizilimleri M_k olmak üzere $M_k = M_{k-1} + M_{k-2}$ biçiminde 2. mertebeden bir fark denklemi kullanılır. Bu aynı zamanda Fibonacci sayılarını bulmak için kullanılan fark denklemidir [5].

Lineer fark denklemlerinin asimtotik kararlılığı da birçok matematikçi tarafından incelenmiştir.

C.W. Clark [12] de

$$x_{k+1} = \lambda x_k + F(x_{k-\beta})$$

fark denklemini lineerleştirerek elde ettiği lineer denklemin asimtotik kararlılığını incelemiştir.

Levin ve May [13] de

$$N_{t+1} = N_t F(N_{t-T})$$

denklemini lineerleştirerek elde ettikleri lineer denklemin asimtotik kararlılığını incelemişlerdir.

S.A. Kuruklis [14] de a ve b reel sayı, k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0 \quad n = 0,1,2,...$$

denkleminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter koşulları vermiştir.

Aynı denklem Vassilis G. Papanicolaou tarafından [15] de incelenmiş ve geometrik bir ispatla denklemin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şartlar verilerek bu ispatın

$$x_{k+1} - ax_{k-m} + bx_{k-n} = 0$$

denkleminin asimtotik kararlılığını göstermek için de uygulanabileceği ifade edilmiştir.

G.Ladas vd. [16] da $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2,3, \dots, m$ için $p_i(n) \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x_{n-k_i} = 0 \quad n = 0,1,2, \dots$$

denkleminin global asimtotik kararlı olması için yeter şartları vermişlerdir.

H. Matsunaga ve T. Hara [17] de p reel sayı ve k, l, N pozitif tamsayı, $k > (N-1)l$ olmak üzere

$$x_{n+1} - x_n + p \sum_{j=1}^{N} x_{n-k+(j-1)l} = 0 \quad n = 0,1,2, \dots$$

gecikmeli lineer fark denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter koşulları vermişlerdir.

H. Matsunaga [18] de a reel sayı, B $2x2$ reel sabit bir matris ve k bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$x_{n+1} - a x_n + B x_{n-k} = 0 \quad n = 0,1,2, \dots$$

gecikmeli lineer fark sisteminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şartları vermiştir.

J. Čermák vd. [19] da α, β, γ reel sayı ve $k \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere

$$y_{n+1} + \alpha y_n + \beta y_{n-k+1} + \gamma y_{n-k} = 0, \qquad n = 0,1,2, \dots$$

lineer otonom fark denkleminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter koşulların iki farklı açık formunu vermişlerdir. Bu koşullar Schur-Cohn kriterinin daha uygulanabilir bir forma dönüştürülmesi ile çıkarılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde ileride kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilmektedir.

Tanım 2.1

Tanım kümesinde bulunan her x sayısı için $x + h$ da tanım kümesinde bulunacak şekilde alınan h sabiti için y fonksiyonu verilmiş olsun. y nin *ilk ileri farkı* Δy ile gösterilir ve

$$\Delta y(x) = y(x + h) - y(x) \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır [3]. Burada h *fark aralığı* olarak adlandırılır ve uygulamada genellikle $h = 1$ olarak alınır.

Tanım 2.2

y ve onun birinci farkı olan Δy verilmiş olsun. y nin birinci farkının farkı $\Delta^2 y$ ile gösterilir ve y *nin ikinci farkı* olarak adlandırılır.

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) \tag{2.2}$$

biçiminde yazılır.

$$\Delta^2 y(x) = \Delta y(x + h) - \Delta y(x) \tag{2.3}$$

dir. Genel olarak y nin $(n - 1)$. farkının farkına y nin n. *farkı* denir ve $\Delta^n y$ ile gösterilir.

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} \mathrm{y}\,), n = 2,3,4, \ldots \tag{2.4}$$

dir [3].

Tanım 2.3

Birim operatör I ile gösterilir ve uygulandığı herhangi bir y fonksiyonundan y ile özdeş yeni bir Iy fonksiyonu üretir. y nin tanım kümesindeki herhangi bir x elemanı için

$$Iy(x) = y(x) \tag{2.5}$$

olur. Δ^0 sembolü birim operatörü ifade etmek için kullanılır, yani

$$\Delta^0 y = Iy \tag{2.6}$$

dir [3].

Tanım 2.4

h bir sabit ve y verilen bir fonksiyon olmak üzere E *kaydırma (öteleme) operatörü*

$$Ey(x) = y(x+h)$$

biçiminde tanımlanır. Δ ve E operatörleri arasında

$$\Delta y(x) = Ey(x) - y(x)$$

bağıntısı vardır. Δ operatöründe olduğu gibi E operatörü de bir fonksiyona birden fazla sayıda uygulanabilir ve genel olarak

$$E^n y(x) = y(x+nh)$$

dır [3].

Teorem 2.1 (Δ ve E operatörünün özelikleri)

a) c bir sabit olmak üzere

$\Delta[cy(n)] = c\Delta y(n)$ dir [3].

b) c_1 ve c_2 herhangi iki sabit olmak üzere

$\Delta[c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n)] = c_1 \Delta y_1(n) + c_2 \Delta y_2(n)$ [3].

c) u ve v iki fonksiyon olmak üzere

$\Delta[u(n)v(n)] = Eu(n)\Delta v(n) + v(n)\Delta u(n)$ [3].

d) Δ ve E operatörleri değişme özeliğini sağlar, yani,

$\Delta E \equiv E\Delta$ dir [3].

e) Δ ve E operatörleri indis kuralını sağlar, yani, negatif olmayan m ve n tamsayıları için

$\Delta^m \Delta^n \equiv \Delta^n \Delta^m$,

$E^m E^n \equiv E^n E^m$

sağlanır [3].

f) k pozitif bir tamsayı ise

$$\Delta^k y(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} E^i y(n)$$

sağlanır [3].

g) k pozitif bir tamsayı ise

$$E^k y(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^k y(n)$$

sağlanır [3].

Tanım 2.6 (Genelleştirilmiş fark operatörü)

$l, n \in \mathbb{N},\ a \in R, a \neq 0$ olmak üzere $\Delta_{l,a}$ *genelleştirilmiş fark operatörü*

$$\Delta_{l,a} y(n) = y(n+l) - a y(n)$$

biçiminde tanımlanır. $l = 1$ için genelleştirilmiş fark operatörü

$$\Delta_a y(n) = y(n+1) - a y(n)$$

biçiminde tanımlanır .

Tanım 2.7

y ve onun birinci genelleştirilmiş farkı olan $\Delta_{l,a} y$ verilmiş olsun. y nin birinci genelleştirilmiş farkının genelleştirilmiş farkı ${\Delta_{l,a}}^2 y$ ile gösterilir ve *y nin ikinci genelleştirilmiş farkı* olarak adlandırılır.

$${\Delta_{l,a}}^2 y = \Delta_{l,a}(\Delta_{l,a} y)$$

biçiminde yazılır.

$${\Delta_{l,a}}^2 y(x) = \Delta_{l,a} y(x+l) - a\Delta_{l,a} y(x)$$

dir. Genel olarak y nin $(n-1)$. genelleştirilmiş farkının genelleştirilmiş farkına y nin *n. genelleştirilmiş farkı* denir ve ${\Delta_{l,a}}^n y$ ile gösterilir.

$\Delta_{l,a}{}^{n} y = \Delta_{l,a}\left(\Delta_{l,a}{}^{n-1} \mathrm{y}\right), n = 2,3,4, \ldots$

biçiminde tanımlanır.

<u>*Teorem 2.2 ($\Delta_{l,a}$ operatörünün özelikleri)*</u>

a) c bir sabit olmak üzere

$$\Delta_{l,a}[cy(n)] = c\Delta_{l,a}y(n).$$

b) l_1, l_2 pozitif tamsayılar ve $a \in R,\ a \neq 0$ olmak üzere

$$\Delta_{l_1,a}\Delta_{l_2,a}y(n) = \Delta_{l_2,a}\Delta_{l_1,a}y(n)$$

dir.

c) $l, n \in \mathbb{N},\ a \in R,\ a \neq 0$ olmak üzere her bir pozitif m tamsayısı için

$$\Delta_{l,a}^{m}y(n) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{i}\binom{m}{i}a^{i}y(n+(m-i)l)$$

dir.

<u>*İspat*</u>

a) $\Delta_{l,a}$ operatörünün tanımı kullanılırsa

$$\Delta_{l,a}[cy(n)] = cy(n+l) - acy(n) = c\big(y(n+l) - ay(n)\big) = c\Delta_{l,a}y(n)$$

elde edilir.

b) $\Delta_{l,a}$ operatörünün tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Delta_{l_1,a}\Delta_{l_2,a}y(n) &= \Delta_{l_1,a}\big(\Delta_{l_2,a}y(n)\big) = \Delta_{l_1,a}(y(n+l_2) - ay(n)) \\
&= y(n+l_2+l_1) - ay(n+l_1) - a\big(y(n+l_2) - ay(n)\big) \\
&= y(n+l_1+l_2) - ay(n+l_2) - a\big(y(n+l_1) - ay(n)\big) \\
&= \Delta_{l_2,a}(y(n+l_1) - ay(n)) \\
&= \Delta_{l_2,a}\big(\Delta_{l_1,a}y(n)\big) \\
&= \Delta_{l_2,a}\Delta_{l_1,a}y(n)
\end{aligned}$$

elde edilir.

c) İspat tümevarım yöntemiyle yapılacaktır.
$m = 1$ için,

$$\Delta_{l,a}^{1}y(n) = \Delta_{l,a}y(n) = \sum_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{1}{i}a^i y(n+(1-i)l) = y(n+l) - ay(n)$$

olduğundan önerme doğrudur.

$m = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edip $m = k+1$ için de önermenin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
&\Delta_{l,a}^{k+1}y(n) = \Delta_{l,a}\left(\Delta_{l,a}^{k}y(n)\right) = \Delta_{l,a}\big(\textstyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a^i y(n+(k-i)l)\big) = \\
&\textstyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a^i y(n+(k+1-i)l) - a\big(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a^i y(n+(k-i)l)\big) = \\
&\textstyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a^i y(n+(k+1-i)l) - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a^{i+1} y(n+(k-i)l) = \big[\binom{k}{0}a^0 y(n+ \\
&(k+1)l) - \binom{k}{1}ay(n+kl) + \binom{k}{2}a^2 y(n+(k-1)l) \quad - \binom{k}{3}a^3 y(n+(k-2)l) + \cdots + \\
&(-1)^k\binom{k}{k}a^k y(n+l)\big] - \big[\binom{k}{0}ay(n+kl) - \binom{k}{1}a^2 y(n+(k-1)l) + \binom{k}{2}a^3 y(n+(k- \\
&2)l) \quad + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}a^k y(n+l) + (1)^k\binom{k}{k}a^{k+1}y(n)\ \big] = \binom{k}{0}a^0 y(n+(k+1)l) - \\
&\left(\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right)ay(n+kl) + \left(\binom{k}{2}+\binom{k}{1}\right)a^2 y(n+(k-1)l) \quad - \left(\binom{k}{3}+\binom{k}{2}\right)a^3 y(n+ \\
&(k-2)l) + \cdots + (1)^k\left(\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}\right)a^k y(n+l) \quad + (1)^{k+1}\binom{k}{k}a^{k+1}y(n) \\
&\qquad\qquad = \textstyle\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}a^i y(n+(k+1-i)l)
\end{aligned}$$

önerme $m = k+1$ için de sağlandığından ispat tamamlanır.

Tanım 2.8

Bir S kümesi üzerinde tanımlı y fonksiyonunu ve her biri S üzerinde tanımlı y nin birinci veya daha yüksek farklarını içeren denkleme *S kümesi üzerinde bir fark denklemi* denir. Fark denklemi S kümesi üzerinde bir fonksiyon ve onun farklarını içeren bir bağıntıdır [3].

Tanım 2.9

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $y(k)$, $\mathbb{Z}^+$ üzerinde tanımlı reel ya da kompleks değerli bir fonksiyon olsun. $y(k)$, $y(k+1)$, $y(k+2), \dots$, $y(k+n)$ ifadelerini kapsayan bir bağıntıya (denkleme) n. *mertebeden bir fark denklemi* denir [20].

Tanım 2.10

n. mertebeden bir fark denklemi genel olarak; $k, n \in \mathbb{N}$, $y(k)(= y_k) \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ve $y(k) \neq 0$ olmak üzere

$$f\big(n, y(k), y(k+1), \dots, y(k+n)\big) = 0$$

biçiminde tanımlanır. [20]

Tanım 2.11

Bir fark denkleminde bulunan en yüksek mertebeli farkın derecesine *fark denkleminin mertebesi* denir [20].

Tanım 2.12

$f_0(k) \neq 0$ ve $f_0(k)$, $f_1(k), \dots$, $f_{n-1}(k)$, $f_n(k)$, $g(k)$ ların her biri S kümesi üzerinde k nın bir fonksiyonu olmak üzere

$$f_0(k) y_{k+n} + f_1(k) y_{k+n-1} + \cdots + f_{n-1}(k) y_{k+1} + f_n(k) y_k = g(k) \qquad (2.7)$$

biçiminde yazılabilen fark denklemine *S üzerinde lineer fark denklemi* denir. Bu denklem $g(k) \equiv 0$ olması durumunda *homojen denklem*, aksi takdirde *homojen olmayan denklem* olarak adlandırılır. Ayrıca bütün $f_i(k)$ katsayıları sabit ise (2.7) denklemine *sabit katsayılı*, aksi halde *değişken katsayılı fark denklemi* denir [3].

Tanım 2.13

(2.7) biçiminde yazılan bir fark denkleminde S kümesindeki her k değeri için $f_0(k)\, ve\ f_n(k)$ nın her ikisi birden sıfırdan farklı oluyorsa bu fark denklemi S kümesi üzerinde *n. mertebedendir* denir [3].

Tanım 2.14

Bir fark denklemini özdeş olarak sağlayan $\phi(k)$ fonksiyonuna *fark denkleminin bir çözümü* denir. $\phi(k) = 0$ fark denkleminin bir çözümü ise bu çözüme aşikâr *(trivial) çözüm*, $\phi(k) \neq 0$ fark denkleminin bir çözümü ise bu çözüme *aşikâr olmayan çözüm* adı verilir [3].

Teorem 2.3

$n \geq n_0$ için $p_i(n)$ ve $g(n)$ reel değerli fonksiyonlar, $p_k(n) \neq 0$ ve $i = 1,2, \dots, k-1$ için $a_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y(n_0) = a_0,\ y(n_0 + 1) = a_1, \dots,\ y(n_0 + k - 1) = a_{k-1} \tag{2.8}$$

başlangıç koşulları ile verilen

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n) \tag{2.9}$$

denkleminin tek bir çözümü vardır [3].

(2.9) denkleminde $g(n) = 0$ alınırsa

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = 0 \tag{2.10}$$

homojen denklemi elde edilir.

Tanım 2.15

$a_1, a_2, \dots, a_r$ hepsi aynı anda sıfır olmayan sabit sayılar olmak üzere $n \geq n_0$ için

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $n \geq n_0$ için $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonları *lineer bağımlıdır* denir.

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0$$

eşitliği her $n \geq n_0$ için sadece $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonları *lineer bağımsızdır* denir [4].

Tanım 2.16

(2.10) denkleminin k tane lineer bağımsız çözümünden oluşan kümeye *temel çözüm kümesi* adı verilir [4].

Tanım 2.17

$x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$ çözümlerinin $W(n)$ Casoratian ı

$$W(n) = det\begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \dots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanır. Casoratian, diferensiyel denklemlerdeki Wronskian ın ayrık benzeridir [4].

Teorem 2.4

(2.10) denkleminin $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_r(n)$ çözümlerinin kümesinin temel çözüm kümesi olması için gerek ve yeter koşul pozitif n_0 tamsayısı için $W(n_0) \neq 0$ olmasıdır [4].

Tanım 2.18

(2.10) denkleminin temel çözüm kümesi $\{x_1(n), x_2(n), \ldots, x_r(n)\}$ olsun. Bu durumda a_i ler herhangi sabitler olmak üzere (2.10) denkleminin genel çözümü $x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(k)$ biçimindedir [4].

Tanım 2.19

$p_1, p_2, \ldots, p_k$ sabitler, $p_k \neq 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + \cdots + p_k x(n) = 0 \tag{2.11}$$

denkleminde $x(n)$ yerine λ^n yazarak elde edilen

$$P(\lambda) := \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0 \tag{2.12}$$

denklemine (2.11) denkleminin *karakteristik denklemi*, bu denklemin λ köklerine de *karakteristik kökler* denir [4].

Teorem 2.5

$\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ olmak üzere (2.11) denkleminin $x(n) = \lambda^n$ biçiminde çözümleri vardır ve bu λ değerleri (2.12) denklemini sağlar [11].

Teorem 2.6

(2.12) deki $P(\lambda)$ polinomunun $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ kökleri birbirinden farklı ise $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n$ (2.11) denkleminin lineer bağımsız çözümleridir [9].

Teorem 2.7

(2.12) deki $P(\lambda)$ polinomunun λ_s kökünün katlılığı m_s olsun. $u_s(n)$ ler dereceleri $(m_s - 1)$ i geçmeyen n ye bağlı genelleyici (generic) polinomlar olmak üzere $x_s(n) = u_s(n)\lambda_s^n$ fonksiyonları (2.11) denkleminin çözümleridir ve lineer bağımsızdırlar [9].

Sonuç 2.1

(2.11) denkleminin genel çözümü

$$x_n = \sum_{i=1}^{d} a_i u_i(n)\lambda_i^n = \sum_{i=1}^{d} a_i \sum_{j=0}^{m_i-1} c_j n^j \lambda_i^n = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=0}^{m_i-1} A_{ij} n^j \lambda_i^n$$

ile verilir. Burada d, farklı köklerin sayısı ve $A_{ij} = a_i c_j$ dir [9].

Tanım 2.20

I reel sayıların herhangi bir alt aralığı ve $f: I \times I \to I$ sürekli ve diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç koşulları ile verilen

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \tag{2.13}$$

fark denklemini ele alalım. $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x})$ koşulunu sağlayan $\bar{x} \in \mathbb{R}$ noktasına (2.13) denkleminin *denge noktası* denir [21].

Tanım 2.21

$\bar{x}$, (2.13) denkleminin denge noktası olsun.

i. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $x_{-1}, x_0 \in I$ ve $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq -1$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası *kararlıdır* denir.

ii. $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in I$, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ için $lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası *lokal asimtotik kararlıdır* denir.

iii. Her bir $x_{-1}, x_0 \in I$ için $lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ oluyorsa $\bar{x}$ denge noktası *global çekimlidir* denir.

iv. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekimli ise $\bar{x}$ *global asimtotik karalıdır* denir.

v. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değilse $\bar{x}$ denge noktası *kararsızdır* denir [21].

Tanım 2.20 ve Tanım 2.21 i yüksek mertebeli bir fark denklemi için şu şekilde verebiliriz.

<u>Tanım 2.22</u>

I reel sayıların herhangi bir alt aralığı, k pozitif bir tamsayı ve $F: I^{k+1} \to I$ bir fonksiyon olmak üzere

$$x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \tag{2.14}$$

fark denklemini ele alalım. Bütün $n \geq -k$ için $x_n = \bar{x}$ koşulunu sağlayan $\bar{x} \in \mathbb{R}$ noktasına (2.14) denkleminin *denge noktası* denir [22].

<u>Tanım 2.23</u>

$\bar{x}$, (2.14) denkleminin denge noktası olsun.

i. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (2.14) ün $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümleri için $|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \cdots + |x_0 - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa (2.14) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası *kararlıdır* denir.

ii. $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve (2.14) ün $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümleri için $|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \cdots + |x_0 - \bar{x}| < \delta$ iken $lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası *lokal asimtotik kararlıdır* denir.

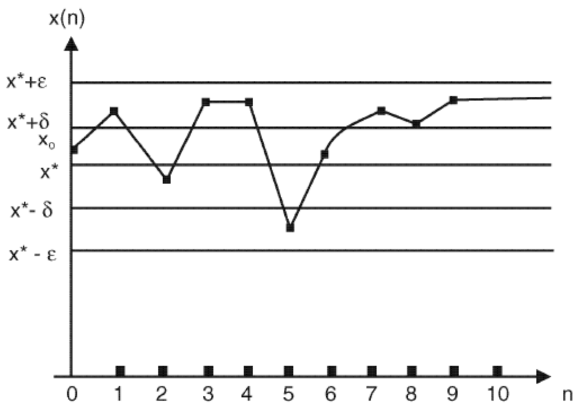
iii. (2.14) ün her bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü için $lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ oluyorsa $\bar{x}$ denge noktası *global çekimlidir* denir.

iv. Eğer (2.14) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekimli ise $\bar{x}$ *global asimtotik kararlıdır* denir.

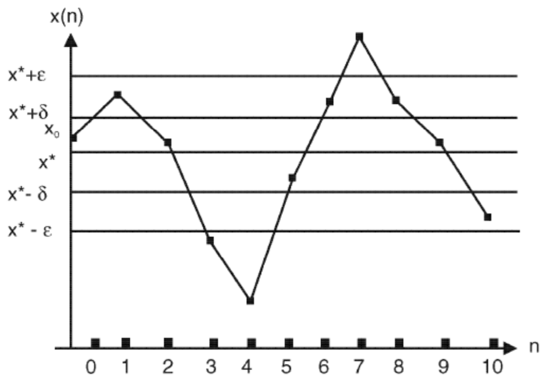
v. Eğer (2.14) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası kararlı değilse $\bar{x}$ denge noktası *kararsızdır* denir [22].

<u>*Örnek 2.1*</u>

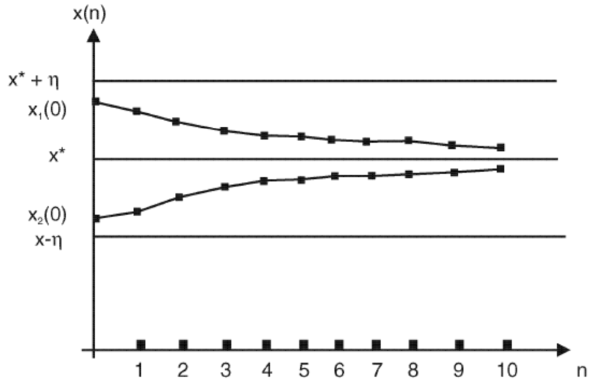
x^*, $x(n+1) = f(x(n))$ fark denkleminin bir denge noktası olsun. x^* denge noktası için olası durumlar aşağıdaki gibidir [4].



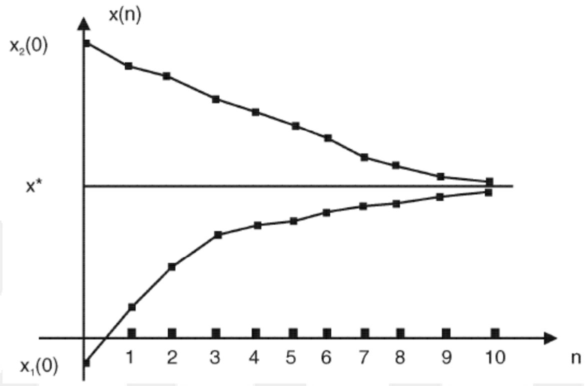
Şekil 2.1 Kararlı x^* noktası



Şekil 2.2 Kararsız x^* noktası



Şekil 2.3 asimtotik kararlı x^* noktası



Şekil 2.4 Global asimtotik kararlı x^* noktası

Teorem 2.8

(2.11) in sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul (2.12) in her λ karakteristik kökü için $|\lambda| < 1$ olmasıdır. Ayrıca (2.11) in sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter koşul, $|\lambda| = 1$ koşulunu sağlayan λ lar basit olmak üzere, $|\lambda| \leq 1$ olmasıdır. Öte yandan $|\lambda| = 1$ olacak şekilde katlı karakteristik kökler varsa, bu durumda (2.11) in sıfır çözümü kararsızdır [10].

Tanım 2.24 (İç matris)

Bir $B = (b_{ij})$ matrisinin *iç matrisleri*, o matrisin kendisi başta olmak üzere, ilk ve son satırları ile ilk ve son sütunlarının atılmasıyla ardışık olarak bulunan matrislerin tümüdür [4].

<u>Örnek 2.2</u> $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$ matrisinin iç matrisleri,

$A, \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ ve $[a_{33}]$

dir.

<u>Tanım 2.25</u>

Bütün iç matrislerinin determinantları pozitif olan matrise *pozitif iç matrislidir* denir [4].

<u>Teorem 2.9 (Schur-Cohn Kriteri)</u>

(2.12) karakteristik polinomunun sıfırlarının birim disk içinde kalması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerin sağlanmasıdır:

i. $P(1) > 0$,
ii. $(-1)^k P(-1) > 0$,
iii. $(k-1) \times (k-1)$ tipindedeki

$$B_{k-1}^{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{k-3} & p_{k-4} & \dots & 1 & 0 \\ p_{k-2} & p_{k-3} & \dots & p_1 & 1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_k \\ 0 & 0 & \cdots & p_k & p_{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & p_k & \dots & p_4 & p_3 \\ p_k & p_{k-1} & \dots & p_3 & p_2 \end{bmatrix}$$

matrisleri pozitif iç matrislidir [4].

Schur-Chon Kriteri kullanılarak (2.11) denkleminin aşikâr çözümlerinin asimtotik kararlı olması için p_i katsayıları üzerine gerek ve yeter şartlar konulabilir. (2.11) denkleminin mertebesi küçük olduğunda aşikâr çözümlerinin asimtotik kararlılığı ile ilgili kompakt gerek ve yeter şartlar verilebilir. Aşağıda ikinci ve üçüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer homojen fark denklemlerinin aşikâr çözümlerinin asimtotik kararlılığı için gerek ve yeter şartlar örnek olarak verilmiştir.

Örnek 2.3

İkinci mertebeden

$$x(n+2)+p_1x(n+1)+p_2x(n)=0 \tag{2.15}$$

denkleminin karakteristik polinomu

$$P(\lambda):=\lambda^2+p_1\lambda+p_2 \tag{2.16}$$

biçimindedir. (2.16) polinomunun karakteristik köklerinin birim disk içinde kalması için gerek ve yeter şart

$$P(1)=1+p_1+p_2>0, \tag{2.17}$$

$$(-1)^2P(1)=P(1)=1-p_1+p_2>0, \tag{2.18}$$

$$\left|B_{k-1}^{\pm}\right|=1\pm p_2>0 \tag{2.19}$$

olmasıdır. (2.17) ve (2.18) den $1+p_2>|p_1|$ ve $1+p_2>0$ elde edilir. Bu durumda (2.19) den $1-p_2>0$ veya $p_2<1$ elde edilir. Buradan (2.15) denkleminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$|p_1|<1+p_2<2 \tag{2.20}$$

olarak elde edilir [4].

Örnek 2.4

Üçüncü mertebeden

$$x(n+3) + p_1 x(n+2) + p_2 x(n+1) + p_3 x(n) = 0 \tag{2.21}$$

denkleminin karakteristik polinomu

$$P(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0 \tag{2.22}$$

biçimindedir. (2.22) polinomunun karakteristik köklerinin birim disk içinde kalması için gerek ve yeter şartlar;

$$P(1) = 1 + p_1 + p_2 + p_3 > 0, \tag{2.23}$$

$$(-1)^3 P(-1) = -P(-1) = 1 - p_1 + p_2 - p_3 > 0, \tag{2.24}$$

$$|B_{k-1}^{+}| = \left|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & p_3 \\ p_1 + p_3 & 1 + p_2 \end{vmatrix} > 0 \tag{2.25}$$

ve

$$|B_{k-1}^{-}| = \left|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -p_3 \\ p_1 - p_3 & 1 - p_2 \end{vmatrix} > 0 \tag{2.26}$$

dır. (2.25) den

$$1 + p_2 - p_1 p_3 - p_3^2 > 0 \tag{2.27}$$

ve (2.26) dan

$$1 - p_2 + p_1 p_3 - p_3^2 > 0 \tag{2.28}$$

elde edilir. (2.23), (2.24), (2.26) ve (2.27) kullanılarak (2.21) denkleminin aşikâr çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şartlar

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2 \text{ ve } |p_2 - p_1 p_3| < 1 - p_3^2 \tag{2.29}$$

olarak elde edilir [4].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK OPERATÖRÜ İÇEREN BAZI FARK DENKLEMLERİ İÇİN KARARLILIK KRİTERLERİ

Bu bölümde genelleştirilmiş fark operatörü içeren bazı fark denklemlerinin kararlılığı incelenmekte ve bazı yeni sonuçlar verilmektedir.

3.1. $\Delta_{l,a}^{m} y(n) + r\Delta_{l,a} y(n) + sy(n) = 0$ Denklemi İçin Kararlılık Kriteri

Bu kesimde $a, r, s \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ l, m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$y(i) = \varphi_i,\ \varphi_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,\dots, ml - 1 \tag{3.1.1}$$

başlangıç şartları ile birlikte verilen genelleştirilmiş fark operatörü içeren

$$\Delta_{l,a}^{m} y(n) + r\Delta_{l,a} y(n) + sy(n) = 0 \tag{3.1.2}$$

fark denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlılığı incelenmektedir. (3.1.2) denkleminin bir çözümünden kasıt $n = 0,1,2,\dots, ml - 1$ için tanımlı olan ve $\mathbb{N}$ üzerinde (3.1.2) denklemini özdeş olarak sağlayan reel değerli $y(n)$ dizisidir.

Teorem 3.1.1

(3.1.1) başlangıç koşulları ile birlikte verilen genelleştirilmiş fark operatörü içeren (3.1.2) fark denklemini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.

(a) (3.1.2) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlıdır.

(b) $p(t) = \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^i \binom{m}{i} a^i t^{m-i} + ((-1)^{m-1} m a^{m-1} + r)t + (-1)^m a^m - ar + s$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır;

$$p(1) = \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^i \binom{m}{i} a^i + (-1)^{m-1} m a^{m-1} + r + (-1)^m a^m - ar + s > 0, \tag{3.1.3}$$

$$(-1)^m p(-1) = \sum_{i=0}^{m-2} \binom{m}{i} a^i + (-1)^{m+1} [(-1)^{m-1} m a^{m-1} + r] + (-1)^m [(-1)^m a^m - ar + s] > 0\ , \tag{3.1.4}$$

$$A_{m-1}^{\pm}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\binom{m}{1}a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{m}{2}a^2 & -\binom{m}{1}a & 1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2}a^{m-2} & (-1)^{m-3}\binom{m}{m-3}a^{m-3} & \dots & & 1 \end{bmatrix} \pm$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^m a^m - ar + s \\ 0 \quad \dots & 0 & & (-1)^m a^m - ar + s & (-1)^{m-1}a^{m-1} + r \\ & & & & \\ 0 & (-1)^m a^m - ar + s & & & \\ (-1)^m a^m - ar + s & (-1)^{m-1}a^{m-1} + r & \dots & & \binom{m}{2}a^2 \end{bmatrix} \qquad (3.1.5)$$

matrisleri pozitif iç matrislidir. Burada $A_{m-1}^{\pm}$ matrisinin öğeleri $p(t)$ polinomunun katsayıları kullanılarak oluşturulmuştur.

<u>İspat</u>

(a)⇒(b) (3.1.2) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olduğunu kabul edelim. Teorem 2.2 kullanılırsa (3.1.2) denklemi

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}a^i y(n+(m-i)l) + ry(n+l) - ary(n) + sy(n) = 0 \qquad (3.1.6)$$

denklemine dönüşür. (3.1.6) denklemi düzenlenirse

$$\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^i\binom{m}{i}a^i y(n+(m-i)l) + ((-1)^{m-1}ma^{m-1} + r)y(n+l) + ((-1)^m a^m - ar + s)y(n) = 0 \qquad (3.1.7)$$

denklemi elde edilir. (3.1.7) denkleminin karakteristik denklemi

$$\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^i\binom{m}{i}a^i\lambda^{(m-i)l} + ((-1)^{m-1}ma^{m-1} + r)\lambda^l + (-1)^m a^m - ar + s = 0 \qquad (3.1.8)$$

biçimindedir. (3.1.7) denklemi sabit katsayılı homojen bir fark denklemi olduğu için Teorem 2.8 gereğince (3.1.2) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olabilmesi için (3.1.7) denklemine karşılık gelen (3.1.8) karakteristik denkleminin köklerinin $|\lambda| < 1$ diski içinde kalması gerekir. (3.1.8) denkleminde $\lambda^l = t$ değişken değişimi yapılırsa

$$p(t) = \sum_{i=0}^{m-2}(-1)^i\binom{m}{i}a^i t^{m-i} + ((-1)^{m-1}ma^{m-1} + r)t + (-1)^m a^m - ar + s = 0 \qquad (3.1.9)$$

denklemi elde edilir. l pozitif bir tamsayı olduğu için $|\lambda| < 1$ olması ile $|\lambda^l| < 1$ olması eş değerdir. Dolayısıyla (3.1.8) denkleminin λ kökleri için $|\lambda| < 1$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart (3.1.9) denkleminin $t = \lambda^l$ kökleri için $|t| = |\lambda^l| < 1$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Böylece (3.1.9) denkleminin kökleri olan t lerin $|t| < 1$ olmasını sağlaması için verilen şartlar (3.1.8) denkleminin λ kökleri için $|\lambda| < 1$ olmasını sağlar. (3.1.9) daki $p\,(t)$ polinomunun katsayıları; $0 \leq i \leq m-2$ için $p_i = (-1)^i \binom{m}{i} a^i$, $p_{m-1} = ((-1)^{m-1} m a^{m-1} + r)$ ve $p_m = (-1)^m a^m - ar + s$ dir. Teorem 2.9 göz önünde bulundurulduğunda $p(t)$ polinomunun köklerinin $|t| < 1$ diski içinde kalması için gerek ve yeter şartlar aşağıdaki gibidir:

- $p(1) = \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^i \binom{m}{i} a^i + (-1)^{m-1} m a^{m-1} + r + (-1)^m a^m - ar + s > 0,$

- $(-1)^m p(-1) = \sum_{i=0}^{m-2} \binom{m}{i} a^i + (-1)^{m+1}[(-1)^{m-1} m a^{m-1} + r] + (-1)^m[(-1)^m a^m - ar + s] > 0,$

- $p(t)$ polinomunun katsayıları kullanılarak oluşturulan

$$A_{m-1}^{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\binom{m}{1} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{m}{2} a^2 & -\binom{m}{1} a & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2} a^{m-2} & (-1)^{m-3}\binom{m}{m-3} a^{m-3} & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \pm$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^m a^m - ar + s \\ 0 \ \ldots & 0 & & (-1)^m a^m - ar + s & (-1)^{m-1} a^{m-1} + r \\ & & & & \\ 0 & (-1)^m a^m - ar + s & & & \\ (-1)^m a^m - ar + s & (-1)^{m-1} a^{m-1} + r & \ldots & & \binom{m}{2} a^2 \end{bmatrix}$$

matrisleri pozitif iç matrislidir. Böylece (3.1.3), (3.1.4) ve (3.1.5) şartları sağlanmış olur.

(b)⇒(a) (3.1.3), (3.1.4) ve (3.1.5) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Bu koşullar Teorem 2.9 daki Schur-Cohn kriteri gereğince

$$p(t) = \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^i \binom{m}{i} a^i t^{m-i} + ((-1)^{m-1} m a^{m-1} + r)t + (-1)^m a^m - ar + s$$

polinomunun köklerinin $|t| < 1$ birim diski içinde kalması için gerek ve yeter koşullardır. $\lambda^l = t$ değişken değişimi yapıldığında $|t| < 1$ olması için gerek ve yeter şart $|\lambda| < 1$ olmasıdır. Dolayısıyla (3.1.3), (3.1.4) ve (3.1.5) şartları aynı zamanda

$$\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^i\binom{m}{i}a^i\lambda^{(m-i)l} + ((-1)^{m-1}ma^{m-1} + r)\lambda^l + (-1)^m a^m - ar + s = 0 \quad (3.1.10)$$

denkleminin λ köklerinin $|\lambda| < 1$ diski içinde kalması için de gerek ve yeter şartlardır. Bu durumda Teorem 2.8 gereğince (3.1.2) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlı olur. Böylece (a) sağlanmış olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.1

$a, r, s \in \mathbb{R}, a \neq 0, l, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$y(i) = \varphi_i,\ \varphi_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,\dots,2l-1 \quad (3.1.11)$$

başlangıç koşulları ile birlikte verilen genelleştirilmiş fark operatörü içeren

$$\Delta_{l,a}^2 y(n) + r\Delta_{l,a}y(n) + sy(n) = 0 \quad (3.1.12)$$

fark denklemini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki önermeler eş değerdir.

a) (3.1.12) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlıdır.

b)

$$|r - 2a| < a^2 - ar + s + 1 < 2 \quad (3.1.13)$$

sağlanır.

İspat

(a)⇒(b) (3.1.12) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olduğunu kabul edelim. (3.1.12) denklemi (3.1.2) denkleminin $m = 2$ için özel halidir. $m = 2$ için Tanım 2.6 ve Tanım 2.7 kullanıldığında (3.1.12) denklemi

$$y(n+2l)+(r-2a)y(n+l)+(a^2-ar+s)y(n)=0 \tag{3.1.14}$$

denklemine indirgenir. (3.1.14) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{2l}+(r-2a)\lambda^l+a^2-ar+s=0 \tag{3.1.15}$$

dir. Teorem (3.1.1**)** in ispatındaki gibi $t=\lambda^l$ değişken değişimi yapıldığında $|t|<1$ olması için gerek ve yeter şart $|\lambda|<1$ olmasıdır. $t=\lambda^l$ dönüşümü ile (3.1.15) denklemi

$$t^2+(r-2a)t+a^2-ar+s=0 \tag{3.1.16}$$

biçiminde 2. dereceden cebirsel denkleme dönüşür. (2.19) göz önünde bulundurulduğunda (3.1.16) denkleminin köklerinin birim disk içinde kalması için gerek ve yeter koşulun

$$|r-2a|<a^2-ar+s+1<2$$

olduğu görülür. Böylece (3.1.13) sağlanmış olur.

(b)⇒(a) (3.1.13) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu koşul (2.19) gereğince (3.1.16) denkleminin t köklerinin $|t|<1$ birim diski içinde kalması için gerek ve yeter koşuldur. $t=\lambda^l$ dönüşümü yapılırsa $|t|<1$ için gerek ve yeter koşul $|\lambda|<1$ olmasıdır. O zaman (3.1.13) koşulu (3.1.15) denkleminin λ köklerinin $|\lambda|<1$ diski içinde kalması için gerek ve yeter koşul olur. Bu durumda Teorem 2.2 gereğince (3.1.12) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlı olur, yani (a) sağlanır ve ispat tamamlanır.

Örnek 3.1.1

Genelleştirilmiş fark operatörü içeren

$$\Delta^2_{4,1/2}y(n)+11/6\,\Delta_{4,1/2}y(n)+5/6\,y(n)=0 \tag{3.1.17}$$

fark denklemini ele alalım. Burada $l = 4,\ a = 1/2\,,\ r = 11/6\,,\ s = 5/6$ dır. Bu değerler (3.1.13) de yerine yazıldığında

$$\left|\frac{11}{6} - 1\right| < \frac{1}{4} - \frac{1}{2}.\frac{11}{6} + \frac{5}{6} + 1 < 2$$
$$\frac{5}{6} < \frac{7}{6} < 2$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Dolayısıyla (3.1.17) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlıdır. Gerçekten (3.1.17) denklemi düzenlendiğinde

$$y(n+8) - \frac{5}{6}y(n+4) + \frac{1}{6}y(n) = 0$$

fark denklemi elde edilir. Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$\lambda^8 - \frac{5}{6}\lambda^4 + \frac{1}{6} = \left(\lambda^4 - \frac{1}{3}\right)\left(\lambda^4 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

olup λ karakteristik kökleri için $|\lambda| < 1$ sağlanır. Karakteristik kökler birim disk içinde kaldığı için (3.1.17) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlıdır.

Sonuç 3.1.2

$a, r, s \in \mathbb{R}, a \neq 0,\ l, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$y(i) = \varphi_i,\ \ \varphi_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2, \dots, 3l - 1 \tag{3.1.18}$$

başlangıç koşulları ile birlikte verilen genelleştirilmiş fark operatörü içeren

$$\Delta_{l,a}^3 y(n) + r\Delta_{l,a} y(n) + sy(n) = 0 \tag{3.1.19}$$

fark denklemini ele alalım. Aşağıdaki önermeler eş değerdir:

a) (3.1.19) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlıdır,

b)
$$|-3a + s - ar - a^3| < 1 + 3a^2 + r, \tag{3.1.20}$$

$$|3a^2 + r + 3as - 3a^2 r - 3a^4| < 1 - (s - ar - a^3)^2 \tag{3.1.21}$$

sağlanır.

İspat

(a)⇒(b) (3.1.19) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olduğunu kabul edelim. (3.1.19) denklemi (3.1.2) denkleminin $m = 3$ için bir özel halidir. $m = 3$ için Tanım 2.6 ve Tanım 2.7 kullanıldığında (3.1.19) denklemi

$$y(n + 3l) - 3ay(n + 2l) + (3a^2 + r)y(n + l) + (s - ar - a^3)y(n) = 0 \tag{3.1.22}$$

denklemine indirgenir. (3.1.22) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{3l} - 3a\lambda^{2l} + (3a^2 + r)\lambda^l + s - ar - a^3 = 0 \tag{3.1.23}$$

dir. Teorem (3.1.1**)** in ispatındaki gibi $t = \lambda^l$ değişken değişimi yapıldığında $|t| < 1$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $|\lambda| < 1$ olmasıdır. $t = \lambda^l$ dönüşümü ile (3.1.23) denklemi

$$t^3 - 3at^2 + (3a^2 + r)t + s - ar - a^3 = 0 \tag{3.1.24}$$

biçiminde 3. dereceden cebirsel bir denkleme dönüşür. (2.29) göz önünde bulundurulduğunda (3.1.24) denkleminin köklerinin birim disk içinde kalması için gerek ve yeter koşullar

$$|-3a + s - ar - a^3| < 1 + 3a^2 + r$$

ve

$|3a^2 + r + 3as - 3a^2r - 3a^4| < 1 - (s - ar - a^3)^2$

olur. Böylece (3.1.20) ve (3.1.21) sağlanmış olur.

(b)⇒(a) (3.1.20) ve (3.1.21) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Bu koşullar (2.28) gereğince (3.1.24) denkleminin t köklerinin $|t| < 1$ birim diski içinde kalması için gerek ve yeter koşullardır. $t = \lambda^l$ dönüşümü yapılırsa $|t| < 1$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $|\lambda| < 1$ olmasıdır. O zaman (3.1.20) ve (3.1.21) koşulları (3.1.23) denkleminin λ köklerinin $|\lambda| < 1$ diski içinde kalması için gerek ve yeter koşullardır. Bu durumda Teorem 2.2 gereğince (3.1.19) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlı olur, yani (a) sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

<u>*Örnek 3.1.2*</u>

Genelleştirilmiş fark operatörü içeren

$$\Delta^3_{3,1/3}y(n) - 1/36\,\Delta_{3,1/3}y(n) = 0 \tag{3.1.25}$$

fark denklemini ele alalım. Burada $l = 3, a = 1/3\,, r = -1/36\,, s = 0$ dır. Bu değerler (3.1.20) ve (3.1.21) de yerine yazıldığında

$$\left|-3.\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}.\frac{1}{36} - \frac{1}{27}\right| < 1 + 3.\frac{1}{9} - \frac{1}{36}$$

$$\frac{111}{108} < \frac{47}{36}$$

ve

$$\left|3.\frac{1}{9} - \frac{1}{36} + 3.\frac{1}{3}.0 + 3.\frac{1}{9}.\frac{1}{36} - 3.\frac{1}{81}\right| < 1 - \left(0 + \frac{1}{108} - \frac{1}{27}\right)$$

$$\frac{5}{18} < \frac{37}{36}$$

elde edilir. Sonuç (3.1.2) nin bütün şartları sağlanır. Dolayısıyla (3.1.25) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlıdır. Gerçekten (3.1.25) denklemi düzenlendiğinde

$$y(n+9) - y(n+6) + \frac{11}{36}y(n+3) - \frac{1}{36}y(n) = 0$$

fark denklemi elde edilir. Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$\lambda^9 - \lambda^6 + \frac{11}{36}\lambda^3 - \frac{1}{36} = \left(\lambda^3 - \frac{1}{3}\right)\left(\lambda^3 - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda^3 - \frac{1}{6}\right) = 0$$

olup, λ karakteristik kökleri için $|\lambda| < 1$ sağlanır. Karakteristik kökler birim disk içinde kaldığı için (3.1.25) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlıdır.

3.2. $\Delta_{l,a}^{m} y(n-l) + r\Delta_{l,a} y(n) + sy(n-l) = 0$ Denklemi İçin Kararlılık Kriterleri

Bu bölümde; $a, r, s \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $l, m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$y(i) = \varphi_i,\ \varphi_i \in \mathbb{R}, i = -l, -l+1, \dots 0,1,2, \dots, (m-1)l - 1 \tag{3.2.1}$$

başlangıç koşulları ile birlikte verilen genelleştirilmiş fark operatörü içeren

$$\Delta_{l,a}^{m} y(n-l) + r\Delta_{l,a} y(n) + sy(n-l) = 0 \tag{3.2.2}$$

gecikmeli fark denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlılığı incelenecektir.

Teorem 3.2.1

(3.2.1) başlangıç koşulları ile birlikte verilen genelleştirilmiş fark operatörü içeren (3.2.2) gecikmeli fark denklemini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki önermeler eş değerdir:

(a) (3.2.2) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlıdır,

(b) $p(t) = \sum_{i=0}^{m-3}(-1)^i \binom{m}{i} a^i t^{m-i} + \left((-1)^{m-2}\binom{m}{2}a^{m-2} + r\right)t^2 + ((-1)^m m a^{m-1} - ar)t + (-1)^m a^m + s$ olmak üzere

$$P(1) = \sum_{i=0}^{m-3}(-1)^i \binom{m}{i} a^i + (-1)^{m-2}\binom{m}{2}a^{m-2} + r + (-1)^m m a^{m-1} - ar + (-1)^m a^m + s > 0, \tag{3.2.3}$$

$$(-1)^m p(-1) = \sum_{i=0}^{m-3}\binom{m}{i} a^i + (-1)^m\left[(-1)^{m-2}\binom{m}{2}a^{m-2} + r\right] + (-1)^{m+1}[(-1)^m m a^{m-1} - ar] + a^m + (-1)^m s > 0\ , \tag{3.2.4}$$

$$A_{m-1}^{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\binom{m}{1}a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{m}{2}a^2 & -\binom{m}{1}a & 1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2}a^{m-2}+r & (-1)^{m-3}\binom{m}{m-3}a^{m-3} & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \pm$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^m a^m + s \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^m a^m + s & (-1)^{m-1} m a^{m-1} - ar \\ & & & & \\ 0 & (-1)^m a^m + s & & & \\ (-1)^m a^m + s & (-1)^{m-1} m a^{m-1} - ar & \dots & & \binom{m}{2}a^2 \end{bmatrix} \tag{3.2.5}$$

matrisleri pozitif iç matrislidir. Burada $A_{m-1}^{\pm}$ matrisinin öğeleri $p(t)$ polinomunun katsayıları kullanılarak oluşturulmuştur.

<u>İspat</u>

(a)⇒(b) (3.2.2) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olduğunu kabul edelim. Teorem 2.2 kullanılırsa (3.2.2) denklemi

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}a^i y(n+(m-1-i)l) + ry(n+l) - ary(n) + sy(n-l) = 0 \tag{3.2.6}$$

denklemine indirgenir. (3.2.6) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\sum_{i=0}^{m-3}(-1)^i\binom{m}{i}a^i y(n+(m-1-i)l) + \left((-1)^{m-2}\binom{m}{2}a^{m-2}+r\right)y(n+l) + ((-1)^{m-1}ma^{m-1}-ar)y(n) + ((-1)^m a^m + s)y(n-l) = 0 \tag{3.2.7}$$

denklemi elde edilir. (3.2.7) denkleminin karakteristik denklemi

$$\sum_{i=0}^{m-3}(-1)^i\binom{m}{i}a^i \lambda^{(m-i)l} + \left((-1)^{m-2}\binom{m}{2}a^{m-2}+r\right)\lambda^{2l} + ((-1)^{m-1}ma^{m-1}-ar)\lambda^l + (-1)^m a^m + s = 0 \tag{3.2.8}$$

dir. (3.2.7) denklemi sabit katsayılı homojen bir fark denklemi olduğu için Teorem 2.8 gereğince (3.2.2) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olabilmesi için (3.2.7) denklemine karşılık gelen karakteristik denklemin köklerinin $|\lambda| < 1$ diski içinde kalması gerekir. (3.2.8) denkleminde $\lambda^l = t$ değişken değişimi yapılırsa

$$p(t) = \sum_{i=0}^{m-2}(-1)^i\binom{m}{i}a^i t^{m-i} + ((-1)^{m-1}ma^{m-1}+r)t + (-1)^m a^m - ar + s = 0 \tag{3.2.9}$$

denklemi elde edilir. l pozitif bir tamsayı olduğundan $|\lambda| < 1$ ise $|\lambda^l| < 1$ olur. Dolayısıyla (3.2.8) denkleminin λ kökleri için $|\lambda| < 1$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart (3.2.9) denkleminin $t = \lambda^l$ kökleri için $|t| = |\lambda^l| < 1$ olmasıdır. Böylece (3.2.9) denkleminin kökleri olan t lerin $|t| < 1$ olması için verilen şartlar (3.2.8) denkleminin λ kökleri için $|\lambda| < 1$ olmasını da sağlar. (3.2.9) daki $p\,(t)$ polinomunun katsayıları; $0 \le i \le m-3$ olmak üzere $p_i = (-1)^i \binom{m}{i} a^i$, $p_{m-2} = \left((-1)^{m-2}\binom{m}{2}a^{m-2} + r\right)$, $p_{m-1} = (-1)^m m a^{m-1} - ar$ ve $p_m = (-1)^m a^m + s$ dir. Teorem 2.9 göz önünde bulundurulduğunda $p(t)$ polinomunun köklerinin $|t| < 1$ diski içinde kalması için gerek ve yeter şartlar aşağıdaki gibi olur.

$$\mathrm{P}(1)= \sum_{i=0}^{m-3}(-1)^i\binom{m}{i}a^i + (-1)^{m-2}\binom{m}{2}a^{m-2} + r + (-1)^m m a^{m-1} - ar + (-1)^m a^m + s > 0,$$

$$(-1)^m p(-1) = \sum_{i=0}^{m-3}\binom{m}{i}a^i + (-1)^m\left[(-1)^{m-2}\binom{m}{2}a^{m-2} + r\right] + (-1)^{m+1}[(-1)^m m a^{m-1} - ar] + a^m + (-1)^m s > 0,$$

$p(t)$ polinomunun katsayılar kullanılarak oluşturulan

$$A_{m-1}^{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\binom{m}{1}a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{m}{2}a^2 & -\binom{m}{1}a & 1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2}a^{m-2} + r & (-1)^{m-3}\binom{m}{m-3}a^{m-3} & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^m a^m + s \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^m a^m + s & (-1)^{m-1} m a^{m-1} - ar \\ & & & & \\ 0 & (-1)^m a^m + s & & & \\ (-1)^m a^m + s & (-1)^{m-1} m a^{m-1} - ar & \cdots & & \binom{m}{2}a^2 \end{bmatrix}$$

matrisleri pozitif iç matrislidir. Böylece (3.2.3), (3.2.4) ve (3.2.5) şartları sağlanmış olur.

(b)⇒(a) (3.2.3), (3.2.4) ve (3.2.5) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu şartlar Teorem 2.9 daki Schur-Cohn kriteri gereğince

$$p(t)=\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^i\binom{m}{i}a^i t^{m-i}+((-1)^{m-1}ma^{m-1}+r)t+(-1)^m a^m-ar+s=0$$

polinomunun köklerinin $|t|<1$ birim diski içinde kalması için gerek ve yeter koşullar olur. $\lambda^l=t$ değişken değişimi yapıldığında $|t|<1$ olması için gerek ve yeter şart $|\lambda|<1$ olmasıdır. Dolayısıyla (3.2.3), (3.2.4) ve (3.2.5) şartları aynı zamanda

$$\sum_{i=0}^{m-3}(-1)^i\binom{m}{i}a^i\lambda^{(m-i)l}+\left((-1)^{m-2}\binom{m}{2}a^{m-2}+r\right)\lambda^{2l}+((-1)^{m-1}ma^{m-1}-ar)\lambda^l+(-1)^m a^m+s=0 \tag{3.2.11}$$

denkleminin λ köklerinin $|\lambda|<1$ diski içinde kalması için de gerek ve yeter şartlar olur. Bu durumda Teorem 2.8 gereğince (3.2.2) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlı olur. Böylece (a) sağlanır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1

$a,r,s\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ r\neq -1,\ l,n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$y(i)=\varphi_i,\ \varphi_i\in\mathbb{R}, i=-l,-l+1,\dots,0,1,2,\dots,l-1 \tag{3.2.12}$$

başlangıç koşulları ile birlikte verilen genelleştirilmiş fark operatörü içeren

$$\Delta_{l,a}^2 y(n-l)+r\Delta_{l,a}y(n)+sy(n-l)=0 \tag{3.2.13}$$

gecikmeli fark denklemini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki önermeler eş değerdir:

a) (3.2.13) denkleminin aşikâr çözümü asimtotik kararlıdır,

b)

$$\left|a\left(1+\frac{1}{r+1}\right)\right|<\frac{a^2+s}{r+1}+1<2 \tag{3.2.14}$$

sağlanır.

İspat

(a)⇒(b) (3.2.13) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olduğunu kabul edelim. (3.2.13) denklemi (3.2.2) denkleminin $m = 2$ için bir özel halidir. $m = 2$ için Tanım 2.6 ve Tanım 2.7 kullanıldığında (3.2.13) denklemi

$$(r+1)y(n+l) + (-ar-2a)y(n) + (a^2+s)y(n-l) = 0 \tag{3.2.15}$$

denklemine indirgenir. $r \neq -1$ olduğundan (3.2.15) denklemi

$$y(n+l) - a\left(1+\frac{1}{r+1}\right)y(n) + \frac{a^2+s}{r+1}y(n-l) = 0 \tag{3.2.16}$$

biçiminde düzenlenebilir. (3.2.16) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{2l} - a\left(1+\frac{1}{r+1}\right)\lambda^l + \frac{a^2+s}{r+1} = 0 \tag{3.2.17}$$

dir. Teorem (3.2.1) in ispatındaki gibi $t = \lambda^l$ değişken değişimi yapıldığında $|t| < 1$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $|\lambda| < 1$ olmasıdır. $t = \lambda^l$ dönüşümü ile (3.2.17) denklemi

$$t^2 - a\left(1+\frac{1}{r+1}\right)t + \frac{a^2+s}{r+1} = 0 \tag{3.2.18}$$

biçiminde 2. dereceden cebirsel bir denklemine dönüşür. (2.19) göz önünde bulundurulduğunda (3.2.18) denkleminin köklerinin birim disk içinde kalması için gerek ve yeter koşul

$$\left|a\left(1+\frac{1}{r+1}\right)\right| < \frac{a^2+s}{r+1} + 1 < 2$$

olur. Böylece (3.2.14) sağlanmış olur.

(b)⇒(a) (3.2.14) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu koşul (2.19) gereğince (3.2.18) denkleminin t köklerinin $|t| < 1$ birim diski içinde kalması için gerek ve yeter koşuldur. $t = \lambda^l$ dönüşümü yapılırsa $|t| < 1$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $|\lambda| < 1$ olmasıdır. O zaman (3.2.14) koşulu (3.2.17) denkleminin λ köklerinin $|\lambda| < 1$ diski içinde kalması için gerek ve yeter koşul olur. Bu durumda Teorem 2.2 gereğince (3.2.13) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlı olur, yani (a) sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.1

Genelleştirilmiş fark operatörü içeren

$$\Delta^2_{5,1/6} y(n-5) - 3/5\,\Delta_{5,1/6} y(n) + 1/180\, y(n-5) = 0 \tag{3.2.19}$$

gecikmeli fark denklemini ele alalım. Burada $l = 5, a = 1/6\,, r = -3/5,$ $s = 1/180$ dir. Bu değerler (3.2.14) de yerine yazıldığında

$$\left|\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{-\frac{3}{5}+1}\right)\right| < \frac{\frac{1}{36}+\frac{1}{180}}{-\frac{3}{5}+1} + 1 < 2$$

$$\frac{7}{12} < \frac{13}{12} < 2$$

elde edilir. Sonuç (3.2.1) nin bütün şartları sağlanır. Dolayısıyla (3.2.19) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlıdır. Gerçekten (3.2.19) denklemi düzenlendiğinde

$$12y(n+5) - 7y(n) + y(n-5) = 0$$

fark denklemi elde edilir. Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$12\lambda^{10} - 7\lambda^5 + 1 = (3\lambda^5 - 1)(4\lambda^5 - 1) = 0$$

olup, λ karakteristik kökleri için $|\lambda| < 1$ sağlanır. Karakteristik kökler birim disk içinde kaldığı için (3.2.19) denkleminin sıfır çözümü asimtotik kararlıdır

3.3. $\Delta_a(y(n) + py(n-k)) + qy(n-k+2) = 0$ Denklemi İçin Kararlılık Kriteri

Bu kesimde $a, p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$y(i) = \varphi_i,\ \ \varphi_i \in \mathbb{R}, i = -k, -k+1, \ldots, 0 \tag{3.3.1}$$

başlangıç şartları ile birlikte verilen genelleştirilmiş fark operatörü içeren

$$\Delta_a(y(n) + py(n-k)) + qy(n-k+2) = 0 \tag{3.3.2}$$

nötral fark denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlılığı incelenmektedir. (3.3.2) denkleminin bir çözümünden kasıt $n = -k, -k+1, \ldots, 0$ için tanımlı olan ve $\mathbb{N}$ üzerinde (3.3.2) denklemini özdeş olarak sağlayan reel değerli $y(n)$ dizisidir.

<u>Teorem 3.3.1</u>

(3.3.1) başlangıç koşulları ile birlikte verilen genelleştirilmiş fark operatörü içeren (3.3.2) fark denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek yeter şartlar:

$$1 - a + q + p + ap > 0, \tag{3.3.3}$$

$$1 + a + (-1)^{k+1}(q - p + ap) > 0\,, \tag{3.3.4}$$

$$A_k^{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1 & & & & 0 \\ 0 & -a & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \vdots & \ddots & -a & 1 & 0 \\ q & 0 & \cdots & 0 & -a & 1 \end{bmatrix} \pm \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & ap \\ 0 & & & 0 & ap & p \\ \vdots & & \iddots & \iddots & p & q \\ \vdots & 0 & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & ap & p & \iddots & \iddots & \vdots \\ ap & p & q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right] \tag{3.3.5}$$

matrislerinin pozitif iç matrisli olmasıdır.

<u>İspat</u>

(⇒) (3.3.2) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olduğunu kabul edelim. Tanım 2.6 kullanılarak (3.3.2) denklemi lineer, sabit katsayılı homojen

$$y(n+1) - ay(n) + qy(n-k+2) + py(n-k+1) + apy(n-k) = 0 \qquad (3.3.6)$$

denklemine dönüşür. Teorem 2.8 gereğince (3.3.6) denkleminin asimtotik kararlı olabilmesi için

$$P(\lambda) = \lambda^{k+1} - a\lambda^k + q\lambda^2 + p\lambda + ap = 0 \qquad (3.3.7)$$

karakteristik polinomunun kökleri $|\lambda| < 1$ diski içinde kalmalıdır. Teorem 2.9 göz önünde bulundurulduğunda $p(\lambda)$ polinomunun köklerinin $|\lambda| < 1$ diski içinde kalması için (3.3.3), (3.3.4) ve (3.5.5) şartları sağlanır.

(⇐) Tanım 2.6 kullanılırsa (3.3.2) denklemi (3.3.6) denklemine dönüşür. (3.3.6) denklemi lineer, sabit katsayılı homojen bir fark denklemidir ve karakteristik denklemi (3.3.7) biçimindedir. (3.3.7) deki $p\ (\lambda)$ polinomunun katsayıları; $p_1 = -a$, $p_{k-1} = q$, $p_k = p$, $p_{k+1} = ap$ dir. Teorem 2.9 göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki şartlar $p(\lambda)$ polinomunun köklerinin $|\lambda| < 1$ diski içinde kalması için gerek ve yeter şartlardır.

- $p(1) = 1 - a + q + p + ap > 0,$

- $(-1)^{k+1}p(-1) = (-1)^{k+1}((-1)^{k+1} - (-1)^k a + q - p + ap) > 0,$

  $$1 + a + (-1)^{k+1}(q - p + ap) > 0,$$

- $p(\lambda)$ polinomunun katsayılar kullanılarak oluşturulan

$$A_k^{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1 & & & & 0 \\ 0 & -a & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \vdots & \ddots & -a & 1 & 0 \\ q & 0 & \cdots & 0 & -a & 1 \end{bmatrix} \pm \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & ap \\ 0 & & & 0 & ap & p \\ \vdots & & \iddots & \iddots & p & q \\ \vdots & 0 & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & ap & p & \iddots & \iddots & \vdots \\ ap & p & q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right]$$

matrisleri pozitif iç matrislidir. Dolayısıyla (3.3.3), (3.3.4) ve (3.5.5) şartları sağlandığında (3.3.6) denklemine karşılık gelen (3.3.7) karakteristik denkleminin köklerinin $|\lambda| < 1$ diski içinde kalır ve Teorem 2.8 gereğince (3.3.2) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olur.

KAYNAKLAR

1. Çatal, S. (2004). Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri ile Çözümü, *Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6(1), 129-138.

2. Kulenovic, M. R. S., Kalabusic, S., (2000). Projects For The History of Difference Equations and Recursive Relations, University of Rhode Island, http://fibonacci.math.uri.edu/~kulenm/diffeqaturi/m381f00fp/m381f00mp.htm Erişim tarihi:05/03/2015.

3. Goldberg, S. (1958). *Introduction to Difference Equations*. New York: John Wiley&Sons.

4. Elaydi, S. (2004). *An Introduction to Difference Equations*. Third Edition. USA: Springer.

5. Mickens, R. E. (1990). *Difference Equations: Theory and Applications.* London: Chapman and Hall.

6. Agarwal, R. P. (2000) *Difference Equations and İnequalities,Theory, Methods and Applications.* New York: Marcel Dekker.

7. Agarwal, R. P., Wong, P. J. Y. (1997). *Advanced Topics in Difference Equations.* Notherlands: Kluwer Academic Publishers.

8. Kelley, W. G., Peterson, A. C. (2001*). Difference Equations, an Introduction with Applications*. Second Edition. USA: Academic Press.

9. Lakshmikantham, V., Trigiante, D.(2002). *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications*. New York: Marcel Dekker.

10. Bereketoğlu, H., Kutay, V. (2012). *Fark Denklemleri.* Ankara: Gazi Kitabevi.

11. Bolat, Y. (2003) Yüksek Basamaktan Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı. Yayınlanmış Doktora Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.* Ankara.

12. Clark, C.W. (1976).A delay-recruitment model of populations dynamics with application to baleen whale populations, *J. Math. Biol. 3,* 381-391.

13. Levin, S. ve May, R. (1976). A Note on Difference-Delay Equations, *Theoretical Population Biol.* 9, 178-187.

14. Kuruklis, S. A. (1994). The asymptotic stability of x(n+1) - ax(n) + bx(n-k) = 0, *J.Math. Anal. Appl*., 188, 719-731.

15. Papanicolaou, V. G. (1996). On the Asymptotic Stability of a Class of Linear Difference Equations. *Mathematics Magazine, Vol. 69, No. 1, pp*. 34-43.

16. Ladas, G., Qian, C., Vhalos P.N, Yan, J. (1991). Stability of Solutions of Linear Nonautonomous Difference Equations. *Applicable Analysis. Vol* 41,pp. 183-191.

17. Matsunaga, H. ve Hara, T. (2000). Asymptotic Stability Condition for a Class of Linear Delay Difference Equations of Higher Order. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 248***,** 83-96.

18. Matsunaga, H. (2004).Stability Regions for a Class of Delay Difference Systems. *Fields Institute Communications, Volume* 42.

19. Čermák, J., Jánský, J., Kundrát, P. (2012). On necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of higher order linear difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications* .*Vol*. 18, *No*. 11.

20. Akın, Ö., Bulgak, H. (1998). *Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi*. Konya: Selçuk Üniversitesi Basımevi.

21. Kulenovic, M. R. S., Ladas, G., Prokup, N. R. (2001) A Rational difference equation, *Computers and Mathematics with Applications* 41, 671-678.

22. Camouzis, E., Ladas, G.(2008). *Dynamics of Third-Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures.* New York: Chapman and Hall/CRC

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Murat GEVGEŞOĞLU
Doğum Yeri ve Yılı : Kastamonu 1979
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : mgevgesoglu@kastamonu.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise : Kastamonu Anadolu Öğretmen Lisesi - 1997
Lisans : Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü -2000,
Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü -2001 (Çift Anadal)

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Özel Nilşen Dershanesi (2000 – 2004)
İş Yeri : Kastamonu Final Dergisi Dershanesi (2004 – 2013)
İş Yeri : Kastamonu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi (2013 –Halen)

Yayınları

Raşid, R. (2005). Anaklastikte bir öncü: İbn Sahl'ın yakıcı aynalar ve mercekler İncelemeleri. Bekir S. Gür, Klasik Avrupalı modernitenin icadı ve İslam'da Bilim (s.195-247), 1. Baskı, Ankara, Kadim.