T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

W-EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONU

Tuncay Deniz ŞENTÜRK

Danışman	**Yrd. Doç. Dr. Zafer ÜNAL**
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Ahmet EROĞLU**
Jüri Üyesi	**Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASTAMONU – 2017

TEZ ONAYI

Tuncay Deniz ŞENTÜRK tarafından hazırlanan **"W-Eğrilerinin Karakterizasyonu"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Yrd. Doç. Dr. Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Ahmet EROĞLU Ömer Halisdemir Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER Kastamonu Üniversitesi	....

26/05/2017

Enstitü Müdür V.	Prof. Dr. Temel SARIYILDIZ	....

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

Tuncay Deniz ŞENTÜRK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

W-EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONU

Tuncay Deniz ŞENTÜRK
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Zafer ÜNAL

Bu tezde, W-eğrilerinin karakterizasyonu verilmiştir.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin önemi irdelenmiştir. İkinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, 3-boyutlu ve n-boyutlu Öklid uzayında Frenet eğrilikleri ile W-eğrilerinin karakterizasyonu, küre ve silindirlerin karakterizasyonu ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında, Frenet eğrilikleri ve W-eğrileri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: W-eğrisi, Öklid uzayı, Minkowski 3-uzay, Frenet eğrilikleri, Frenet denklemleri.

2017, 56 sayfa
Bilim Kodu: 204

ABSTRACT

MSc. Thesis

CHARACTERIZATIONS OF W-CURVES

Tuncay Deniz ŞENTÜRK
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathemathics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Zafer ÜNAL

In this thesis, Characterizations of W-curves are given.

The Thesis consists of four chapters. In the first chapter, is given the importance of thesis. The second chapter, is devoted to the introduction. In the third chapter, in Euclidean space, with Frenet curvatures, characterizations of W-curves, spheres and cylinders are examined. In the fourth chapter, in three dimensional Minkowski space, Frenet curvatures and W-curves are given.

Keywords: W-curves, Euclidean space, Minkowski 3-space, Frenet curvatures, Frenet equations.
2017, 56 pages
Science Code: 204

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Zafer ÜNAL (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü) ’a ve Sayın Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ (Kastamonu Üniversitesi Eğitim Fakültesi Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi) ’ye teşekkürlerimi borç bilirim.

Her zaman yanımda olan aileme gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Tuncay Deniz ŞENTÜRK
Kastamonu, Mayıs, 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel vektör uzayı
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
E_1^n	n-boyutlu Minkowski uzayı
V	Reel vektör uzayı
g	V üzerinde simetrik bilineer form
α	E^n de bir eğri
(I,α)	α eğrisinin koordinat komşuluğu
$\alpha'(\mathrm{t})$	α eğrisinin t noktasındaki hız vektörü
$T_{E^n}P$	P noktasındaki tanjant uzay
X_P	P noktasındaki tanjant vektör
κ_i	i-yinci Frenet eğriliği
τ	Burulma
$Lin(e_1, e_2, \ldots, e_n)$	$e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektörlerinin lineer birleşimi
N	Birim normal vektör alanı
M	E^n de bir hiperyüzey
S	M yüzeyinin şekil operatörü
S^*	S şekil operatörünün eki
$\langle\, ,\rangle_L$	Lorentz anlamında iç çarpım
$\nabla f\big\|_p$	f fonksiyonunun p noktasındaki gradiyent vektör alanı
η	Gauss dönüşümü
$S^{m-1}(r)$	$m-1$-boyutlu r yarıçaplı küre
$S^{p-1}\times E^{m-p}$	Silindir
$\chi(M)$	M üstünde vektör alanlarının cümlesi
D_x	X e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi Diferensiyel Geometrinin önemli bir bölümünü oluşturur. Tarihte ilk kez 17.yy da 2 ve 3-boyutlu uzayda parametrik eğriler ve 18.yy da bunların eğriliklerinden söz edilmiştir. Daha sonra 2 ve 3-boyutlu yüzeylere ve eğriliklerine geçilmiştir. n-boyutlu eğrilikler ve Gauss eğriliği, ortalama eğrilik gibi kavramlar ise çok daha ileriki zamanlarda ortaya çıkmıştır.

Öklid düzleminde eğriler teorisinin temellerini atan Huygens bu sayede sarkaç ve saatleri icat etmiştir. 1671 yılında Newton ilk kez düzlemde α eğrisinin $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ şekinde keyfi bir t parametresine bağlı olarak yazılabileceğini göstermiştir. 1775 te Monge ilk kez E^3 te bir eğrinin iki eğriliğinden söz etmiş ve τ (torsiyon) ve κ (eğrilik) olarak tanımlamıştır [1]. Birçok bilim adamı uzayda bir eğrinin ardışık türevlerini alarak eğriler üzerine sistematik olarak araştırmalar yapmıştır. Bunlardan 1847 de Frenet ve 1851 de Serret birbirlerinden bağımsız olarak ilk kez $\{T, N, B\}$ ortonormal çatıyı tanımlayarak

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen Serret-Frenet denklemlerini bulmuşlar ve eğriler teorisindeki en büyük adımı atmışlardır [2,3]. Bu denklemlere göre 3-boyutlu uzayda $\kappa = 0$ ise eğri bir doğru belirtir, $\tau = 0$ ve $\kappa \neq 0$ ve sabit ise eğri bir çember ve son olarak $\tau \neq 0$ ve $\kappa \neq 0$ iken κ ve τ sabit ise bu eğri bir dairesel helistir. Ayrıca E^n de çalışırken tüm Frenet eğrilikleri sabit olan eğriye W-eğrisi denir [4].

Bu tez çalışmasında n-boyutlu Öklid uzayında ve Minkowski 3-uzayında W-eğrilerinin karakterizasyonu incelenmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Temel tanım ve kavramlar için Hacısalihoğlu nun ”Diferensiyel Geometri Cilt 1 (1998) ve Cilt 2 (2012), Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş (1980)” kitaplarından; Öklid uzayında W-eğrilerinin karakterizasyonu için Chen ve arkadaşlarının ”New Characterizations of W-curves (2006)” ve ”New characterizations of spheres, cylinders and W-curves (2010)” makalelerinden; W-eğrilerinin Minkowski 3-uzayında incelenmesinde O'Neill in ”Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity (1983)” kitabından ve Hacısalihoğlu nun ”Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş (1980)” kıtabından ve Walrave in ”Curves and Surfaces in Minkowski Space (1995)” doktora tezinden faydalanılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Düzlemsel bir eğrinin çember olup olmadığı, eğri üzerindeki keyfi iki noktayı birleştiren kiriş ve eğrinin arasındaki açıların eşit olup olmadığı ile karakterize edildiği iyi bilinen bir olgudur [5]. E^2 de çember ve doğru, E^3 te helis eğrisi W-eğrilerinin bilinen en basit örnekleridir. Chen ve arkadaşları [6] da W-eğrilerini tanımlamış ve bir karakterizasyon vermiştir. Ayrıca Boas [7,8] de hiperyüzeyler için bir koşul vermiş ve Wegner de [9] da buna yönelik bir diferensiyel geometrik ispat yapmıştır. Kim ve arkadaşları [10] da izoparametrik hiperyüzeyler ve W-eğrileri için daha temel bir karakterizasyon vermiştir.

Bu tez çalışmasında, [6,10] daki çalışmalar irdelenmiş olup, bunun yardımıyla Minkowski 3-uzayındaki durum ele alınacaktır. Tez çalışması boyunca aksi söz edilmedikçe tüm objelerin düzgün ve irtibatlı olduğu düşünülecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1

$I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha: \quad I \rightarrow & \quad E^n \\ t \rightarrow & \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan α diferensiyellenebilir fonksiyonuna (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri denir. Burada $t \in I$ ya eğrinin parametresi, $I \subset \mathbb{R}$ aralığına da eğrinin parametre aralığı denir [11].

Tanım 2.2

(I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri her $s \in I$ için,

$$\left\| \alpha^{'}(s) \right\| = 1$$

ise bu eğriye birim hızlı eğri denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir [11].

Tanım 2.3

E^n de bir eğri (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

fonksiyonunun Öklid koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ olmak üzere,

$$\alpha(t) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

ve

$$\alpha^{'}(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}|_t, \frac{d\alpha_2}{dt}|_t, \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt}|_t \right)$$

şeklindedir. $\left(\alpha(t), \alpha^{'}(t)\right) \in T_{E^n}\left(\alpha(t)\right)$ tanjant vektörüne, bu eğrinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir [11].

Tanım 2.4

Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir [11].

Tanım 2.5

$\alpha(s)$, E^n Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. Eğer $I \subset E^n$ aralığındaki her noktada $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(m-1)}$ vektörleri lineer bağımsız ise bu eğriye Frenet eğrisi denir [6].

Tanım 2.6

E^n Öklid uzayındaki $(n \geq 2)$ bir birim hızlı $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi, Frenet eğrilikleri boyunca sabitse bu eğriye W-eğrisi denir [10].

Tanım 2.7

$\alpha \subset E^3$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğrinin birim teğet vektörü T olmak üzere, T nin sabit bir U vektörü ile yaptığı açı sabit ise, α eğrisine bir helis veya eğilim çizgisi denir. $Sp\{U\}$ da helisin eksenidir [12].

Tanım 2.8

E^n, Öklid uzayında $(n-1)$-boyutlu bir yüzey ve $(n-1)$-yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir. Öyle ki bu M cümlesi,

$$M = \left\{ x \in J \subset E^n \mid \begin{array}{ll} f: & J \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = c \end{array}, \ J \text{ açık cümle}, \nabla f|_P \neq 0, \ \forall P \in M \right\}$$

biçiminde tanımlanır. E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. E^3 de bir 2-yüzeye genellikle sadece yüzey denir. E^n de bir $(n-1)$-yüzey, $n > 3$ olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.9

$0 \neq (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E^n$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, E^n de bir $(n-1)$-düzlem (veya $(n-1)$-yüzey),

$$M = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \right\}$$

olarak tanımlanır. Herbir $b \in \mathbb{R}$ için M bir başka $(n-1)$-yüzeydir. Çünkü

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

olmak üzere,

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \left\langle \left(\frac{\delta}{\delta x_1}, \frac{\delta}{\delta x_2}, \ldots, \frac{\delta}{\delta x_n} \right), (a_1, a_1, \ldots, a_1) \right\rangle \neq 0$$

dır. E^2 deki bir 1-düzleme E^2 deki bir doğru, E^3 deki bir 2-düzleme E^3 deki bir düzlem ve $n > 3$ olmak üzere, E^n deki bir $(n-1)$-düzleme de E^n deki bir hiperdüzlem denir. b reel sayısının farklı iki değeri b_1, b_2 olsun. O zaman,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b_1 \text{ ve } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b_2$$

ile tanımlanan $(n-1)$-düzlemler birbirine paralel iki hiperdüzlemdirler [12].

Tanım 2.10

E^n de bir hiperyüzey M olsun. $\chi(M)^{\perp}$ uzayının bir ortonormal bazı $\{N\}$ ise N ye M nin birim normal vektör alanı denir [12].

Tanım 2.11

Üzerinde bir birim normal vektör alanı seçilmiş hiperyüzeye yönlendirilmiş hiperyüzey denir [12].

Tanım 2.12

E^3 de bir S^2 küresi merkezi a ve yarıçapı r ise

$$S^2 = \left\{ x \in E^3 \mid \langle x - a, x - a \rangle = r^2 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3$ ve $a = (a_1, a_2, a_3)$ ise

$$x - a = (x_1 - a_1, x_2 - a_{2,} x_2 - a_2)$$

olduğundan,

$$\langle x - a, x - a \rangle = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2$$

şeklinde bulunur. S^{n-1}, E^n de bir hiperküre ise

$$S^{n-1} = \left\{ x \in E^n \mid \langle x - a, x - a \rangle = r^2 \right\}$$

veya

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = r^2$$

dir [12].

Tanım 2.13

E^n de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M olsun. M nin diferensiyellenebilir birim normal vektör alanı,

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i(P) \frac{\delta}{\delta x_i}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \eta: \quad M \rightarrow & \quad S^{n-1} \subset E^n \\ P \rightarrow & \quad \eta(P) = N(P) = (P, N) = \sum_{i=1}^{n} a_i(P) \tfrac{\delta}{\delta x_i}|_P \end{aligned}$$

dönüşümü, $\|N_P\| = 1$ olduğundan, M yi E^n deki S^{n-1} birim hiperküresine resmeder. Böylece tanımlanmış olan diferensiyellenebilir η dönüşümüne Gauss dönüşümü denir [12].

Tanım 2.14

E^n de bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N verilsin. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, her $X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X N$ şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü (M nin Weingarten dönüşümü) denir [12].

Tanım 2.15

M, E^n de bir hiperyüzey ve M nin şekil operatörü S olsun. S nin karakteristik değerlerine M nin asli eğrilikleri ve karakteristik değerlerine karşılık gelen karakteristik vektörlere de M nin asli doğrultuları denir. Buna göre $X_P \in T_M(P)$ için $S(X_P) = kX_P$ olmak üzere, k ya asli eğrilik X_P ye de asli doğrultu denir [12].

Tanım 2.16

V, n-boyutlu bir iç çarpım uzayı ve $S : V \rightarrow V$ bir lineer dönüşüm olsun. S nin adjointi S^* olmak üzere, $S^* = S$ ise S ye V nin bir self-adjoint dönüşümü denir [13].

3. FRENET EĞRİLİKLERİ VE W-EĞRİLERİ

Keyfi boyutlu Öklid uzayındaki bir eğrinin W-eğrisi olması için gerek ve yeter şart bu eğri üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren kirişin, bu eğriyi aynı açıda karşılamasıdır. Dahası, E^3 Öklid uzayında W-eğrileri daha genel iki koşul ile karakterize edilmektedir.

E^3 deki bir eğri W-eğrisidir ancak ve ancak bu eğri ve eğrinin üzerinde bulunan herhangi iki noktayı birleştiren kiriş arasındaki iki açının kosinüs değerleri farkı sadece bu iki nokta arasında kalan eğrinin yay uzunluğuna bağlıdır [6].

3.1. Frenet Eğrilikleri ve W-Eğrilerinin Karakterizasyonu

$\alpha(s)$, E^m Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. Eğer bazı $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tamsayıları için, bir $J \subset I$ açık alt aralığındaki her noktada $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(n)}$ türevleri lineer bağımsız ve $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(n+1)}$ türevleri lineer bağımlı ise J üzerinde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektörleri aşağıdaki koşullarla tek türlü belirlenir:

1) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormaldir.
2) Her $k = 1, 2, \ldots, n$ için $Lin\,(e_1, e_2, \ldots, e_k) = Lin\left(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(k)}\right)$ ya sahibiz.
3) Her $k = 1, 2, \ldots, n$ ve $\left\langle \alpha^{(k)}, e_k \right\rangle > 0$ için $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1}$ Frenet eğrilikleri aşağıdaki Frenet denklemleri ile belirlenir:

$$\begin{bmatrix} e_1^{'} \\ e_2^{'} \\ e_3^{'} \\ \vdots \\ e_{n-1}^{'} \\ e_n^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\kappa_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix}$$

Birim hızlı regüler bir $\alpha(s)$ eğrisi, eğer her $s \in I$ için $\dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s), \ldots, \alpha^{(r)}(s)$ türevleri lineer bağımsız; $\dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s), \ldots, \alpha^{(r+1)}(s)$ türevleri lineer bağımlı ve $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{r-1}$ Frenet eğrilikleri I üzerinde sabit ise rankı r olan bir W-eğrisi olarak adlandırılır [6].

Genel olarak, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi Öklid uzayında birim hızlı bir W-eğrisi ise uygun bir Öklid koordinat sistemi ile aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\alpha(s) = (a_1 \cos c_1 s, a_1 \sin c_1 s, \ldots, a_n \cos c_n s, a_n \sin c_n s, 0, \ldots, 0) \tag{3.1.1}$$

$$\alpha(s) = (a_1 \cos c_1 s, a_1 \sin c_1 s, \ldots, a_n \cos c_n s, a_n \sin c_n s, bs, 0, \ldots, 0) \tag{3.1.2}$$

Sıfırdan farklı $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sayıları ve yine sıfırdan farklı b sayısı için α nın rankının çift veya tek olmasına göre $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı eğrisi için,

$$a_1^2 c_1^2 + \ldots + a_n^2 c_n^2 = 1 \text{ veya } a_1^2 c_1^2 + \ldots + a_n^2 c_n^2 + b^2 = 1 \tag{3.1.3}$$

bulunur.

Özel olarak E^3 de birim hızlı bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi için Frenet denklemleri,

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= e_1 \\
\ddot{\alpha} &= \kappa_1 e_2 \\
\dddot{\alpha} &= -\kappa_1^2 e_1 + \kappa_1^{'} e_2 + \kappa_1 \kappa_2 e_3 \\
\alpha^{(4)} &= -3\kappa_1 \kappa_1' e_1 + \left(\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1 \kappa_2^2\right) e_2 + \left(2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2'\right) e_3
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

şeklinde verilir.

Teorem 3.1.1

$\alpha = \alpha(s)$, E^2 Öklid düzleminde birim hızlı kapalı bir eğri ve $T(s) = \dot{\alpha}(s)$ de bu eğrinin birim tanjant vektör alanı olsun. $\alpha = \alpha(s)$ bir çemberdir ancak ve ancak

$$\langle \alpha(t) - \alpha(s), T(t) - T(s) \rangle = 0 \tag{A}$$

koşulu sağlanır [6].

Teorem 3.1.2

E^m $(m \geq 2)$ Öklid m-uzayındaki bir birim hızlı $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin bir W-eğrisi olması için gerek ve yeter koşul (A) koşulunu sağlamasıdır [10].

Bir çember kapalı düzlemsel bir eğri olarak tanımlanır. Öyle ki üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren kirişin, çemberi bu iki noktada aynı açıda karşıladığı iyi bilinir.

E^2 de birim hızlı bir $\alpha(s)$ eğrisinin (A) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul $\alpha(s)$ nin ya bir çember ya da bir doğru olmasıdır [10].

Soru: Bir Öklid uzayında hangi eğriler (A) koşulunu sağlar?

Bir Öklid uzayında Frenet eğrilikleri sabit olan birim hızlı bir eğriye W-eğrisi denildiği için E^2 deki doğrular, çemberler ve E^3 deki dairesel helisler W-eğrilerinin en basit örnekleridir.

Örnek 3.1.1

E^2 de herhangi bir doğrunun (A) koşulunu sağladığını gösterelim:

Doğrultman vektörü $v = (v_1, v_2)$ olan ve $u = (u_1, u_2)$ noktasından geçen $\alpha = \alpha(s)$ doğrusunu s yay parametresi ile

$$\alpha(s) = (v_1 s + u_1, v_2 s + u_2)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $T(s) = \dot{\alpha}(s) = v$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle (v_1 t + u_1, v_2 t + u_2) - (v_1 s + u_1, v_2 s + u_2), (v_1, v_2) - (v_1, v_2) \rangle &= \\ \langle (v_1(t-s), v_2(t-s)), (0,0) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.1.2

E^2 de herhangi bir çemberin (A) koşulunu sağladığını gösterelim:

$\alpha = \alpha(s)$, E^2 Öklid düzleminde bir çember olsun. O halde çember denkleminden,

$$\alpha(s) = (a + r\cos s, b + r\sin s) \text{ ve } \dot{\alpha}(s) = T(s) = (-r\sin s, r\cos s)$$

olarak yazarız.

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha(t) - \alpha(s), T(t) - T(s) \rangle \\
&= \langle (r(\cos t - \cos s), r(\sin t - \sin s)), (-r(\sin t - \sin s), (r(\cos t - \cos s))) \rangle \\
&= -r^2 (\cos t - \cos s)(\sin t - \sin s) + r^2 (\sin t - \sin s)(\cos t - \cos s) = 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.1.3

E^3 te herhangi bir dairesel helisin (A) koşulunu sağladığını gösterelim:

$\alpha = \alpha(s)$ eğrisi bir dairesel helis olsun. Bu durumda $\alpha = \alpha(s)$ eğrisini,

$$\alpha(s) = (r\cos s, r\sin s, hs) \text{ ve } \dot{\alpha}(s) = (-r\sin s, r\cos s, h)$$

şeklinde yazabiliriz. O halde,

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha(t) - \alpha(s), T(t) - T(s) \rangle \\
&= -r^2 (\cos t - \cos s)(\sin t - \sin s) + r^2 (\sin t - \sin s)(\cos t - \cos s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Teorem 3.1.3

E^m Öklid uzayında birim hızlı regüler $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin, bir W-eğrisi olması için gerek ve yeter şart üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren kirişin bu eğriyi aynı açıda karşılamasıdır [6].

İspat

Öklid uzayında birim hızlı bir eğri $\alpha = \alpha(s)$ olsun. Genelliği bozmadan $\alpha = \alpha(s)$ nin sıfırı içeren bir I açık aralığı üzerinde tanımlandığını varsayıp (A) koşulunu sağlayan bir eğri olduğunu düşünelim. O halde $t = s + a$ yazarak

$$\langle \alpha(s+a) - \alpha(s), T(s+a) - T(s) \rangle = 0 \tag{3.1.5}$$

elde ederiz. (3.1.5) denklemi yardımıyla

$$\|\alpha(s+a) - \alpha(s)\|^2 = f(a). \tag{3.1.6}$$

fonksiyonu yazılabilir.

$$\begin{aligned} f(-a) &= \|\alpha(s-a) - \alpha(s)\|^2 \\ &= \|\alpha(s-a+a) - \alpha(s-a)\|^2 \\ &= f(a) \end{aligned}$$

olduğundan, $f(a)$ nın çift fonksiyon olduğu görülür. $a = 0$ civarında $f(a)$ çift fonksiyon olduğundan, bazı $c_2, \ldots, c_{2m}$ sabitleri ile bir ρ sabiti ve yeterince küçük $a > 0$ sayısı ile $|g(a)| \leq \rho\, |a|^{2m+1}$ koşulunu sağlayan $g(a)$ fonksiyonu için,

$$f(a) = \sum_{k=2}^{2m} c_k a^k + O\left(|a|^{2m+1}\right), \; a \to 0$$

yazılabilir. Ayrıca $a = 0$ daki $\alpha(s+a)$ nın Taylor açılımını göz önünde bulundurursak

$$\alpha(s+a) - \alpha(s) = \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{1}{k!} \alpha^{(k)}(s) a^k + O\left(|a|^{2m}\right) \tag{3.1.7}$$

olarak elde edilir. (3.1.6) ve (3.1.7) den $a \to 0$ için,

$$f(a) = \sum_{k=2}^{2m} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!(k-i)!} \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle \right) a^k + O\left(|a|^{2m+1}\right)$$

bulunur. Böylece $k = 2, 4, \ldots, 2m$ için, $c_2, \ldots, c_{2m}$ sabitleri

$$c_k = \sum_{i=k}^{k-1} \frac{1}{i!(k-i)!} \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle \tag{3.1.8}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $i = 1, \ldots, k-1$ ve $2 \leq k \leq 2m$ için,

$$\left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle = \text{sabit} \tag{MT}$$

olduğunu matematiksel tümevarım ile gösterelim:

$\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı olduğundan $k = 2$ için (MT) sabittir. $l < 2m$ olmak üzere $k = l$ için (MT) nin doğru olduğunu kabul edip $k = l + 1$ için gerçeklendiğini göstereceğiz.

İspatı $k = l + 1$ in tek veya çift olması durumunu gözönüne alarak yapacağız.

$k = l + 1$ tek sayı olsun. Bu durumda $l = 2p$ olacak şekilde pozitif bir p tamsayısı vardır. Genelliği bozmadan $i < k - i$ olduğunu varsayabiliriz. Ardından tümevarım hipotezi ile $i = 1, ..., p$ için,

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle &= \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(2p-i)}(s) \right\rangle' - \left\langle \alpha^{(i+1)}(s), \alpha^{(2p-i)}(s) \right\rangle \\ &= -\left\langle \alpha^{(i+1)}(s), \alpha^{(2p-i)}(s) \right\rangle \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde tümevarım hipotezi ile

$$\left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle = -\left\langle \alpha^{(i+1)}(s), \alpha^{(2p-i)}(s) \right\rangle$$

eşitliğinin sağ tarafındaki ifadenin yerine yukarıdakine benzer şekilde eşiti yazılır ve bu işlemler ardışık olarak tekrarlanırsa

$$
\begin{aligned}
\left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle &= (-1)^{p-i} \left\langle \alpha^{(p)}(s), \alpha^{(p+1)}(s) \right\rangle \\
&= \frac{(-1)^{p-i}}{2} \left\langle \alpha^{(p)}(s), \alpha^{(p)}(s) \right\rangle' \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Bu sefer $k = l+1$ in çift tamsayı yani $k = 2p$ olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmadan $i \leq k - i$ olduğunu kabul edebiliriz. Tümevarım hipotezinden,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle &= \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(l-i)}(s) \right\rangle' - \left\langle \alpha^{(i+1)}(s), \alpha^{(2p-1-i)}(s) \right\rangle \\
&= -\left\langle \alpha^{(i+1)}(s), \alpha^{(2p-1-i)}(s) \right\rangle
\end{aligned}
$$

olduğundan benzer şekilde işlemler ardışık olarak devam ettirilirse,

$$
\left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle = (-1)^{p-i} \left\langle \alpha^{(p)}(s), \alpha^{(p)}(s) \right\rangle \tag{3.1.9}
$$

elde edilir. (3.1.9) ifadesini (3.1.8) de yerine yazarsak,

$$
\begin{aligned}
c_{2p} &= \sum_{i=1}^{2p-1} \frac{1}{i!(2p-i)!} \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(2p-i)}(s) \right\rangle \\
&= \left(\sum_{i=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{p-i}}{i!(2p-i)!} \right) \left\langle \alpha^{(p)}(s), \alpha^{(p)}(s) \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.1.10}
$$

bulunur. Binom açılımında (3.1.10) un katsayısını hesaplamak için,

$$
(x+1)^{2p} = x^{2p} + \sum_{i=1}^{2p-1} \frac{(2p)!}{i!(2p-i)!} x^{2p-i} + 1 \tag{3.1.11}
$$

$x = -1$ yazılırsa,

$$
\left\langle \alpha^{(p)}(s), \alpha^{(p)}(s) \right\rangle = \frac{(-1)^{p+1}(2p)!}{2} c_{2p}
$$

elde edilir ki bu da sabittir. Dolayısıyla bu da (3.1.9) ile birlikte (MT) nin her $k = 2, ..., 2m$ için geçerli olduğu anlamına gelir.

Şimdi $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(r)}$ türevlerinin bazı $r = 1, \ldots, m-1$ ler için I açık aralığı üzerinde lineer bağımsız olduğunu varsayalım. O halde $e_1, e_2, \ldots, e_r$ ler I üzerinde iyi tanımlanmış ve böylece Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemi ile $\alpha^{(r+1)}$ in $\overline{e}_{r+1}$ normal elemanı $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(r)}$ nin bir lineer birleşimi olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\overline{e}_{r+1} = \alpha^{(r+1)} - \sum_{i=1}^{r} \left\langle \alpha^{(r+1)}, e_i \right\rangle e_i$$

$\overline{e}_{r+1}$ in normunun sabit olduğu (MT) den görülür. Bu ise $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(r)}$ türevleri her $s \in I$ noktası için, lineer bağımlı olacak şekilde, bir r tamsayısının var olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak, $\alpha(s)$ Frenet eğriliklerinin tümünün sabit olduğunu iddia ediyoruz. Aslında (MT) ve Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu, her $i = 1, 2, \ldots, r$ için,

$$e_i = c_{i1}\dot{\alpha}(s) + c_{i2}\ddot{\alpha}(s) + \ldots + c_{ii}\alpha^{(i)}(s)$$

eşitliğinii sağlayan $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ii}$ sabitlerinin var olduğunu gösterir. Bu da (MT) ile birlikte her κ_i Frenet eğriliklerinin sabit olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak, bu birim hızlı $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi bir W-eğrisidir.

Tersine, eğer E^m deki bir $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisi, W-eğrisi ise; o halde uygun bir koordinat sistemi için, $\alpha(s)$, rankının tek ya da çift olması durumuna göre ya (3.1.1) ya da (3.1.2) formundadır. (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.3) yardımıyla $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin (A) koşulunu sağladığını gösterdiği aşikardır. □

Sonuç 3.1.1

E^m Öklid uzayındaki birim hızlı bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi için, aşağıdakiler denktir:

1) $\alpha(s)$, bir W-eğrisidir.
2) $k = 1, 2, \ldots, m$ için $\left\|\alpha^{(k)}(s)\right\|$ sabittir.
3) $i = 1, \ldots, k-1, k = 2, \ldots, 2m$ için, $\left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle$ sabittir.
4) $\|\alpha(s+a) - \alpha(s)\|$ yalnızca a ya bağlıdır.
5) $\alpha(s)$, (A) koşulunu sağlar.

Teorem 3.1.4

E^3 Öklid 3-uzayında bir $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı regüler eğrisi bir W-eğrisidir ancak ve ancak üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren kiriş ile bu eğri arasındaki açıların kosinüs değerleri farkı yalnızca eğrinin bu iki nokta arasında kalan yay uzunluğuna bağlıdır [6].

İspat

E^m de birim hızlı bir eğri $\alpha = \alpha(s)$ olsun öyleki bu eğri ile üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren kiriş arasındaki iki açının kosinüs değerleri farkı bu iki nokta arasındaki yay uzunluğuna bağlıdır. O halde

$$\left\langle \frac{\alpha(s)-\alpha(t)}{\|\alpha(s)-\alpha(t)\|}, T(s)-T(t) \right\rangle \tag{B}$$

ifadesi yalnızca $s - t$ ye bağlıdır. Burada $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi Öklid m-uzayında birim hızlı bir eğri ve $T(s) = \dot{\alpha}(s)$ dir.

$\kappa_1 \neq 0$ olduğunu farzedebiliriz. Aksi takdirde bu eğri bir doğrunun açık bir parçasıdır ki bu da bir W-eğrisidir. $t = s + a$ yazılarak (B) koşulundan bazı g fonksiyonları için,

$$\left\langle \frac{\alpha(s+a)-\alpha(s)}{\|\alpha(s+a)-\alpha(s)\|}, T(s+a)-T(s) \right\rangle = g(a) \tag{3.1.12}$$

elde edilir. Açık şekilde (3.1.12), bazı h fonksiyonları için,

$$\|\alpha(s+a)-\alpha(s)\| = g(a)s + h(a) \tag{3.1.13}$$

ifadesine eşdeğerdir. Açıkça, $g(0) = h(0) = 0$ ifadesine sahibiz. (3.1.13) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} g(-a)s + h(-a) &= \|\alpha(s-a)-\alpha(s)\| \\ &= \|\alpha(s-a+a)-\alpha(s-a)\| \\ &= g(a)(s-a)+h(a) \end{aligned}$$

bulunur. Burada,

$$g(-a) = g(a) \text{ ve } h(-a) = h(a) - ag(a)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle $g(a)$ ve $\psi(a) := h(a) - \frac{1}{2}ag(a)$ nın çift fonksiyon olduğunu söyleriz. Dolayısıyla $j = 1, 3, 5, 7, \ldots$ için,

$$\frac{d^j g}{da^j}(0) = 0, \frac{d^j h}{da^j}(0) = \frac{1}{2}(ag(a))^{(j)}(0) \tag{3.1.14}$$

elde edilir. (3.1.14) ifadesinden,

$$h^{(2i)}(0) = 0,\ h^{(2i-1)}(0) = \frac{2i-1}{2} g^{(2i-1)}(0),\ i = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.1.15}$$

elde edilir. $g(0) = 0$ olduğundan, (3.1.15) denkleminden $h^{'}(0) = 0$ yazılır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} g(0) = h(0) = h^{'}(0) = g^{(2i-1)}(0) = h^{(2i)}(0) = 0, \\ h^{(2i-1)}(0) = \frac{2i-1}{2} g^{(2i-2)}(0),\ i = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

bulunur. (3.1.13) ifadesinden aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\langle \alpha(s+a) - \alpha(s), \alpha(s+a) - \alpha(s) \rangle = (g(a)s + h(a))^2 \tag{3.1.17}$$

Buradan (3.1.17) ifadesinin s ye göre diferensiyeli alınarak

$$\langle Y_s(a), \dot{\alpha}(s+a) - \dot{\alpha}(s) \rangle = g(a)(g(a)s) + h(a)) \tag{3.1.18}$$

elde edilir. Burada

$$Y_s(a) = \alpha(s+a) - \alpha(s)$$

dir. Açıkça

$$Y_s(0) = 0 \text{ ve } Y_s^{'}(a) = \dot{\alpha}(s+a)$$

yazabiliriz.

$$Z_s^{(j)}(a) = \alpha^{(j)}(s+a),\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

yazılarak

$$Z_s^{(j)}(0) = \alpha^{(j)}(s)$$

elde ederiz. $\alpha(s)$, birim hızlı olduğundan (3.1.18) in a ya göre diferensiyelini alırsak,

$$\begin{aligned}
\left\langle Y_s(a), Z_s^{''}(a)\right\rangle - \left\langle Z_s^{'}(a), \dot{\alpha}(s)\right\rangle &= g^{'}(a)(g(a)s + h(a)) \\
&\quad + g(a)(g^{'}(a)s + h^{'}(a)) - 1 \\
\left\langle Y_s(a), Z_s^{'''}(a)\right\rangle - \left\langle Z_s^{'}(a), \dot{\alpha}(s)\right\rangle &= \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i} g^{(i)}(a)(g^{(2-i)}(a)s + h^{(2-i)}(a)) \\
\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left\langle Z_s^{(j)}(a), Z_s^{(3+k-j)}(a)\right\rangle - \left\langle Z_s^{(k+2)}(a), \alpha^{'}(s)\right\rangle &- \left\langle Z_s^{(k+3)}(a), \alpha(s)\right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{k+2}\binom{k+2}{i} g^{(i)}(a)(g^{(k+2-i)}(a)s \\
&\quad + h^{(k+2-i)}(a)), k = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

bulunur. Özel olarak $a = 0$ da, $k = 2, 3, 4, \ldots$ için ve $a_1 = g''(0)$, $a_2 = g^{(k)}(0), \ldots$ için, (3.1.16) ve (3.1.19) ifadeleri bize,

$$\begin{aligned}
&\left\langle \dot{\alpha}(s), \alpha^{(4)}(s)\right\rangle + \left\langle \ddot{\alpha}(s), \dddot{\alpha}(s)\right\rangle = 6a_1^2 s, \\
&2\left\langle \dot{\alpha}(s), \alpha^{(5)}(s)\right\rangle + 3\left\langle \ddot{\alpha}(s), \alpha^{(4)}(s)\right\rangle + \|\dddot{\alpha}(s)\|^2 = 15a_1^2, \\
&3\left\langle \dot{\alpha}(s), \alpha^{(6)}(s)\right\rangle + 6\left\langle \ddot{\alpha}(s), \alpha^{(5)}(s)\right\rangle + 5\left\langle \dddot{\alpha}(s), \alpha^{(4)}(s)\right\rangle = 30a_1a_2 s, \\
&(k-1)\left\langle \dot{\alpha}(s), \alpha^{(k+2)}(s)\right\rangle + \sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}\left\langle \alpha^{(j)}(s), \alpha^{(3+k-j)}(s)\right\rangle \\
&= \sum_{i=2}^{k+2}\binom{k+2}{i} g^{(i)}(0)(g^{(k+2-i)}(0)s + h^{(k+2-i)}(0))
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

denklemlerini verir. (3.1.20) deki denklemin s ye göre diferensiyeli alınırsa, $k = 2, 3, 4, \ldots$ için,

$$
\begin{aligned}
&(k-1)\left\langle \dot{\alpha}(s), \alpha^{(3+k)}(s)\right\rangle + \sum_{j=2}^{k}\binom{k+1}{j}\left\langle \alpha^{(j)}(s), \alpha^{(4+k-j)}(s)\right\rangle \\
&+\left\langle \alpha^{(k+1)}(s), \dddot{\alpha}(s)\right\rangle - \left\langle \ddot{\alpha}(s), \alpha^{(k+2)}(s)\right\rangle \\
&= \sum_{i=2}^{k+2}\binom{k+2}{i} g^{(i)}(0)(g^{(k+2-i)}(0)
\end{aligned}
\tag{3.1.21}
$$

eşitliği bulunur. (3.1.20) ifadesinde k yerine $k+1$ yazılarak

$$
\begin{aligned}
&k\left\langle \dot{\alpha}(s), \alpha^{(k+3)}(s)\right\rangle + \sum_{j=2}^{k}\binom{k+1}{j}\left\langle \alpha^{(j)}(s), \alpha^{(4+k-j)}(s)\right\rangle \\
&= \sum_{i=2}^{k+3}\binom{k+3}{i} g^{(i)}(0)(g^{(k+3-i)}(0)s + h^{(k+3-i)}(0))
\end{aligned}
\tag{3.1.22}
$$

elde edilir. (3.1.21) ve (3.1.22) eşitlikleri birleştirilerek

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \dot{\alpha}(s), \alpha^{(k+3)}(s)\right\rangle + \left\langle \ddot{\alpha}(s), \alpha^{(k+2)}(s)\right\rangle \\
= \;& \sum_{i=2}^{k+2}\binom{k+3}{i} g^{(i)}(0)(g^{(k+3-i)}(0)s + h^{(k+3-i)}(0)) \\
&-\sum_{i=2}^{k+2}\binom{k+2}{i} g^{(i)}(0)(g^{(k+2-i)}(0)
\end{aligned}
$$

bulunur. Sonuç olarak, (3.1.16) dan $j = 1, 2, 3, \ldots$ için,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \dot{\alpha}(s), \alpha^{(2j+1)}(s)\right\rangle' &= s\sum_{l=1}^{j}\binom{2j+2}{2l} a_l a_{j-l+1}, \\
\left\langle \dot{\alpha}(s), \alpha^{(2j+2)}(s)\right\rangle' &= \sum_{l=1}^{j}\left(\frac{2j-2l+3}{2}\binom{2j+3}{2l} - \binom{2j+2}{2l}\right) a_l a_{j-l+1}
\end{aligned}
\tag{3.1.23}
$$

elde edilir. Özel olarak (3.1.23) den $j = 1, 2, 3$ için,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \dot{\alpha}(s), \dddot{\alpha}(s)\right\rangle' &= 6a_1^2 s, \\
\left\langle \dot{\alpha}(s), \alpha^{(5)}(s)\right\rangle' &= 30a_1 a_2 s, \\
\left\langle \dot{\alpha}(s), \alpha^{(7)}(s)\right\rangle' &= (56a_1 a_3 + 70a_2^2)s
\end{aligned}
\tag{3.1.24}
$$

şeklinde bulunur. $\langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}\rangle = 0$ ve (3.1.24) ün ilk eşitliğinden bazı b_1 sabitleri için,

$$\langle \dot{\alpha}, \dddot{\alpha} \rangle = -\langle \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle = 3a_1^2 s^2 - b_1 \tag{3.1.25}$$

yazılabilir. (3.1.25) ifadesinin diferensiyeli alınarak

$$\left\langle \dot{\alpha}, \alpha^{(4)} \right\rangle + \langle \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha} \rangle = 6a_1^2 s \text{ ve } \langle \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha} \rangle = -3a_1^2 s$$

bulunur. Buradan da

$$\left\langle \dot{\alpha}, \alpha^{(4)} \right\rangle = 9a_1^2 s \text{ ve } \langle \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha} \rangle = -3a_1^2 s$$

yazılır. Böylece

$$\left\langle \dot{\alpha}, \alpha^{(5)} \right\rangle' + \left\langle \ddot{\alpha}, \alpha^{(4)} \right\rangle' = \langle \dddot{\alpha}, \dddot{\alpha} \rangle' + \left\langle \ddot{\alpha}, \alpha^{(4)} \right\rangle' = 0$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifade (3.1.24) teki ikinci eşitlik ile birleştirilirse,

$$\left\langle \dot{\alpha}, \alpha^{(5)} \right\rangle' = -\left\langle \ddot{\alpha}, \alpha^{(4)} \right\rangle' = \langle \dddot{\alpha}, \dddot{\alpha} \rangle' = 30a_1 a_2 s \tag{3.1.26}$$

(3.1.26) ifadesine uygulanarak

$$3\left\langle \dot{\alpha}, \alpha^{(6)} \right\rangle = -5\left\langle \ddot{\alpha}, \alpha^{(5)} \right\rangle = 15\left\langle \dddot{\alpha}, \alpha^{(4)} \right\rangle = 225a_1 a_2 s \tag{3.1.27}$$

bulunur. Böylece (3.1.27) nin iki kez diferensiyeli alınır ve (3.1.24) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \left\langle \dot{\alpha}, \alpha^{(6)} \right\rangle' &= -\left\langle \ddot{\alpha}, \alpha^{(6)} \right\rangle' = \left\langle \dddot{\alpha}, \alpha^{(5)} \right\rangle' = -\left\langle \alpha^{(4)}, \alpha^{(4)} \right\rangle' \\ &= (56a_1 a_3 + 70a_2^2)s \end{aligned}$$

elde edilir. Bu tür işlemler devam ederse istenilen elde edilir.

Lemma 3.1.1

E^m de (B) koşulunu sağlayan birim hızlı bir eğri $\alpha = \alpha(s)$ olsun. O halde herhangi bir $j \geq 2$ tamsayısı ve $i = 1, 2, \ldots, j+1$ ve $a_1, a_2, \ldots$ sabitleri için,

$$\left\langle \alpha^{(i)}, \alpha^{(2j+2-i)} \right\rangle' = (-1)^{i+1} s \sum_{i=1}^{j} \binom{2j+2}{2l} a_l a_{j-l+1}$$

yazarız.

Şimdi $m = 3$ olduğunu farzedelim. O halde Lemma 3.1.1 ve (3.1.4) ifadesinden, bazı b_1, b_2, b_3 sabitleri için,

$$\kappa_1^2 = b_1 - 3a_1^2 s^2, \tag{3.1.28}$$

$$\kappa_1^4 + \kappa_1^{'2} + \kappa_1^2\kappa_2^2 = b_2 + 15a_1a_2s^2, \tag{3.1.29}$$

$$9\kappa_1^2\kappa_1^{'2} + (\kappa_1^{''} - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2)^2 + (2\kappa_1^{'}\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2^{'})^2$$
$$= b_3 - (35a_2^2 + 28a_1a_3)s^2 \tag{3.1.30}$$

yazılır. (3.1.28) ve (3.1.29) çözülürse κ_1 ve κ_2 için,

$$\kappa_1^2 = b_1 - 3a_1^2 s^2, \tag{3.1.31}$$

$$\kappa_2^2 = \frac{(b_1 - 3a_1^2s^2)\left(b_2 + 15a_1a_2s^2 - (b_1 - 3a_1^2s^2)^2\right) - 9a_1^4s^2}{(b_1 - 3a_1^2s^2)^2} \tag{3.1.32}$$

elde edilir.

$a_1 = 0$ ise κ_1 sabittir. Böylece (3.1.29) dan κ_2 nin de sabit olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak $\alpha(s)$ eğrisi bir W-eğrisidir.

$a_1 \neq 0$ ise (3.1.30) un sol tarafına (3.1.31) ve (3.1.32) yi uygularsak, (3.1.31) in sol tarafının s de bir polinom olmadığını görürüz ki bu bir çelişkidir. □

Uzayda (A) koşulundan daha genel olan koşulu sağlayan eğrileri de inceleyebiliriz. Bunun için aşağıdaki koşul yazılır:

$$\langle \alpha(s) - \alpha(t), T(s) - T(t) \rangle \tag{C}$$

ifadesi sadece $s - t$ ye bağlıdır. Burada $\alpha = \alpha(s)$, Öklid m-uzayında birim hızlı bir eğri ve $T(s) = \dot{\alpha}(s)$ dir.

(C) koşulu, bu eğri ve üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren kiriş arasındaki iki açının kosinüs değerleri farkının sadece bu eğrinin iki nokta arasında kalan yay uzunluğuna ve kiriş uzunluğuna bağlı olduğu anlamına gelir.

Teorem 3.1.5

E^3 de bir $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı düzgün eğrisi bir W-eğrisidir ancak ve ancak $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi (C) koşulunu sağlar [6].

İspat

$\alpha = \alpha(s)$, E^3 Öklid uzayında bir I açık aralığında tanımlanan regüler bir eğri olsun. Kabul edelim ki bu eğri (C) koşulunu sağlasın. $\kappa_1 \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Aksi takdirde $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi bir doğrunun açık bir parçası olup W-eğrisi olur. $t = s + a$ yazarak

$$\langle \alpha(s+a) - \alpha(s), T(s+a) - T(s) \rangle = \varphi(a) \tag{3.1.33}$$

olacak şekilde bir φ fonksiyonu yazarız. (3.1.33) eşitliğinden bazı $f = f(a)$ fonksiyonları için,

$$\|\alpha(s+a) - \alpha(s)\|^2 = 2\varphi(a)s + f(a) \tag{3.1.34}$$

ifadesini yazarız. (3.1.34) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 2\varphi(-a)s + f(-a) &= \|\alpha(s-a) - \alpha(s)\|^2 = \|\alpha(s-a+a) - \alpha(s-a)\|^2 \\ &= 2\varphi(a)(s-a) + f(a) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\varphi(-a) = \varphi(a)$ sağlanır. Sonuç olarak $\varphi(a)$ bir çift fonksiyondur. Bu da

$$\varphi^{(2j-1)}(0) = 0,\ j = 1, 2, 3, \ldots$$

olduğu anlamına gelir.

Lemma 3.1.2

$\alpha = \alpha(s)$, E^m de (C) koşulunu sağlayan birim hızlı bir eğri olsun. O halde herhangi bir $j \geq 2$ tamsayısı ile $i = 1, 2, \ldots, j$ ve bazı $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, b_1, b_2, \ldots b_{j-1}$ sabitleri için,

$$\left\langle \alpha^{(i)}, \alpha^{(2j-i)} \right\rangle = (-1)^{j-i}(a_{j-1}s - b_{j-1}), \tag{3.1.35}$$

$$\left\langle \alpha^{(i)}, \alpha^{(2j-i+1)} \right\rangle = (-1)^{j-i} \left\{ j - i + \frac{1}{2} \right\} a_{j-1} \tag{3.1.36}$$

yazılabilir.

İspat

(3.1.13), a ya göre k-kez diferensiyellenir ve $a = 0$ yazılırsa,

$$2\varphi^{(k)}(0)s + f^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k!}{i!\,(k-i)!} \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle \tag{3.1.37}$$

bulunur. Şimdi matematiksel tümevarımla ispatı yapalım. $i = 1, 2, \ldots, k-1$ ile bazı $a_{k,i}$, $b_{k,i}$ ve $c_{k,i}$ sabitleri için,

$$\left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle = \begin{cases} a_{k,i}s + b_{k,i}, & k \text{ çift ise} \\ c_{k,i}, & k \text{ tek ise} \end{cases} \tag{MT'}$$

$\langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = 1$ olduğundan $\langle \dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle = 0$ olduğunu biliyoruz. (MT'), $k = 2, 3$ için sağlanır. (MT') koşulunun $k = l$ için de geçerli olduğunu kabul edelim. $k = l + 1$ için doğruluğunu gösterelim. İlk olarak k nın tek olduğunu kabul edelim. Yani $i = 1, 2, \ldots p$ için herhangi bir pozitif p tamsayısı için $k = l + 1 = 2p + 1$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle &= \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(2p+1-i)}(s) \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(2p-i)}(s) \right\rangle' - \left\langle \alpha^{(i+1)}(s), \alpha^{(2p-i)}(s) \right\rangle \\ &= a_{2p,i} - \left\langle \alpha^{(i+1)}(s), \alpha^{(2p-i)}(s) \right\rangle \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terimin yerine eşiti olan ifade yazılır ve bu işlem ardışık tekrarlanırsa,

$$\left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle = a_{2p,i} - a_{2p,i+1} + \cdots + (-1)^{p-i-1} a_{2p,p-1} + \frac{1}{2}(-1)^{p-i} a_{2p,p} \quad (3.1.38)$$

olup son terim $c_{2p+1,i}$ ile gösterilir. Şimdi de k nın çift olduğunu varsayalım. Yani $k = l + 1 = 2p$ olsun. O halde $i = 1, 2, \ldots, p$ için,

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle &= \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(2p-i)}(s) \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(2p-i-1)}(s) \right\rangle' - \left\langle \alpha^{(i+1)}(s), \alpha^{(2p-i-1)}(s) \right\rangle \\ &= - \left\langle \alpha^{(i+1)}(s), \alpha^{(2p-i-1)}(s) \right\rangle \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terimin yerine eşiti olan ifade yazılır ve bu işlem ardışık tekrarlanırsa,

$$\left\langle \alpha^{(i)}(s), \alpha^{(k-i)}(s) \right\rangle = (-1)^{p-i} \left\langle \alpha^{(p)}(s), \alpha^{(p)}(s) \right\rangle \quad (3.1.39)$$

yazarız. (3.1.37) eşitliğine (3.1.39) eşitliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} 2\varphi^{2p}(0)s + f^{(2p)}(0) &= \sum_{i=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{p-i}(2p)!}{i!(k-i)!} \left\langle \alpha^{(p)}(s), \alpha^{(p)}(s) \right\rangle \\ &= (-1)^p \left\{ \sum_{i=1}^{2p-1} \frac{(-1)^i (2p)!}{i!(2p-i)!} \right\} \left\langle \alpha^{(p)}(s), \alpha^{(p)}(s) \right\rangle \quad (3.1.40) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer (3.1.11) i kullanırsak,

$$\sum_{i=1}^{2p-1} \frac{(-1)^i (2p)!}{i!(2p-i)!} = -2$$

olduğunu görürüz. (3.1.40) ta bunu yerine yazarsak,

$$\left\langle \alpha^{(p)}(s), \alpha^{(p)}(s) \right\rangle = (-1)^{p+1} \left\{ \varphi^{(2p)}(0)s + \frac{1}{2} f^{(2p)}(0) \right\}$$

elde ederiz. Sol tarafta $a_{2p,p}s + b_{2p,p}$ ifadesini yerine yazalım. Sonuç olarak (MT') sağlanır. Sonra, (3.1.39) eşitliği $i = 1, 2, \ldots, p$ için,

$a_{2p,i} = (-1)^{p-i} a_{2p,p}$ ve $b_{2p,i} = (-1)^{p-i} b_{2p,p}$

olduğu anlamına gelir. (3.1.38) ile birlikte $i = 1, 2, \ldots, p$ için,

$$c_{2p+1,i} = (-1)^{p-i} \left\{ p - i + \frac{1}{2} \right\} a_{2p,p}$$

elde edilir. Eğer $a_{2p,p} = a_{p-1}$ ve $b_{2p,p} = -b_{p-1}$ yazarsak; (3.1.35) ve (3.1.36) yı elde ederiz.

(3.1.4) ve Lemma 3.1.2 yi uygulayarak

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 &= a_1 s - b_1 \\ \kappa_1^4 + \kappa_1^{'2} + \kappa_1^2 \kappa_2^2 &= a_2 s - b_2 \\ (\kappa_1^{''} - \kappa_1^3 - \kappa_1 \kappa_2^2)^2 + (2\kappa_1^{'} \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2^{'})^2 &= a_3 s - b_3 - \frac{9}{4} a_1^2 \end{aligned} \tag{3.1.41}$$

bulunur. (3.1.41) den,

$$\kappa_2^2 = \frac{4\,(a_2 s - b_2)\,(a_1 s - b_1) - 4(a_1 s - b_1)^3 - a_1^2}{4\,(a_1 s - b_1)^2} \tag{3.1.42}$$

elde edilir. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi düzlemsel bir eğriyse $\kappa_2 = 0$ dır. Böylece (3.1.42) bize,

$$4(a_2 s - b_2)(a_1 s - b_1) - 4(a_1 s - b_1)^3 = a_1^2$$

denklemini verir ki bu da $a_1 = 0$ olmadıkça mümkün değildir, yani κ_1 sabittir. Bu yüzden α bir W-eğrisidir.

Şimdi de $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin düzlemsel olmadığını farzedelim. $a_1 = 0$ ise κ_1 sabittir. Dahası, bu durumda (3.1.42) bize,

$$0 = a_3 s - b_3 + \frac{(a_2 s - b_2)^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{4(b_1^2 + b_2 - a_2 s)}$$

eşitliğini verir ki bu da $a_2 = 0$ olduğu anlamına gelir. Yani κ_2 sabittir. Sonuç olarak α bir W-eğrisidir. Eğer $a_1 \neq 0$ ise s de uygun bir çeviri uygulandıktan sonra $b_1 = 0$ ve $\kappa_1^2 = a_1 s$ buluruz. Genelliği bozmadan kabul edelim ki bazı pozitif c sayıları için $a_1 = c^2$

ve s, $(0,\infty)$ aralığının açık bir alt aralığında tanımlanmış olsun. Bu durumda (3.1.41) ve (3.1.42) den,

$$0 = a_3 s - b_3 - \frac{9}{4}c^4 - \frac{(a_2 s - b_2)^2}{c^2 s} + \frac{(b_2 - 2a_2 s + 3c^4 s^2)^2}{s(c^2 + 4b_2 s - 4a_2 s^2 + 4c^4 s^3)}$$

elde ederiz ki bu da bize,

$$\begin{aligned} &16c^4(a_2^2 - c^2 a_3)s^4 + 16(c^6 b_3 - 2c^4 a_2 b_2 + c^2 a_2 a_3 - a_2^3)s^3 \\ &+ 4(3c^6 a_2 + 4c^4 b_2^2 - 4c^2 a_3 b_2 - 4c^2 a_2 b_3 + 12a_2^2 b_2)s^2 \\ &+ 4(3c^6 b_2 - c^4 a_3 - 3c^2 a_2^2 + 4c^2 b_2 b_3 - 12a_2 b_2^2)s \\ &+ 9c^8 + 4c^4 b_3 + 8c^2 a_2 b_2 + 16b_2^3 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.43}$$

sonucunu verir. (3.1.43) te s^4 ün katsayısından $a_3 = \dfrac{a_2^2}{c^2}$ olduğu görülür. Böylece s^3 ün katsayısı $b_3 = \dfrac{2a_2 b_2}{c^2}$ yi verir. Bunların uygulanmasından (3.1.43) de s^2 nin katsayısından $a_2 = \dfrac{-4b_2^2}{3c^2}$ elde edilir. Bu nedenle (3.1.43) de s nin katsayısı $b_2(16b_2^3 + 27c^8) = 0$ ı verir. Eğer $16b_2^3 + 27c^8 \neq 0$ ise $b_2 = 0$ dır ve böylece $a_2 = b_3 = 0$ olur ve (3.1.43) denkleminde son terimden $c = 0$ olmasına ulaşırız ki bu da bir çelişkidir. Böylece $16b_2^3 + 27c^8 = 0$ dır. (3.1.43) de son terimde $a_3 = \dfrac{a_2^2}{c^2}$, $b_3 = \dfrac{2a_2 b_2}{c^2}$ ve $a_2 = \dfrac{-4b_2^2}{3c^2}$ yazarak $-16b_2^3 + 27c^8 = 0$ buluruz. Sonuç olarak $b_2 = c = 0$. Bu bir çelişkidir. $\square$

3.2. Küre, Silindir ve W-Eğrilerinin Karakterizasyonu

Öklid uzayının bir M hiperyüzeyinde bir birim normal vektör alanı olan G, doğal olarak M üzerinde tanımlanır. Böyle tanımlanan G ye M nin Gauss dönüşümü de denir. Öklid uzayının bir M hiperküresi için üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren kirişin, bu iki noktada, küreyi aynı açıda karşıladığını biliyoruz. Şimdi küre için yeni bir koşul verelim:

$$\langle y - x, G(x) + G(y) \rangle = 0 \tag{D}$$

Soru: Öklid uzayında (D) koşulunu sağlayan hiperyüzeyler hangileridir?

Diferensiyel geometride, şekil operatörü alt manifoldların gözlemlemenin en doğal aracıdır.

Bunlar arasında izoparametrik hiperyüzey Öklid uzayın daimi asli eğriliğe sahip olan iyi hiperyüzeylerinden biridir.

Boas, Öklid uzayının (D) koşuluna uyan hiperyüzeylerine çalıştı [7,8]. Daha sonra Wegner, bu türden hiperyüzeyler için diferensiyel geometrik bir ispat verdi [9].

Bu bölümde, Öklid uzayının izoparametrik hiperyüzeylerinin çok daha kolay ve temel tanımlamasını ve benzer teknikler kullanarak W-eğrilerinin tanımlanmasını sağlayacağız.

E^m Öklid uzayının (D) koşuluna uyan hiperyüzeylerine çalışıyoruz. Bunun için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.1

E^m deki bir M hiperyüzeyi için aşağıdakiler denktir:

1) M, (D) koşulunu sağlar.
2) Bir $m \times m$ tipinden A matrisi ve $b \in E^m$ vektörü için $G(x) = Ax + b$ yazarız.
3) M, bir izoparametrik hiperyüzeydir.
4) M, aşağıdaki hiperyüzeylerden birinin açık bir parçasıdır:
E^{m-1}, $S^{m-1}(r)$, $S^{p-1}(r) \times E^{m-p}$ [10].

İspat

M, E^m de (D) koşulunu sağlayan bir hiperyüzey olsun. Genelliği bozmadan M nin herhangi bir hiperdüzlemde içerilmediğini yani E^m de tamamen konumlandığını varsayabiliriz. O halde M üzerinde $y_0, y_1, \ldots, y_m$ noktaları var olsun. Öyle ki $\{y_j - y_0 \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$ kümesi E^m yi gersin. (D) koşulundan,

$$\langle G(x), y_0 \rangle = \langle G(x), x \rangle - \langle G(y_0), y_0 \rangle + \langle G(y_0), x \rangle \tag{3.2.1}$$

$$\langle G(x), y_j \rangle = \langle G(x), x \rangle - \langle G(y_j), y_j \rangle + \langle G(y_j), x \rangle, \, j = 1, 2, \ldots m \tag{3.2.2}$$

yazarız. (3.2.2) ifadesinden (3.2.1) ifadesi çıkarılarak

$$\langle G(x), A_j \rangle = \langle B_j, x \rangle + c_j, \ j = 1, 2, \dots, m$$

elde ederiz. Burada $j = 1, 2, \dots, m$ için yerine yazıp

$$A_j = y_j - y_0, \ B_j = G(y_j) - G(y_j), \ c_j = \langle G(y_0), y_0 \rangle - \langle G(y_j), y_j \rangle$$

bulunur.

Lemma 3.2.1

Bir $m \times m$ tipinden A matrisi ve bir $b \in E^m$ vektörü için $G(x) = Ax + b$ dir.

İspat

A, $A^t = [B_1, B_2, \dots, B_m] [A_1, A_2, \dots, A_m]^{-1}$ ile ifade edilmiş bir matris olmak üzere $[B_1, B_2, \dots, B_m]$, $B_1, B_2, \dots, B_m$ sütun vektörleri ile matris ifade etsin. Eğer $b = \sum b_j A_j$ olmak üzere b_j, $(b_1, b_{2,} \dots b_m)^t = (c_{jk})^{-1} (c_1, c_{2,} \dots c_m)^t$, $c_{jk} = \langle A_j, A_k \rangle$ şeklinde tanımlarsak $G(x) = Ax + b$ yazarız. $\square$

G nin türevini alarak benzer şekilde M nin bir X tanjant vektörüne bağlı olarak Lemma 3.2.1 den,

$$AX = -S(X), X \in T_x M \tag{3.2.3}$$

yazılır. Burada S şekil operatörünü ifade eder. Ortonormal bir $E_1, E_2, \dots E_{m-1}$ çatısı seçelim. Öyle ki $E_1, E_2, \dots E_{m-1}$, S nin $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-1}$ özdeğerleri ile birleşmiş özvektörleridir. O halde (3.2.3) den her $x \in M$ için,

$$AE_j(x) = -\mu_j(x) E_j(x), \ j = 1, 2, \dots, m-1$$

yazarız. A sabit bir matris ve bir matrisin özdeğerler kümesi ayrık olduğundan, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-1}$ asli eğriliklerinin tümü sabittir. O halde buradan M hiperyüzeyi, izoparametrik bir hiperyüzeydir. Bundan dolayı M, ya bir S^{m-1} kürenin ya da genelleştirilmiş bir $S^{p-1}(r) \times E^{m-p}$ silindirin açık bir parçasıdır [14,15].

S, self adjoint dönüşüm olduğundan ve $\{X \in T_x M \mid x \in M\}$, E^m yi gerdiğinden (3.2.3) ifadesi A matrisinin simetrik olduğunu gösterir.

$$\begin{aligned} f: \ & E^m \to \mathbb{R} \\ & f(x) = \langle Ax + b, Ax + b \rangle \end{aligned}$$

ile tanımlanmış fonksiyonu için Lemma 3.2.1 den $M \subset f^{-1}(1)$ yazılır. Çünkü $G(x)$ bir birim vektör alanıdır. Bu bize, $\nabla f(x) = 2A(Ax + b)$ gradiyent vektörünün $G(x)$ ile orantılı olduğunu gösterir. Bu yüzden bazı $\lambda(x)$ fonksiyonları için,

$$A(Ax + b) = \lambda(x)(Ax + b), x \in M \tag{3.2.4}$$

yazarız. Bir matrisin özdeğerler kümesi ayrık olduğundan $\lambda(x)$ sabit olmalıdır. (3.2.4) ten $V = \{Ax + b \mid x \in M\}$ nin λ özdeğerine karşılık gelen A nın bir özuzayını içerdiği görülür. M nin herhangi bir hiperdüzlem tarafından içerilmediği varsayımından Lemma 3.2.1 in ispatındaki gibi

$$ImA = Sp\{AA_j \mid j = 1, 2, \ldots, m\} \subset V \tag{3.2.5}$$

olduğunu görürüz. (3.2.4) ifadesinden,

$$\left(A^2 - \lambda A\right) x = -Ab + \lambda b, x \in M \tag{3.2.6}$$

yazarız. Buradan,

$$(A^2 - \lambda A)(y_j - y_0) = 0, \ j = 1, 2, \ldots m$$

elde ederiz ki bu da,

$$A^2 - \lambda A = 0 \tag{3.2.7}$$

olduğunu gösterir.

$\lambda = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.2.7) den $A^2 = 0$ olduğu görülür ve dolayısıyla A simetriktir. A yok edilmelidir. Bu da Lemma 3.2.1 ile birlikte M nin E^{m-1} hiperdüzleminin açık bir parçası olduğunu gösterir. Bu çelişki $\lambda \neq 0$ olmasını gerektirir. (3.2.6) ve (3.2.7) ile birlikte $b = \dfrac{1}{\lambda} Ab \in ImA$ olduğu görülür. Bu yüzden (3.2.5), $V = ImA$ olmasını gerektirir.

Bu bize $\lambda = \pm\frac{1}{r}$ $(r > 0)$ olduğunu gösterir. Buradan $A|_V = \pm\frac{1}{r}I$ $(r > 0)$ yazarız.

Durum 1: Varsayalım ki V nin boyutu m olsun. O halde $A = \pm\frac{1}{r}I$ yazabiliriz. Bundan dolayı $G(x) = \pm\frac{1}{r}x + b$ olduğunu görürüz ki bu da M nin r yarıçaplı bir hiperküre olduğunu gösterir.

Durum 2: Varsayalım ki V nin boyutu p olsun. $(2 \leq p \leq m-1)$ O halde V nin $V^{\perp}$ dik tümleyeninin boyutu $m-p$ dir ve her $x \in M$ için T_xM tanjant uzayında içerilir. Sabit bir $x_0 \in M$ noktasının komşuluğunda ortonormal bir $E_1(x), \ldots, E_{m-1}(x)$ çatısı seçelim. Öyle ki $E_1, E_2, \ldots, E_{m-p}$ lerin tümü $V^{\perp}$ de sabit vektörlerdir. O halde $\{E_{m-p+1}(x), \ldots, E_{m-1}(x), G(x)\}$ kümesinin V yi ürettiğini görürüz. $\{E_{m-p+1}(x), \ldots, E_{m-1}(x), G(x)\}$ kümesi tarafından gerilen T dağılımı için, T nin tamamlanabilir olduğu ve tamamlayıcısının da x_0 boyunca $M_1 = M \cap (x_0 + V)$ kesişiminden ibaret olan M_1 alt manifoldu olduğu açıktır. Böylece M hiperyüzeyi, $M = M_1 \times E^{m-p}$ olarak ayrışmaktadır ki burada $E^{m-p} = V^{\perp}$ dir.

M_1, $V = E^p$ de bir hiperyüzeydir. $G_1(x)$, E^p de bir Gauss dönüşümü ve $x \in M_1$ olmak üzere,

$$G_1(x) = G(x)$$

koşulunu sağlar. Bu da

$$G_1(x) = A_1x + b$$

olduğunu gösterir. Burada A_1, $p \times p$ tipinden $A|_V$ matrisi ifade eder. Aslında $A_1 = \pm\frac{1}{r}I$ dır. Böylece Durum 1 den M_1 in $(p-1)-$ boyutlu bir $S^{p-1}(r)$ küre olduğu görülür ki bu küre M nin genelleştirilmiş bir $S^{p-1}(r) \times E^{m-p}$ silindirinin açık bir parçasıdır.

Durum 3: Varsayalım ki V nin boyutu 1 olsun. O halde $G(x)$ sabittir. Böylece M bir hiperdüzlemin açık bir parçasıdır. Teorem 3.2.1 in ispatının kalan bölümü basittir. □

Teorem 3.2.2

E^m de bir birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisi için aşağıda verilen ifadeler denktir:

1) $\alpha(s)$, (A) koşulunu sağlar.

2) Bir $m \times m$ tipinden A matrisi ve $b \in E^m$ vektörü için $\dot{\alpha}(s) = A\alpha(s) + b$ yazarız.

3) Her k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ için $\left\|\alpha^{(k)}(s)\right\|$ sabittir.

4) $\alpha(s)$, W-eğrisidir.

5) $\alpha(s)$, sıfırdan farklı $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sayıları ve sıfırdan farklı b sayısı için (3.1.1), (3.1.2) ifadelerinden birisi gibi yazılabilir [10].

İspat

$\alpha(s)$, E^m de (A) koşulunu sağlayan birim hızlı bir eğri olsun. Genelliği bozmadan $\alpha(s)$ nin tamamen E^m de konumlandığını varsayabiliriz. O halde α üzerinde $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_m)$ noktaları vardır. Öyle ki $\{\alpha(t_j) - \alpha(t_0) \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$ kümesi E^m yi gerer. (A) koşulundan,

$$\langle T(s), \alpha(t_0)\rangle = \langle T(s), \alpha(s)\rangle + \langle T(t_0), \alpha(t_0)\rangle - \langle T(t_0), \alpha(s)\rangle$$

yazabiliriz ve ayrıca $j = 1, 2, \ldots, m$ için,

$$\langle T(s), \alpha(t_j)\rangle = \langle T(s), \alpha(s)\rangle + \langle T(t_j), \alpha(t_j)\rangle - \langle T(t_j), \alpha(s)\rangle$$

elde ederiz. Böylece $j = 1, 2, \ldots, m$ için,

$$\langle T(s), A_j\rangle = \langle B_j, \alpha(s)\rangle + c_j$$

bulunur. Burada $j = 1, 2, \ldots, m$ için,

$$A_j = \alpha(t_j) - \alpha(t_{0)}, \ B_j = T(t_0) - T(t_j), \ c_j = \langle T(t_j), \alpha(t_j)\rangle - \langle T(t_0), \alpha(t_0)\rangle$$

olduğu Teorem 3.2.1 deki gibi benzer şekilde gösterilir.

Lemma 3.2.2

$m \times m$ tipinde bir A matrisi ve bir $b \in E^m$ vektörü için $\dot{\alpha}(s) = A\alpha(s) + b$ şeklinde ifade edebiliriz. (A) koşulu ile birlikte Lemma 3.2.2 bize,

$$\langle A(\alpha(s) - \alpha(t)), \alpha(s) - \alpha(t) \rangle = 0$$

olduğunu gösterir. Buradan da $B = A^t + A$ simetrik matrisi için,

$$\langle B(\alpha(s) - \alpha(t)), \alpha(s) - \alpha(t) \rangle = 0$$

yazarız. Bu da,

$$\langle B\alpha(s), \alpha(t_0) \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle B\alpha(s), \alpha(s) \rangle + \langle B\alpha(t_0), \alpha(t_0) \rangle \} \tag{3.2.8}$$

olduğu anlamına gelir ve $j = 1, 2, \ldots, m$ için,

$$\langle B\alpha(s), \alpha(t_j) \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle B\alpha(s), \alpha(s) \rangle + \langle B\alpha(t_j), \alpha(t_j) \rangle \} \tag{3.2.9}$$

buluruz. (3.2.9) ifadesinden (3.2.8) ifadesi çıkartılarak

$$\langle B\alpha(s), A_j \rangle = d_j \tag{3.2.10}$$

elde ederiz. Burada $j = 1, 2, \ldots, m$ için A_j, d_j ile aşağıdakini ifade ederiz.

$$A_j = \alpha(t_j) - \alpha(t_0),\ d_j = \frac{1}{2} \{ \langle B\alpha(t_j), \alpha(t_j) \rangle - \langle B\alpha(t_0), \alpha(t_0) \rangle \}$$

$\{A_j\}$, E^m için baz olduğundan, (3.2.10) ifadesi $B\alpha(s)$ nin sabit bir vektör olduğunu gösterir. Özellikle, $j = 1, 2, \ldots, m$ için,

$$B(A_j) = B\alpha(t_j) - B\alpha(t_0) = 0$$

Bu B nin yok edilmesi gerektiğini gösterir. Yani A ters simetrik bir matristir.

$$\dot{\alpha}(s) = A\alpha(s) + b$$

ifadesi yardımıyla $k = 1, 2, \ldots, m$ için,

$$A\alpha^{(k)}(s) = \alpha^{(k+1)}(s)$$

yazarız. A ters simetrik bir matris olduğundan, $k = 1, 2, \ldots, m$ için,

$$\left\langle \alpha^{(k)}(s), \alpha^{(k)}(s) \right\rangle' = 2\left\langle A\alpha^{(k)}(s), \alpha^{(k)}(s) \right\rangle = 0$$

olduğunu görürüz. Böylece her k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ için $\left\| \alpha^{(k)}(s) \right\|$ sabittir. O halde Teorem 3.1.3 ten $\alpha(s)$ bir W-eğrisidir. $\alpha(s)$, E^m de bir W-eğrisi olduğundan tanım gereği rankının çift ya da tek olmasına göre sırasıyla (3.1.1), (3.1.2) formüllerinden birisi gibi yazılabilir. Son olarak bu şekilde yazılan $\alpha(s)$ W-eğrisi, Teorem 3.1.2 gereğince [6,16] dan hesaplanır ve (A) koşulunu sağlar. $\square$

4. MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA FRENET EĞRİLİKLERİ VE W-EĞRİLERİ

Bu bölümde Minkowski 3-uzayındaki W-eğrilerini ele alacağız. Bunun için önce Frenet eğriliklerini inceleyip daha sonra W-eğrilerinin bir sınıflandırmasını yapacağız. Böylece Spacelike, timelike ve null eğriler arasında bir ayrıma varacağız. Bunun için önce gerekli bazı tanımları verelim.

Tanım 4.1

Bir reel vektör uzayı V olmak üzere,

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü her $u, v, w \in V$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için,

1) $g(u, v) = g(v, u)$ (Simetri özeliği)
2) $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$ (Bilineerlik özeliği)

özeliklerine sahip ise bu g dönüşümü V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer formdur [17].

Tanım 4.2

Bir reel vektör uzayı V ve g de V üzerinde bir simetrik bilineer form olmak üzere,

1) g dejeneredir ancak ve ancak bir $u \in V$ ve her $v \in V$ için $g(u, v) = 0$ iken $u \neq 0$ dır.

2) g non-dejeneredir ancak ve ancak bir $u \in V$ ve her $v \in V$ için $g(u, v) = 0$ iken $u = 0$ dır [17].

Tanım 4.3

W, V nin bir alt uzayı ve g de V üzerinde bir simetrik bilineer form olmak üzere, g nin W üzerindeki kısıtlaması,

$$g_{|w} : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir. v, g nin indeksi olmak üzere $0 \leq v \leq boyV$ dir [17].

Tanım 4.4

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, bilineer, non-dejenere ve sabit indeksli (0.2)-tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir [17].

Tanım 4.5

E^n, n-boyutlu Öklid uzayında $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in E^n$ ve $0 \leq v \leq n$ olmak üzere,

$$\begin{array}{lcl} \langle , \rangle_L : \; E^n \times E^n & \to & E \\ \qquad (X, Y) & \to & \langle X, Y \rangle_L = \sum\limits_{i=1}^{n-v} x_i y_i - \sum\limits_{i=n-v+1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

şeklinde tanımlanan v-indeksli metrik tensöre yarı-Öklidyen metrik, bu metriğin tanımlanması ile elde edilen $(E^n, \langle , \rangle_L)$ ikilisine yarı-Öklidyen uzay denir ve E_v^n ile gösterilir.

Özel olarak E_v^n yarı öklidyen uzayında $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise E_1^n, Minkowski n-uzay (n-boyutlu Lorentz uzayı) şeklinde adlandırılır.

Özel olarak $v = 1$ ve $n = 3$ alınırsa E_1^3, Minkowski 3-uzay (3-boyutlu Lorentz uzayı) şeklinde adlandırılır [17].

Tanım 4.6

$U = (u_1, \ldots, u_n) \in E_1^n$ olmak üzere,

1) $\langle U, U \rangle_L > 0$ veya $U = 0$ ise U vektörüne spacelike vektör,
2) $\langle U, U \rangle_L = 0$ ve $U \neq 0$ ise U vektörüne lightlike (null) vektör,
3) $\langle U, U \rangle_L < 0$ ise U vektörüne timelike vektör denir [17].

Tanım 4.7

$\alpha \in E_1^n$ Minkowski uzayında bir eğri olsun. Böylece α eğrisinin hız vektörü $\alpha^{'}$ olmak üzere,

1) $\left\langle \alpha^{'}, \alpha^{'} \right\rangle_L > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,
2) $\left\langle \alpha^{'}, \alpha^{'} \right\rangle_L = 0$ ise α eğrisine lightlike (null) eğri,
3) $\left\langle \alpha^{'}, \alpha^{'} \right\rangle_L < 0$ ise α eğrisine timelike eğri denir [17].

4.1. Minkowski 3-Uzayında Frenet Eğrilikleri

E^3 teki $g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ metriğinden yararlanarak E_1^3 deki Frenet çatıları ve formüllerini ele alacağız. E_1^3 de bir $\alpha(s)$ eğrisi, $I \subset \mathbb{R}$ aralığında; $g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})$ nün sıfırdan büyük, küçük veya eşit olmasına göre sırasıyla spacelike, timelike veya null karakterlerden birine sahip olabilir.

Durum 1: α spaceliketır.
$g\left(\dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s)\right) = 1$ şartını sağlayan s yay parametresi ile verilen bir α eğrisini göz önüne alalım. $T(s)$, $\alpha(s)$ nin hız veya birim tanjant vektör alanıdır. $\ddot{\alpha}(s) \neq 0$ ise; $\ddot{\alpha}(s), T(s)$ ye diktir. Böylece $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\lambda > 0$ için $N(s) = \lambda\ddot{\alpha}(s)$ alırız. $\ddot{\alpha}$ nün karakterine bağlı olarak aşağıdaki durumlara sahibiz.

Durum 1.1: $g(\ddot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s)) > 0$ ise $N(s)$ asli normal vektör alanı, $\ddot{\alpha}(s)$ normalleştirilmiş vektör alanıdır. $B(s)$ binormal vektör alanı, α nın her $\alpha(s)$ noktasında $\{T(s), N(s)\}$ spacelike düzlemine dik olan tek timelike birim vektör alanıdır. Öyle ki $\{T, N, B\}$, E_1^3

gibi aynı yönlendirmeye sahiptir. Frenet formülleri matris formunda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Durum 1.2: $g(\ddot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s)) < 0$ ise $N(s)$ asli normal vektör alanı, $\ddot{\alpha}(s)$ normalleştirilmiş timelike vektör alanıdır. $B(s)$ binormal vektör alanı, α nın her $\alpha(s)$ noktasında $\{T(s), N(s)\}$ timelike düzlemine dik olan tek timelike birim vektör alanıdır. Öyle ki $\{T, N, B\}$, E_1^3 gibi aynı yönlendirmeye sahiptir. Frenet formülleri matris formunda;

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

Durum 1.3: $g(\ddot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s)) = 0$ ise α üzerinde büküm noktaları olması ve doğru olması durumlarını çıkaralım. $\ddot{\alpha}(s) \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. $N(s)$ asli normal vektör alanı, $\ddot{\alpha}(s)$ vektör alanıdır. $B(s)$ binormal vektör alanı, α nın her $\alpha(s)$ noktasında $T(s)$ ye dik olan tek null vektör alanıdır öyle ki $g(N, B) = 1$ dir. Frenet formülleri matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & -\kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Burada κ_1 eğriliği yalnızca iki değer alabilir. α doğru olduğunda 0, diğer durumlarda 1 dir. Eğer $\alpha(s)$ doğru ise $\ddot{\alpha}(s) = 0 = \dot{T}(s)$ dir. Bunun anlamı da $\kappa_1 = 0$ olmasıdır. $\alpha(s)$ doğrusal olmadığı takdirde $\ddot{\alpha}(s) \neq 0$ olacak şekilde bir I aralığı mevcuttur.

$N(s)$, $N(s) = \ddot{\alpha}(s) = \dot{T}(s)$ olarak tanımlanır. Bunun anlamı da $\kappa_1 = 1$ dir. $\{T, N, B\}$, E_1^3 de pseudo ortonormal bazdır. Yani;

$$\dot{N} = a_1T + a_2N + a_3B$$
$$\dot{B} = b_1T + b_2N + b_3B$$

şeklindedir.

$$g(N,N) = g(N,T) = g(B,B) = 0$$

eşitliklerinden sırasıyla $a_3 = a_1 = b_2 = 0$ buluruz.

$$g(N,B) = 1 \text{ ve } g(B,T) = 0$$

eşitliklerini göze aldığımızda diferensiyel alarak

$$g(\dot{N},B) + g(N,\dot{B}) = 0 \text{ ve } g(\dot{B},T) + g(B,\dot{T}) = 0$$

elde ederiz. Bu da $a_2 = -b_3$ ve $b_1 = -\kappa_1 = -1$ olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak bu durumda sadece $a_2 = \kappa_2$ eğriliğinin olduğunu anlarız.

Durum 2: α timeliketır.
$g(\dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s)) = -1$ olmak üzere s parametresine bağlı bir α eğrisi alalım. $T(s)$, α nın birim timelike tanjant vektör alanıdır. $\ddot{\alpha}(s)$, $T(s)$ ye dik ve böylece spaceliketır çünkü $N(s)$ asli normal vektör alanını, $\ddot{\alpha}(s)$ normalleştirilmiş vektör alanı olarak tanımlarız. $B(s)$ binormal vektör alanı, α nın her $\alpha(s)$ noktasındaki $\{T(s), N(s)\}$ timelike düzlemine dik olan tek spacelike birim vektör alanıdır. Öyle ki $\{T,N,B\}$, E_1^3 gibi aynı yönlendirmeye sahiptir. Frenet formüller matris formunda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Durum 3: α null eğridir.
T, α nın null vektör alanı, $\ddot{\alpha}$ de $\ddot{\alpha} = 0$ olması haricinde T ye dik spacelike vektör alanı olsun. Eğer α null doğru değilse s pseudo-yay uzunluğu parametresi olarak alalım. Yani her s için $g(\ddot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s)) = 1$ dir ve N yi, $\ddot{\alpha}$ ile ilişkilendirilen birim vektör alanı olarak

tanımlayalım. B binormal vektör alanı, α nın her $\alpha(s)$ noktasındaki $N(s)$ ye dik birim null vektör alanıdır. Öyle ki $g(T,B)=1$ dir. Frenet formülleri matris formunda,

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & -\kappa_1 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Burada κ_1 eğriliği sadece iki değer alabilir, α null doğru olduğu zaman 0, diğer durumlarda 1 dir. Eğer $\alpha(s)$ null doğru ise,

$$\ddot{\alpha}(s) = 0 = \dot{T}(s)$$

bu da $\kappa_1 = 0$ olduğu anlamına gelir Eğer $\alpha(s)$ doğru değilse $\ddot{\alpha}(s) \neq 0$ olacak şekilde bir I aralığı mevcuttur. $N(s)$,

$$N(s) = \ddot{\alpha}(s) = \dot{T}(s)$$

olarak tanımlanır. Böylece $\kappa_1 = 1$ dir. $\{T,N,B\}$ E_1^3 de pseudo-ortonormal bazdır. Bu da,

$$\begin{aligned} \dot{N} &= a_1 T + a_2 N + a_3 B \\ \dot{B} &= b_1 T + b_2 N + b_3 B \end{aligned}$$

anlamına gelir.

$$g(N,N) = g(T,B) = 1 \text{ ve } g(B,B) = 0$$

eşitliklerinden sırasıyla $a_2 = b_3 = b_1 = 0$ elde ederiz.

$$g(T,N) = g(N,B) = 0$$

eşitliklerini göz önünde bulundurarak diferensiyel alırsak

$$g(\dot{T},N) + g(T,\dot{N}) = 0 \text{ ve } g(\dot{N},B) + g(N,\dot{B}) = 0$$

buluruz. Bu da $a_2 = -\kappa_1 = -1$ ve $a_1 = -b_2$ olması anlamına gelir. Bu durumda da sadece bir eğriliğin $a_1 = \kappa_2$ olduğunu anlarız.

E^3 teki her α eğrisinin iki adet eğriliğe sahip olduğunu biliyoruz. Birincisi κ_1 eğriliği ayrıca buna κ eğriliği de denir ve ikinci eğrilik κ_2 eğrilidir ki bazen τ burulması da denir. W-eğrileri aşağıdaki özelliklerle karakterize edilir:

$\kappa = 0$ ancak ve ancak α eğrisi bir doğrudur.

$\tau = 0$ ancak ve ancak α düzlemsel bir eğridir.

$\tau = 0$ ve $\kappa =$ sabit > 0 ancak ve ancak α bir çemberdir.

$\tau =$ sabit $\neq 0$ ve $\kappa =$ sabit > 0 ancak ve ancak α dairesel helistir.

4.2. Minkowski 3-Uzayında W-Eğrileri

3.bölümde n-boyutlu Öklid uzayında W-eğrilerine çalıştık. Bundan sonraki bölümde Bölüm 4.1 de elde ettiğimiz Frenet denklemleri yardımıyla Minkowski 3-uzayındaki W-eğrilerini ele alacağız.

4.2.1. Spacelike Eğriler

Bu bölümde $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ nin işaretine bağlı olan üç durumu birbirinden ayıracağız. Bunun için önce E_1^3 deki spacelike eğriler için bazı teoremler verelim.

Teorem 4.2.1.1

α eğrisi E_1^3 de bir spacelike eğri olmak üzere $\kappa_1 = 0$ dır ancak ve ancak α bir doğru parçasıdır [1].

İspat

Frenet denklemlerinden, $\kappa_1 = 0$ ise $\dot{T} = \kappa_1 N$ olduğundan $\dot{T} = \ddot{\alpha} = 0$ olur ve bu da α nın bir doğru parçası olduğu anlamına gelir. $\square$

Sonuç olarak birinci eğrilik doğrusallıktan sapmayı ölçer.

Teorem 4.2.1.2

E_1^3 de $g(\ddot{\alpha},\ddot{\alpha}) \neq 0$ şartı ile verilen bir α spacelike eğrisi için $\kappa_2 = 0$ dır ancak ve ancak α düzlemsel bir eğridir [1].

İspat

$\kappa_2 = 0$ ise Frenet denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \kappa_1 N \\ \dot{N} &= \pm\kappa_1 T \end{aligned}$$

bulunur. α eğrisinin türevleri bakımından bu denklemleri yeniden yazdığımızda,

$$\dddot{\alpha} = \frac{\kappa_1^{'}}{\kappa_1}\ddot{\alpha} + \kappa_1^2\dot{\alpha}.$$

denklemini elde ederiz. α için MacLaurin serisini kullanarak

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \dot{\alpha}(0)s + \ddot{\alpha}(0)\frac{s^2}{2!} + \dddot{\alpha}(0)\frac{s^3}{3!} + \ldots,$$

α eğrisinin$\{\dot{\alpha}(0), \ddot{\alpha}(0)\}$ ile gerilmiş düzlemde yattığını göz önünde bulundurabiliriz.

Tersine α nın düzlemsel bir eğri olduğunu düşünelim. Tüm s ler için $(\alpha(s) - p)q = 0$ eşitliğini sağlayan p ve q noktaları vardır. Türev alırsak

$$\dot{\alpha}(s)q = \ddot{\alpha}(s)q = 0$$

elde ederiz. Böylece q, $T = \dot{\alpha}$ ve $N = \dfrac{\ddot{\alpha}}{\kappa_1}$ ye daima diktir. Fakat B vektörü de T ve N ye diktir. Bu yüzden $B = \dfrac{q}{\|q\|}$ olup birim uzunluğa sahiptir. Sonuç olarak $B = 0$ ve tanıma göre $\kappa_2 = 0$ dır. $\square$

Sadelik için şimdi üç olası durumu ayıralım.

Durum 1: $g(\ddot{\alpha},\ddot{\alpha})>0$

Frenet formülleri matris formunda;

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Bu durumda W-eğrileri aşağıdaki teoremle karakterize edilir.

Teorem 4.2.1.3

E_1^3 de $g(\ddot{\alpha},\ddot{\alpha})>0$ şartı ile verilen spacelike bir α eğrisi için,

1) $\kappa_2=0$ ve $\kappa_1=$ sabit >0 dır ancak ve ancak α bir çember parçasıdır.

2) $\kappa_1=$ sabit >0 ve $\kappa_2=$ sabit $\neq 0$ ve $|\kappa_2|>\kappa_1$ dir ancak ve ancak $K=\kappa_2^2-\kappa_1^2$ olmak üzere α eğrisi,

$$\alpha(s)=\frac{1}{K}\left(\kappa_1\sinh\left(\sqrt{K}s\right),\sqrt{\kappa_2^2K}s,\kappa_1\cosh\left(\sqrt{K}s\right)\right)$$

olup bir spacelike helis parçasıdır.

3) $\kappa_1=$ sabit >0, $\kappa_2=$ sabit $\neq 0$ ve $|\kappa_2|<\kappa_1$ dir ancak ve ancak $K=\kappa_2^2-\kappa_1^2$ olmak üzere α eğrisi,

$$\alpha(s)=\frac{1}{K}\left(\sqrt{\kappa_2^2K}s,\kappa_1\cos\left(\sqrt{K}s\right),\kappa_1\sin\left(\sqrt{K}s\right)\right)$$

olup spacelike bir dairesel helis parçasıdır.

4) $\kappa_1=$ sabit >0, $\kappa_2=$ sabit $\neq 0$ ve $|\kappa_2|=\kappa_1$ dir ancak ve ancak α,

$$\alpha(s)=\frac{1}{6}\left(\kappa_1\kappa_2s^3,-\kappa_1^2s^3+6s,3\kappa_1s^2\right)$$

şeklinde parametrelendirilebilir [1].

İspat

1) $\kappa_1 = \text{sabit} > 0$ ve $\kappa_2 = 0$ olsun. Teorem 4.2.1.2 den α nın düzlemsel bir eğri olduğunu ve Teorem 4.2.1.2 nin ispatından $\alpha(s)$ nin $\{\dot{\alpha}(0), \ddot{\alpha}(0)\}$ ile gerilmiş bir düzlemde yattığını biliyoruz. α spacelike bir eğri ve $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) > 0$ dır çünkü α eğrisinin spacelike bir düzlemde yattığını biliyoruz.

$$\alpha_0(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_1}N(s)$$

tanımlayalım. Türevini alarak

$$\dot{\alpha}_0(s) = \dot{\alpha}(s) + \frac{1}{\kappa_1}\dot{N}(s) = 0$$

elde ederiz. $\alpha_0(s)$, sabit bir eğridir. Çünkü tüm s ler ve c sabiti için $\alpha(s) + \frac{1}{\kappa_1}N(s)$ aynı değere sahiptir. c ve $\alpha(s)$ arasındaki uzaklık;

$$d(c, \alpha(s)) = \|c - \alpha(s)\| = \left\|\frac{N(s)}{\kappa_1}\right\| = \frac{1}{\kappa_1}$$

formülü ile bulunur. Sonuç olarak $\alpha(s)$ eğrisi bir çember parçasıdır.

Tersine $\alpha(s)$ nin spacelike düzlemsel bir çember olduğunu varsayalım. Teorem 4.2.1.2 den biliyoruz ki $\kappa_2 = 0$ ve Teorem 4.2.1.2 nin ispatından $\alpha(s)$ nin $\{\dot{\alpha}(0), \ddot{\alpha}(0)\}$ tarafından gerilmiş bir düzlemde yattığını biliyoruz. α spacelike bir eğri ve $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) > 0$ dir. Bu yüzden α eğrisinin spacelike bir düzlemde yattığını biliyoruz. Genelliği bozmadan $x = 0$ düzlemini alabiliriz. Böylece $r \in \mathbb{R}$ ve $r > 0$ için,

$$\alpha(s) = \left(0, r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

yazılır. Buradan da κ_1 hesaplanarak $\kappa_1 = \frac{1}{r} = \text{sabit}$ bulunur.

2) $\kappa_1 = \text{sabit} > 0$ ve $\kappa_2 = \text{sabit} \neq 0$ ve $|\kappa_2| > \kappa_1$ olduğunu varsayalım. α_0 eğrisini alırsak

$$\alpha_0(s) = \alpha(s) + \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}N(s)$$

bu eğrinin bir doğru olduğunu görmek kolaydır. Bu eğrinin karakteristik özelliği,

$$g(\dot{\alpha}_0, \dot{\alpha}_0) = \frac{-\kappa_2^2}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}$$

şeklinde belirlenir. α_0 spacelike doğru olduğundan, genelliği bozmadan α_0 ın Y-ekseni olduğunu varsayabiliriz. $g(\dot{\alpha}_0, N) = 0$ olduğundan,

$$N(s) = -\left(\sinh(f(s)), 0, \cosh\left(f\left(s\right)\right)\right)$$

ve

$$\alpha(s) = \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}\sinh\left(f\left(s\right)\right), h\left(s\right), \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}\cosh\left(f\left(s\right)\right)\right)$$

eşitliklerini elde ederiz. Frenet formüllerini ve α nın spacelike olduğu gerçeğini kullanarak

$$h(s) = \sqrt{\frac{\kappa_2^2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}}s \text{ ve } f(s) = \sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}s$$

buluruz. α spacelike hiperbolik bir helisin parçasıdır.

α spacelike hiperbolik bir helisin parçası ise türev alınarak ve Frenet formülleri kullanılarak κ_1 ve κ_2 yi sabit buluruz ve gerekli koşullar sağlanır.

3) $|\kappa_2| < \kappa_1$ olduğunu ve her iki eğriliğin de sabit olduğunu varsayalım. Eğer α_0 eğrisini alırsak

$$\alpha_0(s) = \alpha(s) + \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}N(s),$$

bu eğrinin bir doğru olduğunu görmemiz kolaydır. Bu eğrinin karakteristik özelliği,

$$g(\dot{\alpha}_0, \dot{\alpha}_0) = \frac{-\kappa_2^2}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}.$$

ile belirlenir. α_0 timelike doğru olduğundan genelliği bozmadan α_0 ın X-ekseni olduğunu varsayabiliriz. $g(\dot{\alpha}_0, N) = 0$ olduğundan,

$$N(s) = -\left(0, \cos\left(f\left(s\right)\right), \sin(f(s))\right)$$

ve

$$\alpha(s) = \left(h\left(s\right), \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}\cos\left(f\left(s\right)\right), \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}\sin\left(f\left(s\right)\right)\right)$$

buluruz. α nın spacelike olduğu gerçeği ile Frenet formüllerini kullanarak

$$h(s) = \sqrt{\frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}s \text{ ve } f(s) = \sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}s$$

yi elde ederiz. Bu durumda α spacelike dairesel bir helisin parçasıdır. Tersine α spacelike dairesel bir helisin parçası ise Frenet denklemlerini uygulayarak her iki eğriliğin de sabit olduğunu buluruz ve istenen koşullar sağlanır.

4) $\kappa_1 = |\kappa_2|$ ve her iki eğriliğin de sabit olduğunu varsayalım. Frenet formüllerinden,

$$\ddot{N} = 0$$

şeklinde yazarız. Genelliği bozmadan $s = 0$ için, $\alpha(s) = (0,0,0)$, $T(0) = (0,1,0)$, $N(0) = (0,0,1)$ ve $B(0) = (1,0,0)$ olduğunu varsayabiliriz. Her $i \in \{1,2,3\}$ ve $c_i \in \mathbb{R}$ için,

$$N(s) = (c_1 s, c_2 s, c_3 s + 1)$$

buluruz. Frenet formülleri ve bazı integrallemelerden sonra,

$$\alpha(s) = \frac{1}{6}\left(c_1\kappa_1 s^3, c_2\kappa_1 s^3 + 6s, c_3\kappa_1 s^3 + 3\kappa s^2\right)$$

elde ederiz. Basit bir hesaplama ile ve yeniden Frenet formüllerini kullanarak $c_1 = \kappa_2$, $c_2 = -\kappa_1$, $c_3 = 0$ elde ederiz. Diğer kısmı α eğrisinin birinci ve ikinci türevlerini alarak ve Frenet denklemlerini uygulayarak ispatlayabiliriz.$\square$

Durum 2: $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) < 0$

Frenet formülleri matris formunda;

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda W-eğrilerini aşağıdaki teoremle karakterize ederiz.

Teorem 4.2.1.4

E_1^3 de $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) < 0$ koşulu ile verilen bir α spacelike eğrisi için,

1) $\kappa_1 =$ sabit > 0 ve $\kappa_2 = 0$ dır ancak ve ancak α dik bir hiperbolün parçasıdır.
2) $\kappa_1 =$ sabit > 0 ve $\kappa_2 =$ sabit $\neq 0$ dır ancak ve ancak α spacelike hiperbolik bir helisin parçasıdır. $K = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$ olmak üzere,

$$\alpha(s) = \frac{1}{K}\left(\kappa_1 \cosh\left(\sqrt{K}s\right), \sqrt{\kappa_2^2 K}s, \kappa_1 \sinh\left(\sqrt{K}s\right)\right)$$

şeklindedir [1].

İspat

1) $\kappa_1 =$ sabit > 0 ve $\kappa_2 = 0$ olduğunu varsayalım. Teorem 4.2.1.2 den α nın düzlemsel bir eğri olduğunu ve Teorem 4.2.1.2 nin ispatından $\alpha(s)$ nin $\{\dot{\alpha}(0), \ddot{\alpha}(0)\}$ ile gerilmiş düzlemde yattığını biliyoruz. α spacelike bir eğridir ve $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) < 0$ dır. Bu yüzden α nın timelike bir düzlemde yattığını biliyoruz.

$$\alpha_0(s) = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa_1}N(s)$$

tanımlayalım. Türev alarak

$$\dot{\alpha}_0(s) = \dot{\alpha}(s) - \frac{1}{\kappa_1}\dot{N}(s) = 0$$

elde ederiz. $\alpha_0(s)$ sabit bir eğridir. Çünkü $\alpha(s) - \frac{1}{\kappa_1}N(s)$, c sabiti ve her s için aynı değere sahiptir. c ve $\alpha(s)$ arasındaki uzaklık;

$$d(c,\alpha(s)) = \|c-\alpha(s)\| = \left\|\frac{-N(s)}{\kappa_1}\right\| = \frac{1}{|\kappa_1|}$$

şeklinde bulunur. Böylece $\alpha(s)$, dik bir hiperbol parçasıdır.

Tersine $\alpha(s)$ nin dik bir hiperbol parçası olduğunu varsayalım. Teorem 4.2.1.2 den $\kappa_2 = 0$ olduğunu biliyoruz ve Teorem 4.2.1.2 nin ispatından $\alpha(s)$ nin $\{\dot{\alpha}(0), \ddot{\alpha}(0)\}$ ile gerilmiş düzlemde yattığını biliyoruz. α spacelike bir eğridir ve $g(\ddot{\alpha},\ddot{\alpha}) < 0$ dır. Bu yüzden α nın timelike bir düzlemde yattığını biliyoruz. Genelliği bozmadan $z=0$ düzlemini alabiliriz. Böylece $r \in \mathbb{R}$ ve $r>0$ için,

$$\alpha(s) = \left(r\sinh\left(\frac{s}{r}\right), r\cosh\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)$$

elde edilir. Buradan κ_1 hesaplanarak $\kappa_1 = \dfrac{1}{r} =$ sabit bulunur.

2) $\kappa_1 =$ sabit >0 ve $\kappa_2 =$ sabit $\neq 0$ olduğunu varsayalım. α_0 eğrisini alırsak

$$\alpha_0(s) = \alpha(s) - \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2+\kappa_2^2}N(s),$$

$\ddot{\alpha}_0(s) = 0$ olduğunu hesaplamamız kolaydır. Böylece bu eğri bir doğrudur. Bu eğrinin nedensel karakteri,

$$g(\dot{\alpha}_0,\dot{\alpha}_0) = \frac{-\kappa_2^2}{\kappa_1^2-\kappa_2^2}.$$

ile belirlenir. α_0 spacelike bir doğru olduğundan genelliği bozmadan α_0 ın Y-ekseni olduğunu farzedebiliriz. $g(\dot{\alpha}_0, N) = 0$ olduğundan,

$$N(s) = -\left(\cosh\left(f\left(s\right)\right), 0, \sinh(f(s))\right)$$

ve

$$\alpha(s) = \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_1^2+\kappa_2^2}\cosh\left(f\left(s\right)\right), h\left(s\right), \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2+\kappa_2^2}\sinh\left(f\left(s\right)\right)\right)$$

ifadelerini elde ederiz. α nın spacelike olduğu gerçeğini ve Frenet formüllerini kullanarak

$$h(s) = \sqrt{\frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}s \text{ ve } f(s) = \sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}s$$

buluruz. Bu durumda α bir spacelike hiperbolik helis parçasıdır.

Tersine α spacelike hiperbolik bir helisin parçası ise türev alarak ve Frenet denklemlerini uygulayarak κ_1 ve κ_2 nin sabit olduğunu buluruz. $\square$

Durum 3: $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = 0$
α, pseudo null eğri ve Frenet formülleri matris formunda;

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & -\kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada κ_1 eğriliği sadece iki değer alabilir. α spacelike bir doğru ise 0, diğer durumlarda 1 dir. Bu durumda W-eğrileri aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem 4.2.1.5

E_1^3 de tüm pseudo null spacelike W-eğrileri aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

1) $\kappa_1 = 0$ dır ancak ve ancak α bir spacelike doğru parçasıdır.
2) $\kappa_1 = 1$ ve $\kappa_2 = 0$ dır ancak ve ancak α,

$$\alpha(s) = \left(\frac{s^2}{2}, s, \frac{s^2}{2} \right)$$

şeklinde parametrelendirme ile düzlemsel bir eğri parçasıdır.
3) $\kappa_1 = 1$ ve $\kappa_2 = \text{sabit} \neq 0$ dır ancak ve ancak α,

$$\alpha(s) = \frac{1}{\kappa_2^2} \big(\cosh(\kappa_2 s) + \sinh(\kappa_2 s), \kappa_2^2 s, \cosh(\kappa_2 s) + \sinh(\kappa_2 s) \big)$$

şeklinde parametrelendirme ile düzlemsel bir eğrinin parçasıdır [1].

İspat

1) $\kappa_1 = 0$ ise tanım gereği α bir doğrudur. Tersine α bir doğru ise $\ddot{\alpha} = 0$ ve böylece $\kappa_1 = 0$ dır.
2) $\kappa_1 = 1$ ve $\kappa_2 = 0$ ise Frenet formüllerini ve α nın MacLaurin serisini kullanabiliriz. O halde,

$$\alpha(s) = \alpha(0) + T(0)s + N(0)\frac{s^2}{2}$$

ifadesini elde ederiz. Bu denklemden α nın düzlemsel bir eğri olduğunu anlarız. Genelliği bozmadan,

$$\alpha(0) = (0,0,0)\,,\ T\,(0) = (0,1,0)\ \text{ve}\ N(0) = (1,0,1)$$

olduğunu farzedebiliriz. Buradan da,

$$\alpha(s) = \left(\frac{s^2}{2}, s, \frac{s^2}{2}\right)$$

buluruz.
Tersine $\alpha(s)$ yukarıdaki parametrelendirmeye sahip ise $\dddot{\alpha}(s) = 0$ dır. Bu da $\dot{N}(s) = 0$ olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak Frenet formüllerinden $\kappa_2 = 0$ bulunur.
3) $\kappa_1 = 1$ ve $\kappa_2 =$ sabit $\neq 0$ ise

$$\alpha_0(s) = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa_2^2}N(s)$$

spacelike bir doğrudur. Genelliği bozmadan α_0 ın Y-ekseni olduğunu varsayabiliriz. $N(s)$ nin $\dot{\alpha}_0$ a dik bir null vektör olduğunu biliyoruz. Bu sebepten,

$$N(s) = n(s)(1,0,1)$$

şeklinde yazılabilir. Bazı hesaplamalardan sonra,

$$\dot{n}(s) = \kappa_2 n(s)$$

buluruz. Bu diferensiyel denklemi çözüp

$$\alpha_0(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_2^2} N(s)$$

denklemini kullanırsak sonucu elde ederiz. α nın türevini alıp Frenet formüllerini uygulayarak κ_2 nin sabit olduğu sonucuna varırız. $\square$

4.2.2. Timelike eğriler

Frenet formülleri matris formunda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Timelike W-eğrileri aşağıdaki teoremle karakterize edilir.

Teorem 4.2.2.1

E_1^3 deki tüm timelike W-eğrileri aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

1) $\kappa_1 = 0$ dır ancak ve ancak α timelike doğru parçasıdır.
2) $\kappa_2 = 0$ dır ancak ve ancak α düzlemsel timelike eğridir.
3) $\kappa_2 = 0$ ve $\kappa_1 =$ sabit > 0 dır ancak ve ancak α ortogonal hiperbol parçasıdır.
4) $\kappa_1 =$ sabit > 0, $\kappa_2 =$ sabit $\neq 0$ ve $|\kappa_2| > \kappa_1$ dir ancak ve ancak α dairesel helis parçasıdır ve $K = \kappa_2^2 - \kappa_1^2$ olmak üzere,

$$\alpha(s) = \frac{1}{K}\left(\sqrt{\kappa_2^2 K}s, \kappa_1 \cos\left(\sqrt{K}s\right), \kappa_1 \sin\left(\sqrt{K}s\right)\right)$$

şeklinde parametrelendirilebilir.
5) $\kappa_1 =$ sabit > 0, $\kappa_2 =$ sabit $\neq 0$ ve $|\kappa_2| < \kappa_1$ dır ancak ve ancak α timelike hiperbolik helis parçasıdır ve $K = \kappa_1^2 - \kappa_2^2$ olmak üzere,

$$\alpha(s) = \frac{1}{K}\left(\kappa_1 \sinh\left(\sqrt{K}s\right), \sqrt{\kappa_2^2 K}s, \kappa_1 \cosh\left(\sqrt{K}s\right)\right)$$

şeklinde parametrelendirilebilir.

6) $\kappa_1 =$ sabit > 0, $\kappa_2 =$ sabit $\neq 0$ ve $|\kappa_2| = \kappa_1$ dır ancak ve ancak α,

$$\alpha(s) = \frac{1}{6}\left(\kappa_1^2 s^3 + 6s, 3\kappa_1 s^2, \kappa_1\kappa_2 s^3\right)$$

şeklinde parametrelendirilebilir [1].

İspat

Teorem 4.2.1.1, Teorem 4.2.1.2, ve Teorem 4.2.1.3 ispatındaki gibi aynı yöntemlerle ispat yapılır. □

4.2.3. Lightlike (Null) Eğriler

Frenet formülleri matris formunda;

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & -\kappa_1 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada κ_1 eğriliği iki değer alabilir; α null doğru olduğunda 0, diğer durumlarda 1 dir. Null W-eğrileri aşağıdaki teorem ile karakterize edilir.

Teorem 4.2.3.1

E_1^3 de tüm null W-eğriler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

1) $\kappa_1 = 0$ dır ancak ve ancak α null doğru parçasıdır;

2) $\kappa_1 = 1$ ve $\kappa_2 = 0$ dır ancak ve ancak α null küp parçasıdır ve

$$\alpha(s) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(6s + s^3, 3\sqrt{2}s^2, 6s - s^3\right);$$

3) $\kappa_1 = 1$ ve $\kappa_2 > 0$ dır ancak ve ancak α null dairesel helis parçasıdır ve $K = \sqrt{2\kappa_2}$ olmak üzere,

$$\alpha(s) = \frac{1}{K^2}\left(Ks, \cos\left(Ks\right), \sin\left(Ks\right)\right);$$

4) $\kappa_1 = 1$ ve $\kappa_2 < 0$ dır ancak ve ancak α null hiperbolik helis parçasıdır ve $K = \sqrt{-2\kappa_2}$ olmak üzere,

$$\alpha(s) = \frac{1}{K^2}\left(\sinh\left(Ks\right), Ks, \cosh\left(Ks\right)\right)$$

şeklindedir [1].

İspat

Bu ispat önceki ispatlardan daha kısa olacak çünkü sadece en farklı olan kısımları vereceğiz.
2) $\kappa_2 = 0$ olduğunu varsayalım. $\{T, N, B\}$ Frenet formülleri ile birlikte α nın MacLaurin serisi,

$$\alpha(s) = \alpha(0) + T(0)s + N(0)\frac{s^2}{2} - B(0)\frac{s^3}{6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda T ve B null vektörlerdir. Öyle ki $g(T, B) = 1$ ve N birim spacelike vektördür. Genelliği bozmadan

$$T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1),\ N(0) = (0, 1, 0),\ B(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

olduğunu varsayabiliriz. Bu da bize istenen sonucu verir.
3) ve 4) $\kappa_2 \neq 0$ ise,

$$\alpha_0(s) = \alpha(s) - \frac{1}{2\kappa_2}N(s)$$

şeklinde bir doğrudur. Bu doğrunun karakteristik özelliği ise κ_2 nin işaretine bağlı olmasıdır. Eğer $\kappa_2 < 0$ ise α_0 timelike doğrudur ve bu doğrunun X-ekseni olduğunu varsayabiliriz. Diğer durumlarda α_0 spacelike doğrudur ve bu doğrunun da Y-ekseni olduğunu varsayabiliriz. $N(s)$ spacelike birim vektörü her iki durumda da $\dot{\alpha}_0$ a diktir. Bunun anlamı $N(s)$ nin iyi tanımlı form olmasıdır. α_0 ın tanımından N bilindiği zaman α nın da bilinebileceğini anlarız. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Walrave, J., (1994). Curves and Surfaces in Minkowski Space. Doktora Tezi, K. U. Leuven Fac. of Science, Leuven.

[2] Frenet, F., (1852). Surles courbes a double courbure. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 17,* 437-447.

[3] Serret, J. A., (1851). Sur quelques formules relatives a la theorie des courbes a double courbure, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 16,* 193-207.

[4] Klein, F. & Lie, S., (1871). Über diejenigen ebenen curven welche durch ein geschlossenes system von einfach unendirch vielen vertauschberen linearen Transformatronen in sich übergeben *Mathematische Annalen*, 4, 50-84.

[5] Rademacher, H. & Toeplitz, O., (1994). A Characteristic Property of the Circle. H. Zuckerman (Eds), *The Enjoyment of Math* (pp. 160-162). Princeton: Princeton University Press.

[6] Chen, B. Y. & Kim D. S. & Kim Y.H., (2006). New characterizations of W-curves. *Publicationes Mathematicae Debrecen, 69*(4), 457-472.

[7] Boas, H. P., (1980). A geometric characterization of the ball and the Bochner-Martinelli kernel. *Mathematische Annalen, 248,* 275-278. doi: 10.1007/bf01420531

[8] Boas, H. P., (1984). Spheres and cylinders: a local geometric characterization. *Illinois Journal of Mathematics, 28*(1), 120-124.

[9] Wegner, B., (1988). A Differential Geometric Proof of the Local Geometric Characterization of Spheres and Cylinders by Boas. *Mathematica Balkanica (New Series), 2*(4), 294-295.

[10] Kim, D. S. & Kim, Y. H., (2010). New characterizations of spheres, cylinders and W-curves. *Linear Algebra and its Applications, 432*(11)*,* 3002-3006. doi: 10.1016/j.laa.2010.01.006

[11] Hacısalihoğlu, H. H., (1998). *Diferensiyel Geometri I.* 3.Baskı, Ankara.

[12] Hacısalihoğlu, H. H., (2012). *Diferensiyel Geometri II.* 4.Baskı, Ankara.

[13] Hacısalihoğlu, H. H., (1980). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş.* İstanbul.

[14] Levi-Civita, T., (1937). Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spacio euclideo. *Rendiconti Academia Dei Lincei, 26*, 355-362.

[15] Segre, B., (1938). Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni. *Rendiconti Academia Dei Lincei, 27*, 203-207.

[16] Kim, D. S., (1995). On the Gauss map of hypersurfaces in the space form. *Journal of the Korean Mathematical Society, 32*(3), 509-518.

[17] O'Neill, B., (1983). *Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* New York: Academic Press.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuncay Deniz ŞENTÜRK
Doğum Yeri ve Yılı : Karabük 1986
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : tuncaydenizsenturk@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Kastamonu Göl Anadolu Öğretmen Lisesi - 2004

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği -2009

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Şehit Teğmen Cemal Tepeli Çok Programlı Lisesi/ Devrekani/ Kastamonu (15/01/2010 - 14/06/2010)

İş Yeri : Çamaş Lisesi/Çamaş/Ordu (16/06/2010 - 22/08/2012)

İş Yeri : Mustafa Sıtkı Erkek Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi Taşköprü/ Kastamonu (24/08/2012 - Halen)