T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL KONFORMAL ÜÇGENLER VE ÖZELLİKLERİ

Umut ERGÜNAY

Danışman	**Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER**
Jüri Üyesi	**Yrd. Doç. Dr. Kadir KANAT**
Jüri Üyesi	**Yrd. Doç. Dr. Zafer ÜNAL**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASTAMONU –2017

TEZ ONAYI

Umut ERGÜNAY tarafından hazırlanan "**Küresel Konformal Üçgenler ve Özellikleri**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANSTEZİ**olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Yrd. Doç. Dr. Kadir KANAT Gazi Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Yrd. Doç. Dr. Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	....

24/05/2017

Enstitü Müdür V. Prof. Dr. Temel SARIYILDIZ ....

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

Umut ERGÜNAY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KÜRESEL KONFORMAL ÜÇGENLER VE ÖZELLİKLERİ

Umut ERGÜNAY
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER

Bu tezde, öklidyen uzaydaki üçgenlerin konformal yapılarından yararlanılarak, bilinen tanım ve bağıntılar yardımı ile küresel uzaydaki konformal üçgenlerin varlığı incelenmiştir. Küresel uzaydaki üçgenlerin açı ve alan formülleri, küresel uzaydaki konformal üçgenlere uyarlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Öklidyen uzay, küresel uzay, konformal üçgen

2017, 41 sayfa
Bilim Kodu: 204

ABSTRACT

MSc. Thesis

SPHERICAL CONFORMAL TRIANGLES AND PROPERTIES

Umut ERGÜNAY
Kastamonu University
Graduate School of Natural andAppliedSciences
Department of Mathemathics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ümit TOKEŞER

In this thesis, by making use of the conformal structures of the triangles in Euclidean space, the existence of conformal triangles in spherical space have been analysised with the help of known definitions and formulas. The formulas of angle and field in spherical space have been adapted to conformal triangles in spherical space.

Keywords: Euclidean space, spherical space, conformal triangular

2017, 41 pages
ScienceCode: 204

TEŞEKKÜR

Değerli fikir, yardım ve yol göstericiliği ile tezin sonuca ulaşmasında büyük katkıları olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü) ’e teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan Eşime gösterdiği özveri ve desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Umut ERGÜNAY
Kastamonu, Mayıs, 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$boy(x)$	x in boyutu
C	Konveks küme
C^{n-1}	Işık Konisi
d_E	Öklidyen uzunluk
d_L	Lorentz uzunluğu
d_S	Küresel uzaklık fonksiyonu
E^n	n boyutlu öklidyen uzay
S^n	*n*-boyutlu Küresel uzay
G	Gramm matrisi
M	Ayrıt matrisi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu vektör uzayı
$\mathbb{R}^n_1$	Lorentz uzayı
$\langle\, ,\rangle$	İç çarpım
$\langle\, ,\rangle_L$	Lorentz iç çarpımı
$\eta(x,y)$	x ile y arasındaki time-like açı
θ_{ij}	P_i ve P_j köşelerinin karşısındaki dihedral açı
φ_{ij}	P_i ve P_j köşelerini birleştiren ayrıtın uzunluğu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

İki nokta arasındaki en kısa uzaklığın bu noktalar arasındaki doğru parçası olduğu hipotezi Archimedes tarafından [1] de kullanılmıştır. 1732 yılında Euler [2] de bir yüzey üzerindeki geodeziklerin diferansiyel denklemini yayınlamıştır. Böylece iki noktaya bağlı olarak verilen geodeziklerin sadece yüzeyin cinsine bağlı olarak verilebileceği gösterilmiştir. Archimedes ve Apollonius'un ortaçağdaki çalışmalarının Latin tercümeleri ve 1637 de Fermat ve Dekart'ın analitik geometriye girişleri 19. yüzyılın ilk yarısında düzlem eğrilerinin teğetlerini bulmak için kullanılan geometrik tekniklerin gelişmesini sağlamıştır. Metrik uzaylarda yay uzunluğu kavramına 1930 yılında [3] de Menger tarafından girilmiştir.

Yukarıda tarihsel gelişimine değindiğimiz bugünkü modern geometri, bir metriğe göre en kısa yol (geodezik eğri) kavramlarına dayanmaktadır. Öklid metriğinin model olamayacağı (rölativite gibi) soyut kavramları somut hale getirebilmek için kullanılan başka metrik uzayların da kullanılmasının kaçınılmaz olacağı muhakkaktır. Küresel uzayda bir eğrinin bir noktasındaki eğriliği bu noktadaki teğette sapma miktarını ölçtüğünden ve geodeziklerin eğriliği de sıfır olduğundan, geodeziği uzayın verilen iki noktasından geçen doğru olarak düşünebiliriz. Göz önüne alınan uzaydaki geodeziklerin diferensiyel denklemini, verilen iki noktaya bağlı çözersek bu çözümün tek olduğunu görürüz.

Bu tezde, Öklidyen uzaydaki konformallik tanımından yararlanılarak, küresel uzaydaki konformallikve küresel uzayda konformal ve özel konformal üçgenlerin yapıları incelenmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Öklidyen Uzay

2.1.1. Tanım

X ve Y iki metrik uzay olmak üzere

$\forall x, y \in X$ için

$\phi : X \to Y$ dönüşümü $d_Y\left(\phi(x), \phi(y)\right) = d_X\left(x, y\right)$

eşitliğini sağlıyor ise ϕ ye bir *izometri* denir. ϕ dönüşümü birebir ve örten bir dönüşümdür. E^n den kendisi üzerine tanımlı izometri, *öklidyen izometri* olarak adlandırılır [5].

2.1.2. Tanım

$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$\left\langle \phi(x), \phi(y) \right\rangle = \left\langle x, y \right\rangle$

eşitliğini sağlıyorsa, ϕ ye *ortogonal dönüşüm* denir [5].

2.1.3. Tanım

E^n in x, y, z gibi üç noktası için

$y = x + t\left(z - x\right)$

olacak şekilde bir $t \in \left[0,1\right]$ reel sayısı varsa bu üç noktaya *doğrusaldır* denir [5].

2.1.4. Tanım

$\left[a, b\right]$, $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık ve $a < b$ olmak üzere $\alpha : \left[a, b\right] \to X$ dönüşümü uzunluk koruyan sürekli bir fonksiyon ise α ya X metrik uzayında bir *jeodezik yay* denir [5].

2.1.5. Tanım

Bir X metrik uzayında $x, y \in X$ için $\alpha : [a, b] \to X$ jeodezik yayının görüntüsüne, *başlangıç noktası x, bitiş noktası y olan jeodezik parçası* denir. E^n in jeodezik parçaları, kendisinin doğru parçalarıdır [5].

2.1.6. Tanım

X bir metrik uzay olsun. $x, y \in X$ ayrık çifti için x ve y yi içeren bir tek jeodezik parça varsa X metrik uzayına *jeodezik olarak konvekstir* denir [5].

2.1.7. Tanım

X bir metrik uzay olmak üzere $\lambda : \mathbb{R} \to X$ jeodezik doğrusunun görüntüsüne *X metrik uzayında bir jeodezik* denir. E^n in jeodezikleri kendisinin doğrularıdır [5].

2.2. Lorentz Uzayı

$x, y \in \mathbb{R}^n$ iki vektör ve $n > 0$ olsun. x ile y nin *Lorentzian iç çarpımı,*

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

ile tanımlanan indefinit bir iç çarpımdır. Bu iç çarpımla birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına *Lorentz Uzayı* denir. $\mathbb{R}^n_1$ ile gösterilir [2]. $\mathbb{R}^n_1$ uzayında bir vektörün normu,

$\|x\| = |\langle x, x \rangle_L|^{1/2}$ ile tanımlanır.

x ve y vektörünün *lorentz uzunluğu*

$$d_L(x, y) = \|x - y\|$$

ile tanımlanır [5].

2.2.1. Tanım

$\mathbb{R}^n_1$ Lorentz uzayında $\|x\| = 0$ olacak şekilde bütün x lerin kümesine, yani;

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n_1 \;\middle|\; x_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \right\}$$

şeklindeki C^{n-1} kümesine *ışık-konisi (light-cone)* denir. $\|x\| = 0$ ise x vektörüne *ışık-benzeri (light-like* veya *null) vektör* denir [5].

2.2.2. Tanım

$x \in \mathbb{R}_1^n$ için $\langle x, x \rangle_L > 0$ ise x vektörüne *uzay benzeri (space-like) vektör* denir. C^{n-1} hiperkonisinin dışı, $\mathbb{R}_1^n$ in uzay benzeri vektörlerden oluşan açık alt kümesidir [5,8,9].

2.2.3. Tanım

$x \in \mathbb{R}_1^n$ için $\langle x, x \rangle_L < 0$ oluyorsa x vektörüne *zaman benzeri (time-like) vektör* denir. C^{n-1} hiperkonisinin içi, $\mathbb{R}_1^n$ in zaman benzeri vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir. Eğer $x_1 > 0$ ise x vektörüne *pozitif zaman benzeri,* $x_1 < 0$ ise x vektörüne *negatif zaman benzeri* denir [5,8,9].

2.2.4. Tanım

Sıfırdan farklı $x, y \in \mathbb{R}_1^n$ için $\langle x, y \rangle_L = 0$ oluyorsa x ve y vektörlerine *lorentz ortogonaldir* denir [2].

2.2.1. Önerme

$\mathbb{R}_1^n$ in bir V alt vektör uzayının, zaman benzeri olması için gerek ve yeter koşul V nin en az bir zaman benzeri vektöre sahip olmasıdır.

Uzay benzeri olması için gerek ve yeter koşul V deki sıfırdan farklı her vektörün uzay benzeri olmasıdır.

Işık benzeri olması için gerek ve yeter koşul V deki sıfırdan benzeri her vektör için $\langle x, x \rangle_L = 0$ olmasıdır [5,9].

2.2.5. Tanım

x ve y, $\mathbb{R}_1^n$ de pozitif ya da negatif zaman benzeri iki vektör olsun.

$$\langle x, y \rangle_L = -\|x\|\|y\| \cosh \eta(x, y)$$

olacak şekilde negatif olmayan bir tek $\eta(x, y)$ reel sayısı vardır. x ve y arasındaki *lorentz zaman benzeri (time-like) açı* $\eta(x, y)$ olarak tanımlanır [5,8].

2.3. Küresel Uzay

n -boyutlu küresel geometri için standart model $S^n = \{x \in IR^{n+1} : \|x\| = 1\}$ ile tanımlanan IR^{n+1} in S^n birim küresidir. S^n üzerindeki Öklidyen metrik $d_E(x,y) = \|x-y\|$ ile verilir. Fakat bu metrik IR^{n+1} in vektör yapısına dayanılarak verildiğinden S^n ye özgü bir metrik değildir [5].

2.3.1. Tanım

$x, y \in S^n$ iki vektör ve bu iki vektör arasındaki Öklidyen açı $\theta(x,y)$ olsun. x *ve* y arasındaki küresel uzunluk

$$d_S(x,y) = \theta(x,y)$$

şeklinde bir reel sayıdır. Burada $0 \le d_S(x,y) \le \pi$ *ve* $d_S(x,y) = \pi$ olması için gerek ve yeter şart $y = -x$ olmasıdır. Eğer $y = -x$ ise x *ve* y vektörlerine antipodaldir denir [5,7].

2.3.1. Teorem

d_S küresel uzunluk fonksiyonu S^n üzerinde bir metriktir [5].

İspat

[2] den görülebilir.

2.3.2. Tanım

S^n nin büyük çemberi IR^{n+1} in iki boyutlu alt vektör uzayı ile S^n nin arakesitidir. $x, y \in S^n$ iki farklı nokta olsun. x, y lineer bağımsız ise, IR^{n+1} in $V(x, y)$ ile gösterilen iki boyutlu bir alt uzayını gererler. Böylece $S(x, y) = S^n \cap V(x, y)$ kümesi, x *ve* y yi içeren S^n nin bir büyük çemberidir. S^n nin jeodezikleri onun büyük çemberleridir [5].

2.4. Öklidyen ve Küresel Uzayda Tanımlar

Burada $\mathrm{X} = \mathrm{E}^n, \mathrm{S}^n$ olarak alınacaktır.

2.4.1.Tanım

X in bir alt cümlesi C olsun. $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{C}$ ayrık çifti için x ve y yi içeren doğru parçası C de kalıyorsa, C kümesine *konveks küme* denir [5].

2.4.1. Teorem

X de kapalı bir konveks küme yarı-uzayların arakesitidir [5].

2.4.2. Tanım

X de bir konveks alt küme C olsun. $\partial \mathrm{C}$ in boştan farklı en büyük konveks alt kümesine *C nin bir kenarı* denir [5].

2.4.3. Tanım

X de n-boyutlu bir konveks polihedron P olsun, $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n} + 1$ için *P nin bir k-yüzü (face),* P nin (k+1)-yüzünün bir kenarı (side) olarak tanımlanır [5].

2.4.4. Tanım

X de n-boyutlu bir konveks polihedron P olsun, P nin 0-yüzüne, *P nin tepesi (vertex)* denir [5].

2.4.5. Tanım

X in bir A alt kümesi için, A yı içeren X in bütün konveks alt kümelerinin arakesitine A nın *konvekslik bölgesi* denir [5].

2.4.6. Tanım

X de n-boyutlu bir polihedron P olsun. Eğer P nin sonlu sayıda tepe noktası varsa ve P bu tepelerin konvekslik bölgesi ise P ye bir *çok köşeli (politop)* denir [5].

2.4.1. Önerme

X in boştan farklı bir alt kümesi S olsun. S tarafından gerilen ve S yi içeren bir en küçük alt uzay vardır ve $\langle S \rangle$ ile gösterilir. Bu uzay S yi içeren bütün alt uzayların arakesitidir [10].

2.4.1. Sonuç

Eğer $\text{boy}(x) = n < \infty$ ise X in $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $(n+1)$ nokta kümesi oluşturması için gerek ve yeter şart $\langle x_0, x_1, ..., x_n \rangle = X$ olmasıdır [10].

2.4.7. Tanım

$X = E^n$ in bir $\{x_0, x_1, ..., x_k\}$, $(k+1)$ nokta kümesine; $\text{boy}\langle x_0, x_1, ..., x_k \rangle = k$ oluyorsa *afin bağımsızdır* denir [10].

2.4.8. Tanım

X de $(n+1)$ tepe noktalı, n-boyutlu bir politop a bir *n-simpleks* denir [5].

2.4.9. Tanım

$X = E^n$ de n-simpleks, $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ gibi E^n in afin bağımsız $(n+1)$ noktasının *konvekslik bölgesi* olarak tanımlanır. İki boyutlu simplekse üçgen, üç boyutlu simplekse dörtyüzlü (tetrahedron) denir [10].

2.5. Küresel n-Simpleksler

2.5.1. Tanım

S^n küresel uzayında herhangi iki nokta arasındaki *küresel uzunluk* $P_i, P_j \in S^n$ olmak üzere

$$\varphi_{ij} = \arccos\left(\langle P_i, P_j \rangle_L\right)$$

şeklinde tanımlı reel sayıdır [4].

2.5.2. Tanım

Ω_S, S^n uzayında $P_1, P_2, ..., P_{n+1}$ tepeli bir n-simpleks olsun.

Ω_S ,nin P_i ve P_j tepelerine zıt ij-y inci yüzlerinin arakesitinin eş boyutu 2 dir.

Bu iki yüz arasındaki açıya *dihedral açı* denir ve θ_{ij} ile gösterilir [4].

2.5.3. Tanım

$$G = \left[\cos \theta_{ij} \right]$$

simetrik matrisine Ω_S simpleksinin G*ramm matrisi* denir [4].

2.5.4. Tanım

Ω_S nın herhangi iki P_i, P_j tepesi arasındaki uzaklık

$$\varphi = \arccos\left(\left\langle P_i, P_j \right\rangle_L \right)$$

şeklindedir ve Ω_S nın *ayrıt uzunluğu* olarak tanımlanır.

$P_1, P_2, ..., P_{n+1}$ tepeli Ω_S hiperbolik n-simpleksinin *ayrıt matrisi*

$$M = \left[\left\langle P_i, P_j \right\rangle_L \right] = \left[\cos \left\langle P_i, P_j \right\rangle_L \right]$$

şeklinde tanımlanır [4].

3. ÖKLİD DÜZLEMİNDE KONFORMAL ÜÇGENLER

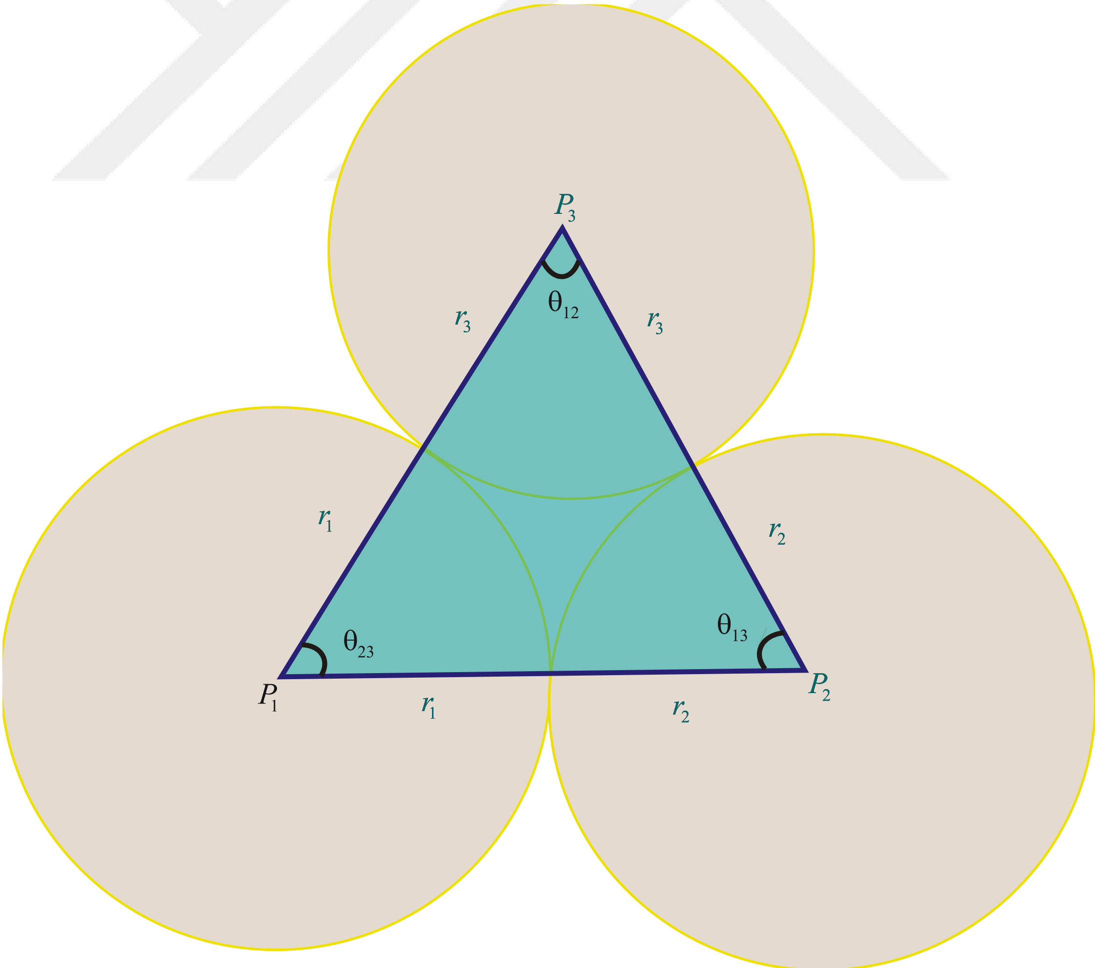
3.1. Öklidyen Konformal Üçgenler

Cooper ve Rivin [12] de Öklid uzayında konformal simpleks tanımı vermiştir.Biz de [12] deki tanımdan yararlanarak konformal üçgenler için uygulayacağız.

3.1.1. Tanım (Öklidyen uzayda konformal dörtyüzlü)

Δ, E^3 de bir simpleks olsun. P_1, P_2, P_3, P_4 ile Δ nın köşelerini, φ_{ij} ile P_i, P_j köşeleri arasındaki uzunluğu, P_i, P_j köşelerinin üzerinde bulunduğu ayrıttaki dihedral açıyı da θ_{ij} ile gösterelim. Bu durumda Δ konformal ise $\varphi_{ij} = r_i + r_j$, $i \neq j$ ve $r_1, ..., r_4 > 0$ dır [12].

Bu tanımı P_1, P_2, P_3 köşeli Δ üçgeni için düşünürsek aşağıdaki şekli elde ederiz.



Şekil 3.1. Öklidyen uzayda konformal üçgen

Gerekli hesaplamalar yapılarak;

$$\left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = r_1 + r_2,$$
$$\left\| \overrightarrow{P_1P_3} \right\| = r_1 + r_3, \qquad (3.1)$$
$$\left\| \overrightarrow{P_2P_3} \right\| = r_2 + r_3$$

olduğu görülür[30] .

3.1.1. Teorem (Öklid Uzayında Konformal Üçgenin Alanı)

Ökidyen konformal üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı

$$R = \frac{(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)}{4\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}}$$

olmak üzere alanı

$$A = \sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}$$

şeklindedir [13].

İspat

den görülür.

4. KÜRESEL DÜZLEMDE ÜÇGENLER

4.1. Küresel Düzlemde Doğru ve Üçgen Kavramı

4.1.1. Tanım

$\alpha : IR \to S^n$ ve $x, y \in S^n$ için

$$\alpha(t) = \cos t\, x + \sin t \frac{\left(y - \langle x, y\rangle x\right)}{\left\| y - \langle x, y\rangle x \right\|}$$

eğrisine S^n nin x, y den geçen doğrusu denir[30].

4.1.2. Tanım

$\alpha : IR \to S^n$ ve $x, y \in S^n$ için

$$\alpha(t) = \cos t\, x + \sin t \frac{\left(y - \cos t_1\, x\right)}{\sin t_1}, \quad t \in [0, t_1]$$

eğri parçasına S^n nin x, y ile sınırlı doğru parçası denir[30].

4.1.3. Tanım

x, y, z üçü aynı küresel doğru üzerinde bulunmayan üç nokta olmak üzere;

$$\alpha(t) = \cos t\, x + \sin t \frac{\left(y - \cos t_1\, x\right)}{\sin t_1}, \quad t \in [0, t_1]$$

$$\beta(s) = \cos s\, y + \sin s \frac{\left(z - \cos s_1\, y\right)}{\sin s_1}, \quad s \in [0, s_1]$$

$$\gamma(u) = \cos u\, z + \sin u \frac{\left(x - \cos u_1\, z\right)}{\sin u_1}, \quad u \in [0, u_1]$$

$\alpha(t_1)=\beta(0), \beta(s_1)=\gamma(0)$ *ve* $\gamma(u_1)=\alpha(0)$ özelliğindeki doğru parçalarının birleşimine küresel üçgen, üçgenin sınırladığı küresel bölgeye de *küresel üçgensel bölge* denir [30].

4.1.4. Tanım

P_i, P_j Δ nın iki köşe noktası ise

$$\cos\varphi_{ij} = \langle P_i, P_j \rangle$$

özelliğindeki φ_{ij} küresel açısına Δ nın P_i, P_j ile sınırlı ayrıt uzunluğu denir [4].

4.1.5. Tanım

P_1, P_2, P_3 köşe noktalı küresel üçgen Δ olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cos\varphi_{12} & \cos\varphi_{13} \\ \cos\varphi_{12} & 1 & \cos\varphi_{23} \\ \cos\varphi_{13} & \cos\varphi_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine Δ nın ayrıt matrisi denir [4].

4.1.6. Tanım

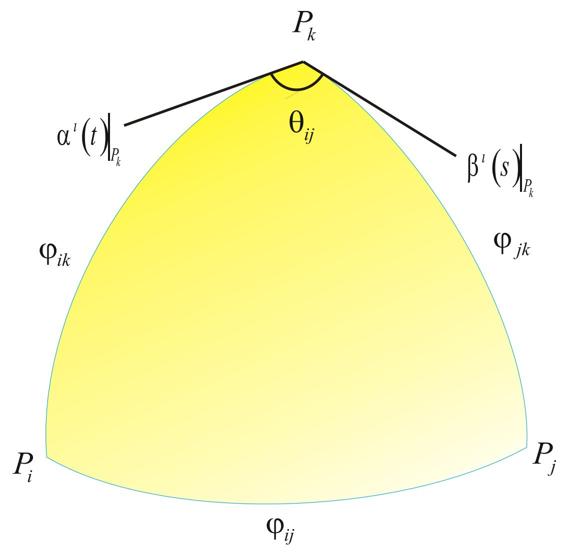
Δ P_i, P_j, P_k köşeli küresel üçgen ve P_k noktasından geçen kenarları üzerinde bulunduğu doğrular da

$\alpha : IR \to S^n$,
$\beta : IR \to S^n$

ise

$$\langle \alpha'(t)\big|_{P_k}, \langle \beta'(s)\big|_{P_k} \rangle = \cos\theta_{ij}$$

olacak şekildeki θ_{ij} açısına Δ nın P_k noktasındaki iç açısı denir[30].



Şekil 4.1. Küresel düzlemde üçgen

4.1.7. Tanım

P_1, P_2, P_3 köşe noktalı küresel üçgen Δ olsun. $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ Δ nın iç açıları olmak üzere

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -\cos\theta_{12} & -\cos\theta_{13} \\ -\cos\theta_{12} & 1 & -\cos\theta_{23} \\ -\cos\theta_{13} & -\cos\theta_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine Δ nın Gramm matrisi denir [4].

4.1.1. Teorem

$\dfrac{n(n+1)}{2}$ tane $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n+1$ pozitif reel sayıların bir Δ küresel simpleksin ayrıtları olması için gerek ve yeter şart Δ nın $M = \left[\cos\varphi_{ij}\right]$ ayrıt matrisinin, köşegen üzerindeki elemanları 1 e eşit olan pozitif tanımlı simetrik matris olmasıdır [4].

4.1.1. Lemma

$\theta_{ij}, \theta_{jk}, \theta_{ki}$ küresel üçgenin sırası ile P_i, P_j, P_k noktalarındaki iç açıları ve $\varphi_{ki}, \varphi_{ij}, \varphi_{jk}$ da Δ nın ayrıtları olmak üzere

1. $\varphi_{ki}\left(P_k\times P_i, P_i\times P_j\right)=\pi-\theta_{ij}$

2. $\varphi_{ij}\left(P_i\times P_j, P_j\times P_k\right)=\pi-\theta_{jk}$

3. $\varphi_{jk}\left(P_j\times P_k, P_k\times P_i\right)=\pi-\theta_{ki}$ [5].

4.1.2. Teorem

θ_{ij},θ_{jk} ve θ_{ki} küresel üçgenin iç açıları olmak üzere

$\theta_{ij}+\theta_{jk}+\theta_{ki}>\pi$ [5].

İspat

θ_{ij},θ_{jk} ve θ_{ki} Δ küresel üçgenin iç açıları olsun. O zaman

$$
\begin{aligned}
\left(\left(P_i\times P_j\right)\times\left(P_k\times P_j\right)\right).\left(P_k\times P_i\right) &= \left[\left(P_i.\left(P_k\times P_j\right)\right)P_j-\left(P_j.\left(P_k\times P_j\right)\right)P_i\right].\left(P_k\times P_i\right)\\
&=\left(P_i.\left(P_k\times P_j\right)\right)\left(P_j.\left(P_k\times P_j\right)\right)\\
&=-\left(P_j.\left(P_k\times P_j\right)\right)^2<0 \ .
\end{aligned}
$$

Teorem 4.1.1 in (2) şıkkından $x\times y, z\times y, z\times x$ lineer bağımsızdırlar ve bunların ilişkili olduğu birim vektörler küresel doğrudaş değillerdir. O zaman

$$\varphi_{ki}\left(P_k\times P_i, P_i\times P_j\right)<\varphi_{ij}\left(P_i\times P_j, P_j\times P_k\right)+\varphi_{jk}\left(P_j\times P_k, P_k\times P_i\right).$$

Lemma 4.1.1den

$$\pi-\theta_{ij}<\theta_{jk}+\theta_{ki}$$

olup

$$\theta_{ij}+\theta_{jk}+\theta_{ki}>\pi$$

elde edilir.

4.1.3. Teorem (Küresel üçgen için sinüs kuralı)

θ_{ij}, θ_{jk} ve θ_{ki} Δ küresel üçgenin açıları ve $\varphi_{ij}, \varphi_{jk}, \varphi_{ki}$ de sırası ile P_k, P_i ve P_j köşelerinin karşısındaki kenarların uzunlukları olmak üzere;

$$\frac{\sin\varphi_{ij}}{\sin\theta_{ij}} = \frac{\sin\varphi_{jk}}{\sin\theta_{jk}} = \frac{\sin\varphi_{ki}}{\sin\theta_{ki}}$$ [5].

4.1.4. Teorem

Δ P_1, P_2, P_3 köşe noktalı küresel üçgen, M ve G de Δ nın sırası ile ayrıt ve Gramm matrisleri olsun. $M_{ii}\,(i=1,2,3)$, M nin asli minörleri olmak üzere

$$G = \left[\frac{M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \right]$$

dir[4].

4.1.1. Sonuç (Küresel üçgen için kosinüslerin birinci kuralı)

θ_{ij}, θ_{jk} ve θ_{ki} Δ küresel üçgenin açıları ve $\varphi_{ij}, \varphi_{jk}, \varphi_{ki}$ de sırası ile P_k, P_i ve P_j köşelerinin karşısındaki kenarların uzunlukları olmak üzere;

$$\cos\theta_{ij} = \frac{\cos\varphi_{ki} - \cos\varphi_{ij}\cos\varphi_{jk}}{\sin\varphi_{ij}\sin\varphi_{jk}}$$

dir (Burada $\{i, j, k\}$, $\{1,2,3\}$ kümesinin bir permütasyonudur) [5].

İspat

Teorem 4.1.4 den açıktır.

4.1.5. Teorem

$\Delta\ P_1, P_2, P_3$ köşe noktalı küresel üçgen, M ve G de Δ nın sırası ile ayrıt ve Gramm matrisleri olsun. $G_{ii}\ (i = 1,2,3)$, G nin asli minörleri olmak üzere

$$M = \left[\frac{G_{ij}}{\sqrt{G_{ii} G_{jj}}} \right]$$

dir[4].

4.1.2. Sonuç (Küresel üçgen için kosinüslerin ikinci kuralı)

$\theta_{ij}, \theta_{jk}\ ve\ \theta_{ki}\ \Delta$ küresel üçgenin iç açıları ve $\varphi_{ij}, \varphi_{jk}, \varphi_{ki}$ de sırası ile $P_k, P_i\ ve\ P_j$ köşelerinin karşısındaki kenarların uzunlukları olmak üzere;

$$\cos\varphi_{ki} = \frac{\cos\varphi_{ij}\cos\varphi_{jk} + \cos\varphi_{ki}}{\sin\varphi_{ij}\sin\varphi_{jk}}$$

dir[5].

İspat

Teorem 4.1.5 den açıktır.

4.2. Özel Küresel Üçgenler

4.2.1. Tanım

Δ; P_1, P_2, P_3 tepeli, $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ dihedral açılı ve $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ ayrıt uzunluklu bir küresel üçgen olsun. $\Delta \in S^2$ olmak üzere $\theta_{12} = \theta_{13} = \theta_{23}$, $\varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{23}$ ve $\theta_{12} > \frac{\pi}{3}$ ise Δ ya eşkenar küresel üçgen denir [14].

4.2.2. Tanım

$\Delta \in S^2$ olmak üzere $\theta_{12} = \theta_{13}$ ve $2\theta_{12} > \pi - \theta_{23}$ ise Δ ya ikizkenar küresel üçgen denir [14].

4.2.3. Tanım

$\Delta \in S^2$ olmak üzere $\cos\varphi_{12} = \cos\varphi_{13}\cos\varphi_{23}$ ise Δ ya küresel dik üçgen denir [14].

4.3. Özel Küresel Üçgenlerin Alanları

4.3.1. Küresel eşkenar üçgenin alanı

$\Delta \in S^2$ ve $\cos\varphi_{12} = \cos\varphi_{13} = \cos\varphi_{23} = a$ olmak üzere küresel eşkenar üçgenin alanı

$$Alan(\Delta) = \pi - \arctan\left(\frac{(a-1)(3a+1)\sqrt{2a+1}}{-a(-a^2+6a+3)}\right)$$

şeklindedir[14].

4.3.2. Küresel ikizkenar üçgenin alanı

$\Delta \in S^2$, $\cos\varphi_{12} = \cos\varphi_{13} = a$ ve $\cos\varphi_{23} = c$ olmak üzere küresel ikizkenar üçgenin alanı

$$Alan(\Delta) = \pi - \arctan\left(\frac{(2a+c+1)\sqrt{(c-1)(-c+2a^2-1)}}{-a^2c+3a^2+2ac+2a+c^2+c}\right)$$

şeklindedir[14].

4.3.3.Küresel dik üçgenin alanı

$a = \cos\varphi_{12}, b = \cos\varphi_{13}, c = \cos\varphi_{23}$ ve $a = bc$ özelliğindeki $\Delta \in S^2$ küresel dik üçgenin alanı

$$Alan(\Delta) = \pi - \arctan\left(\frac{(b+c+bc+1)\sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}}{(c+1)(b+1)(b+c)}\right)$$

şeklindedir[14].

4.4. Küresel Uzayda Konformal Üçgenler

4.4.1. Tanım

Δ, P_1, P_2, P_3 köşe noktalı küresel üçgen için P_iP_j ile sınırlı ayrıt uzunluğu φ_{ij} olsun. $0 < \varphi_{ij} = r_i + r_j \leq \dfrac{\pi}{2}$ olacak şekilde $r_i, r_j \in IR^+$ sayıları varsa Δ ya konformal küresel üçgen denir[30].

4.4.1. Teorem

P_1, P_2, P_3 köşe noktalı küresel üçgen Δ olsun. Δ nın konformal olması için gerek ve yeter şart

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cos(r_1 + r_2) & \cos(r_1 + r_3) \\ \cos(r_1 + r_2) & 1 & \cos(r_2 + r_3) \\ \cos(r_1 + r_3) & \cos(r_2 + r_3) & 1 \end{bmatrix}$$

olmasıdır[30].

İspat

Δ konformal olsun.

$$r_i = \arccos\langle P_i, P\rangle = \overset{\frown}{P_iP} \ \ , \ i = 1,2,3$$
$$r_j = \arccos\langle P_j, P\rangle = \overset{\frown}{P_jP} \ \ , \ j = 1,2,3$$
$$r_i + r_j = \overset{\frown}{P_iP_j} \quad i \neq j \ \ , \ j = 1,2,3$$
$$r_i + r_j = \arccos\left(\langle P_i, P_j\rangle\right)$$

veya

$$\cos(r_i + r_j) = \langle P_i, P_j\rangle \quad i \neq j \quad i, j = 1,2,3$$

bulunur. Bu eşitlikler kullanılarak

$$M=\begin{bmatrix} 1 & \cos(r_1+r_2) & \cos(r_1+r_3) \\ \cos(r_1+r_2) & 1 & \cos(r_2+r_3) \\ \cos(r_1+r_3) & \cos(r_2+r_3) & 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

bulunur.

Tersine

$$M=\begin{bmatrix} 1 & \cos(r_1+r_2) & \cos(r_1+r_3) \\ \cos(r_1+r_2) & 1 & \cos(r_2+r_3) \\ \cos(r_1+r_3) & \cos(r_2+r_3) & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ise

$|M|=4\sin r_1 \sin r_2 \sin r_3 \sin(r_1+r_2+r_3)>0$, $M_{11}=\sin^2(r_2+r_3)>0$,
$M_{22}=\sin^2(r_1+r_3)>0$, $M_{33}=\sin^2(r_1+r_2)>0$

olduğundan M pozitif tanımlı ve bir küresel üçgenin ayrıt matrisidir. Ayrıca $\cos\varphi_{12}=\cos(r_1+r_2)$, $\cos\varphi_{13}=\cos(r_1+r_3)$ ve $\cos\varphi_{23}=\cos(r_2+r_3)$ eşitliklerinden ve $0<\varphi_{ij}<\dfrac{\pi}{2}$ olduğundan da $0<\varphi_{ij}=r_i+r_j\leq\dfrac{\pi}{2}$. O zaman

$$\varphi_{ij}=d(P_i,P_j)=d(P_i,P)+d(P,P_j)$$

bulunur. Bu ise Δ nın konformal olduğunu gösterir.

4.4.2. Teorem

Δ P_1,P_2,P_3 köşe noktalı küresel üçgenin konformal olması için gerek ve yeter şart

$$r_1\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right) \; ise \; r_2\in(0,r_1) \; ve \; r_3\in\left(0,\frac{\pi-2r_1}{2}\right)$$

veya

$$r_1 \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right) \; ise \;\; r_2, r_3 \in \left(0,\frac{\pi-2r_1}{2}\right)$$

olmasıdır[30].

İspat

Δ konformal küresel üçgen olsun. O zaman $0<\varphi_{ij}=r_i+r_j\le\frac{\pi}{2},\; i\neq j=1,2,3$ olmak zorundadır.

$$M=\begin{bmatrix} 1 & \cos(r_1+r_2) & \cos(r_1+r_3) \\ \cos(r_1+r_2) & 1 & \cos(r_2+r_3) \\ \cos(r_1+r_3) & \cos(r_2+r_3) & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

pozitif tanımlı olduğundan $|M|=4\sin r_1 \sin r_2 \sin r_3 \sin(r_1+r_2+r_3)>0$,
$M_{ii}=\sin^2(r_j+r_k)>0$, $(i,j,k)\in S_3$ ve $\sin(r_1+r_2+r_3)>0 \Leftrightarrow 0<r_1+r_2+r_3<\pi$ olur. Böylece

$$\begin{cases} 0<r_1+r_2\le\frac{\pi}{2} \\ 0<r_1+r_3\le\frac{\pi}{2} \\ 0<r_2+r_3\le\frac{\pi}{2} \\ 0<r_1+r_2+r_3<\pi \end{cases} \tag{4.3}$$

eşitsizlik sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden

$$r_1 \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right) \; ise \;\; r_2 \in (0,r_1) \; ve \; r_3 \in \left(0,\frac{\pi-2r_1}{2}\right)$$

veya

$$r_1 \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right) \; ise \;\; r_2, r_3 \in \left(0,\frac{\pi-2r_1}{2}\right)$$

bulunur.

Tersine

$$r_1 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \ olmak \ \ddot{u}zere \ r_2 \in (0, r_1) \ ve \ r_3 \in \left(0, \frac{\pi - 2r_1}{2}\right)$$

veya

$$r_1 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \ olmak \ \ddot{u}zere \ r_2, r_3 \in \left(0, \frac{\pi - 2r_1}{2}\right)$$

olsun. O zaman $0 < r_1 + r_2 + r_3 < \pi$ *ve* $0 < r_1 + r_2 \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < r_1 + r_3 \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < r_2 + r_3 \leq \frac{\pi}{2}$ eşitsizliklerini elde ederiz. Böylece $\sin(r_1 + r_2 + r_3) > 0$, $0 < \cos(r_1 + r_2) < 1$, $0 < \cos(r_1 + r_3) < 1$ ve $0 < \cos(r_2 + r_3) < 1$ olur. O zaman

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos(r_1 + r_2) & \cos(r_1 + r_3) \\ \cos(r_1 + r_2) & 1 & \cos(r_2 + r_3) \\ \cos(r_1 + r_3) & \cos(r_2 + r_3) & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi vardır. $|A| = 4 \sin r_1 \sin r_2 \sin r_3 \sin(r_1 + r_2 + r_3) > 0$, $A_{11} = \sin^2(r_2 + r_3) > 0$, $A_{22} = \sin^2(r_1 + r_3) > 0$, $A_{33} = \sin^2(r_1 + r_2) > 0$ olduğundan A matrisi pozitif tanımlı ve köşegen üzerindeki elemanları 1 olduğundan Teorem 4.1.1 den A bir Δ küresel üçgeninin ayrıt matrisidir. O halde

$$\varphi_{ij} = r_i + r_j$$

de Δ nın ayrıt uzunluklarıdır. Bu ise Δ nın konformal küresel üçgen olması demektir.

4.4.3. Teorem

Δ konformal küresel üçgenin iç açıları ile çemberlerin yarıçapları arasındaki bağıntılar

$$\cos\theta_{12} = \frac{\cos(r_1 + r_2) - \cos(r_1 + r_3)\cos(r_2 + r_3)}{\sin(r_1 + r_3)\sin(r_2 + r_3)}$$

$$\cos\theta_{13} = \frac{\cos(r_1 + r_3) - \cos(r_1 + r_2)\cos(r_2 + r_3)}{\sin(r_1 + r_2)\sin(r_2 + r_3)}$$

$$\cos\theta_{23} = \frac{\cos(r_2+r_3) - \cos(r_1+r_2)\cos(r_1+r_3)}{\sin(r_1+r_2)\sin(r_1+r_3)}$$

şeklindedir.[30].

İspat

Teorem 4.1.4 den

$$\cos\theta_{ij} = \frac{-M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \qquad i, j = 1,2,3.$$

Bu eşitliğin sağ tarafını Eş. 4.1 den ve ayrıt uzunluğu ile yarıçaplar arasındaki

$$\cos\varphi_{23} = \cos(r_2+r_3)$$
$$\cos\varphi_{12} = \cos(r_1+r_2)$$
$$\cos\varphi_{13} = \cos(r_1+r_3)$$
$$\sin\varphi_{23} = \sin(r_2+r_3)$$
$$\sin\varphi_{12} = \sin(r_1+r_2)$$
$$\sin\varphi_{13} = \sin(r_1+r_3)$$

bağıntıları kullanılarak bulunur.

4.5. Küresel Uzayda Özel Konformal Üçgenlerin Varlığı

4.5.1. Teorem (Konformal küresel eşkenar üçgen)

Δ, P_1, P_2, P_3 köşe noktalı ve P_i, P_j ile sınırlı ayrıt uzunluğu φ_{ij} olan konformal küresel eşkenar üçgen vardır[30].

İspat

Δ konformal küresel eşkenar üçgen olsun. Bu durumda $\varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{23}$ olup

$$\cos\varphi_{12} = \cos\varphi_{13} = \cos\varphi_{23} = \cos(r_1+r_2)$$

olacağından

$$M=\begin{bmatrix}1 & \cos(r_1+r_2) & \cos(r_1+r_2)\\ \cos(r_1+r_2) & 1 & \cos(r_1+r_2)\\ \cos(r_1+r_2) & \cos(r_1+r_2) & 1\end{bmatrix} \qquad (44.)$$

olur.

Teorem 4.1.1 den $|M|=(-1+\cos(r_1+r_2))^2(1+\cos(r_1+r_2))>0$, $M_{11}=\sin^2(r_1+r_2)>0$, $M_{22}=\sin^2(r_1+r_2)>0$, $M_{33}=\sin^2(r_1+r_2)>0$ ve $0<r_i+r_j\leq\frac{\pi}{2}$, $i\neq j=1,2,3$ olduğundan $0<\cos(r_1+r_2)<1$ olur. Böylece M ayrıt matrisi pozitif tanımlıdır. O halde Δ konformal küresel eşkenar üçgen vardır.

4.5.1 Sonuç

Δ konformal küresel eşkenar üçgen iken

$$0<r_i<\frac{\pi}{4} \text{ veya } \frac{\pi}{4}\leq r_i<\frac{\pi}{2}, \quad i=1,2,3 \ .$$

4.5.2. Teorem (Konformal küresel ikizkenar üçgen)

Δ, P_1,P_2,P_3 köşe noktalı ve P_i,P_j ile sınırlı ayrıt uzunluğu φ_{ij} olan konformal küresel ikizkenar üçgen vardır [30].

İspat

Δ konformal küresel ikizkenar üçgen olsun. Bu durumda $\varphi_{12}=\varphi_{13}$ olup

$$\cos\varphi_{12}=\cos\varphi_{13}=\cos(r_1+r_2)$$

ve

$$\cos\varphi_{23}=\cos(r_2+r_3)$$

olacağından

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cos(r_1+r_2) & \cos(r_1+r_2) \\ \cos(r_1+r_2) & 1 & \cos(r_2+r_3) \\ \cos(r_1+r_2) & \cos(r_2+r_3) & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

olur. Teorem 4.1.1 den $|M| = 4\sin r_1 \sin^2 r_2 \sin(r_1+r_2) > 0$, $M_{11} = \sin^2(r_2+r_3) > 0$, $M_{22} = \sin^2(r_1+r_2) > 0$, $M_{33} = \sin^2(r_1+r_2) > 0$ ve $0 < r_i + r_j \le \frac{\pi}{2}$, $i \ne j = 1,2,3$ olduğundan $0 < \cos(r_1+r_2) < 1$, $0 < \cos(r_2+r_3) < 1$ olur. Böylece M ayrıt matrisi pozitif tanımlıdır. O halde Δ konformal küresel ikizkenar üçgen vardır.

4.5.2. Sonuç

Δ konformal küresel ikizkenar üçgen iken

$$r_1 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \textit{ olmak üzere } r_2, r_3 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

veya

$$r_1 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \textit{ olmak üzere } r_2, r_3 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

4.5.3. Teorem

Δ, P_1, P_2, P_3 köşe noktalı ve P_i, P_j ile sınırlı ayrıt uzunluğu φ_{ij} olan konformal küresel dik üçgen vardır[30].

İspat

Δ konformal küresel dik üçgen olsun. Bu durumda $\cos\varphi_{12} = \cos\varphi_{13}\cos\varphi_{23}$ olup

$$\cos(r_1+r_2) = \cos(r_1+r_3)\cos(r_2+r_3)$$

olacağından

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cos(r_1+r_3)\cos(r_2+r_3) & \cos(r_1+r_3) \\ \cos(r_1+r_3)\cos(r_2+r_3) & 1 & \cos(r_2+r_3) \\ \cos(r_1+r_3) & \cos(r_2+r_3) & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.6)$$

olur. Teorem 4.1.1 den $|M| = \sin^2(r_1+r_3)\sin^2(r_2+r_3) > 0$, $M_{11} = \sin^2(r_2+r_3) > 0$, $M_{22} = \sin^2(r_1+r_3) > 0$, $M_{33} = 1-\cos^2(r_1+r_3)\cos^2(r_2+r_3) > 0$ ve $0 < r_i + r_j \le \frac{\pi}{2}$, $i \ne j = 1,2,3$ olduğundan $0 < \cos(r_1+r_2) < 1$, $0 < \cos(r_1+r_3) < 1$, $0 < \cos(r_2+r_3) < 1$ olur. Böylece M ayrıt matrisi pozitif tanımlıdır. O halde Δ konformal küresel dik üçgen vardır.

4.5.3. Sonuç

Δ konformal küresel dik üçgen iken

$$r_1 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \; ise \;\; r_2 \in (0, r_1) \; ve \; r_3 \in \left(0, \frac{\pi - 2r_1}{2}\right)$$

veya

$$r_1 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \; ise \;\; r_2, r_3 \in \left(0, \frac{\pi - 2r_1}{2}\right).$$

4] deki (27) eşitliğinden

$$\cos\theta_{ij} = \frac{-M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \quad , i \ne j;\; i, j = 1,2,3 \tag{4.7}$$

ve [15] deki Sonuç 14 den

$$\sin\theta_{ij} = \frac{\sqrt{|M|}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \quad , i \ne j;\; i, j = 1,2,3 \tag{4.8}$$

4.6. Konformal Küresel Üçgende İç Açıların Yarıçaplar İle İfadesi

Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 taraf tarafa oranlanır ve M_{ij}, M_{ii}, M_{jj} *ve* $|M|$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\theta_{12} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sin r_1 \sin r_2 \sin r_3 \sin\left(r_1+r_2+r_3\right)}}{\cos\left(r_1+r_2\right)-\cos\left(r_1+r_3\right)\cos\left(r_2+r_3\right)}\right),$$

$$\theta_{13} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sin r_1 \sin r_2 \sin r_3 \sin\left(r_1+r_2+r_3\right)}}{\cos\left(r_1+r_3\right)-\cos\left(r_1+r_2\right)\cos\left(r_2+r_3\right)}\right),$$

$$\theta_{23} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sin r_1 \sin r_2 \sin r_3 \sin\left(r_1+r_2+r_3\right)}}{\cos\left(r_2+r_3\right)-\cos\left(r_1+r_2\right)\cos\left(r_1+r_3\right)}\right)$$

elde edilir.

4.7. Özel Konformal Küresel Üçgenlerde İç Açıların Yarıçaplar İle İfadesi

4.7.1. Konformal Küresel Eşkenar Üçgende İç Açıların Yarıçaplar İle İfadesi

Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 taraf tarafa oranlanır ve M_{ij}, M_{ii}, M_{jj} ve $\left|M\right|$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\theta_{12} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\left(1+\cos\left(r_1+r_2\right)\right)}}{\cos\left(r_1+r_2\right)}\right),$$

$$\theta_{13} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\left(1+\cos\left(r_1+r_2\right)\right)}}{\cos\left(r_1+r_2\right)}\right)$$

ve

$$\theta_{23} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\left(1+\cos\left(r_1+r_2\right)\right)}}{\cos\left(r_1+r_2\right)}\right)$$

elde edilir.

4.7.2. Konformal Küresel İkizkenar Üçgende İç Açıların Yarıçaplar İle İfadesi

Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 taraf tarafa oranlanır ve M_{ij}, M_{ii}, M_{jj} *ve* $|M|$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\theta_{12} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sin r_1 \sin^2 r_2 \sin(r_1 + r_2)}}{\cos(r_1 + r_2)\sin^2(r_2 + r_3)}\right),$$

$$\theta_{13} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sin r_1 \sin^2 r_2 \sin(r_1 + r_2)}}{\cos(r_1 + r_2)\sin^2(r_2 + r_3)}\right)$$

ve

$$\theta_{23} = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\sin r_1 \sin^2 r_2 \sin(r_1 + r_2)}}{\cos(r_2 + r_3) - \cos^2(r_1 + r_2)}\right)$$

elde edilir.

4.8. Konformal Küresel Dik Üçgende İç Açıların Yarıçaplar Cinsinden İfadesi

Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 taraf tarafa oranlanır ve M_{ij}, M_{ii}, M_{jj} *ve* $|M|$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\theta_{12} = \frac{\pi}{2},$$

$$\theta_{13} = \arctan\left(\frac{\sin(r_1 + r_3)}{\cos(r_1 + r_3)\sin(r_2 + r_3)}\right)$$

ve

$$\theta_{23} = \arctan\left(\frac{\sin(r_2 + r_3)}{\cos(r_2 + r_3)\sin(r_1 + r_3)} \right)$$

elde edilir.

4.9. Konformal Küresel Üçgenlerde İç Açıların ve Tepe Noktalarının Eşitliği

Eş. 4.7de

$$\cos\theta_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \quad , i \neq j;\; i, j = 1,2,3$$

verilmişti.

$$sin\, P_k = \frac{\sqrt{|M|}}{\sqrt{(-M_{ii})(-M_{jj})}} \qquad ,i \neq j, i \neq k, j \neq k;\; i, j, k = 1,2,3 \tag{4.7}$$

olmak üzere

$$cos\,\theta_{12} = \frac{M_{12}}{\sqrt{M_{11}M_{22}}}$$

Eş. 4.1 den M_{11}, M_{12} ve M_{22} hesaplanıp yerine yazılırsa

$$\cos\theta_{12} = \frac{\cos(r_1 + r_3)\cos(r_2 + r_3) - \cos(r_1 + r_2)}{\sqrt{\sin(r_2 + r_3)\sin(r_1 + r_3)}}$$

bulunur.

Benzer şekilde Eş 4.2 den hesaplanan M_{11}, M_{22} ve $|M|$ Eş 4.7 de kullanılırsa

$$sin\, P_3 = \frac{\sqrt{|M|}}{\sqrt{M_{11}\, M_{22}}}$$

$$sin\, P_3 = \frac{\sqrt{4\, sin\, r_1\, sin\, r_2\, sin\, r_3\, sin(r_1 + r_2 + r_3)}}{\sqrt{sin(r_2 + r_3)\, sin(r_1 + r_3)}}$$

şeklinde olur. Buradan

$$\theta_{12} = \arccos\left(\frac{\cos(r_1+r_3)\cos(r_2+r_3) - \cos(r_1+r_2)}{\sqrt{\sin(r_2+r_3)\sin(r_1+r_3)}} \right),$$

$$P_3 = arcsin\left(\frac{\sqrt{4\, sin\, r_1\, sin\, r_2\, sin\, r_3\, sin(r_1+r_2+r_3)}}{\sqrt{sin(r_2+r_3)\, sin(r_1+r_3)}} \right) \tag{4.8}$$

bulunur.

Eş 4.8 in sağ tarafının kosinüsü hesaplayalım.

$$cos\left(arcsin\left(\frac{\sqrt{4\, sin\, r_1\, sin\, r_2\, sin\, r_3\, sin(r_1+r_2+r_3)}}{\sqrt{sin(r_2+r_3)\, sin(r_1+r_3)}} \right)\right)$$

$$= \sqrt{1 - sin^2\left(arcsin\left(\frac{\sqrt{4\, sin\, r_1\, sin\, r_2\, sin\, r_3\, sin(r_1+r_2+r_3)}}{\sqrt{sin(r_2+r_3)\, sin(r_1+r_3)}} \right)\right)}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{4\, sin\, r_1\, sin\, r_2\, sin\, r_3\, sin(r_1+r_2+r_3)}}{\sqrt{sin(r_2+r_3)\, sin(r_1+r_3)}} \right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{sin(r_1+r_2)\, sin(r_1+r_3) - 4\, sin\, r_1\, sin\, r_2\, sin\, r_3\, sin(r_1+r_2+r_3)}}{sin(r_1+r_2)\, sin(r_1+r_3)}$$

olur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$sin(r_1+r_2)\, sin(r_1+r_3) - 4\, sin\, r_1\, sin\, r_2\, sin\, r_3\, sin(r_1+r_2+r_3) = \left(cos(r_1+r_3)\, cos(r_2+r_3) - cos(r_1+r_2)\right)^2$$

olarak bulunur. Böylece

$$\theta_{12} = P_3$$

eşitliği elde edilir. Benzer işlemler yapıldığında

$$\theta_{23} = P_1$$

ve

$$\theta_{13} = P_2$$

olur.

4.9. Özel Konformal Küresel Üçgenlerde İç Açıların ve Tepe Noktalarının Eşitliği

4.9.1. Konformal Küresel Eşkenar üçgende İç Açıların ve Tepe Noktalarının Eşitliği

Eş. 4.20 de

$$\cos\theta_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \quad , i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3$$

verilmişti.

$$sin\, P_k = \frac{\sqrt{|M|}}{\sqrt{(-M_{ii})(-M_{jj})}} \quad ,i \neq j, i \neq k, j \neq k;\ i, j, k = 1,2,3 \tag{4.9}$$

olmak üzere

$$cos\,\theta_{12} = \frac{M_{12}}{\sqrt{M_{11}M_{22}}}$$

Eş. 4.10 dan M_{11}, M_{12} ve M_{22} hesaplanıp yerine yazılırsa

$$cos\,\theta_{12} = \frac{cos(r_1 + r_2)(cos(r_1 + r_2) - 1)}{\sqrt{sin(r_1 + r_2)}}$$

bulunur.

Benzer şekilde Eş. 4.10 dan hesaplanan M_{11}, M_{22} ve $|M|$ Eş. 4.9 da kullanılırsa

$$sin\,P_3 = \frac{\sqrt{|M|}}{\sqrt{M_{11}\,M_{22}}}$$

$$sin\,P_3 = \frac{\sqrt{\left(cos\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(cos\left(r_1+r_2\right)+1\right)}}{\sqrt{sin\left(r_1+r_2\right)}}$$

şekinde olur. Buradan

$$\theta_{12} = \arccos\left(\frac{\cos\left(r_1+r_2\right)\left(\cos\left(r_1+r_2\right)-1\right)}{\sqrt{\sin\left(r_1+r_2\right)}}\right),$$

$$P_3 = arcsin\left(\frac{\sqrt{\left(cos\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(cos\left(r_1+r_2\right)+1\right)}}{\sqrt{sin\left(r_1+r_2\right)}}\right) \tag{4.10}$$

bulunur.

Eş. 4.10 un sağ tarafının kosinüsü hesaplayalım.

$$cos\left(arcsin\left(\frac{\sqrt{\left(cos\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(cos\left(r_1+r_2\right)+1\right)}}{\sqrt{sin\left(r_1+r_2\right)}}\right)\right)$$

$$=\sqrt{1-sin^2\left(arcsin\left(\frac{\sqrt{\left(cos\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(cos\left(r_1+r_2\right)+1\right)}}{\sqrt{sin\left(r_1+r_2\right)}}\right)\right)}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\left(cos\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(cos\left(r_1+r_2\right)+1\right)}}{\sqrt{sin\left(r_1+r_2\right)}}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{sin\left(r_1+r_2\right)-\left(cos\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(cos\left(r_1+r_2\right)+1\right)}}{sin\left(r_1+r_2\right)}$$

olur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$sin\left(r_1+r_2\right)-\left(cos\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2\left(cos\left(r_1+r_2\right)+1\right)=cos\left(r_1+r_2\right)\left(cos\left(r_1+r_2\right)-1\right)^2$$

olarak bulunur. Böylece

$$\theta_{12}=P_3$$

eşitliği elde edilir. Benzer işlemler yapıldığında

$$\theta_{23}=P_1$$

ve

$$\theta_{13}=P_2$$

olur.

4.9.2. Konformal Küresel İkizkenar üçgende İç Açıların ve Tepe Noktalarının Eşitliği

Eş. 4.20 de

$$\cos\theta_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}} \qquad , i \neq j;\ i, j = 1,2,3$$

verilmişti.

$$sin\,P_k = \frac{\sqrt{|M|}}{\sqrt{(-M_{ii})(-M_{jj})}} \qquad ,i \neq j, i \neq k, j \neq k;\ i, j, k = 1,2,3 \tag{4.11}$$

olmak üzere

$$cos\,\theta_{12} = \frac{M_{12}}{\sqrt{M_{11}M_{22}}}$$

Eş. 4.14 den M_{11}, M_{12} ve M_{22} hesaplanıp yerine yazılırsa

$$cos\,\theta_{12} = \frac{cos(r_1 + r_2)(cos(r_2 + r_3) - 1)}{\sqrt{sin(r_2 + r_3)\,sin(r_1 + r_2)}}$$

bulunur.

Benzer şekilde Eş. 4.14 dan hesaplanan M_{11}, M_{22} ve $|M|$ Eş. 4.11 de kullanılırsa

$$sin\,P_3 = \frac{\sqrt{|M|}}{\sqrt{M_{11}\,M_{22}}}$$

$$sin\,P_3 = \frac{\sqrt{4\,sin\,r_1\,sin\,r_2\,sin(r_1 + r_2)}}{\sqrt{sin(r_2 + r_3)\,sin(r_1 + r_2)}}$$

şekinde olur. Buradan

$$\theta_{12} = \arccos\left(\frac{\cos(r_1+r_2)(\cos(r_2+r_3)-1)}{\sqrt{\sin(r_2+r_3)\sin(r_1+r_2)}}\right),$$

$$P_3 = arcsin\left(\frac{\sqrt{4\,sin\,r_1\,sin\,r_2\,sin(r_1+r_2)}}{\sqrt{sin(r_2+r_3)\,sin(r_1+r_2)}}\right) \tag{4.12}$$

bulunur.

Eş. 4.12 nin sağ tarafının kosinüsünü hesaplayalım.

$$cos\left(arcsin\left(\frac{\sqrt{4\,sin\,r_1\,sin\,r_2\,sin(r_1+r_2)}}{\sqrt{sin(r_2+r_3)\,sin(r_1+r_2)}}\right)\right)$$

$$= \sqrt{1-sin^2\left(arcsin\left(\frac{\sqrt{4\,sin\,r_1\,sin\,r_2\,sin(r_1+r_2)}}{\sqrt{sin(r_2+r_3)\,sin(r_1+r_2)}}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{4\,sin\,r_1\,sin\,r_2\,sin(r_1+r_2)}}{\sqrt{sin(r_2+r_3)\,sin(r_1+r_2)}}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{sin(r_2+r_3)\,sin(r_1+r_2)-4\,sin\,r_1\,sin\,r_2\,sin(r_1+r_2)}}{sin(r_2+r_3)\,sin(r_1+r_2)}$$

olur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$sin(r_2+r_3)\,sin(r_1+r_2)-4\,sin\,r_1\,sin\,r_2\,sin(r_1+r_2) = cos(r_1+r_2)(cos(r_2+r_3)-1)^2$$

olarak bulunur.

Böylece

$$\theta_{12} = P_3$$

eşitliği elde edilir. Benzer işlemler yapıldığında

$$\theta_{23} = P_1$$

ve

$$\theta_{13} = P_2$$

olur.

4.10. Küresel Uzayda Konformal ve Özel Konformal Üçgenlerin Alanları

4.10.1. Konformal Küresel Üçgenin Alanı

Ω konformal küresel eşkenar üçgen olsun. Bu durumda $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ ayrıt uzunluklar ve

$$\begin{aligned}
cos\,\varphi_{12} &= cos(\,r_1 + r_2\,),\\
cos\,\varphi_{13} &= cos(\,r_1 + r_3\,),\\
cos\,\varphi_{23} &= cos(\,r_2 + r_3\,)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$Alan(\Omega) = \pi - arctan\left(\frac{\sqrt{4\,sin\,r_1\,sin\,r_2\,sin\,r_3\,sin(r_1+r_2+r_3)}\,\big(cos(r_1+r_2)+cos(r_1+r_3)+cosh(r_2+r_3)+1\big)}{4\,sin\,r_1\,sin\,r_2\,sin\,r_3\,sin(r_1+r_2+r_3) - \big(\big(cos(r_1+r_2)+1\big)\big(cos(r_1+r_3)+1\big)\big(cosh(r_2+r_3)+1\big)\big)} \right)$$

şeklinde elde edilir.

4.10.2. Konformal Küresel Eşkenar Üçgenin Alanı

Ω konformal küresel eşkenar üçgen olsun. Bu durumda

$$\varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{23}$$

ve

$$cos\,\varphi_{12} = cos\,\varphi_{13} = cos\,\varphi_{23} = cos\big(r_1 + r_2\big)$$

olup

$$Alan(\Omega) = \pi - arctan\left(\frac{\left(cos(r_1+r_2)-1\right)\left(3cos(r_1+r_2)+1\right)\sqrt{2cos(r_1+r_2)+1}}{cos(r_1+r_2)\left(cos(r_1+r_2)-6cos(r_1+r_2)-3\right)} \right)$$

şeklinde elde edilir.

4.10.3. Konformal Küresel İkizkenar Üçgenin Alanı

Ω konformal küresel ikizkenar üçgen olsun. Bu durumda

$\varphi_{12} = \varphi_{13}$

ve

$cos\,\varphi_{12} = cos\,\varphi_{13} = cos(r_1+r_2)$, $cos\,\varphi_{23} = cos(r_2+r_3)$

olup

$$Alan(\Omega) = \pi - arctan\left(\frac{-\sqrt{\left(cos(r_2+r_3)-1\right)\left(2cos(r_1+r_2)-cos(r_2+r_3)-1\right)}\left(2cos(r_1+r_2)+cos(r_2+r_3)+1\right)}{cos(r_1+r_2)\left(3-cos(r_2+r_3)\right)+2cos(r_1+r_2)\left(cos(r_2+r_3)+1\right)+cos(r_2+r_3)\left(cos(r_2+r_3)+1\right)} \right)$$

şeklinde elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Archimedes, “The Works of Archimedes”, edited by T.L. Heath, *Cambridge University.Press*, Cambridge, 14-42 (1897).

2. Euler,L., “De lineabrevissima in superfici equacunque duoquae libetpunctai ungente”, *Commentarii Academi Scientiarium Petropolitanae*, 3:110-124 (1732).

3. Menger, K., “Unters uchun genüber allgemeine Metrik. Vierte Untersuchung. Zur Metrik der Kurven”, *Mathematische Annnalen*, 103:466-501 (1930).

4. Karlığa, B., “Edgematrix of hyperbolic simplices”, *Geometry Dedicata*, 109:1–6 (2004).

5. Ratcliffe, J.G., “Foundations of Hyperbolic Manifolds”, *Springer-Verlag*, Berlin, 36 (1994).

6. Hacısalihoğlu, H.H., “İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler”, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi*, Ankara, 18-43 (1998).

7. Bluemental, L., “Theoryand Applications of Distance Geometry”, ***Chelsea** Publishing Company*, New York, 97-101 (1970).

8. O’neil, B., “Semi-Riemannian Geometry”, *Academic Press.*, London, 46-49, 54-57, 108-114, 143-144 (1983).

9. Vinberg, E.B., “Geometry II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences”, *Springer-Verlag*, 4-79 (1993).

10. Yakut, A.T., “Hiperbolik Uzayda Simplekslerin Tepe Açıları”, Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi*, 53-113 (2004).

11. Suarez-Peiro, E., “A Schlafli Differential Formula forImplices in Semi-Riemannian Hyperquadrics, Gauss-Bonnet Formulas for Simplices in the de Sitter Sphere andthe Dual Volume of a Hyperbolic Simplex”, *Pasicif Journal of Mathematics*, 194(1): 229 (2000).

12. Rivin, I. and Cooper, D., “Combinatorial scalar curvature and rigidity of ballpac kings”, *Mathematicks Research Letter.*, 3(1):51-60 (1996).

13. Berger, M., “Geometry-I**”,** *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg, 240-241 (1987).

14. Karlığa, B. And Savaş, M., “Hiperbolik ve Küresel Üçgenlerin Kenar Uzunluklarına Bağlı Alan Formülleri”, Bölüm Semineri, *Gazi Üniversitesi*, Ankara, 1-6 (2006).

15. Karlığa, B. and Yakut, A.T., “Vertexangles of a simplex in hyperbolicspace H^n ”, *Geometry. Dedicata*, 120:49-58 (2006).

16. d’Ovidio, E., “Le funzioni metriche fondamentalineglis pazidiquante si vogliano dimensioni e dicurvature constante”Rendiconti Academia Dei *Lincei*, 3(1):929-986 (1877).

17. Gram, J. P. “Under søgelseran gaaende Maengden af Primtalunder en given Graeense**”,** *Det K. Videnska bernes Selskab*,2: 183–308(1884).

18. Erikson, F.,“Thelaw of sines for tedrahedra and n-simplices”, *Geometriae Dedicata***,** 7: 71-80 (1978).

19. Coxeter, H. S. M., “Thepolytopes withregular-prismatic vertex figures II”, *Proceedings of London Mathematical Society*, 34:126-189 (1932).

20. Witt, E., “Spiegelungs gruppen und Aufz¨ahlung halbein facherLiescher Ringe”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat* , Hamburg, 14:289-322(1941).

21. Aleksandrov, A. D., “On thefilling of spaceby polyhedra (Russian)”, *Vestnik Leningrad University Serija Matematika Khimiya*, 9:33-43(1954).

22. Dyck W. “Vorlaufige Mittheilung enuberdie durch Gruppen linearer Transformation engege ben enregularen Gebiet seintheilun gendes Raumes”, *Berichte Verhandl Sachsisch Akademia Wiss Leipzig. Mathematics.-Physics Kl.II*,61-75(1883).

23. Goursat, E., “Sur lessub stitutions orthogonales et lesdivisions regulieres de l’espace”, Annales Scientifigues de l'Ecole Normale Superieure,6:9-102(1889).

24. Coxeter, H. S. M., “Groupswhose fundamental regionsare simplexes”, *London Mathematical Society*, 6:133-136(1931).

25. Vinberg, E. B., “Discrete groups generatedby reflections in Lobacevskii spaces”, *Mathematiques USSR-Sbornik*, 1:429-444(1967).

26. Hsiang, W.Y., “On thevolumeormula of Spherical Simplices, revisited”, Proceedings of GARC Workshop on Geometryand Topology '93 (Seoul, 1993), *Lecture Notes Series, Seoul Nat University Seoul* , 18: 117-127 (1993).

27. Feng, L., “On a Problem of Fenchel”, *Geometry Dedicata*, 64:277 (1997).

28. Asmus, I.,“Duality Between Hyperbolicand de-Sitter Geometry”, *Cornell University*, New York, 1-32 (2008).

29. Lopez, R., “Differential Geometry of Curvesand Surfaces in Lorentz-Minkowski Space”, *Instituto de Matematica e Estatıstica (IME-USP) University of Sao Paulo*, Brasil, 1-4 (2008).

30. Tokeşer, Ü., “Küresel, Hiperbolik ve de-Sitter Düzleminde Üçgenler”,Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi*, 1-53 (2013).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Umut ERGÜNAY
Doğum Yeri ve Yılı	: Bartın 1977
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: umuterg_37@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Bartın Lisesi - 1993
Lisans	: Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği -1998

Mesleki Deneyim

İş Yeri	: General Şükrü Kanatlı Ortaokulu (1998 – 2002)
İş Yeri	: Kastamonu Orhan Şaik Gökyay Lisesi (2002 – 2007)
İş Yeri	: Kastamonu Aytaç Eruz AnadoluLisesi (2007 – 2013)
İş Yeri	: Araç Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi (2013 – Halen)