T.C.

KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL-FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ASİMTOTİK KARARLILIĞI

Serbun Ufuk DEĞER

Danışman	**Prof. Dr. Yaşar BOLAT**
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Ömer AKIN**
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Ahmet KAÇAR**
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Kemal AYDIN**
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR**

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KASTAMONU – 2018

TEZ ONAYI

Serbun Ufuk DEĞER tarafından hazırlanan **"Diferensiyel-Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Asimtotik Kararlılığı "** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Prof. Dr. Yaşar BOLAT Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Ömer AKIN TOBB Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Ahmet KAÇAR Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Kemal AYDIN Selçuk Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR Amasya Üniversitesi	....

12/07/2018

Enstitü Müdür V.	Doç. Dr. Mehmet Altan KURNAZ	....

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

İmza

Serbun Ufuk DEĞER

ÖZET

Doktora Tezi

DİFERENSİYEL- FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ASİMTOTİK KARARLILIĞI

Serbun Ufuk DEĞER
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yaşar BOLAT

Bu tez çalışmasında, diferensiyel denklemler ve onların ayrık halleri olan fark denklemlerinin belirli sınıflarını kapsayan denklemler ele alınmış ve bu denklemlerin asimtotik kararlılığı için bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezde ele alınan diferensiyel ve fark denklemlerinin tarihi gelişim süreci ve uygulama alanları hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, diferensiyel ve fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler hatırlatılmıştır. Üçüncü bölüm bu tezin orjinal bölümü olup, ilk kesiminde bir gecikmeli lineer, homojen fark denklem sistemlerinin bazı sınıflarının asimtotik kararlılığı incelenmiş ve bazı örnekler verilmiştir. İkinci kesimde iki gecikmeli lineer, homojen fark denklem sistemlerinin bazı sınıflarının asimtotik kararlılığı incelenmiş ve bazı örnekler sunulmuştur. Üçüncü kesimde değişken parametreye sahip gecikme ile lineer olmayan gecikmeli fark denklem sisteminin asimtotik kararlılık şartları incelenmiş ve örneklendirilmiştir. Son kesimde ise ikinci kesimde ele alınan fark denklem sistemlerinin sürekli fonksiyonlardaki karşılığı olan diferensiyel denklem sistemlerinin asimtotik kararlılığı incelenmiştir ve bazı örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gecikmeli fark denklem sistemleri, gecikmeli diferensiyel denklem sistemleri, asimtotik kararlılık.

2018, 138 Sayfa
Bilim Kodu: 204

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ASYMPTOTIC STABILITY OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

Serbun Ufuk DEĞER
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yaşar BOLAT

In this thesis, differential equations and their discrete forms containing specific classes of difference equations are discussed and some new results are obtained for asymptotic stability of these equations.

The thesis consists of three parts. In the first part, information about the historical development process and application areas of the differential and difference equations discussed in thesis are given. In the second part, we remind the basic definitions and theorems related to differential and difference equations. The third part is the original part of this thesis, in the first section, asymptotic stability of some classes of linear, homogeneous difference equation systems with one delay is investigated and some examples are given. In the second section, asymptotic stability of some classes of linear, homogeneous difference equation systems is investigated with two delays and some examples are presented. In the third section, the asymptotic stability conditions of the nonlinear delayed difference equation system with variable delay are investigated and exemplified. In the last section, the asymptotic stability of the differential equations systems that correspond continuous functions of the difference equation systems in the second section is studied and some examples are given.

Keywords: Delay difference equation systems, delay differential equation systems, asymptotic stability

2018, 138 pages
Science Code: 204

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Yaşar BOLAT (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü) ’a tez izleme toplantılarındaki olumlu katkılarından dolayı tez izleme komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. Ömer AKIN (TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü) ’a ve Sayın Prof. Dr. Ahmet KAÇAR (Kastamonu Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı) ’a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca daima yanımda olan aileme gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Serbun Ufuk DEĞER
Kastamonu, Temmuz, 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$B(x_0,\delta)$	x_0 merkezli δ yarıçaplı açık yuvar
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}=\{1,2,3,....\}$ biçiminde tanımlanan doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{Z}^+=\{1,2,3,\ ...\}$ biçiminde tanımlı pozitif tamsayılar cümlesi
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,\ ...\}$ biçiminde tanımlı tamsayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ biçiminde tanımlı reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}=\{a+ib:\ a,b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$ biçiminde tanımlanan karmaşık sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$ biçiminde tanımlı n boyutlu kartezyen çarpım cümlesi
D^2	Birim çember
x^*	Denge noktası
Δ	$\Delta x(n)=x(n+h)-x(n)$ biçiminde tanımlanan ileri fark operatörü
Δ_a	$\Delta x(n)=x(n+h)-ax(n)$ biçiminde tanımlanan genelleştirilmiş ileri fark operatörü
Δ^0	Birim operatör
C^0	Sürekli fonksiyonlar uzayı
C^1	Kendisi ve birinci mertebeden türevleri olan sürekli fonksiyonlar uzayı
$\lVert A\rVert$	A matrisinin normu
$M_2(\mathbb{R})$	2×2 tipindeki reel matrislerin uzayı
$\det A$	A matrisinin determinantı
$f^{(k)}$	f fonksiyonunun k nıncı mertebeden türevi

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bir $f(t)$ foksiyonunun türevi, bu fonksiyonun t bağımsız değişkenine göre değişim oranını verdiğinden, sürekli değişen doğa olaylarını tanımlarken türevi kapsayan denklemlerin kullanılması tabidir. Bir t bağımsız değişkenine bağlı bir bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini kapsayan denklemlere diferensiyel denklem denir. Örneğin Newton'un soğuma yasası diferensiyel denklem olarak şu şekilde ifade edilebilir: Bir cismin $T(t)$ sıcaklığının değişiminin zamana oranı, T sıcaklığı ile cismi çevreleyen A ortamının sıcaklığı arasındaki farkla orantılıdır. Yani pozitif bir k sabiti için,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $T > A$ ise $\frac{dT}{dt} < 0$ dır. Böylece sıcaklık t nin azalan bir fonksiyonudur ve bu durumda cisim soğur. Diğer taraftan eğer $T < A$ ise $\frac{dT}{dt} > 0$ dır. Dolayısıyla sıcaklık t nin artan bir fonksiyonu olur ve bu durumda cisim ısınır. Böylece bir fiziksel yasa bir diferansiyel denkleme dönüşür. Eğer k ve A değerleri verilirse, $T(t)$ için açık bir formül bulunabilir ve ondan sonra bu formül yardımıyla cismin sonraki sıcaklığı tahmin edilebilir (Akın, 2011).

Diğer bir örnek olarak Hodgkin-Huxley modeli verilebilir. Bu model hücrenin elektrik davranışını, iyonları ve hücre zarındaki iyon kanallarını dikkate alarak betimleyen bir diferensiyel denklem modelidir . α_y ve β_y model sabitleri olmak üzere t zamanının bir fonksiyonu olan y için bu modelde iyon kanallarının davranışı

$$\frac{dy}{dt} = \alpha_y(1 - y) - \beta_y y$$

diferensiyel denklemi ile tanımlanmıştır. Burada y, iyon kanalının açıklığını tanımlayan bilinmeyendir. $y=0$ iken kanal tamamen kapalı, $y=1$ iken kanal tamamen açıktır.

Kimya alanında Toriçelli yasası olarak bilinen denklem modeli diferensiyel denklem modellerine verilebilecek diğer bir örnektir. Boşaltılan bir tanktaki suyun V hacminin değişiminin zamana oranı, tanktaki suyun y derinliğinin karekökü ile orantılıdır. Yani bir k sabiti için bu model

$$\frac{dV}{dt}=-k\sqrt{y}$$

diferensiyel denklemi ile ifade edilir. Yukarıdaki örneklerde de görüldüğü gibi diferensiyel denklemler fizik, kimya, biyoloji, mühendislik vb. alanlarda ortaya çıkan matematiksel modellerde doğrudan ya da dolaylı olarak yer alırlar.

Bir bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini (en yüksek mertebeli türev hariç) farklı gecikme parametrelerine bağlı bırakan diferensiyel denklemlere de gecikmeli diferensiyel denklemler denir. $t\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$x'(t)=x(t)-x\big(t-\tau(t)\big),\quad \tau(t)<t$$
$$x''(t)=2x\left(t-\left\|\frac{t}{2}\right\|\right)-x(t)$$
$$x'(t)=x(t-2)+x(t-3)$$

şeklindeki denklemler gecikmeli diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir. Gecikmeli diferensiyel denklemler, literatüre yirminci yüzyılın ikinci yarısı girmeye başlamıştır. Hayes (1950) ile başlayan bu süreçte Belman - Cooke (1963), Hale (1969), El'sgol'ts - Norkin (1971), Yorke (1970), Hale - Lunel (1977), Mori (1981), Grossman - Cooke (1990), Cooke - Györi (1990), Freedman - Kuang (1991), Gopalsamy (1992), Kuang (1993), Hara - Miyazaki - Morii (1996), Sakata (1998), Cahlon- Schmidt (2000), Kipnis (2003), Ruan – Wei (2003), Matsunaga (2007-2008), Smith (2010), Cermak (2012), Nakajima (2014) gibi birçok matematikçi bu denklemleri ve bu denklemlerin asimtotik kararlılık durumlarını incelemişlerdir.

t zamanı ve $f(t)$'de zamana bağlı olarak değişen herhangi bir fiziksel olayın fonksiyonunu göstermek üzere, böyle bir fiziksel olayın sürekli zaman dinamiğini incelerken, $f'(t)$, $f''(t)$ gibi türevler zamanın sonsuz küçük değişimi çerçevesinde değerlendirilir. Ancak zamandaki değişim yeterince küçük değilse, $f(t)$ fonksiyonunun zamana bağlı değişimlerini diferensiyel denklemler ile tanımlamak doğru olmayacaktır. Bunun yerine, bilinmeyen fonksiyonun farklarını içeren ve fark denklemleri olarak ifade edilen başka bir model kullanılır.

Diferensiyel denklemlerde bağımlı değişken reel sayılar üzerinde tanımlı iken fark denklemlerinde bağımlı değişken tamsayılar üzerinde tanımlıdır. Bu tanımlama yapılırken denklemi oluşturan olayın geçmiş durumu göz önünde bulunduruluyor ise yani bilinmeyen fonksiyon ve onun sonlu farkları bir gecikme parametresine bağlı olarak ifade ediliyorsa, gecikmeli fark denklemleri olarak adlandırılan denklemler elde edilir. Örneğin, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x(n+1) - ax(n) + bx(n-k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}$$
$$x(n+1) - x(n) = x(n-2) + x(n-1)$$
$$x(n+1) - x(n) = x(n-\sigma(n)), \quad \sigma(n) < n$$
$$x(n+1) = x(n) + x^2\left(n - \left\|\frac{n}{2}\right\|\right)$$

şeklindeki denklemler gecikmeli fark denklemleridir.

Doğadaki bir olayı bir diferensiyel denklem ya da fark denklemi ile ifade ederken karşılaşılan denklemlerin birçoğu lineer değildir ve bu denklemleri çözmek için var olan metotların birçoğu yeterli gelmemektedir. Bu yüzden uzun uğraşlar verip bunları çözmeden bu denklemlerin çözümlerinin davranışları hakkında konuşabilmek (yani kalitatif inceleme yapmak) büyük önem taşır. Kararlılık teorisi de tam burada devreye girmektedir. Zira oluşturulan bir modellemenin doğruluğu ancak onun kararlılık durumuna bağlı olarak anlaşılabilmektedir.

Bu tez çalışmasında asimtotik kararlılık şartlarını incelediğimiz denklem sınıflarının temeli Levin-May (1976) tarafından ele alınmış olan, $k \geq 1$ olmak üzere

$$N_{t+1} = N_t F\left(N_{t-k}\right) \qquad n = 0,1,2,...$$

lineer olmayan nüfus denklemidir. Bu denklemin lineerleştirilmesi sonucu

$$x_{n+1} - x_n + bx_{n-k} = 0 \qquad n = 0,1,2,... \qquad (1.1.1)$$

gecikmeli fark denklemi elde edilir. Burada b keyfi bir reel sayı ve k keyfi bir pozitif tamsayıdır. Levin ve May (1976), (1.1.1) fark denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şartın

$$0 < b < 2\cos\frac{k\pi}{2k+1}$$

olduğunu ortaya koymuşlardır.

Clark (1976)'ın çalışmasında

$$x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0 \qquad n = 0,1,2,... \qquad (1.1.2)$$

gecikmeli fark denklemi incelenmiş ve bu denklemin sıfır çözümünün asimtotik kararlılığı için

$$|a| + |b| < 1$$

ifadesi yeter şart olarak elde edilmiştir.

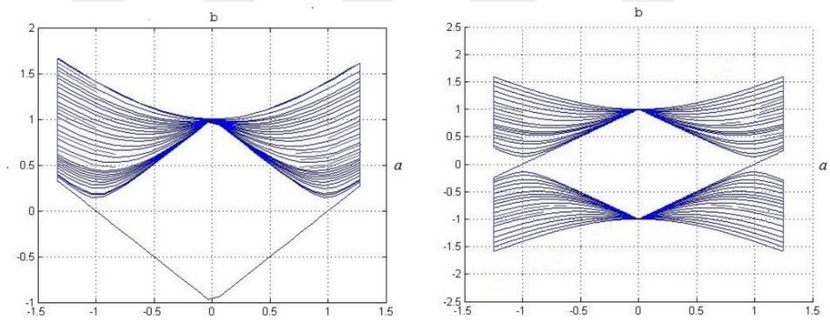
Kuruklis (1994)'in çalışmasında Clark (1976)'ın (1.1.2) denklemi için elde ettiği sonuçtan daha kesin sonuç elde edilmiştir.

Kuruklis (1994), (1.1.2) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şartın $|a| < \frac{k+1}{k}$

ve

$$\begin{cases} |a|-1 < b < \left(a^2+1-2|a|\cos\phi\right)^{1/2} & , k \ tek \ ise \\ |b-a| < 1 \ ve \ |b| < \left(a^2+1-2|a|\cos\phi\right)^{1/2} & , k \ çift \ ise \end{cases}$$

olması gerektiğini göstermiştir. Burada a sıfırdan farklı bir reel sayı, b keyfi bir reel sayı, k pozitif bir tamsayı ve ϕ'de, $\frac{\sin k\theta}{\sin(k+1)\theta} = \frac{1}{|a|}$ denkleminin $\left(0, \frac{\pi}{k+1}\right)$ aralığındaki çözümüdür.



Şekil 1.1. $k=3$ ve $k=4$ alındığında Kuruklis'in sonuçları için kararlılık bölgeleri

Matsunaga ve Hara (1999), (1.1.2) denklemini ele alarak onu fark denklem sistemine uyarlamışlardır. A, 2×2 tipinde bir sabit matris, k'da negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$x_{n+1} - x_n + Ax_{n-k} = 0 \qquad n = 0,1,...$$

denklem sistemini incelemişler ve bu denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlığı için gerek ve yeter şartları elde etmişlerdir. B, 2×2 tipinde bir sabit matris, k negatif olmayan bir tamsayı ve a bir reel sayı olmak üzere, Matsunaga (2004)'nın çalışmasında, Matsunaga ve Hara (1999) tarafından sisteme uyarlanan yapıyı genelleştirilerek

$$x_{n+1} - ax_n + Bx_{n-k} = 0 \qquad n = 0,1,... \tag{1.1.3}$$

gecikmeli fark denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlılığı incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir;

$S(\omega) = \dfrac{\sin(k\omega - |\theta|)}{\sin((k+1)\omega - |\theta|)}$ ve ω_l ler $S(\omega) = \dfrac{1}{|a|}$ 'nın çözümleri olmak üzere

$$C_l(a) = \left(a^2 + 1 - 2|a\cos\omega_l|\right)^{1/2}, \ 1 \le l \le 4$$

olsun. Ayrıca ω^*,

$$k\sin\omega - \sin(k\omega - |\theta|)\cos((k+1)\omega - |\theta|) = 0$$

denkleminin $\left(\dfrac{2|\theta| - \pi}{2k+1}, 0\right)$ aralığındaki çözümü olmak üzere

$$\frac{|\theta| - \pi}{k+1} < \omega_1 \le \frac{2|\theta| - \pi}{2k+1} < \omega_2 < \omega^* < \omega_3 < 0 < \omega_4 < \frac{|\theta|}{k+1}$$

eşitsizliği sağlansın.

Teorem 1.1.

$a \ne 0$, $0 < |\theta| < \pi/2$ ve k tek olsun. O zaman (1.1.3)'ün sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır.

i) $|a| \le 1$ ve $0 < b < C_1(a)$.

ii) $1<|a|<1/S(\omega^*)$ ve $C_3(a)<b<C_2(a)$.

iii) $|a|<1$ ve $-C_4(a)<b\leq 0$ (Matsunaga, 2004).

Teorem 1.2.

$a\neq 0$, $0<|\theta|<\pi/2$ ve k çift olsun. O zaman (1.1.3)'ün sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır.

i) $ab>0$, $|a|\leq 1$ ve $|b|<C_1(a)$.

ii) $ab>0$ $1<|a|<1/S(\omega^*)$ ve $C_3(a)<|b|<C_2(a)$.

iii) $ab\leq 0$ ve $|b|<C_4(a)$ (Matsunaga, 2004).

Bununla birlikte, Kipnis ve Malygina (2011) de, A,B değişmeli matrisler ve A singüler olmayan bir matris olmak üzere bir $k\in\mathbb{Z}^+$ gecikmesi ile

$$x(n)=Ax(n-1)+Bx(n-k) \qquad n=0,1,...$$

denklem sistemi, Cermak ve Jansky (2014) de , $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ve $k\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$x(n+1)=\alpha x(n)+\beta x(n-k) \qquad n=0,1,...$$

denklemi ele alınmış ve bu denklemler için asimtotik kararlılık şartları ortaya koymuşlardır.

Nagabuchi (2001), Kipnis ve Nigmatullin (2002), Ivanov, Kipnis ve Malygina (2011) ve Malygina ve Chudinov (2016) da sabit katsayılı lineer homojen fark denklemlerinin birden fazla gecikmeye sahip olduğu durumda asimtotik kararlılık şartları incelenmiştir.

Burada incelenen fark denklemlerinin sürekli fonksiyonlardaki karşılığı olan denklemlere ilk olarak vereceğimiz örnek Stephan (1989)'ın çalışmasıdır. $a > 0$, $\tau_1, \tau_2 > 0$, $\tau_1 + \tau_2 > 0$ olmak üzere

$$x'(t) = -a\left(x(t-\tau_1) + x(t-\tau_2)\right)$$

gecikmeli diferensiyel denklemini ele alarak incelemiş ve bu denklemin asimtotik kararlılık şartları

$$2a(\tau_1 + \tau_2)\cos\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\frac{\pi}{2}\right) < \pi$$

şeklindedir (Stephan, 1989). Hara ve Sugie (1996) çalışmasında $\rho \in \mathbb{R}$ ve $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ için $R(\theta)$, 2×2 tipinde bir matris olmak üzere

$$x'(t) = -\rho R(\theta) x(t-\tau)$$

gecikmeli diferensiyel denkleminin asimtotik kararlılığı için gerek ve yeter şartın

$$0 < \rho\tau < \frac{\pi}{2} - |\theta|$$

olması gerektiği elde edilmiştir.

Hara, Miyazaki ve Morii (1996), Ruan ve Wei (2003), Berezanski ve Braverman (2011), Cermak ve Jánsky (2016), Nakajima (2014) ve Tomasek (2015) gecikmeli diferensiyel denklemler için kararlılık şartlarını elde etmişlerdir. Bununla birlikte, Matsunaga (2008, 2009) $a, b \in \mathbb{R}$, A ve B 2×2 tipinde matrisler olmak üzere, 2008'de

$$x'(t) = -ax(t) - Bx(t-\tau) \quad , t \geq 0$$

gecikmeli diferensiyel denklem sistemini, 2009 yılında da

$$x'(t) = -Ax(t) - bx(t-\tau) \quad , t \geq 0$$

gecikmeli diferensiyel denklem sistemini ele almış, bu sistemler için asimtotik kararlılık şartlarını vermiştir.

Son yüzyıl içinde bu ve benzeri çalışmalar gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığı için oldukça yaygın olarak ele alınmış ve son zamanlarda da gecikmeli fark denklemlerine uyarlanarak bu denklemlerin çözümlerinin kararlılığı için sonuçlar ortaya konulmuştur.

Yukarıda verilen çalışmalar doğrultusunda, bu tez çalışması, ele alınan diferensiyel ve fark denklem sistemlerinin belirli sınıflarının çözümlerinin asimtotik kararlılık şartlarının kalitatif yöntemler kullanılarak belirlenmesi üzerine inşa edilmiştir.

Buna göre 3. bölümün ilk üç kesiminde gecikmeli lineer homojen fark denklem sistemleri ve değişken gecikmeli lineer olmayan fark denklem sistemi, son kesiminde ise lineer diferensiyel denklem sistemi için asimtotik kararlılık şartları alt bölümler halinde ele alınmıştır.

3.1. kesiminde (1.1.3) sabit katsayılı gecikmeli fark denklem sisteminde yer alan matrisin elemanlarının kompleks ve burada yer alan değişkenlerin değişim aralığının farklı seçilmesi durumunda, bu denklemin asimtotik kararlılık bölgelerinin nasıl değiştiği bulunmuş, 3.2. kesiminde ise bu denkleme yeni bir gecikme parametresi daha eklenerek, sabit katsayılı iki gecikmeli lineer homojen fark denklem sistemi için aynı problem incelenmiştir. Bu problemler incelenirken ele alınan sabit katsayılı gecikmeli fark denklemlerinin asimtotik kararlılığı için kök analizi yöntemi kullanılmıştır.

3.3. kesiminde değişken katsayılı ve değişken gecikmeli lineer olmayan fark denklem sistemi için asimtotik kararlılık şartları verilmiştir.

3.4. kesiminde, 3.2. kesiminde incelenen iki gecikmeli lineer fark denklem sisteminin sürekli fonksiyonlardaki karşılığı olan sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemler sisteminin asimtotik kararlılığı, önce k ve l gecikme parametrelerine göre, sonra karakteristik denklemin q katsayısına göre incelenmiştir.

Son olarak 4. bölümde bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar bu alanda daha önceden literatürde yer alan sonuçlar ile bir tablo içerisinde karşılaştırılarak verilmiş ve literatürde hangi boşluğu doldurduğu tablo üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca tabloda bu alanda ele alınabilecek bazı açık problemler önerilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde yararlanılan temel kavram ve teoremler verilmektedir.

Tanım 2.1

Tanım cümlesinde bulunan her x sayısı için $x+h$ 'da tanım cümlesinde bulunacak şekilde alınan h sabiti ile oluşturulan tanım cümlesi üzerinde tanımlı bir y fonksiyonu verilmiş olsun. y nin ileri farkı Δy ile gösterilir ve

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$$

biçiminde tanımlanır (Goldberg, 1958; Akın ve Bulgak, 1998).

Tanım 2.2

Birim operatör I ile gösterilir ve uygulandığı herhangi bir y fonksiyonundan y ile özdeş yeni bir Iy fonksiyonu üretir. y 'nin tanım cümlesindeki herhangi bir x elemanı için

$$Iy(x) = y(x)$$

olur. Δ^0 sembolü birim operatörü ifade eder, yani $\Delta^0 y = Iy$ 'dir (Goldberg, 1958; Akın ve Bulgak, 1998).

Tanım 2.3

$n \in \mathbb{N}$ $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere Δ_a genelleştirilmiş fark operatörü

$$\Delta_a y(x) = y(x+h) - ay(x)$$

şeklinde tanımlanır (Goldberg, 1958).

Tanım 2.4

Bir S cümlesi üzerinde tanımlı y fonksiyonunu ve her biri S üzerinde tanımlı y 'nin birinci ya da daha yüksek farklarını kapsayan denkleme S cümlesi üzerinde bir *fark denklemi* denir. Yani, fark denklemi S cümlesi üzerinde bir fonksiyon ve onun farklarını kapsayan bir bağıntıdır (Goldberg, 1958; Akın ve Bulgak, 1998).

Tanım 2.5

$a(n)$ reel değerli bir fonksiyon ve $a(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n+1) = a(n)x(n),\ x(n_0) = x_0,\ n \geq n_0 \geq 0 \tag{2.2.1}$$

ifadesine *1.mertebeden homojen lineer fark denklemi* denir. (2.2.1) denkleminin çözümü;

$$x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 \tag{2.2.2}$$

şeklindedir.

$a(n)$ ve $g(n)$ reel değerli fonksiyonlar ve $a(n) \neq 0$ olmak üzere

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n),\ y(n_0) = y_0,\ n \geq n_0 \geq 0 \tag{2.2.3}$$

ifadesine *1.mertebeden homojen olmayan lineer fark denklemi* denir. (2.2.3) homojen olmayan denklemin çözümü;

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) \tag{2.2.4}$$

şeklindedir.

(2.2.3) denkleminde $a(n)=a$ ise bu denklem özel olarak

$$y(n+1)=ay(n)+g(n) \quad y(0)=y_0 \tag{2.2.5}$$

biçimine dönüşür. (2.2.4) formülü kullanılarak denklemin çözümü;

$$y(n)=a^n y_0+\sum_{k=n_0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k) \tag{2.2.6}$$

biçiminde elde edilir.

(2.2.5) denkleminde $g(n)=b$ ise (2.2.5) denklemi

$$y(n+1)=ay(n)+b,\ y(0)=y_0 \tag{2.2.7}$$

biçimine dönüşür. (2.2.6) formülü kullanılarak denklemin çözümü;

$$y(n)=\begin{cases} a^n y_0+b\left[\dfrac{a^n-1}{a-1}\right] & ,a\neq 1 \\ y_0+bn & ,a=1 \end{cases} \tag{2.2.8}$$

şeklinde bulunur (Elaydi, 2005).

Tanım 2.6

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $n\geq n_0$ için

$$x(n+1)=f\left(x(n)\right) \tag{2.2.9}$$

fark denklemine *1.mertebeden lineer olmayan fark denklemi* denir (Elaydi, 2005).

Tanım 2.7

(2.2.9)'daki f fonksiyonu iki değişkenli g fonksiyonu ile değiştirilirse, $g:\mathbb{Z}^{+}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere

$$x(n+1)=g(n,x(n)) \tag{2.2.10}$$

denklemine *otonom olmayan* ya da *zaman değişkenli fark denklemi*, (2.2.9) denklemine ise *otonom* ya da *zaman değişkensiz fark denklemi* denir (Elaydi, 2005).

Tanım 2.8

Eğer x^*, f'in bir sabit noktası ise yani $f(x^*)=x^*$ ise x^* a (2.2.9) denkleminin f'in tanım bölgesi içinde bir *denge noktası* adı verilir (Elaydi, 2005).

Tanım 2.9

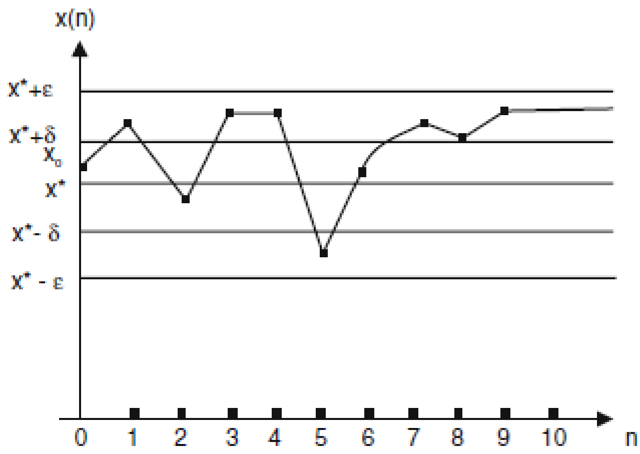
x^*, (2.2.9) denkleminin denge noktası olsun.

a) Verilen her bir $\varepsilon>0$ için $|x(0)-x^*|<\delta$ iken $|x(n)-x^*|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa, x^* denge noktası *kararlıdır* denir (Şekil 2.1).

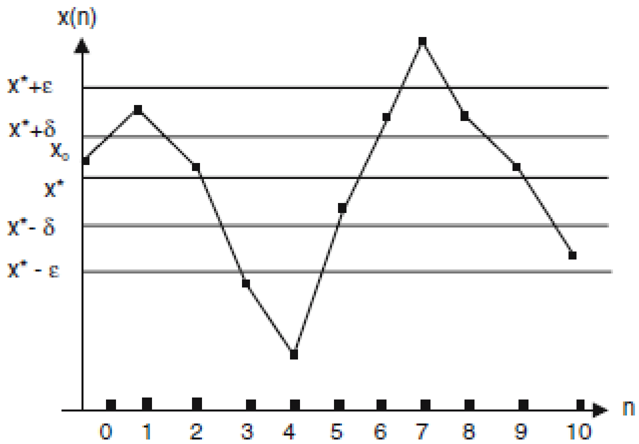
b) Eğer $|x(0)-x^*|<\eta$ iken $\lim_{n\to\infty}x(n)=x^*$ olacak şekilde bir $\eta>0$ sayısı var ise x^* noktası *çekim noktası* olarak adlandırılır

c) Eğer x^* kararlı ve bir çekim noktası ise x^* denge noktasına *asimtotik kararlıdır* denir (Şekil 2.3).

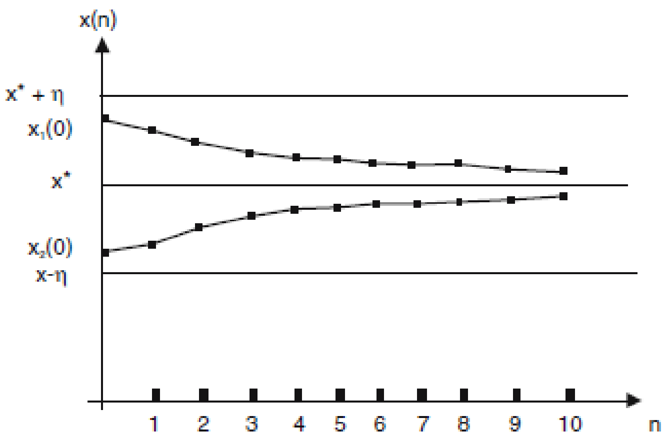
d) Eğer x^* kararlı değilse, *kararsız* olarak adlandırılır (Şekil 2.2) (Elaydi, 2005).



Şekil 2.1. Kararlı x^* noktası



Şekil 2.2. Kararsız x^* noktası



Şekil 2.3. Asimtotik Kararlı x^* noktası

Tanım 2.10

$n \geq n_0$ için tanımlı olan $a_0(n), a_1(n), ..., a_k(n)$ katsayıları ve $g(n)$ reel değerli fonksiyonu verilsin. $a_0(n) \neq 0$ olmak üzere

$$a_0(n)x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = g(n) \qquad (2.2.11)$$

biçimindeki denkleme k *.'ıncı mertebeden lineer fark denklemi* denir. (2.11) denkleminde $g(n) \equiv 0$ olursa bu denklem k *.'ıncı mertebeden homojen fark denklemi* adını alır, aksi halde k *.'ıncı mertebeden homojen olmayan fark denklemi* adını alır. Ayrıca $i = 0,1,...,k$ için $a_i(n)$ katsayıları sabit ise (2.2.11) denklemine k *.'ıncı mertebeden sabit katsayılı fark denklemi*, aksi halde k *.'ıncı mertebeden değişken katsayılı fark denklemi* denir (Elaydi, 2005).

Tanım 2.11

(2.2.11) biçiminde yazılan bir fark denkleminde bir $S \neq \emptyset$ cümlesindeki her bir n değeri için $a_0(n)$ ve $a_k(n)$'nın her ikisi birden sıfırdan farklı oluyorsa bu fark denklemi S cümlesi üzerinde k *. mertebedendir* denir (Goldberg, 1958).

Tanım 2.12

Bir fark denklemini özdeş olarak sağlayan $\varphi(n)$ fonksiyonuna *fark denkleminin bir çözümü* denir. $\varphi(n) = 0$ fark denkleminin bir çözümü ise bu çözüme aşikâr *(trivial) çözüm,* $\varphi(n) \neq 0$ fark denkleminin bir çözümü ise bu çözüme *aşikâr olmayan çözüm* adı verilir (Goldberg, 1958).

Teorem 2.1

$n \geq n_0$ için $a_i(n)$ ve $g(n)$ reel değerli fonksiyonlar, $a_k(n) \neq 0$ ve $i = 1,2,...,k-1$ için $b_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x(n_0)=b_0,\ x(n_0+1)=b_1,...,x(n_0+k-1)=b_{k-1} \tag{2.2.12}$$

başlangıç değerleri ile verilen

$$x(n+k)+a_1(n)x(n+k-1)+...+a_k(n)x(n)=g(n) \tag{2.2.13}$$

fark denkleminin tek bir çözümü vardır (Goldberg, 1958).

Tanım 2.13

$I\subset\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}^+$ ve $F:I^{k+1}\to I$ bir fonksiyon olmak üzere

$$x(n+1)=F\left(x(n),x(n-1),...,x(n-k)\right) \tag{2.2.14}$$

fark denkleminde $\forall n\geq -k$ için $x(n)=x^*$ şartını sağlayan $x^*\in\mathbb{R}$ noktasına (2.2.14) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 2.14

x^*, (2.2.14) denkleminin denge noktası olsun.

a) Herhangi bir $\varepsilon>0$ pozitif sayısı verilsin. (2.2.14) denkleminin $\{x(n)\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümleri için

$\left|x(-k)-x^*\right|+\left|x(-k+1)-x^*\right|+...+\left|x(0)-x^*\right|<\delta$ iken $\left|x(n)-x^*\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa, x^* denge noktasına *kararlıdır* denir.

b) Eğer x^* kararlı ve (2.2.14) denkleminin $\{x(n)\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümleri için $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=x^*$ ise x^* denge noktasına *asimtotik kararlıdır* denir

c) Eğer (2.2.14) denkleminin $\{x(n)\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümleri için x^* kararlı değilse, *kararsız* olarak adlandırılır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 2.15

$A(n)$ singüler olmayan $k \times k$ tipinde bir matris fonksiyonu olmak üzere

$$x(n+1) = A(n)x(n)$$

sistemine *homojen lineer fark denklem sistemi* denir. Benzer şekilde $g(n) \in \mathbb{R}^k$ olmak üzere

$$x(n+1) = A(n)x(n) + g(n)$$

sistemine *homojen olmayan lineer fark denklem sistemi* denir (Elaydi, 2005).

Tanım 2.16

Bir bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinden birini ya da daha çoğunu birbirine bağlayan bir denkleme *diferensiyel denklem* denir (Akın, 2011).

Tanım 2.17

Bağımsız değişkeni x ve bilinmeyen fonksiyonu ya da bağımlı değişkeni $y = y(x)$ olan $n.$ mertebeden en genel diferensiyel denklem $D \subset \mathbb{R}$ ve $F : D \times (\mathbb{R}^m)^{n+1} \to \mathbb{R}^m$ olmak üzere kapalı formda

$$F(x, y, y', y'', ... y^{(n)}) = 0\,,$$

$F : D \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}^m$ olmak üzere açık formda

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', ... y^{(n-1)})$$

şeklinde gösterilir (Akın, 2011; Kandemir, 2015).

Tanım 2.18

$a, b, c, d, \omega \in \mathbb{R}$, $\phi(t) \in C^0[0,\omega]$ başlangıç fonksiyonu ve $f \in C^1(0,\infty)$ olmak üzere

$$ax'(t) + bx'(t-\omega) + cx(t) + dx(t-\omega) = f(t) \tag{2.2.15}$$

$$x(t) = \phi(t), \; 0 \le t \le \omega$$

birinci mertebeden genel diferensiyel denklem şeklini ele alalım. Eğer $a \neq 0$ ve $b = 0$ ise (2.2.15) denklemine *gecikmeli diferensiyel denklem* $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ ise (2.15) denklemine *neutral diferensiyel denklem,* $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise (2.15) denklemine *ileri diferensiyel denklem* denir (Bellman ve Cooke, 1968).

Şimdi gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık-tekliği ile ilgili bazı önemli teoremleri verelim;

Teorem 2.2 (Varlık-Teklik Teoremleri)

$a, b, c, \omega \in \mathbb{R}$, $\phi(t) \in C^0[0,\omega]$ başlangıç fonksiyonu ve $f \in C^1(0,\infty)$ olmak üzere

$$ax'(t) + bx(t) + cx(t-\omega) = f(t) \tag{2.2.16}$$

$$x(t) = \phi(t), \; 0 \le t \le \omega \tag{2.2.17}$$

(2.2.17) başlangıç şartı ile (2.2.16) denklemi verilsin. Bu durumda $t \ge 0$ için (2.2.16) ve $t > \omega$ için (2.2.17) denklemlerini sağlayan tek bir $x(t)$ çözüm fonksiyonu vardır (Bellman ve Cooke, 1968).

Teorem 2.3

$\tau,\varphi \in \mathbb{R}$, $\Phi:[\varphi-\tau,\varphi]\to\mathbb{R}$ sürekli başlangıç fonksiyonu ve $f\left(t,x(t),x(t-\tau)\right)$, $f_x\left(t,x(t),x(t-\tau)\right)$, $\mathbb{R}^3$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$x'(t)=f\left(t,x(t),x(t-\tau)\right)$$

$$x(t)=\phi(t),\ \varphi-\tau\le t\le\varphi$$

başlangıç değer probleminin $\sigma>\varphi$ için $[\varphi-\tau,\sigma]$ aralığında tek bir çözümü vardır (Smith, 2010).

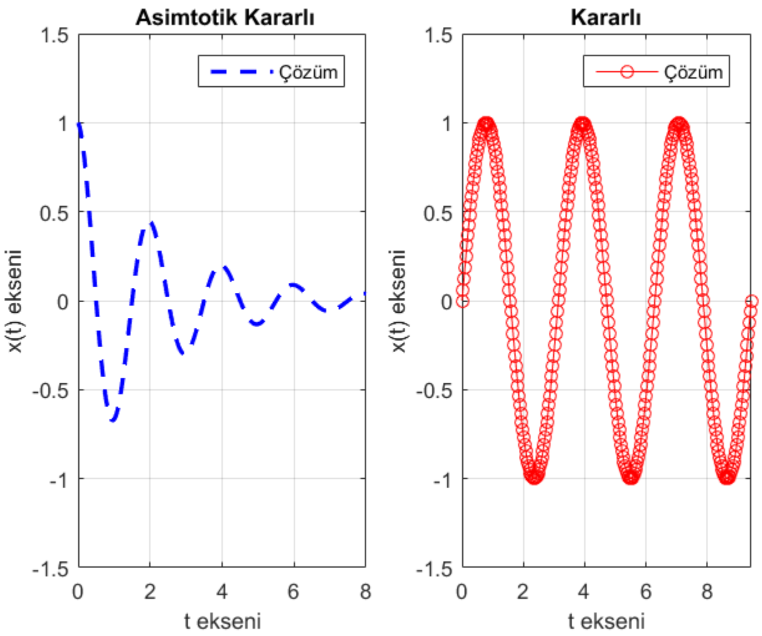
Tanım 2.19

$f(0)=0$ olduğunu kabul edelim.

(a) Eğer (2.2.16) denkleminin sıfır çözümüne, herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı ve her $t\ge t_0$ durumunda $\|x(t_0)\|<\delta$ iken $\|x(t)\|<\varepsilon$ olacak şekilde bir δ sayısı varsa, *kararlıdır* denir (Şekil 2.4.).

(b) (2.2.16) denkleminin sıfır çözümü kararlı ve ayrıca $t\to\infty$ iken $x(t)\to 0$ oluyor ise *asimtotik kararlıdır* denir (Şekil 2.4.).

(c) (2.2.16) denkleminin sıfır çözümü kararlı değilse *kararsızdır* denir (Remsing, 2006; Akın ve Bulgak, 1998).



Şekil 2.4. Diferensiyel denklemler için kararlılık ve asimtotik kararlılık durumları

Tanım 2.20

$x \in \mathbb{R}^k$ ve $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2.2.18}$$

sistemine *birinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen diferensiyel denklem sistemi* denir (Akın, 2011).

Uyarı 2.1

Burada $x(t)$ çözüm vektörlerinin $x(t) = ve^{\lambda t} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ şeklinde seçilmesi uygundur. $\lambda, v_1, v_2, \ldots, v_k$ değişkenleri uygun skaler sabitlerdir. Eğer $i = 1, 2, \ldots, k$ için (2.2.18)'de

$x_i = v_i e^{\lambda t}$, $x_i' = \lambda v_i e^{\lambda t}$ alırsak $e^{\lambda t}$ çarpanı sadeleşecektir. Bu ise bize λ'nın ve $x(t) = ve^{\lambda t}$ denkleminde verilen $v_1, v_2, ..., v_k$ katsayılarının uygun değerleri için çözebileceğimiz k tane lineer denklem verir. Böylece $x(t) = ve^{\lambda t}$, gerçekten (2.2.18) sisteminin bir çözümüdür ve bu çözüm aşikar olmayan çözümdür. Bu durumu incelemek için (2.2.18) sisteminde $x(t) = ve^{\lambda t}$ çözümünü ve $x' = \lambda ve^{\lambda t}$ türevini yerine yazarsak

$$\lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t}$$

elde ederiz. Sıfırdan farklı $e^{\lambda t}$ çarpanı ile sadeleştirirsek

$$Av = \lambda v \qquad (2.2.19)$$

olacaktır. v sıfırdan farklı bir vektör, λ ise bir sabit olmak üzere (2.2.19) eşitliğinin gerçeklenmesi, $x(t) = ve^{\lambda t}$ çözümünün, (2.2.18)'in aşikar olmayan bir çözümü olduğunu gösterir. Yani Av matris çarpımı v vektörünün skaler bir katıdır. Şimdi yeni soru λ ve v'yi nasıl bulacağımızdır. Bu soruya cevap vermek için (2.2.19) eşitliğini

$$\left(A - \lambda I_k\right)v = 0 \qquad (2.2.20)$$

şeklinde yazalım. (2.2.20) sistemi, verilen λ için $v_1, v_2, ..., v_k$'ler bilinmeyenler olmak üzere k tane lineer homojen denklemden oluşan bir sistemdir. Bu sistemin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart katsayılar matrisinin determinantının özdeş olarak sıfır olmasıdır. Yani,

$$\left|A - \lambda I_k\right| = \det\left(A - \lambda I_k\right) = 0 \qquad (2.2.21)$$

olmasıdır (Anton ve Rorres, 2010).

$\frac{dx}{dt} = Ax$ sistemini çözmek için özdeğer yönteminin kullanılmasının en basit formülasyonu (2.2.21) denklemini sağlayacak şekilde λ'yı bulmak ve λ'nın bu değeri için (2.2.20) denklemini çözerek $v_1, v_2, ..., v_k$'ları elde etmektir. Bu durumda $v_i \neq 0,\ i = 1, ..., k$ için $x(t) = ve^{\lambda t}$ matrisi çözüm olacaktır (Akın, 2011).

Tanım 2.21

A, $k \times k$ tipinde bir kare matris olmak üzere. λ parametresinin k. dereceden polinomu olan ve

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I_k| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} - \lambda \end{vmatrix}$$

şeklinde ifade edilen $\varphi(\lambda)$ polinomuna A matrisinin *karakteristik polinomu* denir (Akın, 2011).

Tanım 2.22

A, $k \times k$ tipinde bir kare matris olmak üzere, A matrisinin karakteristik polinomunun sıfıra eşitlenmesi ile elde edilen

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I_k| = 0$$

denklemine A matrisinin *karakteristik denklemi* denir ve bu denklemin kökleri olan λ'lara A'nın özdeğerleri denir. λ özdeğerine karşılık gelen özvektör $Av = \lambda v$ veya

$$\left(A - \lambda I_k\right)\upsilon = 0$$

olacak biçimde sıfırdan farklı bir v vektörüdür (Akın, 2011; Akın ve Bulgak, 1998).

Tanım 2.23

A ve B, $k\times k$ tipinde iki kare matris olmak üzere. $B=P^{-1}AP$ olacak şekilde singüler olmayan bir P matrisi varsa A ve B matrislerine *benzer matrisler* denir. Eğer A kare matrisi $k\times k$ tipinde bir $D=diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)$ köşegen matrisine benzer ise o zaman A matrsisine *köşegenleştirilebilir matris* denir (Elaydi, 2005).

Teorem 2.4

Eğer $k\times k$ tipinde iki matris benzer matris ise, karakteristik denklemleri ve buna bağlı olarak da özdeğerleri birbirine eşittir (Elaydi, 2005).

Teorem 2.5 (Jordan Kanonik Formu)

Her $k\times k$ tipinde verilen A matrisi

$$J=diag(J_1,J_2,...,J_k), \qquad 1\le r\le k$$

şeklinde verilen bir Jordan formuna benzerdir. Burada her bir J_i

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & 1 \\ 0 & 0 & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

şeklinde ve $s_i\times s_i$ tipinde bir matris olup $\sum_{i=1}^{r} s_i=k$ dır (Elaydi, 2005; Akın ve Bulgak, 1998).

2.1. Gecikmeli Lineer Homojen Diferensiyel Denklemin Kararlılığı

Adi diferensiyel denklemler için bir denge noktasının yerel kararlılığı polinom formundaki karakteristik denklemin köklerinin konumuna bağlıdır. Bu denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart diferensiyel denkleme ait karakteristik denklemin bütün köklerinin negatif reel kısımlara sahip olmasıdır. Routh-Hurwitz kriteri keyfi seçilen polinomların kararlılığı için kesin sonuçlar veren ve iyi bilinen bir kriterdir.

Gecikmeli diferensiyel denklemlerde karakteristik denklemler yarı (quasi)-polinom ya da üstel polinomlardan oluştuğu için denklemin sonsuz sayıda kökü vardır. Ayrıca Routh-Hurwitz kriteri burada uygulanamaz. Bu metodun eksikliğini giderebilmek için bir denge noktasının yerel kararlılığı yeni geliştirilen yöntemlerle incelenmiştir (Forde, 2005). Biz burada bu yöntemlerden biri olan D-Alt Bölüm yöntemini kullanacağız.

2.2. D-Alt Bölüm (D-Subdivision) Yöntemi

Gecikmeli diferensiyel denklemlerin kararlılık özellikleri genellikle kararlı ve kararsız bölgeleri gösteren kararlılık grafikleri ile ya da buna alternatif olarak sistem parametrelerinin uzayında "kararsızlık derecesi" olarak adlandırılan kararsız köklerin sayısı ile belirlenir. Gecikmeli diferensiyel denklemlerin kararlılık grafikleri "D-Alt Bölüm yöntemi" ile oluşturulabilir. Bu yöntemle, D-eğrileri(Kök geçiş eğrileri ya da geçiş eğrileri) olarak adlandırılan eğriler yoluyla, kararsız olan köklerin sayısının değiştiği eğriler bulunur.

$$\mathrm{Re}(\omega)=0, \qquad S(\omega)=0,$$

$f(\lambda)$, karakteristik fonksiyon ve ω'da eğrilerin parametresi olmak üzere

$$\mathrm{Re}(\omega):=\mathrm{Re}\, f(i\omega), \qquad S(\omega):=\mathrm{Im}\, f(i\omega),$$

dir.

Sistem parametrelerindeki değişikliklerle ilgili olarak köklerin sürekliliğinden dolayı, D-eğrileri parametre uzayını bölgelere ayırır ve bu bölgelerde kararsız köklerin sayısı sabittir. Bu bölgeler için bu köklerin sayılarının hesaplanması önemlidir. D-eğrileri boyunca, " kök-geçiş yönü " ya da "kök-eğilimi " olarak adlandırılan yöntemle bu köklerin sayıları hesaplanır. Bu yöntemde, D-eğrileri boyunca, sistem parametrelerinden birine göre kökün reel kısmının kısmi türevinin işareti incelenir. Eğer kararsız köklerin sayısı bir bölgede en az bir nokta için biliniyorsa, o zaman D-eğrileri boyunca "kök-geçiş yönü" göz önünde bulundurularak diğer bütün bölgeler için kararsız köklerin sayısı hesaplanabilir. Kararlılık sınırları sıfır- kararsız çözüm ile sınırlı bölgelerdeki D-eğrilerinden oluşur (Insperger ve Stepan, 2011).

Tanım 2.24

$F:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer $\|x\|,\|y\| \le K$ olacak şekilde pozitif bir K sabiti var iken

$$\|F(x)-F(y)\| \le L\|x-y\|$$

olacak şekilde pozitif bir L sabiti varsa F, x'e göre yerel olarak *Lipschitz şartını* sağlar denir. L sabitine *Lipschitz sabiti* denir (Huong ve Mau, 2013).

Tanım 2.25

X, bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}_+,\; x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde bir norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir. (i)-(iii) özelliklerine norm aksiyomları denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.26 (Matris Normu)

Vektör normuna benzer biçimde bir A matrisinin normu, aşağıdaki özellikleri sağlayan A'nın elemanlarının gerçel değerli bir $\|A\|$ fonksiyonudur.

(i) $A \neq 0$ ise $\|A\| \geq 0$ dır.

(ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ herhangi bir skaler olmak üzere $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ .dır.

(iii) Her $A, B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ için $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ dir.

(iv) Her $A, B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ için $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ dir.

Buradan bir matrisin normu; bir matris değişkenli, bir pozitif skaler değerli fonksiyondur (Kart, 1985).

Tanım 2.27

Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına *tam normlu uzay* ya da *Banach* uzayı adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.28

X Banach uzayı ve $A: X \to X$ bir operatör olmak üzere

$$x = Ax \tag{2.2.22}$$

denklemi verilsin. Eğer $x^* = Ax^*$ ise $x^* \in X$ vektörüne A operatörünün *sabit noktası* denir. $A: X \to X$ operatörünün varlığı aynı zamanda (2.2.22) denkleminin bir çözümünün varlığı demektir

$x_0 \in X$ başlangıç vektörü ile terimleri

$$x(n) = Ax(n-1), \; n = 1,2,... \tag{2.2.23}$$

şeklinde olan $x(n)$ tahmini çözümler dizisini ele alalım. Eğer $x^* \in X$ vektörü $x(n)$ dizisinin bir limiti ve A operatörü x^* noktasında sürekli ise (2.2.23)'e göre x^* vektörü (2.2.22) denkleminin bir çözümüdür. Dolayısıyla $x(n)$ dizisinin yakınsaklık şartları aynı zamanda (2.2.22) denkleminin çözümünün varlık şartları olur (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.29

X Banach uzayının D cümlesinde tanımlı $A: D \to X$ operatörü verilmiş olsun. Eğer $\forall x, y \in D$ için

$$\|Ax - Ay\| \le \alpha \|x - y\|$$

olacak şekilde $0 \le \alpha < 1$ sayısı varsa $A: D \to X$ operatörüne *daralma dönüşümü (operatörü)* denir. Burada ki α sayısına *daralma katsayısı* denir (Musayev ve Alp, 2000).

Teorem 2.6 (Daralma Dönüşüm Prensibi)

D cümlesi kapalı olsun ve $A: X \to X$ daralma operatörü D'yi D'ye çevirir: $A(D) \subset D$. Bu durumda A operatörünün D'de tek bir sabit x noktası vardır. Başka bir deyişle (2.2.22) denkleminin tek bir x çözümü vardır ve bu çözüm (2.2.23) formülü ile tanımlanmış $x(n)$ dizisinin limiti olarak bulunabilir (Musayev ve Alp, 2000).

2.3. Değişken Katsayılı ve Değişken Gecikmeli Lineer Olmayan Fark Denklem Sistemi

$a \in (-1,1) - \{0\}$ ve $B(n) = \left(b_{ij}(n)\right)_{k\times k}$ tamsayılar üzerinde tanımlı singüler olmayan bir matris fonksiyonu, m sınırlı ve maksimum değeri k olan tamsayılar cümlesini pozitif tamsayılar cümlesine dönüştüren bir fonksiyon ve F de reel değerli vektör fonksiyonu olmak üzere

$$x(n+1) = ax(n) + B(n)F\left(x_{n-m_n}\right), \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.2.24}$$

denklem sistemini göz önünde bulunduralım. $n_0 \geq 0$ tamsayısı için $[n_0 - k, n_0]$ aralığındaki tamsayıların cümlesi $\mathbb{Z}_0$ (m sınırsız ise $(-\infty, n_0]$ aralığındaki tamsayıların bir cümlesi) olsun. $\mathbb{Z}_0^k$ üzerinde tanımlı reel değerli ψ ayrık sınırlı başlangıç vektör fonksiyonunu göz önüne alalım. (2.2.24) denklem sistemi için aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 2.30

Eğer $\mathbb{Z}_0$ üzerinde $x(n) = \psi(n)$ ve $n \geq n_0$ için (2.2.24) sağlanırsa $x(n) = x(n, n_0, \psi)$ *, (2.2.24)'ün bir çözümüdür* denir (Huong ve Mau, 2013).

Tanım 2.31

$\forall \varepsilon > 0$ ve herhangi bir $n_0 \geq 0$ tamsayısı için $\mathbb{Z}_0$ üzerinde $\|\psi(n)\| \leq \delta$ iken $n \geq n_0$ için $\|x(n, n_0, \psi)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise (2.2.24)'ün sıfır çözümü *Liapunov kararlıdır* denir (Huong ve Mau, 2013).

Tanım 2.32

Eğer (2.2.24) Liapunov kararlı ve herhangi bir $n_0 \geq 0$ tamsayısı için $\mathbb{Z}_0$ üzerinde $\left\|\psi(n)\right\| \leq r(n_0)$ olması durumunda $n \to \infty$ iken $\left\|x(n,n_0,\psi)\right\| \to 0$ olacak şekilde bir $r(n_0) > 0$ var ise (2.2.24)'ün sıfır çözümü *asimtotik kararlıdır* denir (Huong ve Mau, 2013).

Tanım 2.33

Eğer $n \geq n_0$ için $\left\|x(n,n_0,\psi)\right\| < B(n_0,\psi)$ olacak şekilde bir $B(n_0,\psi) > 0$ var ise (2.2.24)'ün bir $x(n,n_0,\psi)$ çözümü *sınırlıdır* denir (Huong ve Mau, 2013).

Tanım 2.34

Eğer herhangi bir $n_0 \geq 0$ ve herhangi bir $B_1 > 0$ sayısı için $\mathbb{Z}_0$ üzerinde $\left\|\psi(n)\right\| \leq B_1$ iken $n \geq n_0$ için $\left\|x(n,n_0,\psi)\right\| < B_2$ olacak şekilde bir $B_2 = B_2(n_0,B_1) > 0$ sayısı var ise (2.2.24)'ün çözümleri *eş sınırlıdır* denir (Huong ve Mau, 2013).

3. DİFERENSİYEL-FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ASİMTOTİK KARARLILIĞI

Burada öncelikle gecikmeli lineer homojen fark denklemler sisteminin bazı özel sınıfları ele alınmış ve bu sınıflar ile ilgili yeni bazı kararlılık şartları verilmiştir.

3.1. Bir Gecikmeli Lineer Homojen Fark Denklem Sistemi İçin Asimtotik Kararlılık Şartları

Bu kesimde, A, 2×2 tipinde bir matris, k negatif olmayan bir tamsayı ve $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$x_{n+1}-ax_n-Ax_{n-k}=0 \tag{3.1.1}$$

gecikmeli lineer fark denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlılığı için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

P singüler olmayan bir matris olmak üzere, (3.1.1) sisteminde, $x(t)$ yerine $x(t)=Py(t)$ yazarsak

$$y_{n+1}-ay_n-P^{-1}APy_{n-k}=0$$

denklem sistemini elde ederiz. Dolayısıyla (3.1.1) sistemini ele alırken A matrisini aşağıdaki iki Jordan formundan biri şeklinde yazılabiliriz (Elaydi, 2005):

i) b_1, b_2 ve d reel sayı olmak üzere, A matrisinin reel özdeğerlere sahip olduğu durum, yani

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & d \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

dır.

ii) θ, $\pi/2 < |\theta| < \pi$ olacak biçimde ve b reel sayı olmak üzere A matrisinin kompleks özdeğerlere sahip olduğu durum, yani

$$A = ibR(\theta) \equiv ib\begin{pmatrix} cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

dır.

Durum I: A matrisini (i)'deki gibi alalım. O zaman (3.1.1) denklem sisteminin karakteristik denklemi I, 2×2 tipinde birim matris olmak üzere;

$$F(\lambda) \equiv \det\left(\lambda^{k+1}I - a\lambda^k I + A\right) = 0 \tag{3.1.2}$$

olur. (3.1.2)'den

$$\det\left[\begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & 0 \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & d \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\right] = 0,$$

yazılır ve buradan

$$F(\lambda) \equiv \left(\lambda^{k+1} - a\lambda^k - b_1\right)\left(\lambda^{k+1} - a\lambda^k - b_2\right) = 0$$

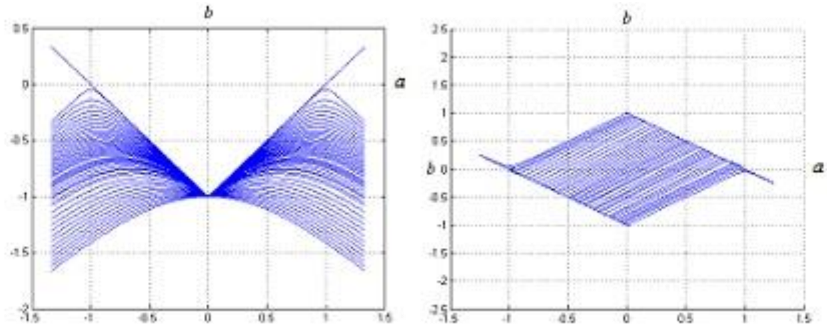
elde edilir. Bu denklem için Kuruklis (1994)'in sonuçlarına göre aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 3.1.1

$j = 1,2$ için $a \neq b_j$ olduğunu kabul edelim. ϕ, $\dfrac{\sin(k\theta)}{\sin((k+1)\theta)} = \dfrac{1}{|a|}$ denkleminin $\left(0, \dfrac{\pi}{k+1}\right)$ deki çözümü olmak üzere, (3.1.1) denklem sisteminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $\left|a + b_j\right| < \dfrac{k+1}{k}$ ve her $j = 1,2$ için

$$\begin{cases} -\left((a)^2+1-2|a|\cos\phi\right)^{\frac{1}{2}} < b_j < |a|-1 & , \quad k \text{ çift ise} \\ |a+b_j|<1 \ \text{ ve } \ |b_j| < \left((a)^2+1-2|a|\cos\phi\right)^{\frac{1}{2}} & , \quad k \text{ tek ise,} \end{cases}$$

olmasıdır.



Şekil 3.1. $k=3$ ve $k=4$ için Durum (I)'e göre kararlılık bölgeleri

Örnek 3.1.1

$\dfrac{\sin(\theta)}{\sin(2\theta)}=1$ denkleminin $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$'deki çözümü $\phi=\dfrac{\pi}{3}$ olsun. $a=1$ ve $A=\begin{pmatrix} -1/4 & 1 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$x(n+1)-x(n)+Ax(n-1)=0 \tag{3.1.3}$$

gecikmeli fark denklem sistemini ele alalım. Bu fark denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda)\equiv\left(\lambda^2-\lambda+1/4\right)^2=0$$

şeklindedir. Teorem 3.1.1'in şartları sağlandığından bu denklem sistemi asimtotik kararlıdır. Ayrıca

$$\lambda^2-\lambda+1/4=0$$

karakteristik denklemini incelersek $\lambda=1/2$ bu denklemin bir köküdür. Dolayısıyla (3.1.1) denklem sisteminin kökleri birim daire içine düşer.

Durum II: A matrisini (ii)'deki gibi alalım ve (3.1.1) denklem sisteminin karakteristik denklemini bulalım. Bunun için v_1 ve v_2 değişkenleri uygun skaler sabitler olmak üzere, çözüm vektörünün

$$x(n)=v\lambda^n=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\lambda^n$$

şeklinde seçimi ile, (3.1.1) denklem sisteminin karakteristik denklemi I , 2×2 tipinde birim matris olmak üzere

$$F(\lambda)\equiv\det\left(\lambda^{k+1}I-a\lambda^k I-A\right)=0$$

şeklindedir. Buradan

$$F(\lambda)\equiv\left(\lambda^{k+1}-a\lambda^k-ibe^{i\theta}\right)\left(\lambda^{k+1}-a\lambda^k-ibe^{-i\theta}\right)=0, \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

$$f^+(\lambda):=\left(\lambda^{k+1}-a\lambda^k-ibe^{i\theta}\right)$$

$$f^-(\lambda):=\left(\lambda^{k+1}-a\lambda^k-ibe^{-i\theta}\right)$$

olsun. Dolayısıyla

$$F(\lambda)\equiv f^+(\lambda)\,f^-(\lambda)=0 \tag{3.1.5}$$

şeklinde yazılır. İlk olarak $f^{+}(\lambda)=0$ iken $f^{-}(\lambda)=0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca, $-\pi<\theta<-\pi/2$ iken $f^{-}(\lambda)=0$ denkleminde $\theta=-\theta$ yazılırsa $\pi/2<\theta<\pi$ için $f^{+}(\lambda)=0$ 'ın elde edildiğine dikkat edilmelidir. Dolayısıyla (3.1.1) denklem sisteminin köklerini araştırmak için $\pi/2<\theta<\pi$ şartı altında sadece $f^{+}(\lambda)=0$ 'ın köklerini araştırmak yeterlidir. Yani, (3.1.1) denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $\pi/2<\theta<\pi$ için

$$f^{+}(\lambda):=\left(\lambda^{k+1}-a\lambda^{k}-ibe^{i\theta}\right)=0 \tag{3.1.6}$$

denkleminin köklerinin birim disk içinde kalmasıdır. $a\neq 0$ olduğundan $\mu=\dfrac{\lambda}{a}$ ve $q=\dfrac{b}{a^{k+1}}$ olmak üzere (3.1.6) denklemini

$$\mu^{k+1}-\mu^{k}-iqe^{i\theta}=0 \tag{3.1.7}$$

biçiminde yazabiliriz. Dolayısıyla (3.1.6) denkleminin köklerinin birim disk içinde kalması için gerek ve yeter şart (3.1.7) denkleminin köklerinin $\mu=\dfrac{1}{|a|}$ yarıçaplı çember içinde kalmasıdır.

Lemma 3.1.1

$a\neq 0$ ve $q=\dfrac{b}{a^{k+1}}$ olsun. O zaman (3.1.1) denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart (3.1.7) denkleminin köklerinin $\mu=\dfrac{1}{|a|}$ diski içinde kalmasıdır (Matsunaga, 2004).

Şimdi (3.1.7) karakteristik denkleminin katsayısı olan q 'nun değişimi durumunda bu denklemin köklerinin yerinin nasıl değiştiğini kök analizi ile inceleyeceğiz.

$q=0$ iken (3.1.7) denkleminin 0 (k katlı) ve 1(basit) köklerine sahip olduğuna dikkat etmeliyiz. Önce (3.1.7) denkleminin kompleks köklerinin varlık bölgesini araştıracağız.

Lemma 3.1.2

$q>0$ için $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ olduğunu kabul edelim. $r>0$ olmak üzere $re^{i\omega}$, (3.1.7) denkleminin bir kökü olsun. $[\![\,.\,]\!]$ tamdeğer fonksiyonu olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır:

a) $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\omega<\frac{\pi}{2}$ için yani $0<\omega<\pi$ için;

$$G_m^+ : \frac{\theta+\left(2m-\frac{1}{2}\right)\pi}{k}<\omega<\frac{\theta+\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi}{k+1} \quad , \quad m=0,1,2,\ldots,\left[\!\!\left[\frac{k}{2}\right]\!\!\right]$$

b) $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\omega<\frac{3\pi}{2}$ için yani $-\pi<\omega<0$ için;

$$G_0^- = \frac{\theta-\frac{3\pi}{2}}{k+1}<\omega<0\,,\ G_m^- : \frac{\theta-\left(2m+\frac{3}{2}\right)\pi}{k+1}<\omega<\frac{\theta-\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi}{k}\,,\ m=1,2,\ldots,\left[\!\!\left[\frac{k-1}{2}\right]\!\!\right]$$

İspat:

$\mu=re^{i\omega}$ olsun. O zaman $f\left(re^{i\omega}\right)=0$ olduğundan

$$r^{k+1}e^{i\omega(k+1)}-r^k e^{i\omega k}-iqe^{i\theta}=0 \tag{3.1.8}$$

elde ederiz. $e^{i\theta}\neq 0$ olduğundan

$$r^{k+1}e^{i(\omega(k+1)-\theta)}-r^k e^{i(\omega k-\theta)}-iq=0$$

yazabiliriz. Bu denklemin reel ve sanal kısımlarını ayrı ayrı sıfıra eşitlersek

$$r^k\left(-\cos(\omega k-\theta)+r\cos\left(\omega(k+1)-\theta\right)\right)=0 \qquad (3.1.9)$$

$$r^k\left(r\sin\left(\omega(k+1)-\theta\right)-\sin(\omega k-\theta)\right)=q \qquad (3.1.10)$$

olur. (3.1.9)'den

$$r=\frac{\cos(\omega k-\theta)}{\cos\left(\omega(k+1)-\theta\right)} \qquad (3.1.11)$$

bulunur. (3.1.10) ve (3.1.11)'den

$$q=r^k\,\frac{\sin\omega}{\cos\left(\omega(k+1)-\theta\right)} \qquad (3.1.12)$$

elde edilir.

a) $q>0$ ve $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\omega<\frac{\pi}{2}$ yani $0<\omega<\pi$ durumunu göz önüne alalım.

$q>0$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)>0$ olduğundan (3.1.11) ve (3.1.12) den $\cos\left(\omega(k+1)-\theta\right)>0$ ve $\cos(\omega k-\theta)>0$ 'dır. Dolayısıyla

$$\frac{\theta+\left(2m-\frac{1}{2}\right)\pi}{k+1}<\omega<\frac{\theta+\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi}{k+1},\quad m=0,1,2,\ldots,\left[\!\left[\frac{k-1}{2}\right]\!\right]$$

$$\frac{\theta+\left(2m-\frac{1}{2}\right)\pi}{k}<\omega<\frac{\theta+\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi}{k},\quad m=0,1,2,\ldots,\left[\!\left[\frac{k}{2}\right]\!\right]$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Buradan

$$\frac{\theta+\left(2m-\frac{1}{2}\right)\pi}{k}<\omega<\frac{\theta+\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi}{k+1}\;,\;\; m=0,1,2,\ldots,\left[\!\left[\frac{k-1}{2}\right]\!\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

b) $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\omega<\frac{3\pi}{2}$ yani $-\pi<\omega<0$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda ispat (a) durumuna benzer şekilde yapılır.

Lemma 3.1.3

$q<0$ için $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ olduğunu kabul edelim. $r>0$ olmak üzere $re^{i\omega}$, (3.1.7) denkleminin bir kökü olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

a) $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\omega<\frac{\pi}{2}$ için yani $0<\omega<\pi$ için;

$$H_0^+=0<\omega<\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{k+1},\; H_m^+:\frac{\theta+\left(2m-\frac{3}{2}\right)\pi}{k}<\omega<\frac{\theta+\left(2m-\frac{1}{2}\right)\pi}{k+1},\; m=1,2,\ldots,\left[\!\left[\frac{k}{2}\right]\!\right]$$

b) $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\omega<\frac{3\pi}{2}$ için yani $-\pi<\omega<0$ için;

$$H_m^-:\frac{\theta-\left(2m+\frac{5}{2}\right)\pi}{k+1}<\omega<\frac{\theta-\left(2m+\frac{3}{2}\right)\pi}{k},\; m=0,1,2,\ldots,\left[\!\left[\frac{k-1}{2}\right]\!\right]$$

İspat:

Lemma 3.1.2’nin ispatının benzeridir.

Sonuç 3.1.1

Lemma 3.1.2 ve lemma 3.1.3'den, (3.1.7) denkleminin kompleks köklerinin argümentlerinin varlık bölgesi

$$\Omega \equiv \left(\bigcup_{m=0}^{\|k-1/2\|} G_m^+ \right) \cup \left(\bigcup_{m=0}^{\|k/2\|} G_m^- \right) \cup \left(\bigcup_{m=0}^{\|k/2\|} H_m^+ \right) \cup \left(\bigcup_{m=0}^{\|k-1/2\|} H_m^- \right)$$

olarak yazılabilir.

Lemma 3.1.4

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ olduğunu kabul edelim. O zaman (3.1.7) denkleminin birim çember üzerindeki kompleks köklerinin argümentleri

$$\omega = \eta_n \equiv \frac{2\theta + 2n\pi}{2k+1}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k \tag{3.1.13}$$

olur.

İspat:

(3.1.9) denkleminde $r = 1$ için

$$-\cos(\omega k - \theta) + \cos(\omega(k+1) - \theta) = 0$$

$$= 2\sin\frac{(2k+1)\omega - 2\theta}{2}\sin\frac{\omega}{2} = 0$$

elde edilir. $\sin\frac{\omega}{2} \neq 0$ olduğundan

$$\sin\frac{(2k+1)\omega-2\theta}{2}=0$$

dır. Dolayısıyla bu eşitlikten (3.1.13) kolayca elde edilir.

Lemma 3.1.5

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ olduğunu kabul edelim. η_0, (3.1.7)'nin $n=0$ için birim çember üzerindeki kompleks kökünün argümenti olmak üzere

$$0<\eta_0<\frac{\theta+\left(2m-\frac{3}{2}\right)\pi}{k}, \quad m=1,2,\ldots,\left[\!\left[\frac{k-1}{2}\right]\!\right],$$

dır. Burada $\omega=\eta_0$, (3.1.7) denkleminin birim çember üzerindeki kompleks köklerinin argümentidir.

İspat:

$$0<\frac{2\theta}{2k+1}<\frac{2\theta}{2k}=\frac{\theta}{k}<\frac{\theta+(2m-3/2)\pi}{k}$$

olduğundan açıktır.

Şimdi q sıfırın komşuluğunda değişirken (3.1.7) denkleminin köklerinin kompleks düzlemdeki hareketini araştıracağız.

Lemma 3.1.6

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ olduğunu kabul edelim. O zaman (3.1.7) denkleminin $\mu=1$ basit kökü, q sıfıra soldan yaklaşırken birim disk içinde kalır.

İspat:

$\mu = re^{i\omega} = 1$ basit kökünü incelediğimizden dolayı ispat için $\left.\dfrac{dr}{dq}\right|_{\substack{r=1\\q=0}} < 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\frac{dr}{dq} = \frac{dr}{d\omega}\frac{d\omega}{dq} = \frac{dr}{d\omega}\left(\frac{dq}{d\omega}\right)^{-1}$$

dir. (3.1.7) denkleminin bir kökü $re^{i\omega}$ olsun. O zaman $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ için, (3.1.11) ve (3.1.12)'den

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\omega} &= \frac{-k\sin(\omega k-\theta)\cos(\omega(k+1)-\theta)+(k+1)\sin(\omega(k+1)-\theta)\cos(\omega k-\theta)}{\left(\cos(\omega(k+1)-\theta)\right)^2}\\ &= \frac{k\sin\omega+\sin(\omega(k+1)-\theta)\cos(\omega k-\theta)}{\left(\cos(\omega(k+1)-\theta)\right)^2},\end{aligned}$$

ve (3.1.12)'den

$$\begin{aligned}\frac{dq}{d\omega} &= kr^{k-1}\frac{dr}{d\omega}\frac{\sin\omega}{\cos(\omega(k+1)-\theta)}+\\ &+\frac{\cos\omega\cos(\omega(k+1)-\theta)+(k+1)\sin(\omega(k+1)-\theta)\sin\omega}{\left(\cos(\omega(k+1)-\theta)\right)^2}\\ &= kr^k\frac{\cos(\omega(k+1)-\theta)}{\cos(\omega k-\theta)}\frac{\sin\omega}{\cos(\omega(k+1)-\theta)}\left\{\frac{k\sin\omega+\sin(\omega(k+1)-\theta)\cos(\omega k-\theta)}{\left(\cos(\omega(k+1)-\theta)\right)^2}\right\}+\\ &+r^k\frac{\cos(\omega k-\theta)+k\sin\omega\sin(\omega(k+1)-\theta)}{\left(\cos(\omega(k+1)-\theta)\right)^2}\\ &= r^k\frac{k^2\sin^2\omega+2k\cos(\omega k-\theta)\sin\omega\sin(\omega(k+1)-\theta)+\cos^2(\omega k-\theta)}{\cos(\omega k-\theta)\left(\cos(\omega(k+1)-\theta)\right)^2},\end{aligned}$$

olur. Burada

$$I(\omega) \equiv k \sin \omega + \sin\left(\omega(k+1) - \theta\right) \cos(\omega k - \theta) \tag{3.1.14}$$

$$J(\omega) \equiv k^2 \sin^2 \omega + 2k \cos(\omega k - \theta) \sin \omega \sin\left(\omega(k+1) - \theta\right) + \cos^2(\omega k - \theta) \tag{3.1.15}$$

olarak alırsak

$$\frac{dr}{dq} = \frac{dr}{d\omega}\frac{d\omega}{dq} = \frac{dr}{d\omega}\left(\frac{dq}{d\omega}\right)^{-1},$$

$$= \frac{\cos\left((\omega k - \theta)\right) I(\omega)}{J(\omega)} \tag{3.1.16}$$

elde ederiz. Buradan

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{\substack{r=1 \\ \omega=0}} = \frac{-\sin\theta \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = -\sin\theta < 0,$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.7

$I(\omega) = 0$'ın $(0, \eta_0)$ aralığındaki kökü ω^+ ve $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ olsun. O zaman $\left(\frac{2\theta - (4m+5)\pi}{2k+2}, \frac{2\theta - (4m+3)\pi}{2k}\right)$ aralığı dışındaki bölgeler ve $\left(\omega^+, \frac{2\theta + (4m-1)\pi}{2k+2}\right)$ aralığındaki $\tilde{\mu}$ kökü hariç, (3.1.7) denkleminin kompleks köklerinin mutlak değeri $|q|$ artar iken artar.

İspat:

$\omega \in \Omega$ için (3.1.7) denkleminin bir kökü $re^{i\omega}$ olsun. $\omega \in \Omega$ için

$$\frac{dI}{d\omega}=(2k+1)\cos\left(\omega(k+1)-\theta\right)\cos(\omega k-\theta)>0$$

dir. Dolayısıyla (3.1.11)'den $I(\omega)$, $\omega\in\Omega$ için kesin artandır ve ayrıca (3.1.15)'den

$$J(\omega)>\left(k\sin\omega-\cos(k\omega-\theta)\right)^2>0$$

dır. Önce $q>0$ olduğu durumu göz önüne alalım.

Durum a): $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\omega<\frac{\pi}{2}$ için, yani $0<\omega<\pi$. $\omega\in G_m^+$ için $\frac{dr}{dq}>0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\omega\in G_m^+$ için (3.1.14)'den

$$I\left(\frac{\theta+\left(2m-\frac{1}{2}\right)\pi}{k}\right)=k\sin\left(\frac{\theta+\left(2m-\frac{1}{2}\right)\pi}{k}\right)>0$$

olur. Yani $\omega\in G_m^+$ için $I(\omega)$'nin artanlık özelliğinden $I(\omega)>0$'dır. Ayrıca $\omega\in G_m^+$ için $\cos(\omega k-\theta)>0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla (3.1.16)'dan $\omega\in(0,\pi)$ için $\frac{dr}{dq}>0$ dır.

Durum b): $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\omega<\frac{3\pi}{2}$ için, yani $-\pi<\omega<0$. (a) durumuna benzer şekilde düşünürsek; $\omega\in G_m^-$ için (3.1.14)'den $I(0)=\frac{\sin 2\theta}{2}<0$ ve

$$I\left(\frac{\theta-\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi}{k}\right)=k\sin\left(\frac{\theta-\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi}{k}\right)<0$$

olur. Yani $\omega \in G_m^-$ için $I(\omega)$'nin artanlık özelliğinden $I(\omega)<0$ dır. Ayrıca $\omega \in G_m^-$ için $\cos(\omega k-\theta)<0$ olduğunu biliyoruz Dolayısıyla (3.1.16) denkleminden $\omega \in(-\pi,0)$ için $\dfrac{dr}{dq}>0$'dır.

Şimdi $q<0$ olduğu durumu göz önüne alalım.

Durum c): $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}-\omega<\dfrac{\pi}{2}$ için, yani $0<\omega<\pi$. $\omega \in(0,\pi)$ için

$$I(0)=\frac{\sin 2\theta}{2}<0,$$

$$\begin{aligned} I(\eta_0) &= k\sin\left(\frac{2\theta}{2k+1}\right)+\sin\left(\frac{2\theta}{2k+1}(k+1)-\theta\right)\cos\left(\frac{2\theta}{2k+1}k-\theta\right) \\ &= \left(k+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{2\theta}{2k+1}>0, \end{aligned}$$

ve $\cos(\omega k-\theta)<0$'dır. $\omega \in H_m^+$ için

$$I\left(\frac{\theta+\left(2m-\frac{3}{2}\right)\pi}{k}\right)=k\sin\left(\frac{\theta+\left(2m-\frac{3}{2}\right)\pi}{k}\right)>0$$

yani $I(\omega)>0$'dır.

Yukarıdaki eşitsizliklerden ve $\omega \in(0,\omega^+)$ için $I(\omega)<0$ ve $\omega \in(\omega^+,\eta_0)$ için $I(\omega)>0$ olduğunu görürüz. Bu da (3.1.16) ile Lemmanın sağlandığını gösterir.

Durum d): $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \omega < \frac{3\pi}{2}$ için, yani $-\pi < \omega < 0$. $\omega \in H_m^-$ için

$$I\left(\frac{\theta - \left(2m + \frac{3}{2}\right)\pi}{k}\right) = -k \sin\left(\frac{\theta - \left(2m + \frac{3}{2}\right)\pi}{k}\right) < 0$$

ve

$$I\left(\frac{\theta - \left(2m + \frac{5}{2}\right)\pi}{k}\right) = -k \sin\left(\frac{\theta - \left(2m + \frac{5}{2}\right)\pi}{k}\right) < 0$$

Dolayısıyla $\omega \in H_m^-$ için $I(\omega) < 0$ 'dır. $\omega \in H_m^-$ için $\cos(\omega k - \theta) > 0$ 'dır. (3.1.16)'dan $\omega \in (-\pi, 0)$ için $\frac{dr}{dq} < 0$ 'dır.

Böylece ispat tamamlanır.

Dolayısıyla Lemma 3.1.6 ve Lemma 3.1.7'den, $\tilde{\mu}$ kökü hariç (3.1.7)'nin kökleri $|q|$ artar iken sürekli olarak sıfırdan uzaklaşır.

Uyarı 3.1.1

(3.1.7) denkleminin birim çember üzerindeki kompleks köklerinin argümentleri $q < 0$ iken $\omega = \eta_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k)$ şeklindedir ve dolayısıyla minimum değerini $n = 0$ 'da alır.

Ayrıca (3.1.9) ve (3.1.10) un karelerini alır taraf tarafa toplarsak $|q| = 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$'yi elde ederiz. $n = 0$ için

$$q(\eta_0) = -2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{\theta}{2k+1}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi - \theta}{2k+1}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi - \theta}{2k+1}\right)$$

olur. Böylece $a=1$ olduğu durumda (3.1.1) denklem sisteminin asimtotik kararlılığı için bir alt sınır bulmuş oluruz.

Şimdi (3.1.7) denkleminin bir kökünün $\mu = \frac{1}{|a|}$ yarıçaplı çember üzerinde olması durumunda $|q|$ değerlerinin ne olduğunu bulacağız.

Lemma 3.1.8

$\mu = \frac{1}{|a|}$ yarıçaplı çember üzerinde (3.1.7) denkleminin bir kökü $re^{i\omega}$ olsun. $\nu = 1,...,4$ için $Q_\nu(a) = \left(a^2+1-2|a|\cos\omega_\nu\right)^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere

$$|q| \equiv \frac{Q_\nu(a)}{|a|^{k+1}}, \tag{3.1.17}$$

olur.

İspat:

(3.1.11)'den

$$r = \frac{\cos(\omega k - \theta)}{\cos(\omega(k+1)-\theta)} = \frac{1}{|a|}$$

elde edilir. Buradan

$$\cos\left(\omega\left(k+1\right)-\theta\right)=\left|a\right|\cos\left(\omega k-\theta\right)$$

$$\cot\left(\omega k-\theta\right)=\frac{\sin\omega}{\cos\omega-\left|a\right|}$$

olur. (3.1.10) ve (3.1.11)'den;

$$q=r^{k}\frac{\sin\omega}{\cos\left(\omega\left(k+1\right)-\theta\right)}=r^{k+1}\frac{\sin\omega}{\cos\left(\omega k-\theta\right)}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın karesini alırsak

$$\begin{aligned}\frac{q^2}{r^{2(k+1)}}&=\frac{\sin^2\omega}{\cos^2\left(\omega k-\theta\right)}\\&=\sin^2\omega\left(\frac{1+\cot^2\left(\omega k-\theta\right)}{\cot^2\left(\omega k-\theta\right)}\right)\\&=\sin^2\omega\left(\frac{1+\dfrac{\sin^2\omega}{\left(\cos\omega-\left|a\right|\right)^2}}{\dfrac{\sin^2\omega}{\left(\cos\omega-\left|a\right|\right)^2}}\right)\\&=\left|a\right|^2-2\left|a\right|\cos\omega+1\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan, (3.1.17) denklemini elde ederiz.

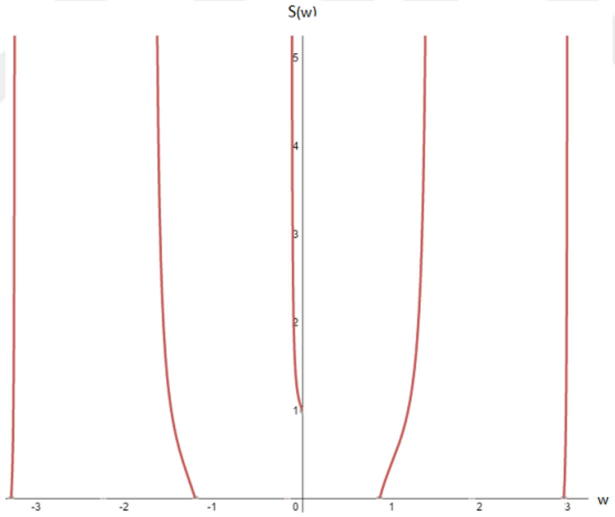
(3.1.17)'nin ω ye göre türevi

$$\frac{dq}{d\omega}=\frac{2\left|a\right|\sin\omega}{\left(a^2+1-2\left|a\right|\cos\omega\right)^{1/2}}$$

olduğundan, $|q|$ 'nun değeri $|\omega|$ 'ye göre artandır ve dolayısıyla $r=\frac{1}{|a|}$ 'yı sağlayan $|\omega|$ 'nin minimum değeri ile $|q|$ 'nun minimum değeri birbirine eşittir. Eğer

$$r := S(\omega) = \frac{\cos(\omega k - \theta)}{\cos(\omega(k+1) - \theta)} = \frac{1}{|a|} \tag{3.1.18}$$

gösterimini kullanırsak, $S(\omega)$ 'nin minimum değeri ile $|q|$ 'nun minimum değeri de birbirine eşit olur. Lemma 3.1.2, Lemma 3.1.3 ve Lemma 3.1.7, $S(\omega)$ 'nin, $|\omega|$ 'ye göre kesin artan ve sadece ω^+ 'da bir yerel minimuma sahip olduğunu gösterir. Şimdi (3.1.7) denkleminin köklerinin $|\mu| = \frac{1}{|a|}$ diski içinde kalması için gerek ve yeter şartları verelim. Bunun için $q>0$ durumunda $S(\omega)$ 'nin grafiğini çizelim;



Şekil 3.2. $q>0$ olduğunda $S(\omega)$ 'nin $k=3$ ve $\theta = \frac{2\pi}{3}$ için grafiği

Lemma 3.1.9

$q>0$, $a\neq 0$ ve $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ olduğunu kabul edelim. O zaman (3.1.7) denkleminin bütün köklerinin $|\mu|=\frac{1}{|a|}$ diski içinde kalması için gerek ve yeter şart

$$0<|a|\leq 1 \text{ ve } 0<q<\frac{Q_1(a)}{|a|^{k+1}}$$

olmasıdır.

İspat:

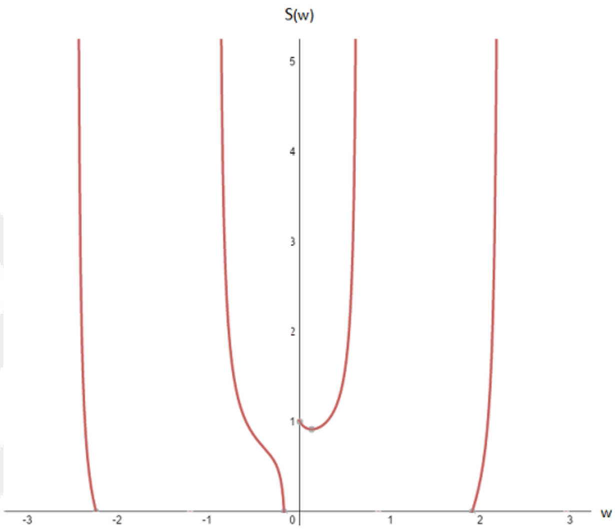
Durum 1: $\frac{1}{|a|}\geq 1$ yani $0<|a|\leq 1$ olduğu durum. Şekil 3.2'den dolayı $r=S(\omega)$'nin $\left(\frac{\theta-\frac{3\pi}{2}}{k+1},0\right)$ aralığında en az bir ω_1 çözümü vardır. Dolayısıyla Lemma 3.1.6, Lemma 3.1.7 ve Lemma 3.1.8'den $\mu=1$ kökü, $q=0$'dan $q=\frac{Q_1(a)}{|a|^{k+1}}$'e artar iken $|\mu|=\frac{1}{|a|}$ diski içinde kalır. $q=\frac{Q_1(a)}{|a|^{k+1}}$'de iken $|\mu|=\frac{1}{|a|}$ çemberi üzerinde olur. $q=\frac{Q_1(a)}{|a|^{k+1}}$'den artar iken $|\mu|=\frac{1}{|a|}$ çemberi dışında kalır. Dolayısıyla, (3.1.7) denkleminin bütün köklerinin $|\mu|=\frac{1}{|a|}$ diski içinde kalması için gerek ve yeter şart

$$0<q<\frac{Q_1(a)}{|a|^{k+1}}$$

olmasıdır.

Durum 2: $0 < \frac{1}{|a|} < 1$ yani $|a| > 1$ olduğu durum. Şekil 3.2'den $\omega \in G_m^-$ için $S(\omega) \geq \frac{1}{|a|}$ 'dır. Dolayısıyla bu da bize $|\mu| \geq \frac{1}{|a|}$ iken (3.1.7) denkleminin $\mu = 1$ kökünün olduğunu gösterir.

Şimdi $q < 0$ için $S(\omega)$'nin grafiğini çizelim;



Şekil 3.3. $q < 0$ olduğunda $S(\omega)$'nin $k = 3$ ve $\theta = \frac{2\pi}{3}$ için grafiği

Lemma 3.1.10

$q < 0$, $a \neq 0$ ve $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ olduğunu kabul edelim. O zaman (3.1.7) denkleminin bütün köklerinin $|\mu| = \frac{1}{|a|}$ diski içinde kalması için gerek ve yeter şart

$$0 < |a| < \frac{1}{S(\omega^+)} \text{ ve } -\frac{Q_4(a)}{|a|^{k+1}} < q < -\frac{Q_3(a)}{|a|^{k+1}}$$

ya da

$$0<|a|<1 \text{ ve } -\frac{Q_2(a)}{|a|^{k+1}}<q<0$$

olmasıdır.

İspat:

İlk önce $-Q_4(a)<-Q_3(a)<-Q_2(a)$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca Lemma 3.1.5 ve Uyarı 3.1.1'den, H_0^+ aralığında $r=S(\omega)=1$'i sağlayan ω değerinin η_0 olduğunu biliyoruz. Şimdi (3.1.7) denkleminin köklerinin yerini araştıralım. $q=0$ olduğu durumda (3.1.7) denkleminin kökleri 0 ve 1'den oluşur ve $\mu=1$ basit kökü sıfırın komşuluğunda q sıfıra doğru artar iken ($q<0$'da) H_0^+ bölgesinde kalır. Burada üç durum söz konusudur.

Durum 1: $\frac{1}{|a|}>1$ yani $0<|a|<1$ olduğu durum. Şekil 3.3'den, $\left(\eta_0, \frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{k+1}\right)$ aralığında $S(\omega)$'nin en az bir ω_2 kökü vardır. Dolayısıyla Lemma 3.1.6, Lemma 3.1.7 ve Lemma 3.1.8, $\mu=1$'in kökü, $q=0$'dan $q=-\frac{Q_2(a)}{|a|^{k+1}}$'e artar iken $|\mu|=\frac{1}{|a|}$ diski içinde kalır. $q=-\frac{Q_2(a)}{|a|^{k+1}}$ iken $|\mu|=\frac{1}{|a|}$ çemberi üzerinde olur. $q=-\frac{Q_2(a)}{|a|^{k+1}}$'den artar iken $|\mu|=\frac{1}{|a|}$ diski dışında kalır. Dolayısıyla (3.1.7) denkleminin bütün köklerinin $|\mu|=\frac{1}{|a|}$ diski içinde kalması için gerek ve yeter şart

$$0<|a|<1 \text{ ve } -\frac{Q_2(a)}{|a|^{k+1}}<q<0$$

olmasıdır.

Durum 2: $S\left(\omega^+\right) < \dfrac{1}{|a|} < 1$ yani $1 < |a| < \dfrac{1}{S\left(\omega^+\right)}$ olduğu durum. Şekil 3.1.3'den $r = S(\omega)$'nin $\left(0,\omega^+\right)$ ve $\left(\omega^+,\eta_0\right)$ aralıklarında sırasıyla en az bir ω_4 ve ω_3 çözümleri vardır. O zaman Lemma 3.1.6, Lemma 3.1.7 ve Lemma 3.1.8'den, $\mu = 1$ kökü $-\dfrac{Q_4(a)}{|a|^{k+1}}$'den $-\dfrac{Q_3(a)}{|a|^{k+1}}$'e giderken $|\mu| = \dfrac{1}{|a|}$ diski içinde kalır. $q = -\dfrac{Q_4(a)}{|a|^{k+1}}$ ya da $q = -\dfrac{Q_3(a)}{|a|^{k+1}}$'de olması durumunda $|\mu| = \dfrac{1}{|a|}$ çemberi üzerinde olur. $-\dfrac{Q_3(a)}{|a|^{k+1}}$'den artar iken $|\mu| = \dfrac{1}{|a|}$ diski dışına doğru hareket eder. Dolayısıyla (3.1.7) denkleminin bütün köklerinin $|\mu| = \dfrac{1}{|a|}$ diski içinde kalması için gerek ve yeter şart

$$0 < |a| < \frac{1}{S\left(\omega^+\right)} \text{ ve } -\frac{Q_4(a)}{|a|^{k+1}} < q < -\frac{Q_3(a)}{|a|^{k+1}}$$

olmasıdır.

Durum 3: $0 < \dfrac{1}{|a|} \le S\left(\omega^+\right)$ yani $|a| \ge 1$ olduğu durum. Şekil 3.1.3'den $\omega \in H_0^+$ için $S(\omega) \ge \dfrac{1}{|a|}$'dır. Dolayısıyla bu da bize $|\mu| \ge \dfrac{1}{|a|}$ iken (3.1.7) denkleminin $\mu = 1$ kökünün olduğunu gösterir.

Şimdi (3.1.1) denklem sistemi için gerek ve yeter şartları verebiliriz.

Teorem 3.1.2

(3.1.1) denklemi için $a \ne 0$, $\dfrac{\pi}{2} < |\theta| < \pi$ ve k'nın tek olduğunu kabul edelim. (3.1.1) denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

i) $\dfrac{1}{|a|} > 1$ ve $0 < b < Q_1(a)$

ii) $\dfrac{1}{|a|} \geq 1$ ve $-Q_2(a) < b < 0$

iii) $S(\omega^+) < \dfrac{1}{|a|} < 1$ ve $-Q_4(a) < b < -Q_3(a)$

İspat:

k tek ve $a \neq 0$ iken $a^{k+1} > 0$ olacağından $q = \dfrac{b}{a^{k+1}}$ 'in işaretinin b ye bağlı olarak değişeceği açıktır. Dolayısıyla aşağıdaki durumları göz önünde bulundururuz;

Durum 1: Eğer $b > 0$ ise o zaman $q > 0$ olur. Dolayısıyla Lemma 3.1.9'dan (3.1.1) denklem sisteminin çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{|a|} > 1 \text{ ve } 0 < b < Q_1(a)$$

olmasıdır.

Durum 2: Eğer $b < 0$ ise o zaman $q < 0$ olur. Dolayısıyla Lemma 3.1.10'dan (3.1.1) denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{|a|} \geq 1 \text{ ve } -Q_2(a) < b < 0 \text{ yada } S(\omega^+) < \frac{1}{|a|} < 1 \text{ ve } -Q_4(a) < b < -Q_3(a)$$

olmasıdır.

Örnek 3.1.2

$A = i2\sqrt{3}R(\theta)$, $a = 1/2$ ve $k = 1$ olmak üzere

$$x(n+1)-\frac{1}{2}x(n)-Ax(n-1)=0 \qquad (3.1.19)$$

denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda)\equiv\left(\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-i2\sqrt{3}e^{i\theta}\right)\left(\lambda^2-\lambda-i2\sqrt{3}e^{-i\theta}\right)=0,$$

şeklindedir. Buna göre $b=\frac{\sqrt{3}}{2}, |a|=\frac{1}{2}$ ve $\omega=\pi/3$ için $q=Q_1(1/2)=2\sqrt{3}$ olacağından

$$\frac{1}{|a|}=2>1 \text{ ve } 0<b<Q_1(1/2)=2\sqrt{3}$$

sağlanır. Dolayısıyla, Teorem 3.1.2 (i) gereği (3.1.19) denklem sistemi asimtotik kararlıdır. Ayrıca

$$\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-i2\sqrt{3}e^{i\theta}=0,$$

karakteristik denklemini incelersek, bu denklemin $e^{i\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{i\sqrt{3}}{24}$ için $\lambda=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ 'ye sahip olduğu görülür. Dolayısıyla (3.1.19)'un kökleri birim daire içine düşer.

Teorem 3.1.3

(3.1.1) denklem sistemi için $a\neq 0$, $\frac{\pi}{2}<|\theta|<\pi$ ve k 'nın çift olduğunu kabul edelim. (3.1.1) denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

i) $\frac{b}{a}\geq 0$, $\frac{1}{|a|}>1$ ve $|b|<Q_1(a)$

ii) $\frac{b}{a} < 0$, $\frac{1}{|a|} \geq 1$ ve $|b| < Q_2(a)$

iii) $\frac{b}{a} < 0$, $S(\omega^+) < \frac{1}{|a|} < 1$ ve $Q_3(a) < |b| < Q_4(a)$

İspat:

k çift ve $a \neq 0$ iken, q'nun işareti a ve b'ye bağlı olarak değişir ve aşağıdaki durumları göz önünde bulundururuz;

Durum 1: $a > 0$ ve $b > 0$ ise o zaman $q > 0$ dır. Dolayısıyla Lemma 3.1.9'dan (3.1.1) denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{|a|} > 1 \text{ ve } 0 < b < Q_1(a)$$

olmasıdır.

Durum 2: $a > 0$ ve $b < 0$ ise o zaman $q < 0$'dır. Dolayısıyla Lemma 3.1.10'dan (3.1.1) denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{|a|} \geq 1 \text{ ve } -Q_2(a) < b < 0 \text{ yada } S(\omega^+) < \frac{1}{|a|} < 1 \text{ ve } -Q_4(a) < b < -Q_3(a)$$

olmasıdır.

Durum 3: $a < 0$ ve $b > 0$ ise o zaman $q < 0$'dır. Dolayısıyla Lemma 3.1.10'dan (3.1.1) denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{|a|} \geq 1 \text{ ve } 0 < b < Q_2(a) \text{ yada } S(\omega^+) < \frac{1}{|a|} < 1 \text{ ve } Q_3(a) < b < Q_4(a)$$

olmasıdır.

Durum 4: $a<0$ ve $b<0$ ise o zaman $q>0$'dır. Dolayısıyla Lemma 3.1.9'dan (3.1.1) denklem sisteminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{|a|}>1 \text{ ve } -Q_1(a)<b<0$$

olmasıdır.

Örnek 3.1.3

$A=i16\sqrt{3}R(\theta)$, $a=1/2$ ve $k=4$ olmak üzere

$$x(n+1)-\frac{1}{2}x(n)-Ax(n-4)=0 \tag{3.1.20}$$

denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda)\equiv\left(\lambda^5-\frac{1}{2}\lambda^4-i16\sqrt{3}e^{i\theta}\right)\left(\lambda^5-\lambda^4-i16\sqrt{3}e^{-i\theta}\right)=0,$$

şeklindedir. $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|a|=\frac{1}{2}$ ve $\omega=\pi/3$ için $q=Q_1(1/2)=16\sqrt{3}$ olacağından

$$\frac{b}{a}=\sqrt{3}\geq 0,\ \frac{1}{|a|}=2>1 \text{ ve } |b|<Q_1(1/2)=16\sqrt{3}$$

sağlanır. Dolayısıyla, Teorem 3.1.3 (i) koşulundan dolayı (3.1.20) denklem sistemi asimtotik kararlıdır. Ayrıca

$$\lambda^5-\frac{1}{2}\lambda^4-i16\sqrt{3}e^{i\theta}=0,$$

karakteristik denklemini incelersek, bu denklemin $e^{i\theta}=-\frac{1}{128\sqrt{3}}-\frac{i}{64\sqrt{3}}$ için $\lambda=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$'ye sahip olduğu görülür. Dolayısıyla (3.1.20)'nin kökleri birim daire içine düşer.

3.2. İki Gecikmeli Lineer Homojen Fark Denklem Sistemi İçin Asimtotik Kararlılık Şartları

Bu kesimde, A, 2×2 tipinde bir sabit matris, k,l, $1<l\le k$ özelliğindeki pozitif tamsayılar, $a\in[-1,1]-\{0\}$ şartını sağlayan bir reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1}-ax_n+A\left(x_{n-k}+x_{n-l}\right)=0,\ n\in\{0,1,2,...\} \tag{3.2.1}$$

iki gecikmeli lineer fark denklem sisteminin asimtotik kararlılığı üzerine sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca (3.2.1) sisteminin çözümlerinin $x_{-k},x_{-k+1},\ldots,x_0\in\mathbb{R}^2$ başlangıç şartları ile tek türlü belirlendiği kabul edilmiştir.

(3.2.1) lineer fark denklem sisteminde, P singüler olmayan bir matris olmak üzere, x_n yerine $x_n=Py_n$ yazarsak

$$y_{n+1}-ay_n+P^{-1}AP\left(y_{n-k}+y_{n-l}\right)=0,\ n\in\{0,1,2,...\} \tag{3.2.2}$$

sistemini elde ederiz. Dolayısıyla (3.2.1) sistemini ele alırken A matrisini aşağıdaki iki Jordan formundan biri şeklinde yazılabilir (Elaydi, 2005):

I) b_1, b_2 ve d reel sayı olmak üzere, A matrisinin reel özdeğerlere sahip olduğu durum, yani

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & d \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

dır.

II) θ, $0<|\theta|\le\frac{\pi}{2}$ olacak biçimde ve q reel sayı olmak üzere, A matrisinin kompleks özdeğerlere sahip olduğu durum, yani

$$A=q\begin{pmatrix} cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dır.

Bizim buradaki amacımız (3.2.1) sisteminin asimtotik kararlılığını incelemektir. Bunun için (3.2.1) lineer fark denklem sistemine ait karakteristik denklemin bütün köklerinin D^2 birim diski içinde olduğunu göstermek yeterlidir. İspat için (3.2.1) sisteminin karakteristik denklemine kök analizi uygulanacaktır. (I) durumunun ispatı (II)'ye benzer şekilde olduğu için sadece A matrisinin (II) durumu için ispat yapılacaktır. (3.2.1) sisteminin karakteristik denklemi, I 2×2 tipinde birim matris olmak üzere

$$F(\lambda)\equiv\det\left(\left(\lambda^{k+1}-a\lambda^{k}\right)I+A\left(\lambda^{k-l}+1\right)\right)=0 \tag{3.2.3}$$

şeklindedir. (3.2.3)'den

$$\begin{aligned} F(\lambda)&=\det\begin{pmatrix} \lambda^{k+1}-a\lambda^{k}+q\cos\theta\left(\lambda^{k-l}+1\right) & -q\sin\theta\left(\lambda^{k-l}+1\right) \\ q\sin\theta\left(\lambda^{k-l}+1\right) & \lambda^{k+1}-a\lambda^{k}+q\cos\theta\left(\lambda^{k-l}+1\right) \end{pmatrix} \\ &=\left(\lambda^{k+1}-a\lambda^{k}+q\cos\theta\left(\lambda^{k-l}+1\right)\right)^2+\left(q\sin\theta\left(\lambda^{k-l}+1\right)\right)^2 \\ &=\left(\lambda^{k+1}-a\lambda^{k}+qe^{i\theta}\left(\lambda^{k-l}+1\right)\right)\left(\lambda^{k+1}-a\lambda^{k}+qe^{-i\theta}\left(\lambda^{k-l}+1\right)\right) \end{aligned}$$

yazılır. Burada

$$f(\lambda)=\left(\lambda^{k+1}-a\lambda^{k}+qe^{i\theta}\left(\lambda^{k-l}+1\right)\right) \tag{3.2.4}$$

olarak alırsak (3.2.3) karakteristik denklemini

$$F(\lambda) = f(\lambda)\overline{f(\overline{\lambda})} = 0 \tag{3.2.5}$$

biçiminde yazabiliriz. $\overline{\lambda}$, λ 'nın karmaşık eşleniği olmak üzere

$$\overline{f(\overline{\lambda})} = \left(\lambda^{k+1} - a\lambda^k + qe^{-i\theta}\left(\lambda^{k-l} + 1\right)\right) = 0 \tag{3.2.6}$$

denklemini ele alalım. $-\pi/2 \leq \theta < 0$ iken $\overline{f(\overline{\lambda})} = 0$ denkleminde $\theta = -\theta$ yazılırsa $0 < \theta \leq \pi/2$ için $f(\lambda) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla (3.2.5) denkleminininin köklerini araştırmak için $0 < \theta \leq \pi/2$ şartı altında $f(\lambda) = 0$'ın köklerini araştırmak yeterlidir. Ayrıca $q = 0$ olduğu durumda (3.2.4) karakteristik denkleminin basit a reel kökü ve k katlı sıfır kökü vardır.

(3.2.1)'in çözümlerinin kararlılığını araştırmak için aşağıdaki 5 lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.2.1

$0 < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ ve $a \in [-1,1] - \{0\}$ olduğunu kabul edelim. $[\![.]\!]$ tam değer fonksiyonu, k, l, $1 < l \leq k$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayılar ve

$$\upsilon = \left\{ -\left[\!\left[\frac{k+l+1}{2} + \frac{\theta}{\pi} \right]\!\right] + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \left[\!\left[\frac{k+l-1}{2} - \frac{\theta}{\pi} \right]\!\right] \right\} - \left\{ -\left[\!\left[\frac{k+l+2}{4} + \frac{\theta}{\pi} \right]\!\right], \left[\!\left[\frac{k+l-2}{4} - \frac{\theta}{\pi} \right]\!\right] \right\}$$

olmak üzere, (3.2.4)'ün ∂D^2 üzerindeki kompleks köklerinin argümentleri

$$\omega_\upsilon = \frac{(2\upsilon + 1)\pi + 2\theta}{k+l}$$

şeklindedir.

İspat:

$\lambda \in \partial D^2$ olsun. Dolayısıyla $\omega \in (-\pi, \pi]$ için $\lambda = e^{i\omega}$'dir. $\lambda = e^{i\omega}$, (3.2.4)'ün ∂D^2 üzerindeki kökü ise $f(\lambda) = \lambda^{k+1} - a\lambda^k + qe^{i\theta}\left(\lambda^{k-l} + 1\right) = 0$ denklemini sağlar. Buradan

$$q = \frac{\lambda^{k+l}(a-\lambda)}{e^{i\theta}\left(\lambda^k + \lambda^l\right)} \tag{3.2.7}$$

elde ederiz. Ayrıca $\overline{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$ ve (3.2.7)'in kompleks eşleniğinden

$$q = \frac{e^{i\theta}(a\lambda - 1)}{\lambda\left(\lambda^k + \lambda^l\right)} \tag{3.2.8}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (3.2.7) ve (3.2.8)'den

$$e^{i2\theta} = \lambda^{k+l+1}\frac{(\lambda - a)}{(1 - a\lambda)} \tag{3.2.9}$$

olur. $\omega \in (-\pi, \pi]$ olduğundan $\omega \in (-\pi, \pi] - \left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ için $a = \cos\omega$ alabiliriz. (3.2.9) dan

$$-e^{i2\theta} = e^{i\omega(k+l+1)}.e^{-i\omega} \tag{3.2.10}$$

olur. Sonuç olarak (3.2.10)'dan

$$\omega_\upsilon = \frac{(2\upsilon + 1)\pi + 2\theta}{k + l} \tag{3.2.11}$$

elde edilir. □

Lemma 3.2.2

$0<\theta\le\frac{\pi}{2}$ ve $a\in[-1,1]-\{0\}$ olduğunu kabul edelim. $q=\{q_\upsilon\}$, $\omega_\upsilon=\frac{(2\upsilon+1)\pi+2\theta}{k+l}$ argümenti ile tanımlı olmak üzere $\lambda=e^{i\omega}$, (3.2.4)'in ∂D^2 üzerindeki kökü ise

$$q_\upsilon=\frac{\sin\omega_\upsilon}{2\sin(k\omega_\upsilon-\theta)}$$

olur. Ayrıca her bir q_υ için ∂D^2 de yalnız bir $\lambda=e^{i\omega}$ basit kökü vardır.

İspat:

(3.2.8) ve (3.2.10)'dan

$$\begin{aligned}-q&=\frac{e^{i\theta}(1-a\lambda)}{\lambda\left(\lambda^k+\lambda^l\right)}\\&=\frac{(1-a\lambda)}{\lambda\left(\lambda^k e^{-i\theta}+\lambda^{-k}e^{i\theta}\right)}\end{aligned}$$

dır. $\omega\in(-\pi,\pi]-\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}$ için $a=\cos\omega$ ve $\sin\omega=\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}$ olduğundan

$$q=\frac{\sin\omega}{2\sin(k\omega-\theta)}$$

olarak elde ederiz. Şimdi (3.2.4)'ün her bir q_υ için basit bir köke sahip olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için $\frac{\partial f}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_\upsilon}\neq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\frac{\partial f}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_\upsilon}\neq 0$ olması $f(\lambda)$'nın, $\lambda=\lambda_\upsilon$'nün bir komşuluğu içinde yerel olarak homeomorf olması, diğer bir ifade ile λ'nın basit kök olması ile denktir. (3.2.4) den

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_\upsilon} = (k+1)\lambda^k - ka\lambda^{k-1} + qe^{i\theta}(k-l)\lambda^{k-l-1}$$

$$= \frac{\lambda^{k-1}\left[(l+1)\lambda^{k-l+1} - la\lambda^{k-l} + (k+1)\lambda - ka\right]}{\lambda^{k-l}+1} \tag{3.2.12}$$

dir. Aksini kabul edelim, yani $\frac{\partial f}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_\upsilon} = 0$ olsun. Dolayısıyla (3.2.12)'den

$$(l+1)\lambda^{k-l+1} - la\lambda^{k-l} + (k+1)\lambda - ka = 0 \tag{3.2.13}$$

olur. Ayrıca $\overline{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ ve (3.2.13)'ün kompleks eşleneğinden

$$-ka\lambda^{k-l+1} + (k+1)\lambda^{k-l} - la\lambda + l + 1 = 0 \tag{3.2.14}$$

elde edilir. (3.2.13) ve (3.2.14)'ü kullanarak

$$(k+l+2)\left(e^{i\omega(k-l)}+1\right)\left(e^{i\omega}-e^{-i\omega}\right) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. $q \neq 0$, $k+l+2 \neq 0$ ve $\lambda^{k-l}+1 \neq 0$ olduğundan $\frac{\partial f}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_\upsilon} \neq 0$'dır.

Uyarı 3.2.1

Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2'den q_υ değerinin k ve l ye göre simetrik olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $q_\upsilon = \frac{\sin \omega_\upsilon}{2\sin(l\omega_\upsilon - \theta)}$ yazabiliriz.

Aşağıdaki lemmada q reel sayısı $q = q_\upsilon$ ve $q = 0$'ın komşuluklarında değişir iken (3.2.4)'ün ∂D^2 üzerindeki köklerinin hareketi incelenecektir. Ayrıca bundan sonraki ispatlarda (3.2.4)'ün $q = q_\upsilon$ ve $q = 0$ civarındaki kökleri için sırasıyla $\lambda\big|_{q=q_\upsilon} = \lambda_\upsilon(q_\upsilon) = \lambda_\upsilon$ ve $\lambda\big|_{q=0} = \lambda_\upsilon(0) = a$ gösterimini kullanacağız.

Lemma 3.2.3

$0 < \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ ve $a \in [-1,1] - \{0\}$ olduğunu kabul edelim. $q = q_\upsilon$'nün komşuluğu içinde $|q|$ artan iken $|\lambda|$ artandır.

İspat:

$f \in \mathbb{C}^2$ olsun ve $f(q,\lambda) = \lambda^{k+1} - a\lambda^k + qe^{i\theta}(\lambda^{k-l} + 1)$ şeklinde tanımlansın. λ_υ'ler f'in kökleri olduğundan $f(q_\upsilon, \lambda_\upsilon) = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca Lemma 3.2.3'ün ispatından $\dfrac{\partial f(q_\upsilon, \lambda_\upsilon)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_\upsilon} \ne 0$ olduğunu biliyoruz. Dahası "kapalı fonksiyonun varlığı" teoreminden $q = q_\upsilon$'nün komşuluğu içinde λ_υ holomorftur. Böylece $f(q, \lambda_\upsilon) = 0$'dan

$$\frac{d\lambda_\upsilon}{dq} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial q}}{\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}} \tag{3.2.15}$$

yazabiliriz. $\lambda_\upsilon = re^{i\omega}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_\upsilon}{dq} &= \frac{\partial \lambda_\upsilon}{\partial \operatorname{Re}(q)} = \frac{\partial \lambda_\upsilon}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \operatorname{Re}(q)} + \frac{\partial \lambda_\upsilon}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \operatorname{Re}(q)} \\
&= \frac{\lambda_\upsilon}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial \operatorname{Re}(q)} + ir\frac{\partial \omega}{\partial \operatorname{Re}(q)}\right)
\end{aligned}$$

dir. (3.2.15) ve q'nun reel değerlerle sınırlı olmasından

$$\frac{dr}{dq}=\mathrm{Re}\left(\frac{r}{\lambda_\upsilon}\frac{d\lambda_\upsilon}{dq}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{-\dfrac{r}{\lambda_\upsilon}\dfrac{\partial f}{\partial q}}{\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{-\dfrac{r}{\lambda_\upsilon}\dfrac{\partial f}{\partial q}\overline{\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}}}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}\right|^2}\right) \tag{3.2.16}$$

elde edilir. $q\neq 0$ için $\dfrac{\partial f}{\partial q}=-\dfrac{1}{q}\left(\lambda_\upsilon^{k+1}-a\lambda_\upsilon^{k}\right)$ ve (3.2.12)'den

$$\begin{aligned}-\frac{r}{\lambda_\upsilon}\frac{\partial f}{\partial q}\overline{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}&=\frac{r}{\lambda_\upsilon}\frac{1}{q}\left(\lambda_\upsilon^{k+1}-a\lambda_\upsilon^{k}\right)\left[\frac{1}{\lambda_\upsilon^{k}}\frac{\lambda_\upsilon^{k-l+1}}{\lambda_\upsilon^{k-l}+1}\left(\frac{l+1}{\lambda_\upsilon^{k-l+1}}-\frac{la}{\lambda_\upsilon^{k-l}}+\frac{k+1}{\lambda_\upsilon}-ka\right)\right]\\&=\frac{r}{q}\left|\lambda_\upsilon-a\right|^2\left[\frac{l}{\lambda_\upsilon^{k-l}+1}+\frac{k}{\lambda_\upsilon^{l-k}+1}+\frac{1}{1-\lambda_\upsilon a}\right]\end{aligned}$$

dir. Eğer $\omega_\upsilon=\dfrac{(2\upsilon+1)\pi+2\theta}{k+l}$ olmak üzere $a=\cos\omega$ alınırsa

$$-\frac{r}{\lambda_\upsilon}\frac{\partial f}{\partial q}\overline{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}=\frac{r}{q}\left|\lambda_\upsilon-a\right|^2\left(\frac{l+k}{2}+1\right) \tag{3.2.17}$$

elde edilir. (3.2.17), $q\neq 0$ ve $\lambda_\upsilon\neq a$ için (3.2.16)'da yerine yazılırsa

$$\frac{dr}{dq}=\frac{\left|\lambda_\upsilon-a\right|^2\left(\dfrac{l+k}{2}+1\right)r}{q\left|\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}\right|^2}>0 \tag{3.2.18}$$

olur. Dolayısıyla (3.2.18) eşitliğinden, $q=q_\upsilon$'nün komşuluğu içinde $|q|$ artan iken $r=|\lambda|$'da artan olduğunu söyleyebiliriz. □

Lemma 3.2.4

$q=0$'ın komşuluğunda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

i) Eğer $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ve $a\in(0,1]$ ise o zaman $q\neq 0$ için $\operatorname{sgn}(|\lambda|-a).\operatorname{sgn}q<0$ dir.

ii) Eğer $\theta=\frac{\pi}{2}$ ve $a\in(-1,1]-\{0\}$ ise o zaman $q\neq 0$ için $|\lambda|>a$ dır.

İspat:

i) (3.2.15) kullanılarak

$$\frac{d\lambda_\upsilon}{dq}\Big|_{q=0}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial q}}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}\Big|_{(q,\lambda)=(o,a)}=-\frac{e^{i\theta}\left(a^{k-l}+1\right)}{a^k}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{dr}{dq}=\operatorname{Re}\left(\frac{r}{\lambda_\upsilon}\frac{d\lambda_\upsilon}{dq}\right)=-\frac{\cos\theta\left(a^{k-l}+1\right)}{a^{k+1}}$$

dir. Dolayısıyla $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ve $a\in(0,1]$ için $\frac{dr}{dq}<0$ 'dır. Diğer taraftan $\lambda\Big|_{q=q_\upsilon}=\lambda_\upsilon(q_\upsilon)=\lambda_\upsilon$ ve $\lambda\Big|_{q=0}=\lambda_\upsilon(0)=a$ olduğundan

$$\frac{dr}{dq}=\lim_{q\to 0}\frac{|\lambda_\upsilon(q)|-|\lambda_\upsilon(0)|}{q-0}=\lim_{q\to 0}\frac{|\lambda_\upsilon(q)|-a}{q}<0$$

dır. Bu $q\neq 0$ için (*i*)'in sağlandığı anlamına gelir.

ii) $\theta=\frac{\pi}{2}$ için $\frac{dr}{dq}\Big|_{q=0}=0$ olduğundan $\frac{d^2r}{dq^2}\Big|_{q=0}$ 'nin işaretini göz önüne almalıyız.

$f(q_\upsilon,\lambda_\upsilon)=0$ olduğundan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial\lambda_\upsilon}\frac{d\lambda_\upsilon}{dq}+\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda_\upsilon{}^2}\left(\frac{d\lambda_\upsilon}{dq}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial\lambda_\upsilon}\frac{d^2\lambda_\upsilon}{dq^2}=0$$

dir ve buradan

$$\frac{-2(k-l)e^{2i\theta}a^{k-l}\left(a^{k-l}+1\right)}{a^{k+1}}+\frac{2ke^{2i\theta}\left(a^{k-l}+1\right)^2}{a^{k+1}}+a^k\frac{d^2\lambda_\upsilon}{dq^2}=0$$

elde edilir.

$$\frac{d^2\lambda_\upsilon}{dq^2}=\frac{2\left(a^{k-l}+1\right)\left(la^{k-l}+k\right)}{a^{2k+1}}$$

olduğundan

$$\frac{1}{a}\frac{d^2\lambda_\upsilon}{dq^2}>0$$

dır. Ayrıca $\lambda_\upsilon=re^{i\omega}$ olduğundan

$$\frac{d^2\lambda_\upsilon}{dq^2}=\frac{\lambda_\upsilon}{r}\left(2i\frac{dr}{dq}\frac{d\omega}{dq}-r\left(\frac{d\omega}{dq}\right)^2+\frac{d^2r}{dq^2}+ir\frac{d^2\omega}{dq^2}\right)$$

ve q 'nun reel değerlerle sınırlı olmasından

$$\frac{d^2\lambda_\upsilon}{dq^2}=\frac{\lambda_\upsilon}{r}\left(-r\left(\frac{d\omega}{dq}\right)^2+\frac{d^2r}{d\,\mathrm{Re}(q)^2}\right)$$

olur. Buradan

$$\frac{d^2r}{dq^2}=\mathrm{Re}\left(\frac{r}{\lambda_\upsilon}\frac{d^2\lambda_\upsilon}{dq^2}\right)+r\left(\frac{d\omega}{dq}\right)^2\geq\mathrm{Re}\left(\frac{r}{\lambda_\upsilon}\frac{d^2\lambda_\upsilon}{dq^2}\right)$$

yazılabilir. Aynı zamanda

$$\frac{d^2r}{dq^2}\Big|_{q=0} \geq \operatorname{Re}\left(\frac{r}{\lambda_\upsilon}\frac{d^2\lambda_\upsilon}{dq^2}\right) \geq \frac{2r\left(a^{k-l}+1\right)\left(la^{k-l}+k\right)}{a^{2k+2}} > 0$$

olduğundan $q \neq 0$ için lemmanın sağlandığı görülür. Dolayısıyla $q \neq 0$ için $|\lambda| > a$ olur.

Artık asimtotik kararlılık için bir tartışma başlatabiliriz. Lemma 3.2.4'ün *(i)* koşulundan q sıfırdan artar iken $\lambda(0) = a$ kökü D^2 birim diski içinde kalacaktır. Böylece $q > 0$ olması asimtotik kararlılık için bir gerek şarttır. Diğer taraftan $q > 0$ olsun. Dolayısıyla $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ iken Lemma 3.2.4'ün *(i)* koşulundan (3.2.4)'ün bütün köklerinin D^2 birim diski içinde kalacağını biliyoruz. Ayrıca $\theta = \frac{\pi}{2}$ iken Lemma 3.2.3 ve Lemma 3.2.4'ün *(ii)* koşulundan (3.2.4)'ün en az bir kökü q pozitif olduğu sürece D^2'yi aşıp $\mathbb{C} - D^2$ içine düşer. Bu nedenle (3.2.4)'ün bütün köklerinin D^2 birim diski içinde olması için gerek ve yeter şart $q^* = \min\{q_\upsilon : q_\upsilon > 0\}$ olmak üzere $q^* > q > 0$ ve $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$'ın sağlanmasıdır. Diğer taraftan $q^* > q > 0$'ın bir yeter koşul olduğu görülür.

Lemma 3.2.5

$$q^* = \begin{cases} q_{-1}, & 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ q_0\ , & -\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0, \end{cases}$$

olmak üzere, (3.2.1) sisteminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $0 < q < q^*$ ve $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ eşitsizliklerinin sağlanmasıdır. Diğer taraftan

$$q_{-1}=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi-2\theta}{k+l}\right)}{2\cos\left(\dfrac{(k-l)(\pi-2\theta)}{2(k+l)}\right)} \text{ ve } q_0=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi+2\theta}{k+l}\right)}{2\cos\left(\dfrac{(k-l)(\pi+2\theta)}{2(k+l)}\right)}$$

olduğundan

$$q^*=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi-2|\theta|}{k+l}\right)}{2\cos\left(\dfrac{(k-l)(\pi-2|\theta|)}{2(k+l)}\right)} \tag{3.2.19}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $q^*>0$ için $0<|\theta|<\frac{\pi}{2}$ sağlandığından, gerek ve yeter şart yalnızca $0<q<q^*$ eşitsizliğine indirgenir.

İspat:

q_{-1} ve q_0'ın ispatları benzer olduğundan sadece q_{-1} için ispat yapılacaktır. İspat için her $q_\upsilon>0$ için $q_\upsilon \geq q_{-1}$, yani, $0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ için

$$\frac{\sin\omega_\upsilon}{2\sin(k\omega_\upsilon-\theta)}\geq\frac{\sin\omega_{-1}}{2\sin(k\omega_{-1}-\theta)} \tag{3.2.20}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $\omega_{-1}=0$ olduğundan $\theta=\frac{\pi}{2}$ durumu açıktır. Dolayısıyla ispatı $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ için ve aşağıdaki (i) ve (ii) durumlarını göz önüne alarak yapacağız:

i) $\upsilon\geq 0$ için $0<\omega_\upsilon\leq\frac{\pi}{2}$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda $k+l=M$ iken $\varphi_\theta\equiv\varphi=-\omega_{-1}=\frac{\pi-2\theta}{M}$, $\varphi_0=\frac{\pi}{M}$, $\eta=(M-k)\varphi$ ve $\xi=\omega_\upsilon=\frac{(2\upsilon+1)\pi+2\theta}{k+l}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$k\omega_{\upsilon}-\theta=(2\upsilon+1)\pi-\left(\frac{\xi\eta}{\varphi}-\theta\right)$$
$$k\omega_{-1}-\theta=-\pi+\eta+\theta.$$

Dolayısıyla (3.2.20)'yi yeniden

$$\frac{\sin\xi}{\sin\left(\frac{\xi\eta}{\varphi}-\theta\right)}\geq\frac{\sin\varphi}{\sin(\eta+\theta)}$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$\sin\xi\sin(\eta+\theta)\geq\sin\varphi\sin\left(\frac{\xi\eta}{\varphi}-\theta\right) \tag{3.2.21}$$

olur. $1<l\leq k$ olduğundan $M<2k\leq 2M-2$ yazabiliriz. Buradan

$$\varphi<\eta\leq\frac{\pi}{2}-\theta \tag{3.2.22}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{\pi+2\theta}{M}\leq\omega_{\upsilon}\leq\frac{\pi}{2}$$

olduğundan

$$\frac{2\theta}{M}+\varphi_0\leq\xi\leq\frac{\pi}{2} \tag{3.2.23}$$

olur. $H(\xi,\eta)=\sin\xi\sin(\eta+\theta)-\sin\varphi\sin\left(\frac{\xi\eta}{\varphi}-\theta\right)$ olarak tanımlayalım. Böylece (3.2.21)'in ispatı

$$D := \left\{ (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2\theta}{M} + \varphi_0 \le \xi \le \frac{\pi}{2},\ \varphi < \eta \le \frac{\pi}{2} - \theta \right\}$$

dikdörtgensel bölgesi üzerinde

$$H(\xi,\eta) \ge 0 \tag{3.2.24}$$

eşitsizliğine indirgenmiş olur. (3.2.24)'ün ispatını bölgenin içi ve sınırı olarak iki ayrı adımda ele alacağız.

i)

Adım 1:

$C_r(H) := \{(\xi,\eta) \in D : dH(\xi,\eta) = 0\}$ cümlesi üzerinde $H(\xi,\eta) \ge 0$;

$dH(\xi,\eta) = 0$'dan

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \cos\xi \sin(\eta+\theta) - \sin\varphi \cos\left(\frac{\xi\eta}{\varphi} - \theta\right)\frac{\eta}{\varphi} = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \sin\xi \cos(\eta+\theta) - \sin\varphi \cos\left(\frac{\xi\eta}{\varphi} - \theta\right)\frac{\xi}{\varphi} = 0$$

dir. Yukarıdaki son iki denklemden $C_r(H)$ cümlesi üzerinde $\dfrac{\xi}{\tan\xi} = \dfrac{\eta}{\tan(\eta+\theta)}$ eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla $\varphi < \eta \le \dfrac{\pi}{2} - \theta$ için ξ'yi η'nın bir Φ fonksiyonu olarak $\xi = \Phi(\eta)$ şeklinde ifade edebiliriz. $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2}$ için $\dfrac{u}{\tan u}$ fonksiyonunun monoton azalan olması ve $\dfrac{\xi}{\tan\xi} < \dfrac{\eta+\theta}{\tan(\eta+\theta)}$ eşitsizliğinden, $\varphi < \eta \le \dfrac{\pi}{2} - \theta$ için $\Phi(\eta) \ge \eta + \theta$ eşitsizliği elde edilir. Bu durumda (3.2.24)'ü yeniden ele alırsak

$$H(\xi,\eta)=\sin\Phi(\eta)\sin(\eta+\theta)-\sin\varphi\sin\left(\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi}-\theta\right)$$

ve

$$\frac{H(\xi,\eta)}{\Phi(\eta)(\eta+\theta)}=\frac{\sin\Phi(\eta)\sin(\eta+\theta)}{\Phi(\eta)(\eta+\theta)}-\sin\varphi\frac{\sin\left(\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi}-\theta\right)}{\Phi(\eta)(\eta+\theta)}$$

elde edilir. $\frac{\Phi(\eta)}{\varphi}>1$ olduğundan

$$\frac{H(\xi,\eta)}{\Phi(\eta)(\eta+\theta)}\geq\frac{\sin\Phi(\eta)\sin(\eta+\theta)}{\Phi(\eta)(\eta+\theta)}-\frac{\sin\varphi}{\varphi}\frac{\sin\left(\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi}-\theta\right)}{\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi}-\theta}$$

olur. $0\leq u\leq\pi$ için $\frac{\sin u}{u}$ fonksiyonunun monoton azalan olmasından $\Phi(\eta)\geq\eta+\theta$ için

$$\frac{\sin(\eta+\theta)}{(\eta+\theta)}\geq\frac{\sin\Phi(\eta)}{\Phi(\eta)} \tag{3.2.25}$$

elde edilir. (3.2.25)'den $\varphi<\eta\leq\frac{\pi}{2}-\theta$ için

$$\left(\frac{\sin\Phi(\eta)}{\Phi(\eta)}\right)^2\geq\frac{\sin\varphi}{\varphi}\frac{\sin\left(\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi}-\theta\right)}{\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi}-\theta} \tag{3.2.26}$$

olur. Dolayısıyla (3.2.26), (3.2.24)'e indirgenir. (3.2.26)'nın ispatı için $\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi}-\theta\geq\Phi(\eta)-\theta>0$ olduğundan aşağıdaki üç durum söz konusudur.

Durum 1: $0 < \frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi} - \theta \leq \pi$:

$0 \leq u \leq \pi$ için $\frac{\sin u}{u}$ fonksiyonunun monoton azalan olmasından $\varphi < \eta \leq \frac{\pi}{2} - \theta$ için

$$\left(\frac{\sin \Phi(\eta)}{\Phi(\eta)} \right)^2 \geq \frac{\sin \varphi}{\varphi} \frac{\sin\left(\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi} - \theta \right)}{\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi} - \theta} \geq \left(\frac{\sin\left(\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi} - \theta \right)}{\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi} - \theta} \right)^2 \tag{3.2.27}$$

yazabiliriz. $\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi} - \theta - \Phi(\eta)$ ifadesini göz önünde bulunduralım. Buradan $\Phi(\eta)\left(\frac{\eta}{\varphi} - 1 \right) - \theta > 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\Phi(\eta) < \frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi} - \theta \tag{3.2.28}$$

dir. $0 \leq u \leq \pi$ için $\frac{\sin u}{u}$ fonksiyonunun monoton azalan olmasından ve (3.2.28)'den $0 < \frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi} - \theta \leq \pi$ olduğu görülür.

Durum 2: $\pi < \frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi} - \theta \leq 2\pi$:

$\sin\left(\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi} - \theta \right) \leq 0$ olduğu için ispat açıktır.

Durum 3: $\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi} - \theta > 2\pi$:

$\varphi < \eta \leq \frac{\pi}{2} - \theta$ için

$$\left(\frac{\sin\Phi(\eta)}{\Phi(\eta)}\right)-\frac{\sin\varphi}{\varphi}\left(\frac{\sin\left(\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi}-\theta\right)}{\frac{\Phi(\eta)\eta}{\varphi}-\theta}\right)^2\geq\frac{4}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}>0$$

dir. Dolayısıyla adım 1'in ispatı tamamlanır.

i) Adım 2: ∂D üzerinde $H(\xi,\eta)$'nın negatif olmadığını gösterelim;

Bunun için sınır noktalarını sırasıyla inceleyeceğiz:

Durum 1:

∂D üzerinde $\eta=\frac{\pi}{2}-\theta$ iken;

$$\begin{aligned}H(\xi,\eta)&=\sin\xi\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\theta\right)-\sin\varphi\sin\left(\frac{\xi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\varphi}-\theta\right)\\&\geq\sin\xi-\sin\varphi>0.\end{aligned}$$

Durum 2:

∂D üzerinde $\xi=\frac{\pi}{2}$ iken;

$$\begin{aligned}H(\xi,\eta)&=\sin\frac{\pi}{2}\sin(\eta+\theta)-\sin\varphi\sin\left(\frac{\pi\eta}{2\varphi}-\theta\right)\\&\geq\sin(\eta+\theta)-\sin\varphi>0.\end{aligned}$$

Durum 3:

∂D üzerinde $\eta=\varphi$ iken;

$$
\begin{aligned}
H(\xi,\eta) &= \sin\xi\sin(\varphi+\theta)-\sin\varphi\sin\left(\frac{\xi\varphi}{\varphi}-\theta\right)\\
&= \sin\xi\sin(\varphi+\theta)-\sin\varphi\sin(\xi-\theta)\\
&= \sin\xi\cos\varphi\sin\theta+\sin\varphi\sin\theta\cos\xi>0.
\end{aligned}
$$

Durum 4:

∂D üzerinde $\xi=\dfrac{2\theta}{M}+\varphi_0$ iken;

$$
H(\xi,\eta)=\sin\left(\frac{2\theta}{M}+\varphi_0\right)\sin(\eta+\theta)-\sin\varphi\sin\left(\frac{\left(\frac{2\theta}{M}+\varphi_0\right)\eta}{\varphi}-\theta\right)
$$

fonksiyonun işaretini inceleyebilmek için $\dfrac{\left(\frac{2\theta}{M}+\varphi_0\right)\eta}{\varphi}-\theta-(\eta+\theta)$ ifadesini ele alacağız.

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{2\theta}{M}+\varphi_0\right)\eta}{\varphi}-\theta-(\eta+\theta) &= 2\theta\left(\frac{2\eta}{M\varphi}-1\right)\\
&= \frac{2\theta}{M\varphi}(2\eta-M\varphi)\\
&\le \frac{2\theta}{M\varphi}\left(2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-M\varphi\right)=0
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla

$$
\sin\left(\frac{\left(\frac{2\theta}{M}+\varphi_0\right)\eta}{\varphi}-\theta\right)\ge\sin(\eta+\theta)
$$

dır. Ayrıca $\varphi = \dfrac{\pi - 2\theta}{M}$ ve $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{M}$ olduğundan

$$\varphi < \frac{2\theta}{M} + \varphi_0 \le \frac{\pi}{2}$$

elde ederiz. Böylece ∂D üzerinde $\xi = \dfrac{2\theta}{M} + \varphi_0$ iken $H(\xi,\eta) \ge 0$ 'dır.

ii) $\upsilon < 0$ için $-\dfrac{\pi}{2} \le \omega_\upsilon < 0$: Lemma 3.2.2'den $\omega_\upsilon = \dfrac{(2\upsilon+1)\pi + 2\theta}{k+l}$ için $q_\upsilon = \dfrac{\sin\omega_\upsilon}{2\sin(l\omega_\upsilon - \theta)}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\frac{\theta - \pi}{2l} \le \frac{\theta - \pi}{M} \le \frac{2\theta - \pi}{M} = \omega_{-1}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $u \in \left[\dfrac{\theta - \pi}{2l}, 0\right)$ için monoton azalan olan $h(u) = \dfrac{\sin u}{2\sin(lu - \theta)}$ fonksiyonu tanımlansın. O zaman

$$h\left(\frac{\theta - \pi}{2l}\right) \ge h(\omega_{-1}) \qquad (3.2.29)$$

olur. İspat için İlk olarak $\omega_\upsilon \in \left[\dfrac{\theta - \pi}{2l}, 0\right)$ alalım. Böylece $\omega_\upsilon < \omega_{-1}$ olduğundan $q_\upsilon = h(\omega_\upsilon) \ge h(\omega_{-1}) = q_{-1}$ olur.

İkinci olarak $\omega_\upsilon \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\theta - \pi}{2l}\right)$ alalım. Bu durumda

$m=1,2,\ldots$ olmak üzere $\omega_\upsilon \in \left(\left(\dfrac{\theta-(2m+1)\pi}{2l}\right),\left(\dfrac{\theta-2m\pi}{2l}\right)\right)$ ve $l \geq m+1$ için $h(u)$ fonsiyonu $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\theta-\pi}{2l}\right)$ aralığında monoton azalan olduğundan ve (3.2.29)'dan

$$q_\upsilon = h(\omega_\upsilon) = \frac{\sin\omega_\upsilon}{2\sin(l\omega_\upsilon-\theta)} \geq h\left(\frac{\theta-\pi}{2l}\right) \geq h(\omega_{-1}) = q_{-1}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki lemmalar ışığında aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.2.1

$0<\theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, $a \in [-1,1]-\{0\}$ olsun ve (3.2.1) sistemindeki A matrisinin (II)'deki gibi olduğunu kabul edelim. O zaman (3.2.1) sisteminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$0<q<\frac{\sin\left(\dfrac{\pi-2|\theta|}{k+l}\right)}{2\cos\left(\dfrac{(k-l)(\pi-2|\theta|)}{2(k+l)}\right)}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat:

İspat; Lemma 3.2.1, Lemma 3.2.2, Lemma 3.2.3, Lemma 3.2.4 ve Lemma 3.2.5'den doğrudan elde edilir. □

Örnek 3.2.1

$A=qR(\theta)$ ve $a=1$ olmak üzere

$$x_{n+1} - x_n + A\left(x_{n-3} + x_{n-2}\right) = 0, \tag{3.2.30}$$

denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) \equiv \left(\lambda^4 - \lambda^3 + qe^{i\theta}(\lambda+1)\right)\left(\lambda^4 - \lambda^3 + qe^{-i\theta}(\lambda+1)\right) = 0,$$

şeklindedir. $k = 3,\ l = 2$ ve $a = 1$ olduğundan, Teorem 3.2.1'den dolayı

$$0 < q < \sin\left(\frac{\pi - 2\theta}{10}\right) < \sin 18$$

dir. Dolayısıyla $q = \dfrac{1}{8}$ seçimi ile

$$\lambda^4 - \lambda^3 + \frac{1}{8}e^{i\theta}(\lambda+1) = 0$$

karakteristik denklemini incelersek, bu denklemin $e^{i\theta} = 6 + 3i$ için $\lambda = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$ 'ye sahip olduğu görülür. Dolayısıyla (3.2.30)'un kökleri birim daire içine düşer.

Teorem 3.2.2

$a \in [-1,1] - \{0\}$ olsun ve (3.2.1) sistemindeki A matrisinin (I)'deki gibi olduğunu kabul edelim. O zaman (3.1.2.1) denklem sisteminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $i = 1,2$ olmak üzere

$$0 < b_i < \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{k+l}\right)}{2\cos\left(\dfrac{(k-l)\pi}{2(k+l)}\right)}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat:

Teorem 3.2.1'in ispatına benzerdir. □

Son olarak A, $d \times d$ tipinde bir sabit matris, k, l, $1 < l \leq k$ özelliğindeki pozitif tamsayılar ve $a \in [-1,1] - \{0\}$ özelliğinde bir reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1} - ax_n + A(x_{n-k} + x_{n-l}) = 0, \; n \in \{0,1,2,...\} \tag{3.2.31}$$

yüksek boyutlu iki gecikmeli lineer fark denklem sistemini göz önüne alalım.

Örnek 3.2.2

$A = \begin{pmatrix} b_1 & d \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$x_{n+1} - x_n + A(x_{n-3} + x_{n-2}) = 0, \tag{3.2.32}$$

denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) \equiv (\lambda^4 - \lambda^3 + b_1(\lambda + 1))(\lambda^4 - \lambda^3 + b_2(\lambda + 1)) = 0,$$

şeklindedir. $k = 3, \; l = 2$ ve $a = 1$ olduğundan, Teorem 3.2.2'den dolayı

$$0 < b_i < \sin 18$$

dir. Ayrıca $b_1 = \dfrac{1}{24}$ seçimi ile

$$\lambda^4 - \lambda^3 + \frac{1}{24}(\lambda + 1) = 0$$

karakteristik denklemini incelersek, bu denklemin $\lambda_1 = 0,5$ ve $\lambda_2 = 0,887$ köklerine sahip olduğu görülür. Dolayısıyla (3.2.32)'nin kökleri birim daire içine düşer.

Teorem 3.2.3

A nın özdeğerleri $q_j e^{i\theta_j}\ (j = 1, 2, ..., d)$ şeklinde olsun. O zaman (3.2.31) denklem sisteminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$0 < q < \frac{\sin\left(\frac{\pi - 2|\theta_j|}{k+l}\right)}{2\cos\left(\frac{(k-l)(\pi - 2\theta_j)}{2(k+l)}\right)} \qquad (j = 1, 2, ..., d)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat:

A nın özdeğerleri $q_j e^{i\theta_j}\ (j = 1, 2, ..., d)$ olduğundan. (3.2.31)'in karakteristik denklemi

$$f(\lambda) = \prod_{j=1}^{d}\left(\lambda^{k+1} - a\lambda^k + q_j e^{i\theta_j}\left(\lambda^{k-l} + 1\right)\right) = 0$$

şeklindedir. Dolayısıyla Teorem 3.2.3, Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2'nin bir sonucu olarak elde edilir. □

Şimdi, 3.1. ve 3.2.'inci kesimlerde ele alınan fark denklem sistemlerinin daha genel hali olan lineer olmayan ve değişken gecikmeye sahip bir fark denklem sisteminin bir sınıfı için asimtotik kararlılık şartlarını inceleyeceğiz.

3.3. Değişken Katsayılı ve Değişken Gecikmeli Lineer Olmayan Fark Denklem Sistemi için Asimtotik Kararlılık Şartları

Bu kesimde, $a \in (-1,1)-\{0\}$ ve $B(n)=\left(b_{ij}(n)\right)_{k\times k}$ tamsayılar üzerinde tanımlı singüler olmayan bir matris fonksiyonu olmak üzere

$$x(n+1)=ax(n)+B(n)F\left(x_{n-m_n}\right), \quad n=0,1,2,... \tag{3.3.1}$$

biçiminde değişken gecikmeli lineer olmayan bir fark denklem sisteminin çözümlerin eş sınırlılığı ve sıfır çözümünün asimtotik kararlılığı incelenmiştir.

Lemma 3.3.1

$a \in (-1,1)-\{0\}$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $B(n)=\left(b_{ij}(n)\right)_{k\times k}$ nin singüler olmayan bir matris fonksiyonu olduğunu kabul edelim. O zaman $x(n)$ nin (3.3.1) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$x(n)=x(n_0)a^{n-n_0}+\sum_{t=n_0}^{n-1}B(t)F\left(x_{t-m_t}\right)a^{n-t-1} \tag{3.3.2}$$

olmasıdır.

İspat:

(3.3.1) denklemininin her iki yanı $\prod_{s=n_0}^{n} a^{-1}$ ile çarpılıp denklem yeniden düzenlenirse

$$\Delta\left(x(n)\prod_{s=n_0}^{n-1}a^{-1}\right)=B(n)F\left(x_{n-m_n}\right)\prod_{s=n_0}^{n}a^{-1} \tag{3.3.3}$$

denklemine varılır. (3.3.3)’ün n_0’dan $n-1$’e toplamı alınırsa

$$x(n)\prod_{s=n_0}^{n} a^{-1} = x(n_0) + \sum_{t=n_0}^{n-1} B(t)F\left(x_{t-m_t}\right)\prod_{s=n_0}^{t} a^{-1} \tag{3.3.4}$$

olur. (3.3.4) düzenlenirse

$$x(n) = x(n_0)a^{n-n_0} + \sum_{t=n_0}^{n-1} B(t)F\left(x_{t-m_t}\right)a^{n-t-1}$$

çözümü elde edilir.

Lemma 3.3.2

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

i) $F(0)=0$ ve F, x 'e göre lokal olarak Lipschitz şartını sağlasın. Yani $\|x\|,\|y\| \le K$ olacak şekilde pozitif bir K varolduğunda, o zaman

$$\|F(x)-F(y)\| \le L\|x-y\| \tag{3.3.5}$$

olacak şekilde pozitif bir L sabiti vardır.

ii) $a \in (-1,1)-\{0\}$, $b \in (0,1)$ ve $\|B(t)\| = \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\right)$ olmak üzere $n \ge n_0$ için

$$L\sum_{t=n_0}^{n-1}\|B(t)\| \le b \tag{3.3.6}$$

olsun. O zaman (3.3.1) denkleminin çözümleri eş sınırlıdır.

İspat:

Bir B_1 pozitif sabiti alalım ve $B_1 \le (1-b)B_2$ olacak şekilde bir $B_2 > 0$ seçelim. ψ, $\mathbb{Z}_0$ üzerinde $\|\psi(n)\| \le B_1$ eşitsizliğini sağlayan sınırlı başlangıç fonksiyonu olsun. $\|\varphi\| = \max\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|\varphi(n)\|$ olmak üzere

$$H = \left\{ \varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid \mathbb{Z}_0 'da\ \varphi(n) = \psi(n)\ ve\ \|\varphi\| \le B_2 \right\}$$

cümlesini tanımlayalım. $(H, \|.\|)$ uzayı bir metrik uzaydır. Gerçekten $(H, \|.\|)$ uzayının metrik uzay olma koşulunun birinci ve ikinci aksiyomlarını sağladığı açıktır. Üçüncü aksiyomu için $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in H$ alırsak

$$\begin{aligned}
d(\varphi_1, \varphi_2) &= \|\varphi_1 - \varphi_2\| \\
&= \max_{n\in Z^+} \left\|(\varphi_1 - \varphi_2)_n\right\| \\
&= \max_{n\in Z^+} \left\|(\varphi_1 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_2)_n\right\| \\
&= \max_{n\in Z^+} \left\|(\varphi_1 - \varphi_3)_n + (\varphi_3 - \varphi_2)_n\right\| \\
&\le \max_{n\in Z^+} \left\|(\varphi_1 - \varphi_3)_n\right\| + \max_{n\in Z^+} \left\|(\varphi_3 - \varphi_2)_n\right\| \\
&= d(\varphi_1, \varphi_3) + d(\varphi_3, \varphi_2)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(H, \|.\|)$ uzayı bir metrik uzaydır. $(H, \|.\|)$ uzayının tam metrik uzay olduğunu göstermeliyiz. (φ^l)'nin H cümlesi üzerinde bir Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ ve } \exists l_0 ; \forall k, l \ge l_0 \text{ için } \left\|\varphi^l - \varphi^k\right\| < \varepsilon$$

veya

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ ve } \exists l_0 :\ \forall k, l \ge l_0 \text{ için } \max_{n\in\mathbb{Z}} \left|(\varphi^l - \varphi^k)_n\right| < \varepsilon$$

veya

$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için,

$$\exists l_0 : \forall k, l \geq l_0 : \left| \left(\varphi^l - \varphi^k \right)_n \right| < \varepsilon \tag{3.3.7}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla n sabiti için (3.3.7) ifadesinden $\varphi^l(n)$ dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde bir Cauchy dizisidir. Ayrıca $\mathbb{R}$ tam metrik uzay olduğundan

$$\exists \varphi(n) \in \mathbb{R} : \varphi(n) = \lim_{l \to \infty} \varphi^l(n)$$

dir. Şimdi $\varphi \in H$ olduğunu gösterelim. $\left(\varphi^l\right) \in H$ olduğundan $\mathbb{Z}_0$ üzerinde $\varphi^l(n) = \psi(n)$'dir. Buradan $\varphi(n) = \lim_{l \to \infty} \varphi^l(n) = \psi(n)$ eşitliğini elde ederiz. Ayrıca, $\left\| \varphi^l(n) \right\| \leq B_2$ olduğundan $\left\| \varphi(n) \right\| \leq B_2$'dir. Böylece $\varphi \in H$ olur.

Şimdi $\mathbb{Z}_0$ üzerinde $(P\varphi)(n) = \psi(n)$ olacak şekilde bir $P : H \to H$ dönüşümü tanımlayalım ve $n \geq n_0$ için

$$(P\varphi)(n) = \psi(n_0) a^{n-n_0} + \sum_{t=n_0}^{n-1} B(t) F\left(\varphi_{t-m_t}\right) a^{n-t-1} \tag{3.3.8}$$

olsun. $P : H \to H$ bir dönüşüm olduğunu gösterelim. $n \geq n_0$ için

$$\left\| (P\varphi)(n) \right\| = \left\| \psi(n_0) a^{n-n_0} + \sum_{t=n_0}^{n-1} B(t) F\left(\varphi_{t-m_t}\right) a^{n-t-1} \right\|$$

$$\leq \left\| \psi(n_0) \right\| \left| a^{n-n_0} \right| + \sum_{t=n_0}^{n-1} \left\| B(t) \right\| \left\| F\left(\varphi_{t-m_t}\right) a^{n-t-1} \right\| \tag{3.3.9}$$

dir. $\|\varphi\| \le B_2$ olduğundan, $\|\varphi_{t-m_t}\| \le B_2$'dir. Dolayısıyla $\left\|F\left(x_{t-m_t}\right)\right\| \le L\|\varphi_{t-m_t}\| \le LB_2$ yazabiliriz. O halde (3.3.9)'dan

$$\begin{aligned}\|(P\varphi)(n)\| &= B_1 + B_2 L\left\|\sum_{t=n_0}^{n-1} B(t)a^{n-t-1}\right\| \\ &\le B_1 + B_2 L\left\|\sum_{t=n_0}^{n-1} B(t)\right\| \\ &\le B_1 + B_2 b \le B_2\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bize P'nin H'dan H'a bir dönüşüm olduğunu gösterir. Şimdi P'nin supremum norm altında bir daralma olduğunu göstermeliyiz. $\varphi, \eta \in H$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\|(P\varphi)(n) - (P\eta)(n)\| &= \left\|\sum_{t=n_0}^{n-1} B(t)F\left(\varphi_{t-m_t}\right)a^{n-t-1} - \sum_{t=n_0}^{n-1} B(t)F\left(\eta_{t-m_t}\right)a^{n-t-1}\right\| \\ &\le L\sum_{t=n_0}^{n-1}\|B(t)\|\left|a^{n-t-1}\right|\|\varphi-\eta\| \\ &\le b\|\varphi-\eta\|\end{aligned}$$

olduğundan P bir daralmadır. Dolayısıyla, daralma dönüşüm prensibinden P'nin, yalnız bir $\varphi^* \in H$ çözümüne sahip olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre

$$\left(P\varphi^*\right)(n) = \varphi^* = \psi\left(n_0\right)a^{n-n_0} + \sum_{t=n_0}^{n-1} B(t)F\left(\varphi^*_{t-m_t}\right)a^{n-t-1} \qquad (3.3.10)$$

eşitliğini yazabiliriz. $n_0 \in \mathbb{Z}_0$ ve $\varphi^* \in H$ olduğundan $\psi\left(n_0\right) = \varphi^*\left(n_0\right)$'dır. Böylece (3.3.10)'dan

$$\varphi^* = \varphi^*\left(n_0\right)a^{n-n_0} + \sum_{t=n_0}^{n-1} B(t)F\left(\varphi^*_{t-m_t}\right)a^{n-t-1}$$

elde edilir. Yani $\varphi^*(n)$, (3.3.1)'in bir çözümüdür ve bu da (3.3.1)'in çözümlerinin eş sınırlı olduğunu gösterir.

Sonuç 3.3.1

Lemma 3.3.2'nin şartlarının sağlandığını kabul edelim. O zaman (3.3.1)'in sıfır çözümü Liapunov kararlıdır.

İspat:

$b\varepsilon \in (0,1)$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ alalım ve $0 < \delta \le \varepsilon(1-b)$ biçiminde bir δ seçelim. O zaman

$$\delta + b\varepsilon \le \varepsilon$$

olur. ψ, $\mathbb{Z}_0$ üzerinde $\|\psi(n)\| \le \delta$ eşitsizliğini sağlayan sınırlı başlangıç fonksiyonu olsun. $\|\varphi\| = \max\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(n)|$ olmak üzere

$$H = \left\{ \varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid \mathbb{Z}_0 \text{'} da \ \varphi(n) = \psi(n) \ ve \ \|\varphi\| \le \varepsilon \right\}$$

cümlesini tanımlayalım. Lemma 3.3.2'den de görüldüğü gibi $(H, \|.\|)$ uzayı bir tam metrik uzaydır. $n \ge n_0$ için

$$(P\varphi)(n) = \psi(n_0) a^{n-n_0} + \sum_{t=n_0}^{n-1} B(t) F\left(\varphi_{t-m_t}\right) a^{n-t-1} \tag{3.3.11}$$

şeklinde tanımlı $P : H \to H$ dönüşümünü göz önüne alalım. . Lemma 3.3.2'den P'nin bir daralma olduğunu biliyoruz. Herhangi bir $\varphi \in H$ için $\|P\varphi\| < \varepsilon$'dur. Dolayısıyla (3.3.1)'in sıfır çözümü Liapunov kararlıdır.

Teorem 3.3.2

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

i) $F(0)=0$ ve F, x'e göre lokal olarak Lipschitz şartını sağlasın. Yani $\|x\|,\|y\| \le K$ olacak şekilde pozitif bir K sabiti var olduğunda

$$\|F(x)-F(y)\| \le L\|x-y\| \tag{3.3.12}$$

olacak şekilde pozitif bir L sabiti vardır.

ii) $|a|<1$ ve $\|B(t)\| = \|B(t)\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|\right)$ olmak üzere $n \ge n_0$ için

$$L\sum_{t=n_0}^{n-1}\|B(t)\| \le b, \tag{3.3.13}$$

olacak şekilde bir $b \in (0,1)$ sabiti vardır.

iii) $n \to \infty$ iken $|n-m_n| \to \infty$

dır. Bu şartlar altında (3.3.1)'in sıfır çözümü asimtotik kararlıdır.

İspat:

$|a|<1$ olduğundan $n \to \infty$ iken

$$\prod_{s=n_0}^{n-1} a = a^{n-n_0} \to 0 \tag{3.3.14}$$

dır. ψ, $\|\psi(n)\| \le r(t_0)$ eşitsizliğini sağlayan sınırlı başlangıç fonksiyonu olsun ve

$$H^{*}=\left\{\varphi:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{R} \mid \mathbb{Z}_0\text{'}da\ \varphi(n)=\psi(n)\ ve\ \|\varphi\|\leq\varepsilon\ ve\ n\rightarrow\infty\ iken\ |\varphi(n)|\rightarrow 0\right\}$$

cümlesini tanımlayalım. Ayrıca $n\geq n_0$ için

$$(P\varphi)(n)=\psi(n_0)a^{n-n_0}+\sum_{t=n_0}^{n-1}B(t)F\left(\varphi_{t-m_t}\right)a^{n-t-1} \tag{3.3.15}$$

şeklinde tanımlı $P:H^{*}\rightarrow H^{*}$ dönüşümünü tanımlayalım. Sonuç 3.3.1'den, P dönüşümünün bir daralma ve H^{*}'dan H^{*}'a bir dönüşüm olduğunu biliyoruz.

Asimtotik kararlılık için, $n\rightarrow\infty$ iken $(P\varphi)(n)$'nin sıfıra yaklaştığını göstereceğiz. $n\rightarrow\infty$ iken $\left|a^{n-n_0}\right|\rightarrow 0$ olduğundan (3.3.15)'in sağ tarafının ilk terimi $\psi(n_0)a^{n-n_0}\rightarrow 0$ olur. O halde $n\rightarrow\infty$ iken sadece $\sum_{t=n_0}^{n-1}B(t)F\left(\varphi_{t-m_t}\right)\rightarrow 0$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. $\varphi\in H^{*}$ alalım. O zaman $\left|\varphi_{n-m_n}\right|<\varepsilon$'dır. Ayrıca $n-m_n\rightarrow\infty$ iken $\varphi_{n-m_n}\rightarrow 0$ olduğundan, $n>n_1$ ve $\varepsilon_1>0$ için $\left|\varphi_{n-m_n}\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_1>0$ vardır. Diğer taraftan (3.3.14) gereğince $n>n_2$ için

$$\left|a^{n-n_0}\right|<\frac{\varepsilon_1}{b\varepsilon}$$

olacak şekilde bir $n_2>n_1$ sayısı vardır. Dolayısıyla $n>n_2$ için

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{t=n_0}^{n-1} B(t)F\left(\varphi_{t-m_t}\right)a^{n-t-1}\right\| &\le \sum_{t=n_0}^{n-1}\left\|B(t)F\left(\varphi_{t-m_t}\right)a^{n-t-1}\right\| \\
&\le \sum_{t=n_0}^{n_1-1}\left\|B(t)F\left(\varphi_{t-m_t}\right)a^{n-t-1}\right\| + \sum_{t=n_1}^{n-1}\left\|B(t)F\left(\varphi_{t-m_t}\right)a^{n-t-1}\right\| \\
&\le L\sum_{t=n_0}^{n_1-1}\left\|B(t)\varphi_{t-m_t}a^{n-t-1}\right\| + L\sum_{t=n_1}^{n-1}\left\|B(t)\varphi_{t-m_t}a^{n-t-1}\right\| \\
&\le \varepsilon L\sum_{t=n_0}^{n_1-1}\left\|B(t)a^{n-t-1}\right\| + \varepsilon_1 L\sum_{t=n_1}^{n-1}\left\|B(t)a^{n-t-1}\right\| \\
&\le \varepsilon L\sum_{t=n_0}^{n_1-1}\left\|B(t)\prod_{s=t+1}^{n_1-1} a \prod_{s=n_1}^{n-1} a\right\| + \varepsilon_1 b \\
&\le \varepsilon L\left|\prod_{s=n_1}^{n-1} a\right|\sum_{t=n_0}^{n_1-1}\left\|B(t)\right\|\left|\prod_{s=t+1}^{n_1-1} a\right| + \varepsilon_1 b \\
&\le \varepsilon_1 + \varepsilon_1 b
\end{aligned}
$$

dır. Bu ise bize $n \to \infty$ iken $(P\varphi)(n) \to 0$ sonucunu verir. Daralma dönüşüm prensibinden, P dönüşümü H^* üzerinde tek bir sabit noktaya sahiptir. Diğer bir deyişle (3.3.1) denkleminin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm $n \to \infty$ iken sıfıra gider.

Örnek 3.3.1

$a = \dfrac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ için $F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$, $m(n) = \left[\!\left[\dfrac{n}{2}\right]\!\right]$ ve

$$
A(n) = \begin{pmatrix} \dfrac{2^{-2n+2m(n)}}{2^{m(n)}\left(1+2^{-2n+2m(n)}\right)} & \dfrac{2^{-m(n)}}{1+2^{-2n+2m(n)}} \\ \dfrac{3+4.2^{-2n+2m(n)}}{4.2^{2m(n)}\left(1+2^{-2n+2m(n)}\right)} & \dfrac{1}{4.2^{2m(n)}\left(1+2^{-2n+2m(n)}\right)} \end{pmatrix}
$$

olmak üzere

$$x(n+1)=\frac{1}{2}x(n)+A(n)F\left(x\left(n-\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\right)\right), \qquad n\geq 0 \tag{3.3.16}$$

lineer olmayan fark denklem sistemini ele alalım.

i) Öncelikle, $\|x\|_1=|x_1|+|x_2|\leq 1$ olacak şekilde $K=1$ sayısı vardır ve

$$\begin{aligned}\|F(x)\|_1=|x_1{}^2|+|x_2{}^2|&=|x_1|^2+|x_2|^2\\ &\leq(|x_1|+|x_2|)^2\\ &\leq|x_1|+|x_2|=\|x\|_1\end{aligned}$$

için pozitif bir $L=1$ sabiti vardır.

ii) Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\|A(n)\|&=\max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)\\ &=\frac{1}{2^{m(n)}}\leq 1\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{m(n)}}=0$$

olduğundan

$$\sum_{t=n_0}^{n-1}\|A(n)\|\leq b$$

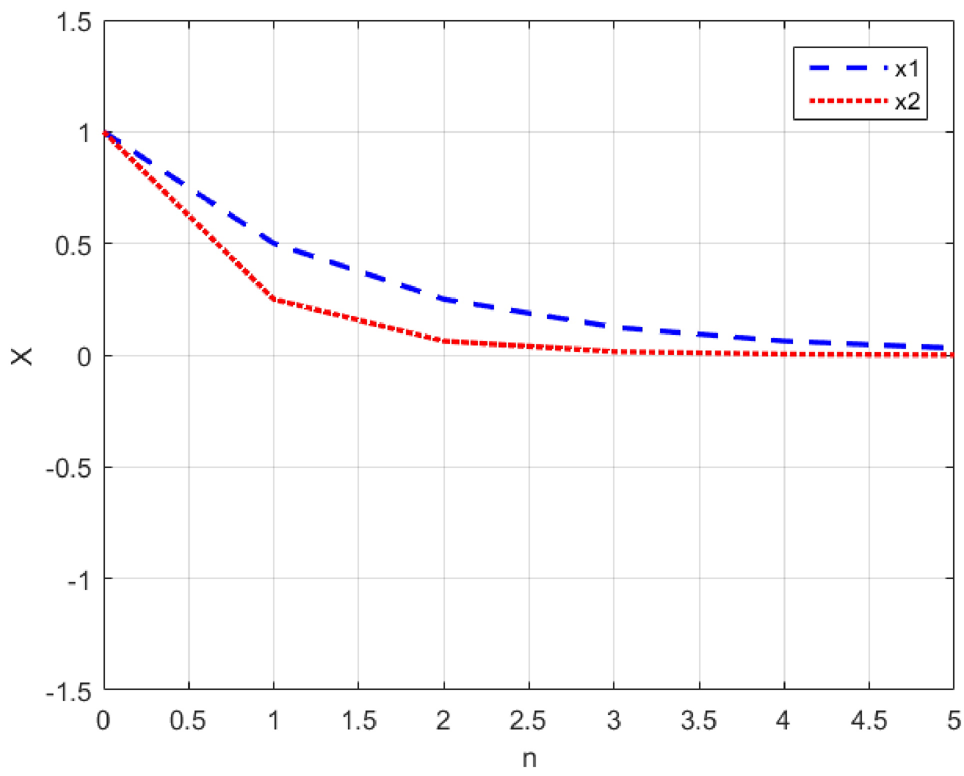
olacak şekilde bir $b\in(0,1)$ sabiti vardır.

iii)

$n \to \infty$ iken $|n - m_n| \to \infty$

olduğundan teoremin bütün koşuluda sağlanır. Böylece (3.3.16) denklem sistemi asimtotik kararlıdır.

Bu denklem sisteminin bir çözümü $x = \begin{pmatrix} 2^{-n} \\ 4^{-n} \end{pmatrix}$ dir. Bu çözümün davranışı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1. $x = \begin{pmatrix} 2^{-n} \\ 4^{-n} \end{pmatrix}$ çözümünün davranışı

Yukarıda ele almış olduğumuz (3.2.1) gecikmeli fark denklem sisteminin sürekli analoğu olan gecikmeli diferensiyel denklem sisteminin kararlılık şartları aşağıda incelenmiştir.

3.4. İki Gecikmeli Lineer Homojen Diferensiyel Denklem Sistemi İçin Asimtotik Kararlılık Şartları

Bu kesimde, A 2×2 tipinde reel sabit bir matris, a, k ve l, $k>l>0$ özelliğinde reel sayılar olmak üzere

$$x'(t)+(1-a)x(t)+A\big(x(t-k)+x(t-l)\big)=0,\quad t\geq 0 \tag{3.4.1}$$

denklemi ile verilen iki gecikmeli lineer homojen diferensiyel denklem sisteminin asimtotik kararlılığı incelenecektir.

(3.4.1) denklem sisteminde, P singüler olmayan bir matris olmak üzere, $x(t)$ yerine $x(t)=Pu(t)$ yazarsak

$$u'(t)+(1-a)u(t)+P^{-1}AP\big(u(t-k)+u(t-l)\big)=0,\qquad t\geq 0$$

denklem sistemini elde ederiz.

Dolayısıyla (3.4.1) sistemini ele alırken A matrisini aşağıdaki iki Jordan formundan biri şeklinde yazılabiliriz (Elaydi, 2005):

I) b_1, b_2 ve d reel sayı olmak üzere, A matrisinin reel özdeğerlere sahip olduğu durum, yani

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & d \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

dır.

II) b_1, b_2, d, q ve θ, $|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ reel sayı olmak üzere, A matrisinin kompleks özdeğerlere sahip olduğu durum, yani

$$A = q\begin{pmatrix} cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dır.

Şimdi (3.4.1) denkleminin karakteristik denklemini bulalım. Bunun için v_1 ve v_2 değişkenleri uygun skaler sabitler olmak üzere, çözüm vektörünün

$$x(t) = ve^{\lambda t} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

şeklinde seçimi ile, (3.4.1) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda ve^{\lambda t} + (1-a)ve^{\lambda t} + A\left(ve^{\lambda(t-k)} + ve^{\lambda(t-l)}\right) = 0$$

olup, buradan

$$ve^{\lambda t}\left(\lambda + (1-a) + A\left(e^{-\lambda k} + e^{-\lambda l}\right)\right) = 0$$

elde edilir. Uyarı 2.1'den, karakteristik denklemin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\lambda I + (1-a)I + A\left(e^{-\lambda k} + e^{-\lambda l}\right)\right) = 0$$

olmasıdır. I , 2×2 tipinde birim matris olmak üzere

$$F(\lambda) \equiv \det\left(\lambda I + (1-a)I + A\left(e^{-\lambda k} + e^{-\lambda l}\right)\right) = 0$$

karakteristik denklemini ele alalım. durumu için A matrisinin (II)'deki durumu gözönüne alınırsa;

$$F(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda+(1-a)+q\cos\theta\left(e^{-\lambda k}+e^{-\lambda l}\right) & -q\sin\theta\left(e^{-\lambda k}+e^{-\lambda l}\right) \\ q\sin\theta\left(e^{-\lambda k}+e^{-\lambda l}\right) & \lambda+(1-a)+q\cos\theta\left(e^{-\lambda k}+e^{-\lambda l}\right) \end{vmatrix}$$

$$=\left(\lambda+(1-a)+q\cos\theta\left(e^{-\lambda k}+e^{-\lambda l}\right)\right)^2+\left(q\sin\theta\left(e^{-\lambda k}+e^{-\lambda l}\right)\right)^2$$

$$=\left(\lambda+(1-a)+q\cos\theta\left(e^{-\lambda k}+e^{-\lambda l}\right)\right)^2-\left(iq\sin\theta\left(e^{-\lambda k}+e^{-\lambda l}\right)\right)^2$$

$$=\left(\lambda+(1-a)+q\left(e^{-\lambda k+i\theta}+e^{-\lambda l+i\theta}\right)\right)\left(\lambda+(1-a)+q\left(e^{-\lambda k-i\theta}+e^{-\lambda l-i\theta}\right)\right) \qquad (3.4.2)$$

yazılır. Eğer

$$f(\lambda)=\lambda+(1-a)+q\left(e^{-\lambda k+i\theta}+e^{-\lambda l+i\theta}\right) \qquad (3.4.3)$$

olarak alırsak $\overline{\lambda}$, λ'nın kompleks eşleniği olmak üzere

$$F(\lambda)\equiv f(\lambda)\,\overline{f\left(\overline{\lambda}\right)}=0$$

yazılır. Burada ya $f(\lambda)=0$ yada $\overline{f\left(\overline{\lambda}\right)}=0$'dır. Ayrıca $\overline{f\left(\overline{\lambda}\right)}=0$ olursa $f\left(\overline{\lambda}\right)=0$ dır. Dolayısıyla $\lambda=\pm i\omega$ için sadece $f(\lambda)=0$ durumunu incelememiz yeterlidir. $f(\lambda)=0$'ın köklerine göre kararlılık durumu iki şekilde aşağıda incelenmiştir.

3.4.1. k ve l Gecikme Parametrelerine Göre Asimtotik Kararlılık Şartları

Lemma 3.4.1.1

(3.4.1) denkleminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$f\left(\lambda(k,l),k,l\right)=\lambda+(1-a)+q\left(e^{-\lambda k+i\theta}+e^{-\lambda l+i\theta}\right)=0 \qquad (3.4.4)$$

denkleminin bütün köklerinin kompleks düzlemde sol yarı düzlem içinde olmasıdır. Burada f fonksiyonu, sabit q, a ve θ için λ, k ve l'ye göre analitik fonksiyondur. Ayrıca (3.4.4) karakteristik denkleminin $\lambda = \lambda(k,l)$ kökü, k ve l'ye göre sürekli bir fonksiyondur (Kuang, 1993)

Lemma 3.4.1.2

(k,l) değişirken, sağ açık yarı düzlem içindeki (3.4.4)'ün sıfırlarının katlılıkları toplamı yalnızca bir kök sanal eksen üzerinde ise ya da sanal eksen üzerinden geçiyor ise değişebilir (Ruan ve Wei, 2003).

Biz burada (3.4.4) denklemi sanal eksen üzerinde köklere sahip iken k ve l gecikme parametreleri arasındaki ilişkiyi hesaplayacağız.

(3.4.4) karakteristik denkleminde $\lambda = i\omega$ alalım. O zaman (3.4.4) denklemini

$$i\omega + (1-a) + q\left(e^{-i\omega k + i\theta} + e^{-i\omega l + i\theta}\right) = 0 \tag{3.4.5}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.4.5)'de reel ve sanal kısımları ayrı ayrı ele alırsak;

$$\omega = q\left(\sin(\omega k - \theta) + \sin(\omega l - \theta)\right) \tag{3.4.6}$$

ve

$$a - 1 = q\left(\cos(\omega k - \theta) + \cos(\omega l - \theta)\right) \tag{3.4.7}$$

dır. (3.4.6) ve (3.4.7)'den

$$\omega = 2q\sin\left(\frac{\omega(k+l)}{2} - \theta\right)\cos\frac{\omega(k-l)}{2} \tag{3.4.8}$$

ve

$$a - 1 = 2q\cos\left(\frac{\omega(k+l)}{2} - \theta\right)\cos\frac{\omega(k-l)}{2} \tag{3.4.9}$$

eşitlikleri elde edilir.

Lemma 3.4.1.3

$q>0$ ve $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\omega\in\left(-\frac{\pi}{k-l},\frac{\pi}{k-l}\right)-\{0\}$ alalım ve (3.4.4)'ün bir kökünün $\lambda=i\omega$ olduğunu kabul edelim. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

i) Eğer $\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2\leq 0$ ise o zaman bu ifadeyi sağlayan ω reel sayısı yoktur.

ii)Eğer $\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2>0$ ise ω ve k , l reel sayıları için;

$$\omega=\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}$$

ve

$$k+l=(k_n+l_n)^{\pm}$$

yazılır. Burada

$$(k_n+l_n)^{+}=\frac{2}{\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}\left\{2n\pi+\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)+\theta\right\}$$

$$(k_n+l_n)^{-}=\frac{2}{\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}\left\{2n\pi+\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)-\theta\right\}$$

şeklindedir.

İspat:

Öncelikle $f(0)=(1-a)+2qe^{i\theta}\neq 0$ olduğundan $\omega\neq 0$'dır. Eğer $f(i\omega)=0$ ise sırasıyla (3.4.6), (3.4.7), (3.4.8) ve (3.4.9)'u elde ederiz. (3.4.8) ve (3.4.9)'dan

$$\omega^2+(a-1)^2=\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2 \tag{3.4.10}$$

elde edilir.

$\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2\leq 0$ için (3.4.10)'dan dolayı böyle bir ω reel sayısı bulamayız. Dolayısıyla böyle bir kök olmadığı için (i)'i göstermiş olduk.

$$\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2>0$$

ise (3.4.10)'dan

$$\omega=\pm\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2} \tag{3.4.11}$$

yazılır. Eğer (3.4.11)'de $\omega=\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}$ alırsak (3.4.8)'de $\sin\left(\frac{\omega(k+l)}{2}-\theta\right)>0$ olduğundan ve (3.4.9)'u göz önünde bulundurarak

$$\frac{\omega(k+l)}{2}-\theta=2n\pi+\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{3.4.12}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.4.12)'den

$$\left(k_n+l_n\right)^+=\frac{1}{\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}\left\{4n\pi+2\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)+2\theta\right\}$$

yazılır.

Eğer $\omega=-\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}$ alırsak (3.4.8)'den $\sin\left(\frac{\omega(k+l)}{2}-\theta\right)<0$ olur. Buradan ve (3.4.9) yardımı ile

$$\frac{\omega(k+l)}{2}-\theta=-2n\pi-\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)\qquad n=0,1,2,...$$

olur. Bu da bize

$$\left(k_n+l_n\right)^-=\frac{1}{\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}\left\{4n\pi+2\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)-2\theta\right\}$$

eşitliğini verir.

Diğer taraftan,

$$\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)=\begin{cases}\arcsin\sqrt{1-\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)^2} & a-1\geq 0\\ \pi-\arcsin\sqrt{1-\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)^2} & a-1<0\end{cases}$$

olduğundan

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)\right)=\frac{\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}$$

bulunur. Dolayısıyla $\omega>0$ için

$$\begin{aligned}f(i\omega)&=i\omega+(1-a)++q\left(e^{-i(\omega k-\theta)}+e^{-i(\omega l-\theta)}\right)\\&=i\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}+(1-a)+\\&\quad+2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}e^{-i\left(2n\pi+\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)\right)}\\&=i\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}+(1-a)+2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\times\\&\quad\times\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)\right)-i\sin\left(\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$= i\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}+(1-a)+$$

$$+(a-1)-i\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}$$

$$=0$$

elde edilir.

Bu eşitlik $i\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}$ ifadesinin (3.4.4)'ün bir kökü olduğunu gösterir. Benzer şekilde $\omega<0$ olduğu durumda, $(k_n+l_n)^-$ gecikmelerinin toplamı için $-i\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}$ ifadesinin (3.4.4)'ün bir kökü olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Lemma 3.4.1.4

$q<0$ ve $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\omega\in\left(-\frac{\pi}{k-l},\frac{\pi}{k-l}\right)-\{0\}$ olsun ve (3.4.4)'ün bir kökünün $\lambda=i\omega$ olduğunu kabul edelim. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

i) Eğer $\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2\le 0$ ise o zaman bu ifadeyi sağlayan ω reel sayısı yoktur.

ii) Eğer $\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2>0$ ise ω ve k, l reel sayıları için;

$$\omega=\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}$$

ve

$$k+l=\left(p_n+r_n\right)^{\pm}$$

biçiminde yazılır.

Burada

$$\left(p_n+r_n\right)^{+}=\frac{2}{\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}\left\{2n\pi-\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)+\theta\right\}$$

$$\left(p_n+r_n\right)^{-}=\frac{2}{\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}\left\{2n\pi-\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)-\theta\right\}$$

dır.

İspat:

Lemma 3.4.1.3'e benzer şekilde yapılır.

Uyarı 3.4.1.1

$q>0$ olduğunda $\left(k_n+l_n\right)^{\pm}$ nin tanımından

$$\min\left\{\left(k_n+l_n\right)^{+},\left(k_n+l_n\right)^{-}:n=0,1,...\right\}=\begin{cases}\left(k_0+l_0\right)^{+}, & (a-1)-2q\cos\theta\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\geq 0,\\ \left(k_0+l_0\right)^{-}, & (a-1)-2q\cos\theta\cos\frac{\omega(k-l)}{2}<0,\end{cases}$$

olur. Benzer şekilde, $q<0$ olduğunda $(p_n+r_n)^{\pm}$'nin tanımından

$$\min\left\{(p_n+r_n)^+,(p_n+r_n)^-:n=0,1,...\right\}=\begin{cases}(p_0+r_0)^+ & (a-1)-2q\cos\theta\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}<0,\\ (p_0+r_0)^- & (a-1)-2q\cos\theta\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}\geq 0,\end{cases}$$

olur.

Lemma 3.4.1.5

$\omega\in\left(-\dfrac{\pi}{k-l},\dfrac{\pi}{k-l}\right)-\{0\}$, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ve $k>l>0$ olmak üzere

$$\omega^2+b^2\omega(k+l)\sin\omega(l-k)>0$$

olduğunu kabul edelim. Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlansın;

$$\begin{cases}\dfrac{\sin(\omega k-\theta)}{l\sin\omega(k-l)}>q, & \dfrac{q}{\omega}>0\ ise\\ \dfrac{\sin(\omega k-\theta)}{l\sin\omega(k-l)}<q, & \dfrac{q}{\omega}<0\ ise\end{cases}\ \text{ve}\ \begin{cases}\dfrac{\sin(\omega l-\theta)}{k\sin\omega(k-l)}>q, & \dfrac{q}{\omega}>0\ ise\\ \dfrac{\sin(\omega l-\theta)}{k\sin\omega(k-l)}<q, & \dfrac{q}{\omega}<0\ ise\end{cases}\tag{3.4.13}$$

O zaman (3.4.4) denkleminin sanal eksen üzerindeki bütün kökleri k ve l artar iken sağ yarı düzlem içinde haraket eder.

İspat:

ω sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere (3.4.4)'ün bir kökü $\lambda=i\omega$ olsun. İspat için $\operatorname{Re}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial k}\right)\Big|_{\lambda=i\omega}>0$ ve $\operatorname{Re}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial l}\right)\Big|_{\lambda=i\omega}>0$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial k}\right)\Big|_{\lambda=i\omega}+\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial l}\right)\Big|_{\lambda=i\omega}>0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak (3.4.4)'de λ nın k 'ya göre türevini bulmak için;

$$\frac{\partial\lambda}{\partial k}=\frac{q\lambda e^{-\lambda k+i\theta}}{1-q\left(ke^{-\lambda k+i\theta}+le^{-\lambda l+i\theta}\right)}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan $\lambda=i\omega$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial\lambda}{\partial k}\Big|_{\lambda=i\omega}&=\frac{qi\omega e^{-i\omega k+i\theta}}{1-q\left(ke^{-i\omega k+i\theta}+le^{-i\omega l+i\theta}\right)}\\&=\frac{qi\omega\left(\cos(\omega k-\theta)-i\sin(\omega k-\theta)\right)}{1-q\left(k\cos(\omega k-\theta)+l\cos(\omega l-\theta)\right)+iq\left(k\sin(\omega k-\theta)+l\sin(\omega l-\theta)\right)}\end{aligned}$$

olur. Eğer paydanın karmaşık eşleniği ile çarparsak

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial k}\right)\Big|_{\lambda=i\omega}=\frac{q\omega\sin(\omega k-\theta)-q^2\omega l\sin\left(\omega(k-l)\right)}{M},$$

elde ederiz. Burada

$$M=\left(1-q\left(k\cos(\omega k-\theta)+l\cos(\omega l-\theta)\right)\right)^2+q^2\left(k\sin(\omega k-\theta)+l\sin(\omega l-\theta)\right)^2$$

dir. (3.4.13) yardımı ile

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial k}\right)\Big|_{\lambda=i\omega}>0 \tag{3.4.14}$$

olduğu görülür. Aynı şekilde λ'nın l'ye göre türevini alır ve benzer işlemleri yaparsak

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial l}\right)\Big|_{\lambda=i\omega}=\frac{q\omega\sin(\omega l-\theta)-q^2\omega l\sin\omega(k-l)}{M}$$

elde ederiz. Yine (3.4.13)'den

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial l}\right)\Big|_{\lambda=i\omega}>0 \tag{3.4.15}$$

olduğu görülür. (3.4.14) ve (3.4.15) taraf tarafa toplanırsa

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial k}\right)\Big|_{\lambda=i\omega}+\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial l}\right)\Big|_{\lambda=i\omega}=\frac{\omega^2+q^2\omega(k+l)\sin\omega(l-k)}{M}>0$$

elde edilir. Hipotezler gereği ve $M>0$ olması nedeni ile ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.1.1

$\omega\in\left(-\frac{\pi}{k-l},\frac{\pi}{k-l}\right)-\{0\}$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ olduğunu kabul edelim ve Lemma 3.4.1.5'deki özellikler sağlansın. O zaman (3.4.4) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart ya

$$\begin{cases}(a-1)-2q\cos\theta\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}<0,\\ \left(2q\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2\le 0,\end{cases} \tag{3.4.16}$$

ya da

$$\begin{cases}\begin{cases}(a-1)-2q\cos\theta\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}<0,\\ \left(2q\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2>0,\end{cases}\\ k+l<\dfrac{\operatorname{sgn} q}{\sqrt{\left(2q\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}\left\{\arccos\left(\dfrac{a-1}{2q\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}}\right)-\theta\right\},\end{cases} \tag{3.4.17}$$

olmasıdır.

İspat:

Burada;

Lemma 3.4.1.1'i kullanarak, (3.4.4) denkleminin bütün köklerinin sol yarı düzlemde olması için (3.4.16) ya da (3.4.17)'nin sağlanmasının gerek ve yeter şart olduklarını göstereceğiz.

Yeterlilik:

(3.4.4) denkleminin asimtotik kararlı olduğunu kabul edelim Böylece (3.4.4) karakteristik denkleminin kökleri negatif reel kısma sahip olur. Gerçekten de $k=0$ ve $l=0$ olduğu durumda (3.4.4) yalnızca $\lambda = a-1-2q\cos\theta - i2q\sin\theta$ köküne sahiptir. Dolayısıyla negatif reel kısma sahiptir. k ve l'ye göre köklerin sürekliliğinden, yeterince küçük $k>0$ ve $l>0$ için (3.4.4) denkleminin bütün kökleri sol yarı düzlem içindedir.

İddiamız şudur: (3.4.16) ya da (3.4.17) sağlanırsa (3.4.4) denklemi sanal eksen üzerinde hiçbir köke sahip olamaz. Bütün $k>l>0$ için (3.4.16) sağlanırsa Lemma 3.4.1.3 gereği sanal eksen üzerinde kök bulunamaz. Eğer (3.4.17) sağlanırsa

$$\frac{\operatorname{sgn} q}{\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}\left\{\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)-\theta\right\}=\begin{cases}(k_0+l_0)^- & ,q>0\\(p_0+r_0)^+ & ,q<0\end{cases}$$

ve uyarı (3.4.4)'den dolayı Lemma 3.4.1.1'in karşıt tersinden $n=0,1,2,...$ için böyle $k+l=(k_n+l_n)^{\pm}$ ve $k+l=(p_n+r_n)^{\pm}$ eşitlikleri bulunamaz. Yani, bizim iddiamız bu durum için de geçerli olur. Dolayısıyla Lemma 3.4.1.2 ve yukarıdaki eşitlikler gereğince (3.4.16) ya da (3.4.17) sağlanırsa (3.4.4)'ün bütün kökleri sol yarı düzlem içine düşer.

Gereklilik:

İspatı aksini kabul yolu ile yapacağız. Bunun için;

$$(a-1)-2q\cos\theta\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\geq 0 \tag{3.4.18}$$

ya da

$$\begin{cases} \left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2>0 \\ k+l\geq\dfrac{\operatorname{sgn}q}{\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}\left\{\arccos\left(\dfrac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)-\theta\right\} \end{cases} \tag{3.4.19}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.4.4) denkleminin $\operatorname{Re}(\lambda^*)>0$ olacak şekilde bir λ^* kökünün olacağını göstermiş olacağız. Buda iddiamızla çelişeceğinden ispatımızın gereklilik kısmını tamamlamış oluruz.

Önce (3.4.18)'nin sağlandığını kabul edelim ve $\lambda_1(0,0)=a-1-2q\cos\theta-i2q\sin\theta$'ı sağlayan (3.4.4)'ün kökü λ_1 olsun. O zaman λ_1'in k ve l'ye göre sürekliliği ve Lemma 3.4.1.5'ten yeterince küçük $k>0$ ve $l>0$ için $\operatorname{Re}(\lambda_1)>0$ dır. Lemma 3.4.1.5'ten, k ve l artar iken sanal eksen üzerinde sol yarı düzlem içinde hareket eden bir λ_1 olmadığından dolayı bütün $k>0$ ve $l>0$ için $\operatorname{Re}(\lambda_1)>0$ dir.

Şimdi (3.4.19)'un sağlandığını kabul edelim ve

$$\lambda_2(k_0+l_0)=-i\operatorname{sgn}q\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}$$

ifadesini sağlayan (3.4.4' ün bir kökü λ_2 olsun. O zaman Lemma 3.4.1.5 gereği yeterince küçük $k+l-(k_0+l_0)>0$ için $\mathrm{Re}(\lambda_2)>0$'dır. Diğer taraftan yine Lemma 3.4.1.5'e göre k ve l artar iken sanal eksen üzerinde sol yarı düzlem içinde hareket eden bir λ_2 olamayacağından bütün $k+l-(k_0+l_0)>0$ için $\mathrm{Re}(\lambda_2)>0$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.4.1.1

$k=3,\ l=1,\ a=0\ \ q=1$ ve $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ olmak üzere

$$x'(t)+x(t)+A\big(x(t-3)+x(t-1)\big)=0,\qquad t\ge 0 \tag{3.4.20}$$

gecikmeli sabit katsayılı homojen diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda)\equiv\left(\lambda+1+e^{i\theta}\left(e^{-3\lambda}+e^{-\lambda}\right)\right)\left(\lambda+1+e^{-i\theta}\left(e^{-3\lambda}+e^{-\lambda}\right)\right)=0,$$

şeklindedir. $\lambda=i\omega$'lar için

$$\lambda+1+e^{i\theta}\left(e^{-3\lambda}+e^{-\lambda}\right)=0$$

karakteristik denklemini incelersek

$$\omega=-\tan\left(2\omega-\frac{\pi}{3}\right)$$

koşulunu sağlayan bütün ω'lar için sanal eksen üzerinde bir kök bulunabilir.

$$\begin{cases}(0-1)-2\cos^2\omega<0\\ (2\cos\omega)^2-(0-1)\le 0\end{cases}$$

şartı sağlandığından Teorem 3.4.1.1'in birinci şartından dolayı (3.4.20) denklem sistemi asimtotik kararlıdır. Ayrıca bu denklem sisteminde $e^{i\theta}=\dfrac{e^{3\pi i/2}}{e^{3-3i}+e^{1-i}}$ için $x(t)=e^{(-1+i)t}\upsilon$ ifadesi bir çözümdür.

Uyarı 3.4.1.2

$$x'(t)+(1-a)x(t)+\begin{pmatrix} b_1 & d \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\left(x(t-k)+x(t-l)\right)=0 \tag{3.4.21}$$

gecikmeli lineer homojen diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Burada A matrisi (I) durumundaki şekli ile verilmiştir. O zaman (3.4.20)'nin karakteristik denklemi

$$F(\lambda)=\left(\lambda+(1-a)+b_1\left(e^{-\lambda k}+e^{-\lambda l}\right)\right)\left(\lambda+(1-a)+b_2\left(e^{-\lambda k}+e^{-\lambda l}\right)\right)=0 \tag{3.4.22}$$

olarak elde edilir. $a=1$ ve $i=1,2$ için (3.4.22) karakteristik denkleminin $b=b_i$ ile $\lambda+b_i\left(e^{-\lambda k}+e^{-\lambda l}\right)=0$ denklemine indirgeneceği açıktır. Dolayısıyla Y.Kuang (1993)'ın makalesi gereğince aşağıdaki sonucu hemen elde ederiz.

Sonuç 3.4.1.1

(3.4.21) sistemi için $a=1$ olduğunu kabul edelim. $i=1,2$ olmak üzere (3.4.21) denklem sisteminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$2b_i(k+l)\cos\left(\frac{k-l}{k+l}\frac{\pi}{2}\right)<\pi \tag{3.4.23}$$

olmasıdır.

Örnek 3.4.1.2

$k=3,\ l=1,\ a=1$ ve $A=\begin{pmatrix} 1/e^3+e & 1 \\ 0 & 2/e^6+e^2 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$x'(t)+A\big(x(t-3)+x(t-1)\big)=0, \qquad t\geq 0 \tag{3.4.24}$$

gecikmeli sabit katsayılı homojen diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda)=\left(\lambda+\frac{1}{e^3+e}\left(e^{-3\lambda}+e^{-\lambda}\right)\right)\left(\lambda+\frac{2}{e^6+e^2}\left(e^{-3\lambda}+e^{-\lambda}\right)\right)=0$$

şeklindedir.

Dolayısıyla, sonuç 3.4.1.1'den dolayı (3.4.24) denklem sistemi asimtotik kararlıdır. Ayrıca bu denklem sistemi için $x(t)=e^{-t}\upsilon$ ve $x(t)=e^{-2t}\upsilon$ ifadeleri birer çözümdür.

Teorem 3.4.1.2

$\omega\in\left(\frac{\pi}{k-l},\frac{\pi}{k-l}\right)-\{0\}$ olduğunu kabul edelim ve Lemma 3.4.1.5'in şartları sağlansın. $i=1,2$ olmak üzere, (3.4.22) denkleminin sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart ya

$$\begin{cases} (a-1)-2b_i\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}<0 \\ \left(2b_i\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2\leq 0 \end{cases} \tag{3.4.25}$$

ya da

$$\begin{cases} \begin{cases} (a-1)-2b_i\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}<0 \\ \left(2b_i\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2>0 \end{cases} \\ k+l<\dfrac{\operatorname{sgn} b}{\sqrt{\left(2b_i\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}\left\{\arccos\left(\dfrac{a-1}{2b_i\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}}\right)\right\} \end{cases} \tag{3.4.26}$$

olmasıdır.

İspat:

Teorem 3.4.1.1'in ispatına benzerdir.

Örnek 3.4.1.3

$k=3$, $l=1$, $a=-1$ ve $A=\begin{pmatrix} -1/e^3+e & 1 \\ 0 & 1/e^3\left(e^3+e\right) \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$x'(t)+2x(t)+A\big(x(t-3)+x(t-1)\big)=0, \qquad t\geq 0 \tag{3.4.27}$$

gecikmeli sabit katsayılı homojen diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda)\equiv\left(\lambda+2-\frac{1}{e^3+e}\left(e^{-3\lambda}+e^{-\lambda}\right)\right)\left(\lambda+2+\frac{1}{e^3\left(e^3+e\right)}\left(e^{-3\lambda}+e^{-\lambda}\right)\right)=0$$

şeklindedir. $\lambda=i\omega$'lar için

$$\lambda+2+\left(e^{-3\lambda}+e^{-\lambda}\right)=0$$

karakteristik denklemini incelersek

$$\omega = -2\tan(2\omega)$$

koşulunu sağlayan bütün $\omega \neq k\pi$ lar için sanal eksen üzerinde bir kök bulunabilir. Dolayısıyla

$$\begin{cases} -2 - 2\cos\omega < 0 \\ (2\cos\omega)^2 - 4 \le 0 \end{cases}$$

şartı sağlandığından Teorem 3.4.1.3'in birinci şartından dolayı (3.4.27) denklem sistemi asimtotik kararlıdır. Ayrıca bu denklem sistemi için $x(t) = e^{-t}\upsilon$ ve $x(t) = e^{-3t}\upsilon$ ifadeleri birer çözümdür.

Son olarak

$$x'(t) + (1-a)x(t) + A\big(x(t-k) + x(t-l)\big) = 0,\ t \ge 0 \tag{3.4.28}$$

yüksek boyutlu iki gecikmeli lineer diferensiyel denklem sistemini göz önünde bulunduralım. Burada A, $d \times d$ tipinde reel sabit bir matris a, k ve l, $k > l$ >0 koşulu ile reel sayılardır.

Teorem 3.4.1.3

A nın özdeğerlerinin $q_j e^{i\theta_j}$ $(j = 1, 2, \dots, d)$ olduğunu kabul edelim ve Lemma 3.4.1.5 in koşulları sağlansın. O zaman (3.4.28) denklem sisteminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart ya

$$(a-1) - 2q_j\cos\theta_j\cos\frac{\omega(k-l)}{2} < 0 \ \text{ve}\ \left(2q_j\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2 - (a-1)^2 \le 0 \quad (3.4.29)$$

ya da

$$\begin{cases} \begin{cases} (a-1)-2q_j\cos\theta_j\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}<0 \\ \left(2q_j\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2>0 \end{cases} \\ k+l<\dfrac{\operatorname{sgn} q_j}{\sqrt{\left(2q_j\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}\left\{\arccos\left(\dfrac{a-1}{2q_j\cos\dfrac{\omega(k-l)}{2}}\right)-\theta_j\right\} \end{cases} \tag{3.4.30}$$

olmasıdır.

İspat:

A nın özdeğerleri $q_j e^{i\theta_j}$ $(j=1,2,...,d)$ olduğundan. (3.4.28)'nin karakteristik denklemi

$$f(\lambda)=\prod_{j=1}^{d}\left(\lambda+(1-a)+q_j\left(e^{-\lambda k+i|\theta_j|}+e^{-\lambda l+i|\theta_j|}\right)\right)=0$$

şeklindedir. Dolayısıyla Teorem 3.4.1.3, Teorem 3.4.1.1 ve Teorem 3.4.1.2'nin bir sonucu olarak elde edilir. □

3.4.2. q Katsayısına Göre Lineer Diferensiyel Denklem Sisteminin Kararlılık Şartları

Lemma 3.4.2.1

(3.4.1) denklem sisteminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$f(\lambda,q):=\lambda+(1-a)+q\left(e^{-\lambda k+i\theta}+e^{-\lambda l+i\theta}\right)=0 \tag{3.4.31}$$

denkleminin bütün köklerinin kompleks düzlemde sol yarı düzlem içinde olmasıdır. Burada f fonksiyonu, sabit k,l,a ve θ için λ ve q'ya göre analitik fonksiyondur.

Ayrıca (3.4.31) karakteristik denkleminin $\lambda = \lambda(q)$ kökü q'ya göre sürekli bir fonksiyondur (Kuang, 1993).

Lemma 3.4.2.2

q değişirken, sağ açık yarı düzlem içindeki (3.4.31)'in sıfırlarının katlılıkları toplamı yalnızca bir kök sanal eksen üzerinde ise ya da sanal eksen üzerinden geçiyor ise değişebilir (Cooke ve Grossman, 1982).

Burada (3.3.31) denklemi sanal eksen üzerinde köklere sahip iken q'nun değerini hesaplayacağız.

(3.4.31) karakteristik denkleminde $\lambda = i\omega$ alalım. O zaman (3.4.31) denklemini

$$i\omega + (1-a) + q\left(e^{-i\omega k + i\theta} + e^{-i\omega l + i\theta}\right) = 0 \tag{3.4.32}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.4.32) denkleminde reel ve sanal kısımları ayrı ayrı ele alırsak;

$$\omega = q\left(\sin(\omega k - \theta) + \sin(\omega l - \theta)\right) \tag{3.4.33}$$

ve

$$a - 1 = q\left(\cos(\omega k - \theta) + \cos(\omega l - \theta)\right) \tag{3.4.34}$$

olur.

(3.4.33) ve (3.4.34)'den

$$\omega = 2q\sin\left(\frac{\omega(k+l)}{2} - \theta\right)\cos\frac{\omega(k-l)}{2} \tag{3.4.35}$$

ve

$$a-1=2q\cos\left(\frac{\omega(k+l)}{2}-\theta\right)\cos\frac{\omega(k-l)}{2} \tag{3.4.36}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.4.35) ve (3.4.36) eşitliklerini taraf tarafa bölersek

$$\frac{\omega}{a-1}=\tan\left(\frac{\omega(k+l)}{2}-\theta\right) \tag{3.4.37}$$

elde edilir. $y=\tan x$ fonksiyonunun grafiği

$$H=\left\{(x,\tan x): x\in\mathbb{R},\ x=\frac{\pi}{2}+h\pi,\ h\in\mathbb{Z}\right\},$$

cümlesine karşılık gelen noktalardan oluşur. Dolayısıyla (3.4.37) eşitliği, yalnızca $\{\omega_j : j\geq 1\}$ köklerinden oluşan bir diziye sahip olur. Burada

$$\omega_j>0 \text{ için } \omega_j\in\left(\frac{(2j-1)\pi+2\theta}{k+l},\frac{(2j+1)\pi+2\theta}{k+l}\right)$$

ve

$$\omega_j<0 \text{ için } \omega_j\in\left(\frac{-(2j+1)\pi+2\theta}{k+l},\frac{-(2j-1)\pi+2\theta}{k+l}\right)$$

dir. Ayrıca (3.4.31) denkleminin yalnızca sanal köklere sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart $j\geq 1$ için yalnızca $\pm i\omega_j$ köklerine sahip olmasıdır.

Lemma 3.4.2.3

$\{q_j : j \geq 1\} > 0$ ve $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ olduğunu kabul edelim. $n = 0,1,2,...$ için $\omega_j \in \left(\dfrac{(3-4j)\pi}{k-l}, \dfrac{(4j-3)\pi}{k-l} \right) - \left\{ \dfrac{-n\pi + 2\theta}{k+l}, \dfrac{n\pi + 2\theta}{k+l} \right\}$ ile (3.3.31)'in bir kökü $\lambda = i\omega_j$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

i) Eğer $\left(2q_j \cos \dfrac{\omega_j (k-l)}{2} \right)^2 - (a-1)^2 \leq 0$ ise o zaman bu ifadeyi sağlayan ω_j reel sayısı yoktur.

ii) Eğer $\left(2q_j \cos \dfrac{\omega_j (k-l)}{2} \right)^2 - (a-1)^2 > 0$ ise ω_j ve q_j reel sayıları;

$$\omega_j = \sqrt{\left(2q_j \cos \frac{\omega_j (k-l)}{2} \right)^2 - (a-1)^2} \tag{3.4.38}$$

ve

$$q_j = \frac{a-1}{2\cos\left(\dfrac{\omega_j (k+l)}{2} - \theta \right) \cos \dfrac{\omega_j (k-l)}{2}} \tag{3.4.39}$$

biçiminde yazılır.

Uyarı 3.4.2.1

$\left(2q_j \cos \dfrac{\omega_j (k-l)}{2} \right)^2 - (a-1)^2 > 0$ olduğu durumda k ve l gecikmelerinin toplamı $n = 0,1,2,...$ için aşağıdaki gibi yazılır;

$$\left(k_n+l_n\right)^+=\frac{2}{\sqrt{\left(2q_j\cos\frac{\omega_j\left(k-l\right)}{2}\right)^2-\left(a-1\right)^2}}\left\{-\left(2n+2\right)\pi+\arccos\left(\frac{a-1}{2q_j\cos\frac{\omega_j\left(k-l\right)}{2}}\right)+\theta\right\}$$

$$\left(k_n+l_n\right)^-=\frac{2}{\sqrt{\left(2q_j\cos\frac{\omega_j\left(k-l\right)}{2}\right)^2-\left(a-1\right)^2}}\left\{-2n\pi+\arccos\left(\frac{a-1}{2q_j\cos\frac{\omega_j\left(k-l\right)}{2}}\right)-\theta\right\}$$

Ayrıca $i\sqrt{\left(2q_j\cos\frac{\omega_j\left(k-l\right)}{2}\right)^2-\left(a-1\right)^2}$ yada $-i\sqrt{\left(2q_j\cos\frac{\omega_j\left(k-l\right)}{2}\right)^2-\left(a-1\right)^2}$ ifadeleri $n=0,1,2,...$ için $\left(k_n+l_n\right)^+$ ya da $\left(k_n+l_n\right)^-$ gecikmelerinin toplamı ile (3.4.31)'in birer köküdür.

İspat:

(3.4.35) ve (3.4.36)'dan

$$\omega^2+\left(a-1\right)^2=2q\cos\left(\frac{\omega\left(k-l\right)}{2}\right)$$

yazılır. $\omega=\left\{\omega_j\right\}_{j\geq 1}$ ve $q=\left\{q_j\right\}_{j\geq 1}$ ifadelerini yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak;

$$\omega_j^{\ 2}+\left(a-1\right)^2=2q_j\cos\left(\frac{\omega_j\left(k-l\right)}{2}\right) \tag{3.4.40}$$

elde edilir.

$\left(2q_j \cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2 - (a-1)^2 \le 0$ için (3.4.40)'dan dolayı böyle bir $\omega = \{\omega_j\}_{j\ge 1}$ reel sayısı dizisi bulamayız. Dolayısıyla her $k > l > 0$ için böyle bir kök olmadığını, yani (i) koşulunu göstermiş olduk.

Diğer taraftan $\left(2q_j \cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2 - (a-1)^2 > 0$ ise, (3.4.40)'dan

$$\omega = \pm\sqrt{\left(2q_j \cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2 - (a-1)^2} \tag{3.4.41}$$

yazılır. Diğer taraftan (3.4.35)'den

$$q_j = \frac{a-1}{2\cos\left(\frac{\omega_j(k+l)}{2} - \theta\right)\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}}$$

eşitliğini elde edilir. Eğer (3.4.41)'den $\omega = \sqrt{\left(2q_j \cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2 - (a-1)^2}$ alırsak, (3.4.35) ve $\cos\left(\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right) > 0$ olduğundan, $\sin\left(\frac{\omega_j(k+l)}{2} - \theta\right) > 0$ olur. Buradan ve (3.4.36)'u göz önünde bulundurarak

$$\frac{\omega_j(k+l)}{2} - \theta = -(2n+2)\pi + \arccos\left(\frac{a-1}{2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}}\right) \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

yazılır. Dolayısıyla buradan $(k_n + l_n)^+$ ifadesini elde ederiz. Diğer taraftan

$$\arccos\left(\frac{a-1}{2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}}\right)=\begin{cases}\arcsin\sqrt{1-\left(\frac{a-1}{2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}}\right)^2} & a-1>0\\ \pi-\arcsin\sqrt{1-\left(\frac{a-1}{2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}}\right)^2} & a-1<0\end{cases}$$

olduğundan

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{a-1}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}\right)\right)=\frac{\sqrt{\left(2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}}{2q\cos\frac{\omega(k-l)}{2}}$$

bulunur. Dolayısıyla $k+l=(k_n+l_n)^+$, $\omega=\{\omega_j\}_{j\geq 1}>0$ ve $q=\{q_j\}_{j\geq 1}$ için

$$\begin{aligned}f(i\omega_j)&=i\omega_j+(1-a)+q_j\left(e^{-i(\omega_j k-\theta)}+e^{-i(\omega_j l-\theta)}\right)\\&=i\sqrt{\left(2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}+(1-a)+\\&\quad+2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}e^{-i\left(-(2n+2)\pi+\arccos\left(\frac{a-1}{2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}}\right)\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=i\sqrt{\left(2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}+(1-a)+2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\times\\&\times\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{a-1}{2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}}\right)\right)-i\sin\left(\arccos\left(\frac{a-1}{2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$= i\sqrt{\left(2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}+(1-a)+$$

$$+(a-1)-i\sqrt{\left(2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}$$

$$=0$$

elde edilir.

Bu eşitlik $i\sqrt{\left(2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}$ ifadesinin (3.4.31)'in bir kökü olduğunu gösteririr. Benzer şekilde $\omega<0$ olduğu durumda, $(k_n+l_n)^-$ gecikmelerinin toplamı için $-i\sqrt{\left(2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2}$ ifadesinin (3.4.31)'in bir kökü olduğu gösterilebilir.

Lemma 3.4.2.4

$\{q_j : j\geq 1\}<0$ ve $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ olduğunu kabul edelim. $n=0,1,2,...$ için $\omega_j\in\left(\frac{(4j-3)\pi}{k-l},\frac{(4j-1)\pi}{k-l}\right)\cup\left(\frac{(1-4j)\pi}{k-l},\frac{(3-4j)\pi}{k-l}\right)-\left\{\frac{-n\pi+2\theta}{k+l},\frac{n\pi+2\theta}{k+l}\right\}$ alalım ve (3.4.31) in bir kökü $\lambda=i\omega_j$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır;

i) Eğer $\left(2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2\leq 0$ ise o zaman bu ifadeyi sağlayan ω_j reel sayısı yoktur.

ii) Eğer $\left(2q_j\cos\frac{\omega_j(k-l)}{2}\right)^2-(a-1)^2>0$ ise ω_j ve q_j reel sayıları;

$$\omega_j = \sqrt{\left(2q_j \cos\frac{\omega_j\left(k-l\right)}{2}\right)^2 - \left(a-1\right)^2}$$

ve

$$q_j = \frac{a-1}{2\cos\left(\frac{\omega_j\left(k+l\right)}{2} - \theta\right)\cos\frac{\omega_j\left(k-l\right)}{2}}$$

biçiminde yazılır.

İspat:

Lemma 3.4.2.3’ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Lemma 3.4.2.5

$a<1$ ve $\mathrm{Re}\,\lambda\left(q_j\right)=0$, $\mathrm{Im}\,\lambda\left(q_j\right)=\omega_j$ ile (3.4.31) denkleminin kökü $\lambda\left(q\right)$ olsun. O zaman

$$\operatorname{sgn}\frac{d\left(\mathrm{Re}\,\lambda\left(q_j\right)\right)}{dq_j}.\operatorname{sgn}\left(q_j\right)>0$$

dır.

İspat:

(3.4.31) karakteristik denkleminde λ ’nın q ’ya göre türevini bulmak için;

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q}=-\frac{e^{-\lambda k+i\theta}+e^{-\lambda l+i\theta}}{1-q\left(ke^{-\lambda k+i\theta}+le^{-\lambda l+i\theta}\right)}$$
$$=\frac{\lambda+1-a}{q\left(1-q\left(ke^{-\lambda k+i\theta}+le^{-\lambda l+i\theta}\right)\right)}$$

eşitliğini elde ederiz.

$\lambda=\omega_j$ ve $q=q_j$ için

$$\frac{\partial\lambda\left(q_j\right)}{\partial q_j}=\frac{i\omega_j+1-a}{q_j\left(1-q_j\left(ke^{-\lambda k+i\theta}+le^{-\lambda l+i\theta}\right)\right)}$$
$$=\frac{i\omega_j+1-a}{q_j\left(1-q_j\left(k\cos\left(k\omega_j-\theta\right)+l\cos\left(l\omega_j-\theta\right)\right)+iq_j^{\,2}\left(k\sin\left(k\omega_j-\theta\right)+l\sin\left(l\omega_j-\theta\right)\right)\right)}$$

yazarız.

Paydanın eşleniği ile çarparsak

$$M=q_j^{\,2}\left(1-q_j\left(\cos\left(k\omega_j-\theta\right)+l\cos\left(l\omega_j-\theta\right)\right)\right)^2+q_j^{\,4}\left(k\sin\left(k\omega_j-\theta\right)+l\sin\left(l\omega_j-\theta\right)\right)^2$$

olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda\left(q_j\right)}{\partial q_j}\right)\Bigg|_{\lambda=i\omega_j}=\frac{(1-a)q_j\left(1-q_j\left(\cos\left(k\omega_j-\theta\right)+l\cos\left(l\omega_j-\theta\right)\right)\right)}{M}+$$
$$+\frac{\omega_jq_j^{\,2}\left(k\sin\left(k\omega_j-\theta\right)+l\sin\left(l\omega_j-\theta\right)\right)}{M} \qquad (3.4.42)$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$A_1(\omega)=\sin(k\omega-\theta)+\sin(l\omega-\theta)$$

ve

$$A_2(\omega)=\cos(k\omega-\theta)+\cos(l\omega-\theta)$$

olduğunu kabul edelim. O zaman (3.4.32) ve (3.4.33) denklemlerinden $qA_1(\omega)=\omega$ ve $qA_2(\omega)=a-1$ elde edilir ve buradan

$$\frac{A_1(\omega)}{A_2(\omega)}=\frac{\omega}{a-1}=\tan\left(\frac{(k+l)\omega}{2}-\theta\right)$$

yazılır. Eşitliğin her iki tarafının ω ya göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{A_1(\omega)}{A_2(\omega)}\right)=\left(\frac{k+l}{2}\right)\tan\left(\frac{(k+l)\omega}{2}-\theta\right)>0$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{A_1'(\omega)A_2(\omega)-A_2'(\omega)A_1(\omega)}{\left(A_2(\omega)\right)^2}>0$$

yazılır. $A_1'(\omega)A_2(\omega)-A_2'(\omega)A_1(\omega)>0$ olur. Yeniden (3.4.40'a dönersek

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda(q_j)}{\partial q_j}\right)\Big|_{\lambda=i\omega_j}=\frac{q_j\Big((1-a)-(1-a)q_jA_1'(\omega)-q_j\omega_jA_2'(\omega)\Big)}{M}$$

olur. (3.4.32) ve (3.4.33)'den

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda(q_j)}{\partial q_j}\right)\Big|_{\lambda=i\omega_j}=\frac{q_j\Big((1-a)+q_j^2A_2(\omega)A_1'(\omega)-q_j^2A_1(\omega)A_2'(\omega)\Big)}{M}$$

$$=\frac{q_j\Big((1-a)+q_j^2\Big(A_2(\omega)A_1'(\omega)-A_1(\omega)A_2'(\omega)\Big)\Big)}{M}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.2.1

$a<1$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ olduğunu kabul edelim ve (3.4.1) denklem sisteminin A matrisi (II) formundaki gibi verilsin. Ayrıca $q=0$ 'ın bir komşuluğunu $\left(q_\theta^-, q_\theta^+\right)$ olarak alalım ve

$$q_\theta^- = \min_{j\geq 1}\left\{q_j : q_j > 0\right\}, \quad q_\theta^+ = \max_{j\geq 1}\left\{q_j : q_j < 0\right\}$$

olarak tanımlayalım. O zaman (3.4.31) denkleminin bütün köklerinin negatif reel kısımlara sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart $q \in \left(q_\theta^-, q_\theta^+\right)$ olmasıdır.

İspat:

$q=0$ olduğu durumda (3.4.31) denkleminin sadece $\lambda(0)=a-1<0$ reel kökü vardır. Dolayısıyla (3.4.31) denklemi negatif bir reel kısma sahiptir. Lemma 3.4.2.2'den köklerin q 'ya göre sürekliliği ve (3.4.31) denkleminin asimtotik kararlılığından q 'nun bir $\left(q_\theta^-, q_\theta^+\right)$ komşuluğundaki (3.4.31) denkleminin bütün kökleri negatif reel kısımlara sahip olur.

$\lambda(0)<0$ olduğundan $q_\theta^+ < \infty$ olduğunda sırasıyla Lemma 3.4.2.3 ve Lemma 3.4.2.2'den $q>0$ 'daki ilk değerini q_θ^+ 'da alır ve sanal eksen üzerinde köklere sahip olur. Dolayısıyla (3.4.31) denkleminin bütün kökleri $q \in \left[0, q_\theta^+\right)$ için negatif reel kısımlara sahip olur.

Benzer şekilde $\lambda(0)<0$ olduğundan $q_\theta^- < \infty$ iken sırasıyla Lemma 3.4.2.4 ve Lemma 3.4.2.2'den $q<0$ 'daki ilk değerini q_θ^- 'da alır ve sanal eksen üzerinde köklere sahip olur. Dolayısıyla (3.4.31) denkleminin bütün kökleri $q \in \left(q_\theta^-, 0\right]$ için negatif reel kısımlara sahip olur. Ayrıca Lemma 3.4.2.5'den $q \in \left(-\infty, q_\theta^-\right)$ ve $q \in \left(q_\theta^+, \infty\right)$ için (3.4.31) denklemi pozitif reel kısma sahip en az bir köke sahip olduğunu biliyoruz. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.4.2.1:

$k = 4$, $l = 2$, $a = \dfrac{1}{3}$ ve $A = \sqrt{\dfrac{\omega^2 + 4/9}{4\cos^2\omega}} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$x'(t) + \frac{2}{3}x(t) + A\left(x(t-4) + x(t-2)\right) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{3.4.43}$$

gecikmeli sabit katsayılı homojen diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) \equiv \left(\lambda + \frac{2}{3} + qe^{i\theta}\left(e^{-4\lambda} + e^{-2\lambda}\right)\right)\left(\lambda + \frac{2}{3} + qe^{-i\theta}\left(e^{-4\lambda} + e^{-2\lambda}\right)\right) = 0,$$

şeklindedir. $\lambda = i\omega$'lar için

$$\lambda + \frac{2}{3} + qe^{i\theta}\left(e^{-4\lambda} + e^{-2\lambda}\right) = 0$$

karakteristik denklemini incelersek

$$\frac{3\omega}{2} = -\tan\left(3\omega - \theta\right)$$

koşulunu sağlayan bütün ω'lar için sanal eksen üzerinde bir kök bulunabilir. Dolayısıyla Teorem 3.4.2.1'den, (3.4.43) denklem sisteminin asimtotik kararlı olduğu görülür. Ayrıca $e^{i\theta} = \dfrac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{\left(\omega^2 + 4/9\right)/4\cos^2\omega}\left(e^{8/3+4i} + e^{2/3+2i}\right)}$ için $x(t) = \upsilon e^{(-2/3-i)t}$ ifadesi bu denklem sistemi için bir çözümdür.

Sonuç 3.4.2.1

$a<1$ ve $\theta=0$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $q=0$'ın bir komşuluğunu $\left(q_\theta^-, q_\theta^+\right)$ olarak alalım ve

$$q_0^- = \min_{j\geq 1}\left\{q_j = \frac{a-1}{2} : q_j > 0\right\}, \quad q_0^+ = \max_{j\geq 1}\left\{q_j : q_j < 0\right\}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman (3.4.31) denkleminin bütün köklerinin negatif reel kısımlara sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart $j\geq 1$ için $\frac{a-1}{2} < q_j < q_0^+$ olmasıdır.

İspat:

$\theta=0$ olduğunda (3.4.31) denklemi sadece $\lambda=0$ reel köküne sahiptir. Yani $\lambda\left(\frac{a-1}{2}\right)=0$'dir. Ayrıca

$$\frac{d\lambda\left(\frac{a-1}{2}\right)}{dq}\Bigg|_{\substack{\theta=0\\ \lambda=0}} < 0$$

olduğundan $q=\frac{a-1}{2}$ olduğu noktada $\lambda\left(q_j\right)$ nin bir maksimumu vardır. Dolayısıyla

$$q^- = \min_{j\geq 1}\left\{q_j : q_j > 0\right\}, \quad q^+ = \max_{j\geq 1}\left\{\frac{a-1}{2} : q_j < 0\right\}$$

olur. İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.4.2.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Örnek 3.3.4.2

$k=\frac{3}{2}$, $l=\frac{1}{2}$, $a=\frac{3}{4}$ $q=\frac{-1}{8}$ ve $\theta=0$ olmak üzere

$$x'(t)+\frac{1}{4}x(t)+A\left(x\left(t-\frac{3}{2}\right)+x\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)=0, \qquad t\geq 0 \tag{3.4.44}$$

gecikmeli sabit katsayılı homojen diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda)\equiv\left(\lambda+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\left(e^{-3\lambda/2}+e^{-\lambda/2}\right)\right)\left(\lambda+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\left(e^{-3\lambda/2}+e^{-\lambda/2}\right)\right)=0$$

şeklindedir. $\lambda=i\omega$'lar için

$$\lambda+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\left(e^{-3\lambda/2}+e^{-\lambda/2}\right)=0$$

karakteristik denklemini incelersek

$$\omega=-\frac{\tan\omega}{4}$$

koşulunu sağlayan bütün ω'lar için denklem sadece $\lambda=0$ reel köküne sahiptir. Dolayısıyla Sonuç 3.4.2.1'den, (3.4.44) denklem sistemi asimtotik kararlıdır.

Teorem 3.4.2.2

$a<1$ olduğunu kabul edelim ve (3.3.1) denklem sisteminin A matrisi (I) formundaki gibi verilsin. Ayrıca $b=0$'ın bir komşuluğunu $\left(b^-,b^+\right)$ olarak alalım ve

$$b^-=\min_{j\geq 1}\left\{b_j : b_j>0\right\}, \quad b^+=\max_{j\geq 1}\left\{b_j : b_j<0\right\}$$

olarak tanımlayalım. O zaman (3.4.31) denkleminin bütün köklerinin negatif reel kısımlara sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart $b_1,b_2\in\left(b^-,b^+\right)$ olmasıdır.

İspat:

Teorem 3.4.2.1'in ispatına benzerdir.

Örnek 3.4.2.3

$k = 4$, $l = 2$, $a = -1/2$ ve $A = \begin{pmatrix} 1/2\left(e^8 + e^4\right) & 1 \\ 0 & 3/2\left(e^{12} + e^6\right) \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$x'(t) + \frac{3}{2}x(t) + A\big(x(t-4) + x(t-2)\big) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{3.4.45}$$

gecikmeli sabit katsayılı homojen diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) \equiv \left(\lambda + \frac{3}{2} - \frac{1}{2\left(e^8 + e^4\right)}\left(e^{-4\lambda} + e^{-2\lambda}\right)\right)\left(\lambda + \frac{3}{2} - \frac{3}{2\left(e^{12} + e^6\right)}\left(e^{-4\lambda} + e^{-2\lambda}\right)\right) = 0$$

şeklindedir. $\lambda = i\omega$'lar için

$$\lambda + \frac{3}{2} - \frac{1}{2\left(e^8 + e^4\right)}\left(e^{-4\lambda} + e^{-2\lambda}\right) = 0$$

karakteristik denklemini incelersek

$$2\omega = -3\tan(3\omega)$$

koşulunu sağlayan bütün $\omega \neq k\pi$ lar için sanal eksen üzerinde bir kök bulunabilir. Dolayısıyla Teorem 3.4.2.2 den dolayı (3.4.45) denklem sistemi asimtotik kararlıdır. Ayrıca bu denklem sistemi için $x_1(t) = e^{-2t}\upsilon$ ve $x_2(t) = e^{-3t}\upsilon$ ifadeleri birer çözümdür.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Doğal ya da insan yapımı süreçlerin hemen hemen her etkileşiminde doğal olarak bir zaman gecikmesi meydana gelir. Zaman gecikmeleri o kadar sık görülür ki, neredeyse her durumda, onları görmezden gelmek gerçeği göz ardı etmektir. Biyolojide nüfus ve av-avcı modellemelerinde, tıpta hastalık modellerinde, fizikte elektrik devre modellerinde, mühendislikte kontrol teorisinde sürekli olarak zaman gecikmeleri kullanılmaktadır.

Zaman gecikmeli denklemlerin nüfus modellerine uygulanması 1920 lere kadar uzansa da, literatüre yerleşmesi 1950 li yılları bulmaktadır. Özellikle Bellman ve Cooke (1963)'un, gecikmeli diferensiyel denklemlerin popülasyon dinamiği ve matematiksel biyolojinin diğer alanları bağlamındaki çalışmaları, Kuang (1993), Hale and Lunel (1993) ve Smith (2010) tarafından yazılan kitaplar, gecikmeli diferensiyel denklemlerin oluşturulmasında bu nüfus dinamikleri problemlerinin modellenmesi ve teorik analizi için gerekli olan altyapıyı sağlamıştır. Ayrıca, matematiksel biyolojide gecikmeli diferensiyel denklemlerin daha somut örnekleri Gopalsamy (1992) tarafından yazılan kitapta bulunabilir.

Gecikmeli diferensiyel denklemlerin kararlılığı üzerine yapılan çalışmaları mümkün olduğunca açık bir şekilde görebilmek için $\tau > 0,\ A \in \mathbb{R}$ için

$$x'(t) = Ax(t-\tau) \tag{4.1}$$

denklemini ele alarak başlayalım. Bu denklemin sıfır çözümünün kararlılığı Bellman ve Cooke (1963) tarafından incelenmiştir.

Hara ve Sugie (1996), (4.1) denklemini $\tau > 0,\ A \in M_2(\mathbb{R})$ için inceleyerek, daha genel bir durumda kararlılık şartlarını oluşturmuşlardır. Stephan (1989), $k,l > 0$ ve $A \in \mathbb{R}$ olmak üzere (4 1) denkleminin

$$x'(t) = A\big(x(t-k) + x(t-l)\big), \tag{4.2}$$

iki gecikmeye sahip olduğu durumu ele almış; Hara, Miyazaki ve Morii (1997) ise (4.2) denklemini, $k,l>0$ ve $A\in M_2(\mathbb{R})$ için sisteme genişleterek, bu denklem sistemi için asimtotik kararlılık şartlarını vermişlerdir.

Ruan ve Wei (2003), (4.2) denkleminden farklı olarak $k,l>0$ ve $A,B\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$x'(t)=Ax(t)-B\big(x(t-k)+x(t-l)\big), \tag{4.3}$$

denklemini incelemiş ve denklem için asimtotik kararlılık şartlarını elde etmişlerdir. Bu tez çalışmasının 3. bölüm 4. kesimde, (4.3) denklemi $k,l>0,\ B\in\mathbb{R}$ ve $A\in M_2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$x'(t)=Bx(t)-A\big(x(t-k)+x(t-l)\big), \tag{4.4}$$

denklem sistemine genişletilerek asimtotik kararlılığı incelenmiştir. Diğer taraftan Hayes (1950) ve Boose (1987) $A,B\in\mathbb{R}$ için

$$x'(t)=Ax(t)+Bx(t-l) \tag{4.5}$$

denklemini ele alarak bu denklemin kararlılık koşullarını oluşturmuşlardır. Sakata (1998) ve Matsunaga (2008), aynı denklemi $A\in\mathbb{R}$ ve $B\in M_2(\mathbb{R})$ için, Matsunaga (2009) ve Nakajima (2014) ise $A\in M_2(\mathbb{R})$ ve $B\in\mathbb{R}$ için bu denklemin asimtotik kararlılığı için yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Sakata ve Hara (2004) $A,B\in\mathbb{R}$ ve $l/k\in\mathbb{Q}$ için

$$x'(t)=Ax(t-k)+Bx(t-l) \tag{4.6}$$

denklemini ele almış ve bu denklemin asimtotik kararlılığını incelemişlerdir. Zaman gecikmeli diferensiyel denklemlerin asimtotik kararlılık şartı için elde edilen sonuçlar tablo 4.1.'de özetlenmiştir:

Tablo 4.1. *Zaman gecikmeli diferensiyel denklemlerin asimtotik kararlılık şartı için elde edilen sonuçlar*

Gecikmeli Diferensiyel Denklemler		
Denklemler	**Parametreler**	**Yazarlar& Kriterler**
$x'(t) = Ax(t-\tau)$	$A \in \mathbb{R}$	Bellman ve Cooke (1963)
	$A \in M_2(\mathbb{R})$	Hara ve Sugie (1996)
$x'(t) = A\big(x(t-k)+x(t-l)\big)=0$	$A \in \mathbb{R}$	Stepan (1989)
	$A \in M_2(\mathbb{R})$	Hara, Miyazaki ve Morii (1997)
$x'(t) = Bx(t) - A\big(x(t-k)+x(t-l)\big)$	$A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$	Ruan ve Wei (2003)
	$B \in \mathbb{R}$, $A \in M_2(\mathbb{R})$	Değer ve Bolat (2018), Değer ve Bolat (2018)
	$A, B \in M_2(\mathbb{R})$	Açık Problem
$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-l)$	$A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$	Hayes (1950), Boose (1987)
	$A \in \mathbb{R}$, $B \in M_2(\mathbb{R})$	Sakata (1998), Matsunaga (2008)
	$A \in M_2(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}$	Matsunaga (2009), Nakajima (2014)
	$A, B \in M_2(\mathbb{R})$	Açık Problem
$x'(t) = Ax(t-k) + Bx(t-l)$	$A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $l/k \in \mathbb{Q}$	Sakata ve Hara (2004)
	$A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $l/k \notin \mathbb{Q}$	Açık Problem
	A yada $B \in M_2(\mathbb{R})$	Açık Problem

Diferensiyel denklemlerin diskret analoğu olan fark denklemleri özellikle son 40 yıldır literatürde ön plana çıkmaktadır. Fark denklemleri ile ilgili olarak Goldberg (1986), Lakshmikantham ve Trigiante (1988), Mickens (1990), Akın ve Bulgak (1998), Agarwal (2000) ve Kelley ve Peterson (2001) tarafından yapılan çalışmalar bu teoride önemli bir yere sahiptir. Ayrıca, gecikmeli fark denklemleri ve bu denklemlerden oluşan denklem sistemleri için daha somut uygulamalar Elaydi (1999) tarafından yazılan kitapta bulunabilir.

Gecikmeli fark denklemlerinin kararlılığı üzerine yapılan çalışmaları açık bir şekilde görebilmek için $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $B \in \mathbb{R}$ olmak üzere linnerleştirilmiş popülasyon denklemi olarak bilinen

$$x(n+1) - x(n) = Bx(n-k) \tag{4.7}$$

denklemini ele alarak başlayalım. Bu denklemin kararlılık durumu Levin ve May tarafından 1976 da incelenmiştir. Clark (1976) ve Kuruklis (1994), (4.7) denklemini $k \in \mathbb{Z}^+, B \in \mathbb{R}\ \ A \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$x(n+1) - Ax(n) = Bx(n-k) \tag{4.8}$$

biçiminde genelleştirerek bu fark denkleminin asimtotik kararlılığı için sonuçlar elde etmişlerdir.

Matsunaga ve Hara (1999), (4.7) denklemini bir $B \in M_2(\mathbb{R})$ matrisi için ele almış ve bu denklem sisteminin asimtotik kararlılığını incelemişlerdir. Matsunaga (2004), Kipnis - Malygina (2011) ve Cermak - Jansky (2014), $k \in \mathbb{Z}^+$, $A \in \mathbb{R}$ ve $B \in M_2(\mathbb{R})$ için

$$x(n+1) - Ax(n) = Bx(n-k) \tag{4.9}$$

genelleştirilmiş fark denklem sistemini ayrı ayrı ele alarak bu denklem sisteminin asimtotik kararlılığı için şartları oluşturmuşlardır.

Bu tez çalışmasının 3. bölüm 1. kesimde, (4.9) denklem sistemi ele alınarak bu denklem sisteminin asimtotik kararlılık şartları incelenmiştir.

Ogita, Matsunaga ve Hara (2000), $k, l \in \mathbb{Z}^+$ ve $A \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x(n+1) - x(n) = A\big(x(n-k) + x(n-l)\big) \tag{4.10}$$

iki gecikmeli fark denklemini inceleyerek, bu gecikmeli fark denklemi için asimtotik kararlılık şartlarını vermişlerdir.

Nagabuchi (2014), (4.10) denklemini $A \in M_2(\mathbb{R})$ alarak denklem sistemine genişletmiş ve bu denklem sisteminin asimtotik kararlılık şartlarını incelemiştir. Bu tez çalışmasının 3. bölüm 2. kesimde, Nagabuchi (2014)'nin ele almış olduğu denklem sistemi $B \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$x(n+1) - Bx(n) = A\big(x(n-k) + x(n-l)\big)$$

genelleştirilerek, bu fark denklem sisteminin asimtotik kararlılık şartları elde edilmiştir. Dannan, 2004 yılında

$$x(n+1) - Ax(n-k) + Bx(n-l) = 0$$

iki gecikmeli fark denklemini ele almış ve bu denklemin asimtotik kararlılık şartlarını vermiştir.

Zaman gecikmeli fark denklemlerinin asimtotik kararlılık koşulu için, elde edilen sonuçlar tablo 4.2'de özetlenmiştir:

Tablo 4.2. *Zaman gecikmeli fark denklemlerinin asimtotik kararlılık şartı için elde edilen sonuçlar*

Gecikmeli Fark Denklemleri		
Denklemler	**Parametreler**	**Yazarlar& Kriterler**
$x(n+1)-x(n)=Ax(n-k)$	$A\in\mathbb{R}$	Levin ve May (1976),
	$A\in M_2(\mathbb{R})$	Matsunaga ve Hara (1999)
$x(n+1)-x(n)=A\big(x(n-k)+x(n-l)\big)$	$A\in\mathbb{R}$	Ogita, Matsunaga, Hara (2000)
	$A\in M_2(\mathbb{R})$	Nagabuchi (2014)
$x(n+1)-Bx(n)=A\big(x(n-k)+x(n-l)\big)$	$B\in\mathbb{R}$, $A\in M_2(\mathbb{R})$	Değer ve Bolat ()
	$A,B\in M_2(\mathbb{R})$	Açık Problem
$x(n+1)-Ax(n)+Bx(n-l)=0$	$A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$	Kuruklis (1994) Clark (1976)
	$A\in\mathbb{R}$, $B\in M_2(\mathbb{R})$	Matsunaga(2004), Kipnis ve Malygina (2011), Cermak ve Jansky (2014) Değer ve Bolat(2017)
	$A,B\in M_2(\mathbb{R})$	Açık Problem
$x(n+1)-Ax(n-k)+Bx(n-l)=0$	$A,B\in\mathbb{R}$	Dannan (2004)
	A yada $B\in M_2(\mathbb{R})$	Açık Problem

Burada ele alınan bütün denklemler ve sistemler karşılaştırıldığı zaman yapmış olduğumuz her bir çalışmanın literatürde bir boşluğu doldurduğu görülmektedir. Benzer denklem ya da denklem sistemlerini incelemek isteyen herhangi bir araştırmacı için literatürde bu alanda ele alınmış ya da ele alınabilecek bazı problemlerde belirtilmiştir. Açık olan problemlerin çözümleri, Bulgakov (1980) un tanımladığı ve Aydın (1995) ın periyodik sistemlere uyarladığı *şart sayısı* kullanılarak ya da daha farklı yöntemler geliştirilerek incelenebilir.

KAYNAKLAR

Akın, Ö. (2011). *Diferensiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri*, Palme Yayıncılık.

Akın, Ö. ve Bulgak, H. (1998). Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi, Selçuk Üniversitesi Yayınları, ISBN: 9754481342

Anton, H. and Rorres, C. (2010). *Elementary Linear Algebra*, John Wiley and Sons International Rights, Inc. Of 111River Street, Hoboken, NJ 07030, U.S.A.

Aydın, K. (1995). *Adi Periyodik Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Asimtotik Kararlığı için Şart Sayısı*, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora, Matematik.

Bellman, R. and Cooke, K. L. (1963). *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York.

Berezansky, L. and Braverman, E. (2011). *New Stability Conditions for Linear Differential Equations with Several Delays*, Abstract and Applied Analysis Volume 201, Article ID 178568, 19 p.

Boese, F. G. (1987). *Some stability charts and stability conditions for a class of difference-differential equations*, *Z. Angew. Math. Mech.*, **67,** T56–T59.

Bulkakov, A. Y. (1980). *An effectively calculable parameter for the stability quality of systems of linear differential equations with constant coefficients*, in Siberia Math. J.21, 339-347.

Camouzis, E. Ladas, G.(2008). *Dynamics of Third-Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures.* New York: Chapman and Hall/CRC

Cermák, J. Jánsky, J. (2014). *Stability switches in linear delay difference equations*, Applied Mathematics and Computation 243, 755–766.

Cermák, J. Jánsky, J. (2016). *Stability and periodic investigations of linear planar difference systems*, Math. Meth. Appl. Sci. 35, 165–178.

Clark, C. W. (1976). *A delay-recruitment model of populations dynamics with application to baleen whale populations*, J. Math. Biol. 3, 381-391.

Cooke, K. L. and Grossman, (1982). Z. *Discrete delay, distributed delay and stability switches*, J. Math. Anal. Appl. 86, 592-627.

Cooke, K. L. and van den Driessche, P. (1986). *On zeroes of some transcendental equations*, Funkcial Ekvacioj, 29, 77–90. MR865215 (87m:34098).

Dannan, F. (2004). The asymptotic stability of $x(n+k)+ax(n)+bx(n-1)=0$, J. Difference Equations Appl., 10, 589–599.

Değer, S. U. and Bolat, Y. (2017). *Stability conditions a class of linear delay difference systems.* Cogent Mathematics, 4(1), 1294445.

Değer, S. U. and Bolat, Y. (2018). *On asymptotic stability of a class of time-delay systems*. Cogent Mathematics & Statistics, 1473709.

Değer, S. U. and Bolat, Y. (2018). *Stability conditions of a class of linear retarded differential systems*. International Journal of Analysis and Applications, 16(4), 454-461.

Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed. Springer-Verlag, New York.

Forde, C. E. (2005). *Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology*, A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Mathematics) in The University of Michigan.

Goldberg, S. (1958). *Introduction to Difference Equations*. John Wiley&Sons, New York

Hale, J. K. and Lunel, S. M. V.(1993). *Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag*, New York, MR1243878 (94m:34169).

Hara, T. Sugie, J. (1996). *Stability region for systems of differential-difference equations*, Funkcial. Ekvac. 39, 69–86.

Hara, T. Miyazaki, R. and Morii, T. (1997). *Asymptotic stability condition for linear differential difference equations with N delays*, Dynam. Systems Appl., 6 493–505.

Hayes, N. D. (1950). *Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation*, J. London Math. Soc., 25, 226–232.

Huong, D. C. and Mau, N. V. (2013). *On a nonlinear difference equations with variable delay*, Demonstratio Mathematica Vol.XLV1, No:1.

Insperger, T. and Stepan G.(2011). *Semi-Discretization for Time-Delay Systems.* Springer Science Business Media, LLC, ISBN 978-1-4614-0334-0.

Kandemir, M. (2015). Diferensiyel Denklemler. Pegem Akademi, Ankara, No: 14749.

Kart, C. (1985). Matris metodları ve lineer dönüşümler. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, No:140.

Kipnis, M. M. and Nigmatullin, R. M. (2002). *Stability of the Trinomial Linear Difference Equations with Two Delays*, Automation and Remote Control, Vol. 65, No. 11, pp. 1710.

Kipnis, M. M. And Malygina, V. V. (2011). *The stability cone for a matrix delay difference equation*, Int. J. Math. Math. Sci, Article ID 860326, 15 pages

Kuang, Y. (1993). *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, Boston, MR1218880 (94f:34001).

Kuruklis, S. A. (1994).*The asymptotic stability of* $x(n+1)-ax(n)+bx(n-k)=0$, J.Math. Anal. Appl. 188, 719–731.

Levin, S.and May, R. (1976). *A Note on Difference-Delay Equations*, Theoretical Population Biol. 9, 178-187.

Malygina, V. Chudinov, K. M. (2016). *Asymptotics of Solutions of Difference Equations with Delays*, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 2016, Vol. 60, No. 7, pp. 56–70.

Matsunaga, H. and Hara, T. (1999). *The asymptotic stability of a two-dimensional linear delay difference equation*, Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems, 6, 465–473.

Matsunaga, H. (2004*). Stability Regions for a Class of Delay Difference Systems*, Fields Institute Communications, Vol 42, pp. 273–283.

Matsunaga, H. (2008). *Delay-dependent and delay-independent stability criteria for a delay differential system*, American Mathematical Society Volume 136, Number 12, Pages 4305–4312

Matsunaga, H. (2009). *Stability Regions for Linear Delay Differential Equations with Four Parameters*. International Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications, *3*(1-2), 99-107.

Matsunaga, H. Ogita, R. Murakami, K. (2001). *Asymtotic behaviour of a system of higher order linear difference equations*, Nonlinear Analysis 47, 4667-4677.

Musayev, B. ve Alp, M. (2000). Fonksiyonel analiz. *Balcı yayınları*.

Nagabuchi, Y. (2001). *Asymptotic stability for a linear difference system with two delays*, Nonlinear Analysis 47 4117-4128.

Nakajima, H. (2014). *On the Stability of a linear Retarded Differential-Difference Equation*, Funkcialaj Ekvacioj. 57, 43-56

Ogita, R., Matsunaga, H. and Hara, T.(2000). *Asymptotic stability condition for a class of linear delay difference equations of higher order*, J. Math. Anal. Appl. 248, 83–96.

Pullan, A. J., Cheng, L. K. and Buist, M. L. (2005). *Mathematically modelling the electrical activity of the heart: from cell to body surface and back again.* World Scientific Publishing Company.

Remsing, C. C. (2006). AM3.2 - Linear Control, Lecture Notes, South Africa.

Ruan, S. and Wei, J.(2003). *On The Zeros Of Transcendental Functions With Applications To Stability Of Delay Differential Equations With Two Delays*, Dynamic of Continuous, Discrete and impulsive Systems, 863-874.

Sakata, S. and Hara, T. (2004). *Stability regions for linear differential equations with two kinds of time lags*, Funkcial. Ekvac. 47 129–144.

Sakata, S. (1998). *Asymptotic stability for a linear system of differential-difference equations*, Funkcial. Ekvac. 41 435–449

Smith, H. (2010). *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to The Life Science*, Springer, New York.

Stepan, G. (1989). *Retarded Dynamical Systems*, Longman Group, London

S. A. Ivanov, Kipnis, M.M. and Malygina, V. V. *The stability cone for a matrix difference equation with two delays*, Applied Mathematics, 2011, ID 910936, 1-19.

Tomasek, P. (2015). *Asymptotic stability of a full term linear difference equation with two parameters*, Tatra Mt. Math. Publ. 63 (2015), 283–290.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Serbun Ufuk DEĞER
Doğum Yeri ve Yılı : Siverek 1980
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : sudeger@kastamonu.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise : İçel Hacı Sabancı Lisesi - 1997
Lisans : Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü -2003,
Yüksek Lisans : Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı -2008

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Özel Arıkan-Fen Dershanesi (2004 – 2006)
İş Yeri : Özel Aday Dershanesi (2005 – 2007)
İş Yeri : Mersin Uğur Dershanesi (2007 – 2008)
İş Yeri : Kastamonu Üniversitesi Kastamonu Meslek Yüksek Okulu (2009 –Halen)

Yayınları

1. Değer, S. U. and Bolat, Y. (2017). *Stability conditions a class of linear delay difference systems.* Cogent Mathematics, 4(1), 1294445.

2. Değer, S. U. and Bolat, Y. (2018). *On asymptotic stability of a class of time-delay systems*. Cogent Mathematics & Statistics, 1473709.

3. Değer, S. U. and Bolat, Y. (2018). *Stability conditions of a class of linear retarded differential systems*. International Journal of Analysis and Applications, 16(4), 454-461.