

**T.C.  
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**de-SİTTER DÜZLEMİNDE AYRIT VE GRAM MATRİSLERİ  
ÜZERİNE**

**Hakan ÖZAYRANCI**

**Danışman  
Jüri Üyesi  
Jüri Üyesi**

**Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER  
Doç. Dr. Ahmet EROĞLU  
Yrd. Doç. Dr. Zafer ÜNAL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**KASTAMONU –2018**

## TEZ ONAYI

**Hakan ÖZAYRANCI** tarafından hazırlanan "**de-Sitter Düzleminde Ayrit ve Gram Matrisleri Üzerine**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana bilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

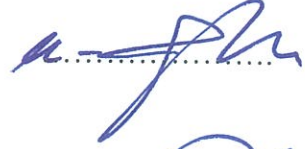
Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER  
Kastamonu Üniversitesi



Jüri Üyesi

Doç.Dr. Ahmet EROĞLU  
Niğde Ömer Halisdemir  
Üniversitesi



Jüri Üyesi


Yrd. Doç. Dr. Zafer ÜNAL  
Kastamonu Üniversitesi



05/02/2018

Enstitü Müdür V.

Doç. Dr. Mehmet Altan KURNAZ





## TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

  
Hakan ÖZAYRANCI

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

de-SITTER DÜZLEMİNDE AYRIT VE GRAM MATRİSLERİ ÜZERİNE

Hakan ÖZAYRANCI

Kastamonu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER

Bu tezde, de-Sitter düzlemindeki üçgenlerin çeşitleri incelenmiştir. İncelenen bu üçgenlerin ayrıt ve Gram matrisleri elde edilip, özdeğerleri, özvektörleri ve ayrıt uzunlukları bulunmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** de-Sitter düzlemi, ayrıt ve Gram matrisleri

**2018, 58 sayfa**

**Bilim Kodu: 204**

## ABSTRACT

MSc. Thesis

ON EDGE AND GRAM MATRIX IN de-SITTER PLANE

Hakan ÖZAYRANCI

Kastamonu University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Assist.Prof. Dr. Ümit TOKEŞER

In this thesis, it is examined kinds of triangles in de-Sitter plane. The triangles that have been examined, after getting edges and Gram matrices eigenvalues, eigenvector and length of edges have been found.

**Keywords:** de-Sitter plane, edge and Gram matrix

**2018, 58 pages**

**Science Code: 204**

## TEŞEKKÜR

Deęerli fikir, yardım ve yol göstericiliği ile tezin sonuca ulaőmasında büyük katkıları olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü) ’e teőekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan Aileme ve Niőanlım Sezen’e gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Hakan ÖZAYRANCI  
Kastamonu, Őubat, 2018



## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	v
TEŞEKKÜR .....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	ix
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1. Öklidyen Uzay .....	2
2.2. Hiperbolik ve de-Sitter Uzayı.....	5
2.3. Öklidyen, Küresel ve Hiperbolik Uzayda Tanımlar .....	7
3. de-SİTTER DÜZLEMİNDE ÜÇGENLER.....	10
3.1. de-Sitter Uzayında Doğru ve Doğru Parçaları.....	10
3.2. de-Sitter Uzayında Üçgen Çeşitleri.....	13
3.3. de-Sitter Düzlemindeki Üçgenlerin Ayırıt Matrisleri .....	18
3.3.1. de-Sitter Uzayındaki İki noktadan Geçen Doğruların Bazı Özellikleri.....	19
3.4. de-Sitter Uzayında Ayırıt Matrisi Verilen Üçgenin Gram Matrisi .....	20
4. de-SİTTER DÜZLEMİNDEKİ ÜÇGENLERİN ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖRLERİ .....	23
4.1. Null Tabanlı, Spacelike Ayaklı de-Sitter Üçgen .....	23
4.2. Null Tabanlı, Timelike Ayaklı de-Sitter Üçgen.....	26
4.3. Kenarları Null, Spacelike ve Timelike Olan de-Sitter Üçgen .....	28
4.4. Spacelike Tabanlı, Timelike Ayaklı de-Sitter Üçgen .....	30
4.5. Spacelike Tabanlı, Null Ayaklı de-Sitter Üçgen .....	34
4.6. Timelike Tabanlı, Spacelike Ayaklı de-Sitter Üçgen .....	35
4.7. Timelike Tabanlı, Null Ayaklı de-Sitter Üçgen.....	38
4.8. Kenarları Null Olan de-Sitter Üçgen.....	40
4.9. Kenarları Spacelike Olan de-Sitter Üçgen .....	42
4.10. Kenarları Timelike Olan de-Sitter Üçgen.....	44

5. AYRIT UZUNLUKLARININ BULUNMASI .....	48
5.1. Null Tabanlı, Spacelike Ayaklı de-Sitter Üçgen .....	48
5.2. Null Tabanlı, Timelike Ayaklı de-Sitter Üçgen.....	49
5.3. Kenarları Null, Spacelike ve Timelike Olan de-Sitter Üçgen .....	49
5.4. Spacelike Tabanlı, Timelike Ayaklı de-Sitter Üçgen .....	50
5.5. Spacelike Tabanlı, Null Ayaklı de-Sitter Üçgen .....	51
5.6. Timelike Tabanlı, Spacelike Ayaklı de-Sitter Üçgen .....	52
5.7. Timelike Tabanlı, Null Ayaklı de-Sitter Üçgen.....	53
5.8. Kenarları Null Olan de-Sitter Üçgen.....	54
5.9. Kenarları Spacelike Olan de-Sitter Üçgen .....	54
5.10. Kenarları Timelike Olan de-Sitter Üçgen.....	55
KAYNAKLAR.....	57
ÖZGEÇMİŞ.....	58

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$boy(x)$	$x$ in boyutu
$C$	Konveks küme
$C^{n-1}$	Işık Konisi
$d_E$	Öklidyen uzunluk
$d_S$	Küresel uzaklık fonksiyonu
$E^n$	$n$ boyutlu Öklidyen uzay
$S^n$	$n$ -boyutlu Küresel uzay
$G$	Gramm matrisi
$M$	Ayrıt matrisi
$IR$	Reel sayılar kümesi
$IR^n$	$n$ boyutlu vektör uzayı
$IR_1^n$	Lorentz uzayı
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$\langle , \rangle_L$	Lorentz iç çarpımı
$\eta(x, y)$	$x$ ile $y$ arasındaki timelike açı
$\theta_{ij}$	$P_i$ ve $P_j$ köşelerinin karşısındaki dihedral açı
$\varphi_{ij}$	$P_i$ ve $P_j$ köşelerini birleştiren ayrıtın uzunluğu

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 3.1. Null Kenarlı Üçgen .....	13
Şekil 3.2. Spacelike Tabanlı Null Ayaklı Üçgen.....	13
Şekil 3.3. Null Tabanlı Spacelike Ayaklı Üçgen.....	14
Şekil 3.4. Timelike Tabanlı Null Ayaklı Üçgen.....	14
Şekil 3.5. Null Tabanlı Spacelike Ayaklı Üçgen .....	15
Şekil 3.6. Kenarları spacelike, timelike, null olan Üçgen.....	15
Şekil 3.7. Spacelike Kenarlı Üçgen .....	16
Şekil 3.8. Timelike Kenarlı Üçgen .....	16
Şekil 3.9. Timelike Tabanlı Spacelike Ayaklı Üçgen.....	17
Şekil 3.10. Timelike Ayaklı Spacelike Tabanlı Üçgen.....	17
Şekil 4.1. Null Tabanlı, Spacelike Ayaklı de-Sitter Üçgen.....	23
Şekil 4.2. Null Tabanlı, Timelike Ayaklı de-Sitter Üçgen.....	26
Şekil 4.3. Kenarları Null, Spacelike ve Timelike Olan de-Sitter Üçgen .....	28
Şekil 4.4. Spacelike Tabanlı, Timelike Ayaklı de-Sitter Üçgen.....	31
Şekil 4.5. Spacelike Tabanlı, Null Ayaklı de-Sitter Üçgen.....	34
Şekil 4.6. Timelike Tabanlı, Spacelike Ayaklı de-Sitter Üçgen.....	36
Şekil 4.7. Timelike Tabanlı, Null Ayaklı de-Sitter Üçgen.....	39
Şekil 4.8. Kenarları Null Olan de-Sitter Üçgen.....	41
Şekil 4.9. Kenarları Spacelike Olan de-Sitter Üçgen.....	42
Şekil 4.10. Kenarları Timelike Olan de-Sitter Üçgen.....	45



## 1. GİRİŞ

Asmus, I., “Duality Between Hyperbolic and de-Sitter Geometry” isimli makalesinde de-Sitter düzlemindeki üçgenlerin yapısından ve çeşitlerinden bahsetmiştir. Bu makalede de-Sitter uzayındaki üç çeşit doğru parçasına göre, on tip üçgenin varlığından bahsedilmiştir.

Biz de bu çalışmamızda, Baki Karlığa'nın, “Edge matrix of hyperbolic simplices” isimli makalesinden yararlanarak, de-Sitter düzlemindeki üçgen çeşitlerinin Gram matrislerini hesaplayıp, bu matrisler yardımı ile bu üçgenlerin belli noktalardaki özdeğer ve özvektörlerini elde etmeye çalışacağız.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1. Öklidyen Uzay

$n$ - boyutlu Öklid uzayı için standart analitik model,  $n$ - boyutlu  $\mathbb{R}^n$  reel vektör uzayı ile eşleşen  $\mathbb{R}^n$  afin uzayıdır.  $\mathbb{R}^n$  üzerindeki Öklidyen iç çarpım non-dejenere, simetrik, bilineer ve pozitif tanımlıdır.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\mathbb{R}^n$  vektör uzayı üzerinde non-dejenere, simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı bir iç çarpım olmak üzere  $x \in \mathbb{R}^n$  nin bu iç çarpıma göre normu

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlı reel sayıdır [1].

#### 2.1.1. Tanım

$x, y \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere iki vektör arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanır [1,7].

#### 2.1.2. Tanım

$\mathbb{R}^n$  üzerinde tanımlanan  $d_E$  metriğine Öklid metriği denir [7].

#### 2.1.3. Tanım

$x, y \in IR^n$  iki vektör ve  $n > 1$  olsun.  $x$  ile  $y$  nin Lorentzian iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n$$

ile tanımlanan indefinit bir iç çarpımdır. Bu çarpım ile birlikte  $IR^n$  uzayına Lorentz uzayı denir ve  $IR_1^n$  ile gösterilir [2].  $IR_1^n$  uzayında bir  $x$  vektörünün Lorentz normu

$$\|x\| = |\langle x, x \rangle_L|^{1/2}$$

ile,  $x$  ve  $y$  vektörünün Lorentz uzunluğu ise

$$d_L(x, y) = \|x - y\| \text{ dur.}$$

#### 2.1.4. Tanım

$x$  ve  $y$   $IR_1^n$  de pozitif (negatif) zaman benzeri iki vektör olsun.

$$\langle x, y \rangle_L = -\|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$$

olacak şekilde negatif olmayan bir tek  $\eta(x, y)$  reel sayısı vardır.  $x$  ve  $y$  arasındaki Lorentz zaman benzeri (timelike) açısı,  $\eta(x, y)$  olarak tanımlanır [1,2].

#### 2.1.5. Tanım (Timelike vektörler arasındaki timelike açısı)

$x$  ve  $y$   $IR^{n+1}$  nin pozitif (negatif) timelike vektörleri olsun.  $\eta(x, y)$  negatif olmayan bir reel sayı olmak üzere

$$\langle x, y \rangle_L = \|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$$

dir. Buna göre  $x$  ve  $y$  arasındaki Lorentzian timelike açısı  $\eta(x, y)$  dir. Eğer  $\eta(x, y) = 0$  ise  $x$  ve  $y$  nin birbirlerinin pozitif skalar çarpımıdır [1].

#### 2.1.6. Tanım (Spacelike vektörler arasındaki spacelike açısı)

$x$  ve  $y$ ,  $\mathbb{R}^{n+1}$  in spacelike vektörleri olsun. Böylece  $0$  ve  $\pi$  arasında bir tek  $\eta(x, y)$  reel sayısı vardır ki

$$\langle x, y \rangle_L = \|x\| \|y\| \cos \eta(x, y)$$

dir.  $x$  ve  $y$  arasındaki Lorentzian spacelike açısı  $\eta(x, y)$  ile tanımlanır [1].

#### 2.1.7. Tanım (Spacelike vektörler arasındaki timelike açısı)

$x$  ve  $y$ , timelike alt vektör uzayı tarafından gerilen  $\mathbb{R}^{n+1}$  in spacelike vektörleri olsunlar. Bir tek  $\eta(x, y)$  reel sayısı vardır ki

$$|\langle x, y \rangle_L| = \|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$$

dir.  $x$  ve  $y$  arasındaki Lorentzian timelike açısı  $\eta(x, y)$  ile tanımlanır [1].

#### 2.1.8. Tanım (Timelike ve spacelike vektörler arasındaki açısı)

$\mathbb{R}^{n+1}$  de  $x$  spacelike vektör ve  $y$  pozitif timelike vektör olsun. Böylece bir tek negatif olmayan  $\eta(x, y)$  reel sayısı vardır ki

$$|\langle x, y \rangle_L| = \|x\| \|y\| \sinh \eta(x, y)$$

dir.  $x$  ve  $y$  arasındaki Lorentzian timelike açısı  $\eta(x, y)$  ile tanımlanır [1].

## 2.2. Hiperbolik ve de-Sitter Uzayı

$S_1^n \subset IR_1^{n+1}$  ve  $S_1^n = \{x \in IR_1^{n+1} : \langle x, x \rangle = 1\}$  kümesine  $n$ -boyutlu birim pseudo-küresel uzay (de-Sitter uzayı),  $H_0^n = \{x \in IR_1^{n+1} : \langle x, x \rangle = -1\}$  kümesine de  $n$ -boyutlu birim pseudo-hiperbolik uzay denir.  $H_0^n$  uzayının iki bağlantılı bileşeni  $H_{0,+}^n$  ve  $H_{0,-}^n$  olmak üzere, bu bileşenlerin her biri  $n$ -boyutlu hiperbolik uzayın modeli olarak alınabilir. Biz literatüre bağlı kalarak hiperbolik uzayın modeli olarak pozitif bileşeni göz önüne alacağız, yani;  $H_{0,+}^n = H^n \subset IR_1^{n+1}$  olarak alacağız [1].

### 2.2.1. Tanım

$x, y \in H^n \subset IR_1^{n+1}$  ve  $x$  ile  $y$  arasındaki Lorentzian zaman benzeri açısı  $\eta(x, y)$  olsun.  $x$  ve  $y$  arasındaki hiperbolik uzunluk

$$d_H(x, y) = \eta(x, y)$$

şeklinde tanımlı bir reel sayıdır.

$$\langle x, y \rangle_L = -\|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y) \text{ olduğundan}$$

$$\cosh d_H(x, y) = -\langle x, y \rangle_L$$

olur [1,9].

### 2.2.1. Teorem

$d_H$  hiperbolik uzunluk fonksiyonu  $H^n$  üzerinde bir metriktir [1].

## *İspat*

[1] den görülebilir.

### **2.2.2. Tanım**

$d_H$  metriği ile birlikte  $H^n$  uzayı hiperbolik  $n$ -uzay olarak adlandırılır [1].

### **2.2.3. Tanım**

$H^n$  nin bir doğrusu  $IR_1^{n+1}$  in iki boyutlu zaman benzeri alt vektör uzayı ile  $H^n$  nin arakesitidir.  $x, y \in H^n$  vektörleri  $IR^{n+1}$  in  $V(x, y)$  ile gösterilen iki boyutlu bir zaman benzeri alt uzayını gererler. Böylece  $L(x, y) = H^n \cap Span(x, y)$ ,  $x$  den geçen  $y$  yi içeren  $H^n$  nin bir doğrusudur [1].

Buna göre  $H^n$  nin jeodezikleri onun doğrularıdır.

### **2.2.4. Tanım**

$H^n$  nin bir  $m$ -düzlemi,  $IR_1^{n+1}$  in  $(m+1)$  -boyutlu zaman benzeri alt vektör uzayı ile  $H^n$  nin arakesitidir [1].

### **2.2.5. Tanım**

$H^n$  nin bir hiperbolik 1-düzlemi onun hiperbolik doğruları, hiperbolik  $(n-1)$  -düzlemi onun hiperdüzlemi olarak adlandırılır [1].

## **2.3. Öklidyen, Küresel ve Hiperbolik Uzayda Tanımlar**

Aşağıda vereceğimiz tanımlarda  $X = E^n, H^n, S^n, S_1^n$  olarak alınacaktır.

### 2.3.1. Tanım

$X$  in bir alt kümesi  $C$  olsun. Her  $x, y \in C$  ayrık çifti için  $x$  ve  $y$  yi içeren doğru parçası  $C$  de kalıyorsa ( $X = S^n$  ve  $X = S_1^n$  için  $y \neq -x$ ),  $C$  kümesine konveks küme denir [1].

### 2.3.2. Tanım

$X$  de  $n$ -boyutlu bir konveks polihedron  $P$  olsun.  $k=1,2,\dots,n+1$  için  $P$  nin bir  $k$ -yüzü(face),  $P$  nin  $(k+1)$  yüzünün bir kenarı olarak tanımlanır [1].

### 2.3.3. Tanım

$X$  de  $n$ -boyutlu bir konveks polihedron  $P$  olsun.  $P$  nin 0-yüzüne,  $P$  nin tepesi denir[1].

### 2.3.4 Tanım

$X$  in her bir  $A$  alt kümesi için,  $A$  yı içeren  $X$  in bütün konveks alt kümelerinin arakesitine  $A$  nın konvekslik bölgesi denir [1].

### 2.3.5 Tanım

$X$  de  $n$ -boyutlu bir polihedron  $P$  olsun. Eğer  $P$  nin sonlu sayıda tepe noktası varsave  $P$  bu tepelerin konvekslik bölgesi ise ( $P \in S^n, S_1^n$  için antipodal noktaları içermezse),  $P$  ye bir çok tepeli(politop) denir [1].

### 2.3.6. Tanım

$X$  de  $(n+1)$  tepe noktalı,  $n$ -boyutlu bir politopa bir  $n$ -simpleks denir [1].

### 2.3.7. Tanım

İki boyutlu simplekse üçgen, üç boyutlu simplekse dörtyüzlü denir [10].

### 2.3.8. Tanım

$S^n$  de  $\Omega$ ,  $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$  tepe noktalı bir  $n$ -simpleks olsun. Bu simpleksin  $P_i$  ve  $P_j$  tepelerine zıt  $i, j$  yinci yüzleri arasındaki açıya dihedral açı denir [10].

Bu açığı  $\theta_{ij}$  olarak belirleyebiliriz.

### 2.3.9. Tanım

$S^n$  de  $\Omega$ ,  $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$  tepe noktalı bir  $n$ -simpleks olsun. Bu simpleksin  $P_i$  ve  $P_j$  tepe noktaları arasındaki uzaklığa ayrıt uzunluğu denir [10].

$\phi_{ij} = \arccos(\langle P_i, P_j \rangle)$  şeklinde belirlenir.

### 2.3.10. Tanım

$\Omega$  bir küresel dörtyüzlü olsun. Bu dörtyüzlünün  $P_i$  ve  $P_j$  tepe noktaları arasındaki uzaklık  $\phi_{ij} = \arccos(\langle P_i, P_j \rangle)$  dir [10].

Buna göre  $\cos \phi_{ij} = \langle P_i, P_j \rangle$  olur.

### 2.3.11. Tanım

$M = [\langle P_i, P_j \rangle] = [\cos \phi_{ij}]$  matrisine  $\Omega$  küresel dörtyüzlünün ayrıt matrisi denir [10].



### 2.3.12. Tanım

$G = [\langle P_i, P_j \rangle] = -[\cos \phi_{ij}]$  matrisine  $\Omega$  küresel dörtyüzlünün Gram matrisi denir [10].



### 3. de-SITTER DÜZLEMİNDE ÜÇGENLER

#### 3.1. de-Sitter Uzayında Doğru ve Doğru Parçaları

##### 3.1.1. Tanım

$p, q \in S_1^n$  ve  $w = q - \langle p, q \rangle p$  olmak üzere

- (i)  $|\langle p, q \rangle| < 1 \Leftrightarrow w$  spacelike,
- (ii)  $|\langle p, q \rangle| > 1 \Leftrightarrow w$  timelike,
- (iii)  $|\langle p, q \rangle| = 1 \Leftrightarrow w$  null [1].

##### 3.1.2. Tanım

$p, q \in S_1^n$  ve  $V = Sp\{p, q\}$  için

- (i)  $|\langle p, q \rangle| < 1 \Leftrightarrow V$  spacelike,
- (ii)  $|\langle p, q \rangle| > 1 \Leftrightarrow V$  timelike,
- (iii)  $|\langle p, q \rangle| = 1 \Leftrightarrow V$  null [1].

##### 3.1.3. Tanım

$p, q \in S_1^n$  ve  $V = Sp\{p, q\}$  olsun.

- (i)  $V$  spacelike ise  $p, q$  dan geçen doğrunun parametrik denklemi

$$\alpha(t) = (\cos t)p + (\sin t) \left( \frac{q - \langle p, q \rangle p}{\|q - \langle p, q \rangle p\|} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

dir [2].

(ii)  $V$  timelike ise  $p, q$  dan geçen doğrunun parametrik denklemi

$$\beta(s) = (\cosh s)p + (\sinh s) \left( \frac{q - \langle p, q \rangle p}{\|q - \langle p, q \rangle p\|} \right), \quad s \in \mathbb{R}$$

dir [2].

(iii)  $V$  null ise  $p, q$  dan geçen doğrunun parametrik denklemi

$$\gamma(\lambda) = p + \lambda(q - p), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

dir [2].

### 3.1.1. Teorem

$p, q \in S_1^n$  ve  $V = Sp\{p, q\}$  olsun.

(i)  $V$  spacelike ise  $\langle p, q \rangle = \cos t_0$  olmak üzere  $p, q$  ile sınırlı doğru parçasının uzunluğu  $t_0$  ve parametrik denklemi de

$$\alpha(t) = (\cos t)p + (\sin t) \left( \frac{q - \cos t_0 p}{\sin t_0} \right), \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

(ii)  $V$  timelike ise  $\langle p, q \rangle = \cosh s_0$  olmak üzere  $p, q$  ile sınırlı doğru parçasının uzunluğu  $s_0$  ve parametrik denklemi de

$$\beta(s) = (\cosh s)p + (\sinh s) \left( \frac{q - \cosh s_0 p}{\sinh s_0} \right), \quad 0 \leq s \leq s_0.$$

(iii)  $V$  null ise

$$\gamma(\lambda) = p + \lambda(q - p), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

### *İspat*

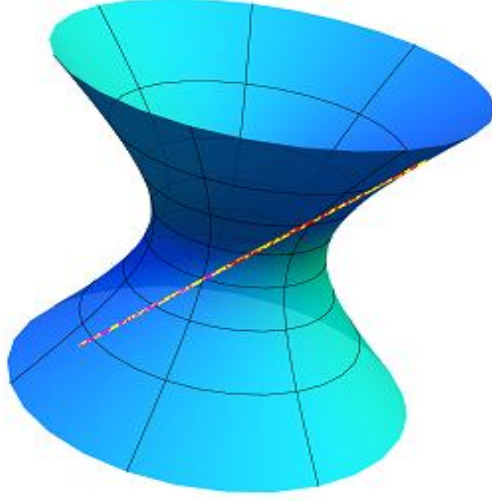
Tanım 3.1.3 (i) den  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha(t_0) = q$  ve  $\alpha$  sürekli olduğundan da  $\alpha(t) = (\cos t)p + (\sin t) \left( \frac{q - \cos t_0 p}{\sin t_0} \right)$ ,  $0 \leq t \leq t_0$  noktası  $p, q$  ile sınırlı doğru parçası üzerindedir.

Tanım 3.1.3 (ii) den  $\beta(0) = p$ ,  $\beta(s_0) = q$  ve  $\beta$  sürekli olduğundan da  $\beta(s) = (\cosh s)p + (\sinh s) \left( \frac{q - \cosh s_0 p}{\sinh s_0} \right)$ ,  $0 \leq s \leq s_0$  noktası  $p, q$  ile sınırlı doğru parçası üzerindedir.

Tanım 3.1.3 (iii) den  $\gamma(0) = p$  ve  $\gamma(1) = q$  ve  $\gamma$  sürekli olduğundan  $\gamma(\lambda) = p + \lambda(q - p)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$   $p, q$  ile sınırlı doğru parçasının parametrik denklemdir.

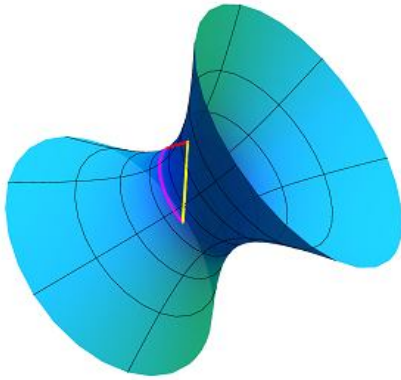
### 3.2. de-Sitter Uzayında Üçgen Çeşitleri

1.  ${}_0\Delta_0^3$  Null kenarlı üçgen



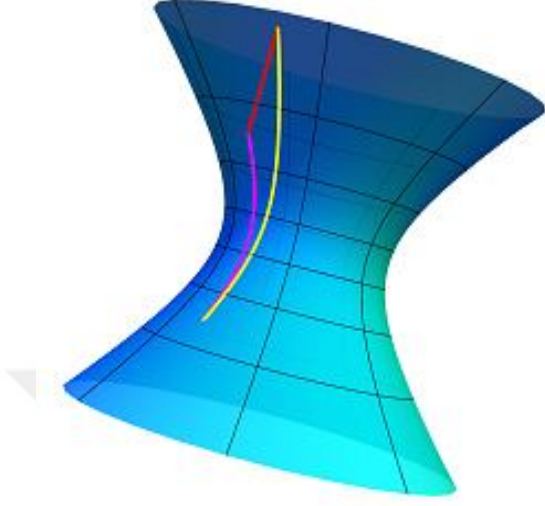
Şekil 3.1. Null kenarlı üçgen [3]

2.  ${}_1\Delta_0^2$  Spacelike tabanlı null ayaklı üçgen



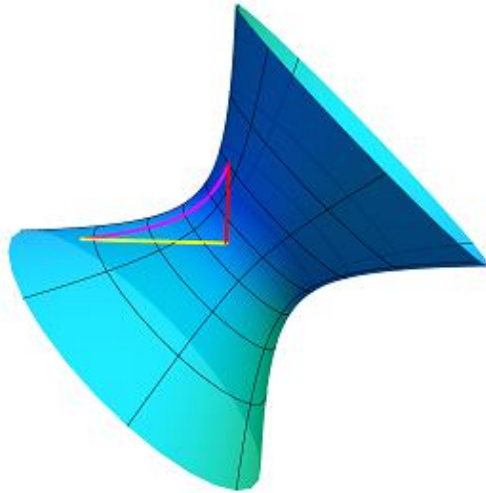
Şekil 3.2. Spacelike tabanlı null ayaklı üçgen [3]

3.  ${}_0\Delta_2^1$  Null tabanlı timelike ayaklı üçgen



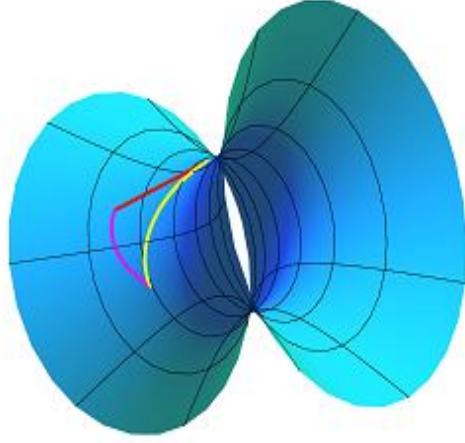
Şekil 3.3. Null tabanlı timelike ayaklı üçgen [3]

4.  ${}_0\Delta_1^2$  Timelike tabanlı null ayaklı üçgen



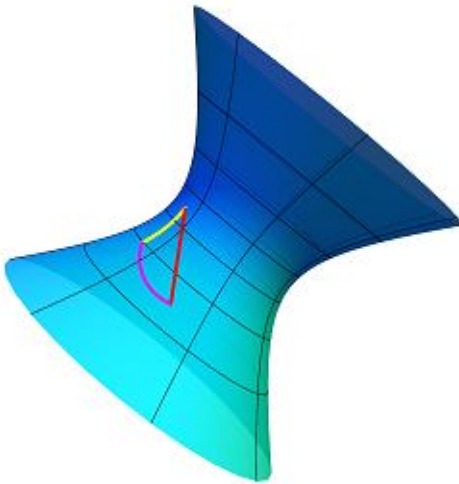
Şekil 3.4. Timelike tabanlı null ayaklı üçgen [3]

5.  ${}_2\Delta_0^1$  Null tabanlı spacelike ayaklı üçgen



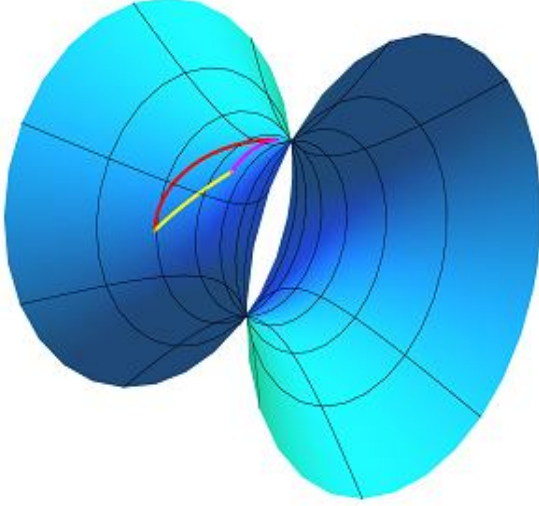
Şekil 3.5. Null tabanlı spacelike ayaklı üçgen [3]

6.  ${}_1\Delta_1^1$  Kenarları spacelike, timelike, null olan üçgen



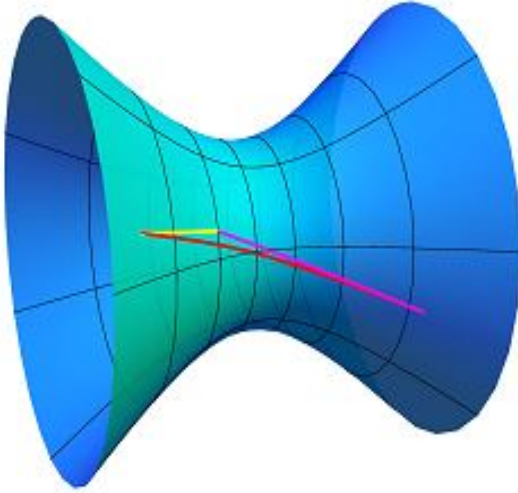
Şekil 3.6. Kenarları spacelike, timelike, null olan üçgen [3]

7.  ${}_3\Delta_0^0$  Spacelike kenarlı üçgen



Şekil 3.7. Spacelike kenarlı üçgen [3]

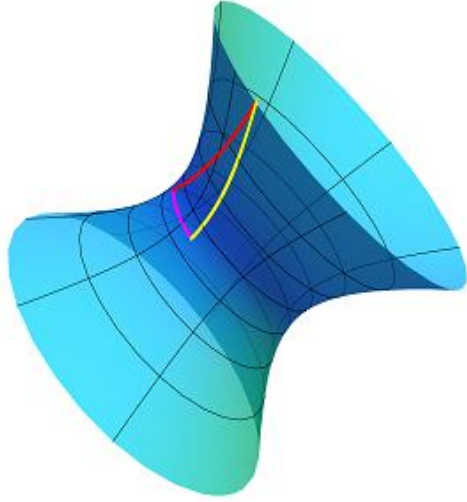
8.  ${}_0\Delta_3^0$  Timelike kenarlı üçgen



Şekil 3.8. Timelike kenarlı üçgen [3]

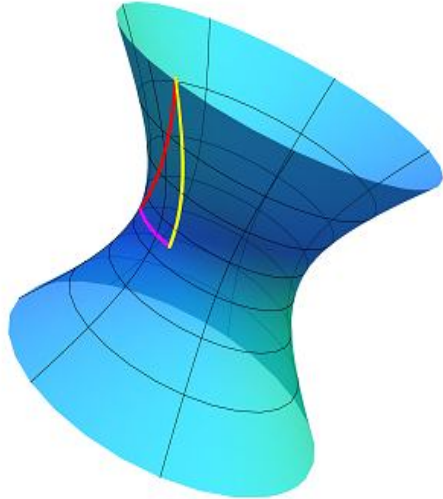


9.  ${}_2\Delta_1^0$  Timelike tabanlı spacelike ayaklı üçgen



Şekil 3.9. Timelike tabanlı spacelike ayaklı üçgen [3]

10.  ${}_1\Delta_2^0$  Spacelike tabanlı timelike ayaklı üçgen



Şekil 3.10. Spacelike tabanlı timelike ayaklı üçgen [3]

### 3.3. de-Sitter Düzlemindeki Üçgenlerin Ayrıt Matrisleri

#### 3.3.1. Teorem

$\vec{u}, \vec{v}$  null vektörlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  olmasıdır [4].

#### *İspat*

[4] deki Önerme 1.1.5 den görülebilir.

#### 3.3.2. Teorem

$p, q \in S_1^2$  için  $\vec{pq}$  vektörünün null olması için gerek ve yeter şart  $\langle p, q \rangle = 1$  olmasıdır [4].

#### *İspat*

$$\begin{aligned}\langle \vec{pq}, \vec{pq} \rangle = 0 &\Rightarrow 2(1 - \langle p, q \rangle) = 0 \\ &\Rightarrow \langle p, q \rangle = 1\end{aligned}$$

Tersine  $\langle p, q \rangle = 1 \Rightarrow \langle \vec{pq}, \vec{pq} \rangle = 2(1 - \langle p, q \rangle) = 0$

olup  $\vec{pq}$  nulldur.

#### 3.3.3. Teorem

$p, q, r \in {}_0\Delta_0^3$  tipinden üçgenin sıralı köşeleri ise  $r$  noktası  $p$  ve  $q$  nun belirlediği doğru üzerindedir [4].

*İspat*

${}_0\Delta_0^3$  tipinden ise  $\vec{pq}, \vec{pr}$  ve  $\vec{qr}$  kenar doğrultuları nulldur. O zaman Teorem 3.3 den

$$\langle p, q \rangle = \langle p, r \rangle = \langle q, r \rangle = 1$$

ve

$$\langle \vec{pq}, \vec{pr} \rangle = 0.$$

Teorem 3.2 den  $\left\{ \vec{pq}, \vec{pr} \right\}$  lineer bağımlıdır.  $\vec{pr} = \lambda \vec{pq} \Rightarrow r = p + \lambda \vec{pq}$  bu ise  $r$  noktasının  $p, q$  ile belli doğru üzerinde olmasıdır.

### 3.3.1. de-Sitter Uzayındaki İki Noktadan Geçen Doğruların Bazı Özellikleri

1.  $V = Sp\{P_i, P_j\}$  timelike ve  $\langle P_i, P_j \rangle > 1$  olması için gerek ve yeter şart  $P_i, P_j$  noktaları  $V \cap S_1^n$  hiperbolünün aynı parçası üzerinde olmasıdır ([2] deki Önerme 38 durum 2 den).

2.  $V = Sp\{P_i, P_j\}$  timelike ve  $\langle P_i, P_j \rangle < -1$  olması için gerek ve yeter şart  $P_i, P_j$  noktaları  $V \cap S_1^n$  hiperbolünün farklı parçaları üzerinde olmasıdır ([2] deki Önerme 38 durum 2 den).

3.  $V = Sp\{P_i, P_j\}$  nin spacelike olması için gerek ve yeter şart  $|\langle P_i, P_j \rangle| < 1$  olmasıdır ([2] deki Önerme 38 durum 1 den).

4.  $V = Sp\{P_i, P_j\}$  nin null olması için gerek ve yeter şart  $|\langle P_i, P_j \rangle| = 1$  olmasıdır ([2] deki Önerme 38 durum 3 den).

$P_i, P_j$  ile sınırlı geodezik parçası  $l_{ij}$  olmak üzere,

5.  $l_{ij}$  nin hiperbol parçası olması için gerek ve yeter şart  $\langle P_i, P_j \rangle > 1$  olmasıdır [2].

6.  $l_{ij}$  nin elips parçası olması için gerek ve yeter şart  $|\langle P_i, P_j \rangle| < 1$  olmasıdır [2].

7.  $l_{ij}$  nin null doğru parçası olması için gerek ve yeter şart  $\langle P_i, P_j \rangle = 1$  olmasıdır [2].

### 3.4. de-Sitter Uzayında Ayrıt Matrisi Verilen Üçgenin Gram Matrisi

#### 3.4.1 Teorem

$M$ ,  $\Delta$  üçgeninin ayrıt matrisi,  $\varepsilon_i$ ,  $M$  nin  $M_{ii} \neq 0$  minörünün işareti ve

$$u_i = \frac{\sum M_{ij} P_j}{\sqrt{-\varepsilon_i |M| M_{ii}}}$$

olsun.

(i)  $\Delta$  nın  $P_i$  köşesinin karşısındaki kenarın  $u_i$  normalinin spacelike olması için gerek ve yeter şart  $M_{ii} < 0$ ,

(ii)  $\Delta$  nın  $P_i$  köşesinin karşı kenarının normalinin timelike olması için gerek ve yeter şart  $M_{ii} > 0$  olmasıdır [6].

#### 3.4.2 Teorem

$M$ ,  $\Delta$  nın ayrıt matrisi  $M_{ii}$ ,  $M$  nin  $i$ -yinci minörü ve

$$u_i = \sum M_{ij} P_j$$

olmak üzere  $u_i, \Delta$  nın  $i$ -yinci ayrıtının null normal vektörü olması için gerek ve yeter şart  $M_{ii} = 0$  olmasıdır [6].

### 3.4.1. Sonuç

$M, P_1, P_2, P_3$  köşeli  $\Delta$  nın ayrıt matrisi ve  $u_i, u_l$  de, sırası ile,  $P_i$  ve  $P_l$  köşelerinin karşısındaki kenarların null ve spacelike dış birim normalleri olmak üzere;

$$\langle u_i, u_l \rangle = -\sqrt{\frac{|M|}{M_{ll}}} M_{il}, \quad i \neq l \quad [6].$$

### 3.4.2. Sonuç

$M, P_1, P_2, P_3$  köşeli  $\Delta$  nın ayrıt matrisi ve  $u_i, u_l$  de sırası ile  $P_i$  ve  $P_l$  köşelerinin karşısındaki kenarların null ve timelike dış birim normalleri olsun.

$$\langle u_i, u_l \rangle = -\sqrt{\frac{-|M|}{M_{ll}}} M_{il}, \quad i \neq l \quad [6].$$

### 3.4.3. Sonuç

$M, \Delta$  nın ayrıt matrisi ve  $u_i, u_l$  de  $\Delta$  nın sırası ile  $P_i$  ve  $P_l$  köşelerinin karşısındaki spacelike ve timelike kenarların dış birim normalleri olsun. Bu durumda

$$\langle u_i, u_l \rangle = \frac{-M_{il}}{\sqrt{M_{ll}(-M_{ii})}}, \quad i \neq l \quad [6].$$

### 3.4.4. Sonuç

$M, \Delta$  nın ayrıt matrisi ve  $u_i, u_l$  de  $\Delta$  nın  $P_i$  ve  $P_l$  köşelerinin karşısındaki kenarların spacelike dış birim normalleri ise

$$\langle u_i, u_l \rangle = \frac{-M_{il}}{\sqrt{M_{ii}M_{ll}}}, \quad i \neq l \quad [6].$$

### 3.4.5. Sonuç

$M$ ,  $\Delta$  nın ayırt matrisi ve  $u_i, u_l$  de  $\Delta$  nın  $P_i$  ve  $P_l$  köşelerinin karşısındaki kenarların timelike dış birim normalleri ise

$$\langle u_i, u_l \rangle = \frac{-M_{il}}{\sqrt{M_{ii}M_{ll}}}, \quad i \neq l \quad [6].$$

### 3.4.6. Sonuç

$M$ ,  $\Delta$  nın ayırt matrisi ve  $u_i, u_l$  de  $\Delta$  nın  $P_i$  ve  $P_l$  köşelerinin karşısındaki kenarların null dış birim normalleri ise

$$\langle u_i, u_l \rangle = |M| M_{il}, \quad i \neq l \quad [6].$$

## 4. de – SİTTER DÜZLEMİNDEKİ ÜÇGENLERİN ÖZDEĞERLERİ

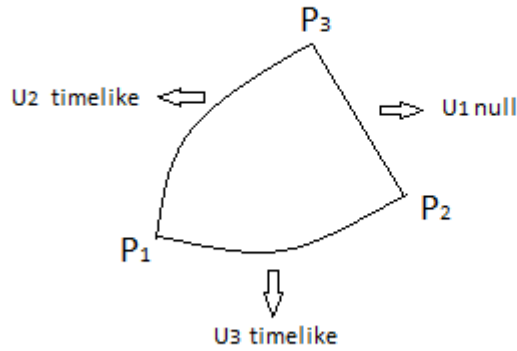
### 4.1. Null tabanlı, spacelikeayaklı de – Sitter üçgen

$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0\right), P_2 = (1, 1, 1), P_3 = (0, 0, 1)$  noktaları için

$$*\langle P_1, P_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ (spacelike)}$$

$$*\langle P_1, P_3 \rangle = 0 < 1 \text{ (spacelike)}$$

$$*\langle P_2, P_3 \rangle = 1 \text{ (null)}$$



Şekil 4.1. Null tabanlı, spacelike ayaklı de-Sitter üçgen

Şimdi null tabanlı spacelike ayaklı de-Sitter üçgeninin ayrıt ve Gram matrisleri hesaplayalım.

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 1 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mu| = -2 + \sqrt{3} < 0$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle & 1 & \langle u_2, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_3 \rangle & \langle u_2, u_3 \rangle & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{-|\mu|}{\mu_{22}}} \mu_{12} & \sqrt{\frac{-|\mu|}{\mu_{33}}} \mu_{13} \\ \sqrt{\frac{-|\mu|}{\mu_{22}}} \mu_{12} & 1 & \frac{-\mu_{23}}{\sqrt{\mu_{22} \mu_{33}}} \\ \sqrt{\frac{-|\mu|}{\mu_{33}}} \mu_{13} & \frac{-\mu_{23}}{\sqrt{\mu_{22} \mu_{33}}} & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} - 2 & 2 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3} - 2 & 1 & \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}-1}} \\ 2 - \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}-1}} & 1 \end{bmatrix},$$

bulunur.

$$\det(\lambda I - G) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \left(\frac{3}{2}(-9 + 5\sqrt{3})\right) \left(\sqrt{-142 + 82\sqrt{3}}\right) \lambda + 14 - 8\sqrt{3}$$

$$= 0$$

$$a_2 = -2$$

$$\lambda = |\mu| - \frac{1}{3}a_2 \Rightarrow \lambda = |\mu| + \frac{2}{3} \text{ dönüşümü yapıldığında}$$



$$|\mu|^3 + \frac{1}{6}(-89 + 45\sqrt{3})|\mu| + \frac{119}{27} - 3\sqrt{3} + \sqrt{-142 + 82\sqrt{3}} = 0$$

$$\left(x^3 + px = q, \quad D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2\right)$$

$$p = \frac{1}{6}(-89 + 45\sqrt{3}) \text{ ve } q = -\frac{119}{27} + 3\sqrt{3} - \sqrt{-142 + 82\sqrt{3}} \text{ olmak üzere}$$

$$D = \frac{1}{108} \left(-45673 + 26365\sqrt{3} - 4\sqrt{-2387059 + 1378171\sqrt{3}}\right) \cong -0,135 < 0$$

olup

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{R}{\sqrt{-Q^3}} \right), \quad \left( R = \frac{1}{2}q \text{ ve } Q = \frac{1}{3}P \right)$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left( \frac{R}{\sqrt{-Q^3}} \right) = 0,87$$

$$\lambda_1 = 2\sqrt{-Q} \cos \left( \frac{\theta}{3} \right), \quad \left( \cos \left( \frac{\theta}{3} \right) = 0,958 \right)$$

$$\lambda_2 = 2\sqrt{-Q} \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} \right), \quad \left( \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} \right) = -0,726 \right)$$

$$\lambda_3 = 2\sqrt{-Q} \cos \left( \frac{\theta + 4\pi}{3} \right), \quad \left( \cos \left( \frac{\theta + 4\pi}{3} \right) = -0,231 \right)$$

olmak üzere özdeğerler,

$$\lambda_1 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = 1,501 + \frac{2}{3} > 0$$

$$\lambda_2 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) = -1,138 + \frac{2}{3} > 0$$

$$\lambda_3 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) = -0,362 + \frac{2}{3} > 0$$

şeklinde bulunur.

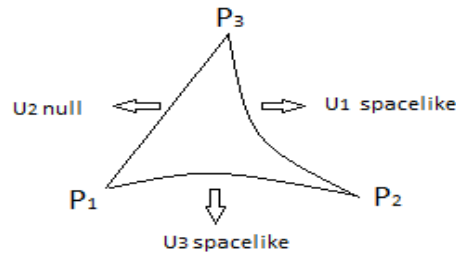
#### 4.2. Null tabanlı, timelike ayaklı de-Sitter üçgeni

$P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (-1, 1, 1), P_3 = (2, 1, 2)$  noktaları için

$$*\langle P_1, P_2 \rangle = 3 > 1 \text{ (timelike)}$$

$$*\langle P_1, P_3 \rangle = 1 \text{ (null)}$$

$$*\langle P_2, P_3 \rangle = 5 > 1 \text{ (timelike)}$$



Şekil 4.2. Null tabanlı, timelike ayaklı de-Sitter üçgeni

Şimdi null tabanlı timelike ayaklı de-Sitter üçgeninin ayırıt ve Gram matrisleri hesaplayalım.

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 1 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 1 \end{bmatrix},$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle & 0 & \langle u_2, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_3 \rangle & \langle u_2, u_3 \rangle & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{\mu_{11}}} \mu_{12} & -\frac{\mu_{13}}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}} \\ -\frac{\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{\mu_{11}}} \mu_{12} & 0 & -\frac{\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{\mu_{33}}} \mu_{23} \\ -\frac{\mu_{23}}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}} \mu_{13} & -\frac{\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{\mu_{33}}} \mu_{23} & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{7}{2\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \sqrt{2} \\ -\frac{7}{2\sqrt{6}} & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix},$$

bulunur.

$$\det(\lambda I - G) = -\frac{8\lambda}{3} + \frac{8 - 7\sqrt{2}}{3} = 0$$

$$\lambda = \frac{8-7\sqrt{2}}{8} < 0$$

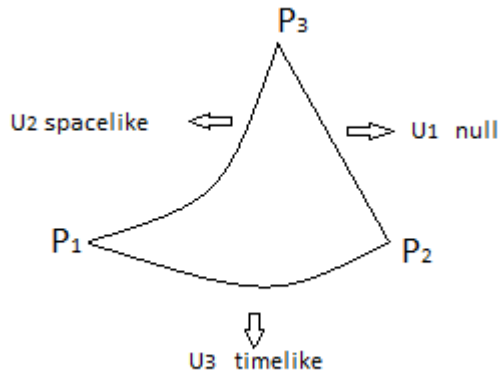
### 4.3. Kenarları null, timelike ve spacelike olan de-Sitter üçgeni

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), P_2 = (1, 1, 1), P_3 = (0, 0, 1) \text{ noktaları için}$$

$$*\langle P_1, P_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ (spacelike)}$$

$$*\langle P_1, P_3 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1 \text{ (timelike)}$$

$$*\langle P_2, P_3 \rangle = 1 \text{ (null)}$$



Şekil 4.3. Kenarları null, timelike ve spacelike olan de-Sitter üçgeni

Şimdi kenarları null, timelike ve spacelike olan de-Sitter üçgeninin ayırıt ve Gram matrisleri hesaplayalım.

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 1 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle & 1 & \langle u_2, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_3 \rangle & \langle u_2, u_3 \rangle & -1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{\mu_{22}}}\mu_{12} & \frac{\sqrt{-|\mu|}}{\sqrt{\mu_{33}}}\mu_{13} \\ -\frac{\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{\mu_{22}}}\mu_{12} & 1 & \frac{-\mu_{23}}{\sqrt{(-\mu_{22})\mu_{33}}} \\ \frac{\sqrt{-|\mu|}}{\sqrt{\mu_{33}}}\mu_{13} & \frac{-\mu_{23}}{\sqrt{(-\mu_{22})\mu_{33}}} & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{\sqrt{3}-1}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{\sqrt{3}-1}} & -1 \end{bmatrix},$$

bulunur.

$$\det(\lambda I - G) = \lambda^3 - \frac{9}{16}(2 + \sqrt{3})\lambda + \frac{1}{16}\left(-6 + \sqrt{3} - 4\sqrt{1 + \sqrt{3}}\right) = 0$$

$$p = -\frac{9}{16}(2 + \sqrt{3}) \text{ ve } q = -\frac{1}{16}\left(-6 + \sqrt{3} - 4\sqrt{1 + \sqrt{3}}\right) \text{ olmak üzere}$$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{-482 - 389\sqrt{3} + 22\sqrt{3+27\sqrt{3}}}{4096} \cong 0,227 < 0 \text{ olup}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{R}{\sqrt{-\theta^2}} \right), \left( R = \frac{1}{2}q \text{ ve } Q = \frac{1}{3}P \right)$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left( \frac{R}{\sqrt{-\theta^2}} \right) = 0,951$$

$$\lambda_1 = 2\sqrt{-Q} \cos \left( \frac{\theta}{3} \right), \left( \cos \left( \frac{\theta}{3} \right) = 0,95 \right)$$

$$\lambda_2 = 2\sqrt{-Q} \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} \right), \left( \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} \right) = 0,54 \right)$$

$$\lambda_3 = 2\sqrt{-Q} \cos \left( \frac{\theta + 4\pi}{3} \right), \left( \cos \left( \frac{\theta + 4\pi}{3} \right) = 0,5437 \right)$$

olmak üzere özdeğerler,

$$\lambda_1 = 1,589 > 0$$

$$\lambda_2 = 0,903 > 0$$

$$\lambda_3 = 0,909 > 0$$

şeklinde bulunur.

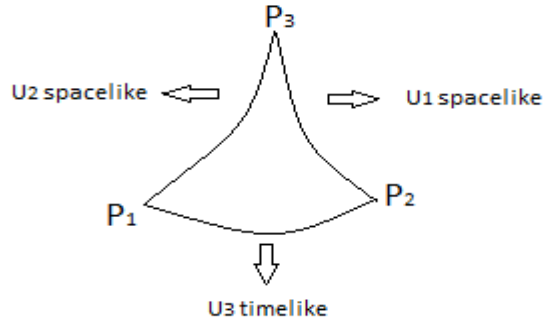
#### 4.4 .Spacelike tabanlı, timelike ayaklı de-Sitter üçgeni

$P_1 = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ,  $P_2 = (0, 0, 1)$ ,  $P_3 = (\sqrt{3}, 0, 2)$  noktaları için

$$*\langle P_1, P_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ (spacelike)}$$

$$*\langle P_1, P_3 \rangle = \sqrt{2} > 1 \text{ (timelike)}$$

$$*\langle P_2, P_3 \rangle = 2 > 1 \text{ (timelike)}$$



Şekil 4.4. Spacelike tabanlı, timelike ayaklı de-Sitter üçgeni

Şimdi spacelike tabanlı , timelike ayaklı olan de-Sitter üçgeninin ayırıt ve Gram matrisleri hesaplayalım.

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 1 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle & 1 & \langle u_2, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_3 \rangle & \langle u_2, u_3 \rangle & -1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\mu_{12}}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}} & \frac{-\mu_{13}}{\sqrt{(-\mu_{11})\mu_{33}}} \\ \frac{-\mu_{21}}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}} & 1 & \frac{-\mu_{23}}{\sqrt{(-\mu_{22})\mu_{33}}} \\ \frac{-\mu_{31}}{\sqrt{(-\mu_{11})\mu_{33}}} & \frac{-\mu_{32}}{\sqrt{(-\mu_{22})\mu_{33}}} & -1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{6}} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$\det(\lambda I - G) = \lambda^3 - \lambda^2 - \frac{9}{2}\lambda + \frac{3}{2} = 0$$

$a_2 = -1$  olmak üzere

$\lambda = |\mu| - \frac{1}{3}a_2$  yani  $\lambda = |\mu| + \frac{1}{3}$  dönüşümü yapıldığında,

$$\left(|\mu| + \frac{1}{3}\right)^3 - \left(|\mu| + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{9}{2}\left(|\mu| + \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow |\mu|^3 - \frac{29}{6}|\mu| - \frac{2}{27} = 0$$

$p = -\frac{29}{6}$  ve  $q = \frac{2}{27}$  olmak üzere

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{301}{12} < 0 \text{ olup}$$



$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{R}{\sqrt{-\theta^2}} \right), \left( R = \frac{1}{2}q \text{ ve } Q = \frac{1}{3}P \right)$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left( \frac{R}{\sqrt{-\theta^2}} \right) = 1,552$$

$$\mu_1 = 2\sqrt{-Q} \cos \left( \frac{\theta}{3} \right), \left( \cos \left( \frac{\theta}{3} \right) = 0,869 \right)$$

$$\mu_2 = 2\sqrt{-Q} \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} \right), \left( \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} \right) = -0,862 \right)$$

$$\mu_3 = 2\sqrt{-Q} \cos \left( \frac{\theta + 4\pi}{3} \right), \left( \cos \left( \frac{\theta + 4\pi}{3} \right) = -0,006 \right)$$

olmak üzere özdeğerler,

$$\lambda_1 = 2,206 + \frac{1}{3} > 0$$

$$\lambda_2 = -2,188 + \frac{1}{3} = -1,854 < 0$$

$$\lambda_3 = -0,015 + \frac{1}{3} = 0,318 > 0$$

şeklinde bulunur.

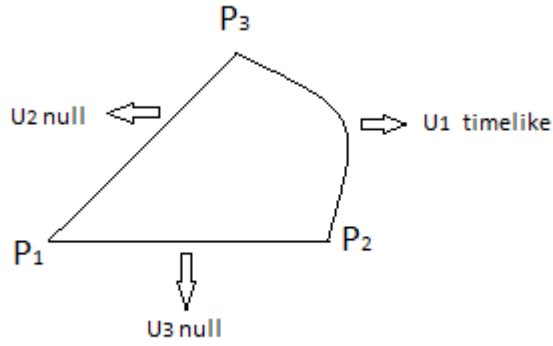
#### 4.5 .Spacelike tabanlı, null ayaklı de-Sitter üçgeni

$P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (0, 0, 1), P_3 = (0, 1, 0)$  noktaları için

$$*\langle P_1, P_2 \rangle = 1 \text{ (null)}$$

$$*\langle P_1, P_3 \rangle = 1 \text{ (null)}$$

$$*\langle P_2, P_3 \rangle = 0 < 1 \text{ (spacelike)}$$



Şekil 4.5. Spacelike tabanlı, null ayaklı de-Sitter üçgeni

Şimdi spacelike tabanlı , null ayaklı olan de-Sitter üçgeninin ayırıt ve Gram matrisleri hesaplayalım.

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 1 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle & 0 & \langle u_2, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_3 \rangle & \langle u_2, u_3 \rangle & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\frac{-|\mu|}{\mu_{11}}} \mu_{12} & \sqrt{\frac{-|\mu|}{\mu_{11}}} \mu_{13} \\ \sqrt{\frac{-|\mu|}{\mu_{11}}} \mu_{12} & 0 & |\mu| \mu_{23} \\ \sqrt{\frac{-|\mu|}{\mu_{11}}} \mu_{13} & |\mu| \mu_{23} & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buna göre özdeğerler

$$\lambda_1 = -\sqrt{3}, \lambda_2 = \sqrt{3}, \lambda_3 = 1$$

şeklinde bulunur.

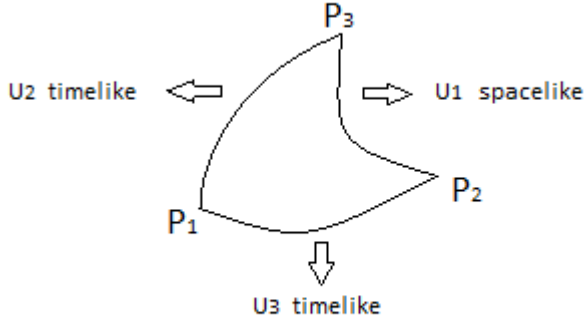
#### 4.6 .Timelike tabanlı, spacelike ayaklı de-Sitter üçgeni

$P_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $P_2 = (0, 0, 1)$ ,  $P_3 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{5}}{2})$  noktaları için

$$*\langle P_1, P_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ (spacelike)}$$

$$*\langle P_1, P_3 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} < 1 \text{ (spacelike)}$$

$$*\langle P_2, P_3 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} > 1 \text{ (timelike)}$$



Şekil 4.6. Timelike tabanlı, spacelike ayaklı de-Sitter üçgeni

Şimdi timelike tabanlı, spacelike ayaklı olan de-Sitter üçgeninin ayrıt ve Gram matrisleri hesaplayalım.

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 1 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 1 \end{bmatrix},$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle & -1 & \langle u_2, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_3 \rangle & \langle u_2, u_3 \rangle & -1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\mu_{12}}{\sqrt{(-\mu_{11})\mu_{22}}} & \frac{-\mu_{13}}{\sqrt{(-\mu_{11})\mu_{33}}} \\ \frac{-\mu_{23}}{\sqrt{(-\mu_{11})\mu_{22}}} & -1 & \frac{-\mu_{23}}{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}} \\ \frac{-\mu_{13}}{\sqrt{(-\mu_{11})\mu_{33}}} & \frac{-\mu_{23}}{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}} & -1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-4}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-4}{\sqrt{3}} & -1 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$\det(\lambda I - G) = \lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - \frac{14}{3} = 0$$

$a_2 = 1$  olmak üzere

$\lambda = |\mu| - \frac{1}{3}a_2$  yani  $\lambda = |\mu| - \frac{1}{3}$  dönüşümü yapıldığında,

$$\left(|\mu| - \frac{1}{3}\right)^3 + \left(|\mu| - \frac{1}{3}\right)^2 - 8\left(|\mu| - \frac{1}{3}\right) - \frac{14}{3} = 0$$

$$\Rightarrow |\mu|^3 - \frac{25}{3}|\mu| - \frac{52}{7} = 0 \text{ olur.}$$

$p = -\frac{25}{3}$  ve  $q = \frac{52}{7}$  olmak üzere

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{1661}{81} < 0 \text{ olup}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{-8^3}}\right), \left(R = \frac{1}{2}q \text{ ve } Q = \frac{1}{3}P\right)$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{-Q^2}}\right) = 1,3661$$

$$\mu_1 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = 0,898\right)$$

$$\mu_2 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right), \left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) = 0,1\right)$$

$$\mu_3 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right), \left(\cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) = 0,145\right)$$

olmak üzere özdeğerler,

$$\lambda_1 = 2,996 - \frac{1}{3} > 0$$

$$\lambda_2 = 0,5 - \frac{1}{3} > 0$$

$$\lambda_3 = 0,483 - \frac{1}{3} > 0$$

şeklinde bulunur.

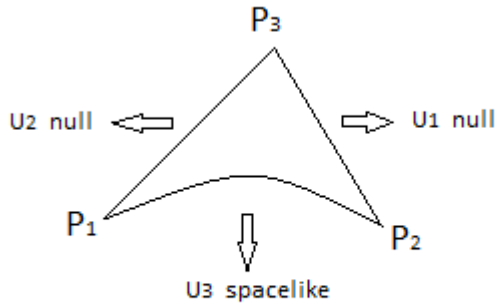
#### 4.7. Timelike tabanlı, null ayaklı de-Sitter üçgeni

$P_1 = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}), P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), P_3 = (0, 1, 0)$  noktaları için

$$*\langle P_1, P_2 \rangle = 3 > 1 \text{ (timelike)}$$

$$*\langle P_1, P_3 \rangle = 1 \text{ (null)}$$

$$*\langle P_2, P_3 \rangle = 1 \text{ (null)}$$



Şekil 4.7. Timelike tabanlı, null ayaklı de-Sitter üçgeni

Şimdi timelike tabanlı, null ayaklı olan de-Sitter üçgeninin ayrit ve Gram matrisleri hesaplayalım.

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 1 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle & 0 & \langle u_2, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_3 \rangle & \langle u_2, u_3 \rangle & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow G = \begin{bmatrix} 0 & |\mu|\mu_{12} & -\sqrt{\frac{|\mu|}{\mu_{33}}}\mu_{13} \\ |\mu|\mu_{12} & 0 & -\sqrt{\frac{|\mu|}{\mu_{33}}}\mu_{23} \\ -\sqrt{\frac{|\mu|}{\mu_{33}}}\mu_{13} & -\sqrt{\frac{|\mu|}{\mu_{33}}}\mu_{23} & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -\sqrt{2} \\ 8 & 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buna göre özdeğerler

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{65}), \lambda_2 = -8, \lambda_3 = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{65})$$

şeklinde bulunur.

#### 4.8. Kenarları null olan de-Sitter üçgeni

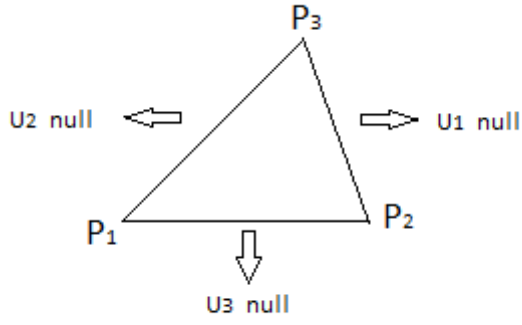
$P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1), P_3 = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$  noktaları için

$$*\langle P_1, P_2 \rangle = 1 \text{ (null)}$$

$$*\langle P_1, P_3 \rangle = 1 \text{ (null)}$$

$$*\langle P_2, P_3 \rangle = 1 \text{ (null)}$$





Şekil4.8. Kenarları null olan de-Sitter üçgeni

Şimdi kenarları null olan de-Sitter üçgeninin ayrıt ve Gram matrisleri hesaplayalım.

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 1 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} 0 & |\mu| \mu_{12} & |\mu| \mu_{13} \\ |\mu| \mu_{12} & 0 & |\mu| \mu_{23} \\ |\mu| \mu_{13} & |\mu| \mu_{23} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buna göre özdeğerler

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

şeklinde bulunur.

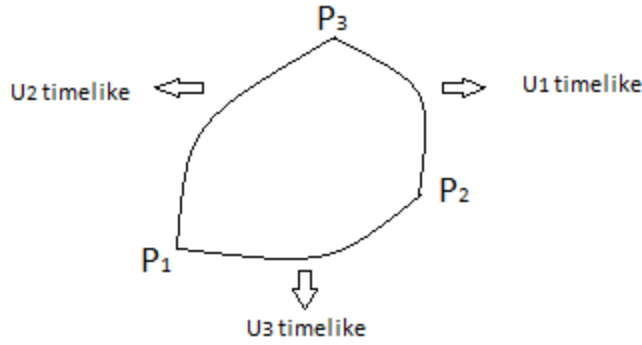
#### 4.9. Kenarları spacelike olan de-Sitter üçgeni

$P_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $P_2 = (0, 0, 1)$ ,  $P_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0)$  noktaları için

$$*\langle P_1, P_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ (spacelike)}$$

$$*\langle P_1, P_3 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \text{ (spacelike)}$$

$$*\langle P_2, P_3 \rangle = 0 < 1 \text{ (spacelike)}$$



Şekil 4.9. Kenarları spacelike olan de-Sitter üçgeni

Şimdi kenarları spacelike ayaklı olan de-Sitter üçgeninin ayrıt ve Gram matrisleri

hesaplayalım.

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 1 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$\Rightarrow \det(\lambda I - G) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

$a_2 = 3$  olmak üzere

$\lambda = |\mu| - \frac{1}{3}a_2$  yani  $\lambda = |\mu| - 1$  dönüşümü yapıldığında,

$$(|\mu| - 1)^3 + 3(|\mu| - 1)^2 - \frac{7}{2}(|\mu| - 1) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow |\mu|^3 - \frac{13}{2}|\mu| + 6 = 0 \text{ olur.}$$

$p = -\frac{13}{2}$  ve  $q = -6$  olmak üzere

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{253}{216} < 0 \text{ olup}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{R}{\sqrt{-\theta^3}} \right), \left( R = \frac{1}{2}q \text{ ve } Q = \frac{1}{3}P \right)$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{-Q^2}}\right) = 2,795 \text{ dir.}$$

$$\mu_1 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = 0,596\right)$$

$$\mu_2 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right), \left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) = -0,98\right)$$

$$\mu_3 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right), \left(\cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) = 0,396\right)$$

olmak üzere özdeğerler,

$$\lambda_1 = 1,755 - 1 > 0$$

$$\lambda_2 = -2,92 - 1 < 0$$

$$\lambda_3 = 1,165 - 1 > 0$$

şeklinde bulunur.

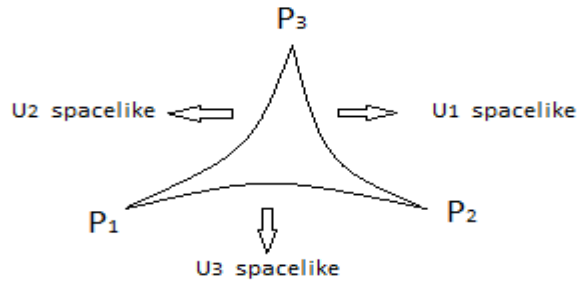
#### 4.10. Kenarları timelike olan de-Sitter üçgeni

$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), P_2 = (-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}), P_3 = (\sqrt{3}, 0, 2)$  noktaları için

$$*\langle P_1, P_2 \rangle = \sqrt{3} + 1 > 1 \text{ (timelike)}$$

$$*\langle P_1, P_3 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1 \text{ (timelike)}$$

$$*\langle P_2, P_3 \rangle = 2\sqrt{2} + \sqrt{6} > 1 \text{ (timelike)}$$



Şekil 4.10. Kenarları timelike olan de-Sitter üçgeni

Şimdi kenarları timelike ayaklı olan de-Sitter üçgeninin ayrıt ve Gram matrisleri hesaplayalım.

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 1 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{23}(4 - 6\sqrt{3}) & -\frac{5}{\sqrt{6(36+208\sqrt{3})}} \\ \frac{1}{23}(4 - 6\sqrt{3}) & 1 & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{\sqrt{6(36+208\sqrt{3})}} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$\Rightarrow \det(\lambda I - G) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \left(\frac{-8711 + 9720\sqrt{3}}{3174}\right)\lambda + \frac{25579 - 15840\sqrt{3}}{3174} = 0$$

$a_2 = 3$  olmak üzere

$\lambda = |\mu| - \frac{1}{3}a_2$  yani  $\lambda = |\mu| + 1$  dönüşümü yapıldığında ,

$$\begin{aligned} (|\mu| + 1)^3 - 3(|\mu| + 1)^2 + \left(\frac{-8711 + 9720\sqrt{3}}{3174}\right)(|\mu| + 1) + \frac{25579 - 15840\sqrt{3}}{3174} \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\mu|^3 + \left(\frac{-18233 + 9720\sqrt{3}}{3174}\right)|\mu| + \frac{10520 - 6120\sqrt{3}}{3174} = 0 \text{ olur.}$$

$p = \frac{-18233 + 9720\sqrt{3}}{3174}$  ve  $q = \frac{-10520 + 6120\sqrt{3}}{3174}$  olmak üzere

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = < 0 \text{ olup}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{-6^3}}\right), \left(R = \frac{1}{2}q \text{ ve } Q = \frac{1}{3}P\right)$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{-6^3}}\right) = 1,344 \text{ olur.}$$

$$\mu_1 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \quad \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = 0,901\right)$$

$$\mu_2 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) \quad , \quad \left( \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) = 0,802 \right)$$

$$\mu_3 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) \quad , \quad \left( \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) = -0,21 \right)$$

olmak üzere özdeğerler,

$$\lambda_1 = 0,69 + 1 > 0$$

$$\lambda_2 = -0,632 + 1 > 0$$

$$\lambda_3 = -0,057 + 1 > 0$$

şeklinde bulunur.

## 5. AYRIT UZUNLUKLARININ BULUNMASI (de – SİTTER ÜÇGENİ İÇİN)

### 5.1. Null tabanlı, spacelike ayaklı de- Sitter üçgeni

$P_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ ,  $P_2 = (1, 1, 1)$ ,  $P_3 = (0, 0, 1)$  noktaları için, ayrıt

uzunlukları sırası ile

$$* \langle P_1, P_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow -1 < \langle P_1, P_2 \rangle < 1$  olup (possible spacelike side)

$$\Rightarrow \varphi_{12} = \arccos \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right) = 1,0267,$$

$$* \langle P_1, P_3 \rangle = 0$$

$\Rightarrow -1 < \langle P_1, P_3 \rangle < 1$  olup (possible spacelike side)

$$\Rightarrow \varphi_{13} = \arccos (0) = \frac{\pi}{2},$$

\*  $\langle P_2, P_3 \rangle = 1$  olup (null side)

$$\Rightarrow \varphi_{23} = 0$$

şeklinde bulunur.



## 5.2. Null tabanlı, timelike ayaklı de – Sitter üçgeni

$P_1 = (1, 1, 1)$ ,  $P_2 = (-1, 1, 1)$ ,  $P_3 = (2, 1, 2)$  noktaları için, ayrıt

uzunlukları sırası ile

$$* \langle P_1, P_2 \rangle = 3 > 1 \text{ (possible timelike side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{12} = -\operatorname{arccosh}(3) = -1,7627,$$

$$* \langle P_1, P_3 \rangle = 1 \text{ (null side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{13} = 0,$$

$$* \langle P_2, P_3 \rangle = 5 > 1 \text{ (possible timelike side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{23} = -\operatorname{arccosh}(5) = -2,2924$$

olur.

## 5.3. Kenarları null, timelike ve spacelike olan de – Sitter üçgeni

$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $P_2 = (1, 1, 1)$ ,  $P_3 = (0, 0, 1)$  noktaları için, ayrıt

uzunlukları sırası ile

$$* \langle P_1, P_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} < 1$$

$\Rightarrow -1 \ll \langle P_1, P_2 \rangle \ll 1$  olup (possible spacelike side)

$$\Rightarrow \varphi_{12} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right) = 1,0267,$$

\*  $\langle P_1, P_3 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1$  (possible timelike side)

$$\Rightarrow \varphi_{13} = -\operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = -0,6584,$$

\*  $\langle P_2, P_3 \rangle = 1$  (null side)

$$\Rightarrow \varphi_{23} = 0$$

olur.

#### 5.4. Spacelike tabanlı, timelike ayaklı de-Sitter üçgeni

$P_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $P_2 = (0, 0, 1)$ ,  $P_3 = (\sqrt{3}, 0, 2)$  noktaları için, ayrıt

uzunlukları sırası ile

$$* \langle P_1, P_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow -1 \ll \langle P_1, P_2 \rangle \ll 1$  olup (possible spacelike side)

$$\Rightarrow \varphi_{12} = \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{4},$$

$$* \langle P_1, P_3 \rangle = \sqrt{2} > 1 \text{ (possible timelike side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{13} = -\operatorname{arccosh}(\sqrt{2}) = -0,8813,$$

$$* \langle P_2, P_3 \rangle = 2 > 1 \text{ (possible timelike side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{23} = -\operatorname{arccosh}(2) = -1,3169$$

olur.

### 5.5. Spacelike tabanlı, null ayaklı de-Sitter üçgeni

$P_1 = (1, 1, 1)$ ,  $P_2 = (0, 0, 1)$ ,  $P_3 = (0, 1, 0)$  noktaları için, ayrıt

uzunlukları sırası ile

$$* \langle P_1, P_2 \rangle = 1 \text{ ( null side )}$$

$$\Rightarrow \varphi_{12} = 0,$$

$$* \langle P_1, P_3 \rangle = 1 \text{ ( null side )}$$

$$\Rightarrow \varphi_{13} = 0,$$

$$* \langle P_2, P_3 \rangle = 0 < 1 \text{ (possible spacelike side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{23} = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

olur.

### 5.6. Timelike tabanlı, spacelike ayaklı de – Sitter üçgeni

$$P_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), P_2 = (0, 0, 1), P_3 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{5}}{2}) \text{ noktaları için, ayırıt}$$

uzunlukları sırası ile

$$* \langle P_1, P_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ (possible spacelike side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{12} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$* \langle P_1, P_3 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} < 1 \text{ (possible spacelike side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{13} = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right) = 0,659,$$

$$* \langle P_2, P_3 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ (possible timelike side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{23} = -\operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -0,481$$

olur.

### 5.7. Timelike tabanlı, null ayaklı de – Sitter üçgeni

$P_1 = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$ ,  $P_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $P_3 = (0, 1, 0)$  noktaları için, ayrıt

uzunlukları sırası ile

\*  $\langle P_1, P_2 \rangle = 3 > 1$  (possible timelike side)

$$\Rightarrow \varphi_{12} = -\operatorname{arccosh}(3) = -1,762,$$

\*  $\langle P_1, P_3 \rangle = 1$  (null side)

$$\Rightarrow \varphi_{13} = 0,$$

\*  $\langle P_2, P_3 \rangle = 1$  (null side)

$$\Rightarrow \varphi_{23} = 0$$

olur.

### 5.8. Kenarları null olan de – Sitter üçgeni

$P_1 = (0, 0, 1)$ ,  $P_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ ,  $P_3 = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$  noktaları için, ayrıt

uzunlukları sırası ile

$$* \langle P_1, P_2 \rangle = 1, \langle P_1, P_3 \rangle = 1, \langle P_2, P_3 \rangle = 1$$

olup null side olur.

$$\Rightarrow \varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{23} = 0$$

dır.

### 5.9. Kenarları spacelike olan de – Sitter üçgeni

$P_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $P_2 = (0, 0, 1)$ ,  $P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0)$  noktaları için, ayrıt

uzunlukları sırası ile

$$* \langle P_1, P_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ (possible spacelike side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{12} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$* \langle P_1, P_3 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \text{ (possible spacelike side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{13} = \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0,523,$$

$$* \langle P_2, P_3 \rangle = 0 < 1 \text{ (possible spacelike side)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{23} = \arccos (0) = \frac{\pi}{2}$$

olur.

### 5.10. Kenarları timelike olan de – Sitter üçgeni

$$P_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right), P_2 = (-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}), P_3 = (\sqrt{3}, 0, 2) \text{ noktaları için, ayrıt}$$

uzunlukları sırası ile

$$* \langle P_1, P_2 \rangle = \sqrt{3} + 1 > 1 \quad (\text{possible timelike side})$$

$$\Rightarrow \varphi_{12} = -\operatorname{arccosh} (\sqrt{3} + 1) = -1,662,$$

$$* \langle P_1, P_3 \rangle = \sqrt{3} + 1 > 1 \quad (\text{possible timelike side})$$

$$\Rightarrow \varphi_{13} = -\operatorname{arccosh} \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) = -0,658,$$

$$* \langle P_2, P_3 \rangle = 2\sqrt{2} + \sqrt{6} > 1 \quad (\text{possible timelike side})$$

$$\Rightarrow \varphi_{23} = -\operatorname{arccosh}(2\sqrt{2} + \sqrt{6}) = -2,347$$

olur.





## KAYNAKLAR

1. Ratcliffe, J.G., “Foundations of Hyperbolic Manifolds”, *Springer-Verlag*, Berlin, 36(1994).
2. O’neil, B., “Semi-Riemannian Geometry”, *Academic Press.*, London, 46-49, 54-57, 108-114, 143-144 (1983).
3. Asmus, I., “Duality Between Hyperbolic and de-Sitter Geometry”, *Cornell University*, New York, 1-32 (2008).
4. Lopez, R., “Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space”, *Instituto de Matematica e Estatistica (IME-USP) University of Sao Paulo*, Brasil, 1-4 (2008).
5. Karlığa, B., “Edge matrix of hyperbolic simplices”, *Geom. Dedicata*, 109:1–6 (2004).
6. Tokeşer, Ü., “Küresel, Hiperbolik ve de-Sitter Düzleminde Üçgenler”, Doktora Tezi, *Gazi Üni.*, 1-53 (2013).
7. Hacısalihoğlu, H.H., “İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler”, *A.Ü.Fen Fakültesi*, Ankara, 18-43 (1998).
8. Euler, L., “De linea brevissima in superficie quacunq̄ue duo quaelibet puncta iungente”, *Comment. Acad. Sci. Petrop*, 3:110-124 (1732).
9. Vinberg, E.B., “Geometry II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences”, *Springer-Verlag*, 4-79 (1993).
10. Yakut, A.T., “Hiperbolik Uzayda Simplekslerin Tepe Açılıarı”, Doktora Tezi, *Gazi Üni.*, 53-113 (2004).

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hakan ÖZAYRANCI  
Doğum Yeri ve Yılı : Samsun /Çarşamba 1990  
Medeni Hali : Bekar  
Yabancı Dili : İngilizce  
E-posta : matgeo5555@gmail.com



### Eğitim Durumu

Lise : Çarşamba Lisesi - 2007  
Lisans : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik - 2012

### Mesleki Deneyim

İş Yeri : Özel Ders (2012 - 2015)  
İş Yeri : Şırnak Cumhuriyet Anadolu Lisesi (2015 – 2016)  
İş Yeri : Şırnak Güzel Sanatlar Lisesi (2016- 2017)  
İş Yeri : Şırnak Cumhuriyet Anadolu Lisesi (2017 – 2018)