T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL PELL, PELL-LUCAS KUATERNİYONLARI

Banu YILMAZ

Danışman Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL
Jüri Üyesi Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ
Jüri Üyesi Doç. Dr. Murat ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KASTAMONU – 2018

TEZ ONAYI

Banu YILMAZ tarafından hazırlanan **"Dual Pell, Pell-Lucas Kuaterniyonları"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Murat ŞAHİN Ankara Üniversitesi	....

07/05/2018

Enstitü Müdür V. Doç. Dr. Mehmet Altan KURNAZ ....

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

Banu YILMAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DUAL PELL, PELL-LUCAS KUATERNİYONLARI

Banu YILMAZ
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL

Bu tezde, Dual Pell ve Dual Pell-Lucas Kuaterniyonları verilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin önemi irdelenmiş ve kaynak taraması yapılmıştır.

İkinci bölümde, temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları ve bunlardan elde edilen bazı özel özdeşliklerden bahsedilmiştir.

Son bölümde, Dual Pell ve Dual Pell-Lucas Kuaterniyonları ve bunlara ait bağıntılar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuaterniyon, Dual sayı, Pell sayısı, Pell-Lucas sayısı, Binet formülü.

2018, 44 sayfa
Bilim Kodu: 204

ABSTRACT

MSc. Thesis

DUAL PELL, PELL-LUCAS QUATERNIONS

Banu YILMAZ
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathemathics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Zafer ÜNAL

In this thesis, Dual Pell and Dual Pell Lucas Quaternions are given.

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the importance of the thesis was examined and the source was searched.

In the second chapter, basic definitions and concepts are given.

In the third chapter, Pell and Pell-Lucas quaternions and some specific identities derived from them are mentioned.

In the last chapter, Dual Pell and Dual Pell-Lucas Quaternions and their correlations are given.

Keywords: Quaternion, Dual number, Pell number, Pell-Lucas number, Binet's formula.

2018, 44 pages
Science Code: 204

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü) ’a teşekkürlerimi borç bilirim.

Her zaman yanımda olan aileme gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Banu YILMAZ
Kastamonu, Mayıs, 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv
ABSTRACT v
TEŞEKKÜR vi
İÇİNDEKİLER vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ viii
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 3
3. PELL VE PELL-LUCAS KUATERNİYONLARI 10
4. DUAL PELL VE PELL-LUCAS KUATERNİYONLARI 25
KAYNAKLAR. 42
ÖZGEÇMİŞ. 44

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A	Dual kuaterniyon
$\|A\|$	Dual kuaterniyonun normu
$\overline{A}$	Dual kuaterniyonun eşleniği
$\mathbb{D}$	Dual sayılar
$\mathbb{H}$	Reel kuaterniyonlar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
p_n	n-yinci Pell sayısı
q_n	n-yinci Pell-Lucas sayısı
P_n	n-yinci Dual Pell sayısı
Q_n	n-yinci Dual Pell-Lucas sayısı
QP_n	n-yinci Pell kuaterniyonu
QPL_n	n-yinci Pell-Lucas kuaterniyonu
$\widetilde{QP}_n$	n-yinci Dual Pell kuaterniyon
$\widetilde{QPL}_n$	n-yinci Dual Pell-Lucas kuaterniyon
ε	Dual birim ($\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon^2 = 0$)

1.GİRİŞ

Kuaterniyonlar ilk olarak 1843 te İrlandalı Matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından tanımlanmış ve bu tarihten sonra uygulamalı matematik, fizik ve bilgisayar bilimleri gibi çeşitli alanlarda yaygın olarak kullanılmaya başlamıştır. İlerleyen zamanlarda, split kuaterniyon, para kuaterniyon gibi alt kategorilere ayrılmıştır.

Clifford (1871), reel sayıları dual sayılara genişletmiştir.

Kula ve Yaylı (2006), dual sayı üçlüsünün değişmeli çarpımına değinmiştir.

Hacısalihoğlu (1983), Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi adlı kitabında dual sayılara, kuaterniyonlara ve dual kuaterniyonlara geniş yer ayırarak konuya değinmiştir.

Ünal, Tokeşer ve Bilgici (2017), Dual Lucas ve Dual Oktonyonlarının özelliklerini araştırmışlar ve Binet formülü, Catalan, Cassini, d'Ocagne özdeşliğine değinmişlerdir.

Horadam (1971), Pell sayıları ve özelliklerini ele almıştır.

Patel ve Shrivastava (2013), bazı Pell ve Pell-Lucas özdeşliklerinin Binet formlarını kullanarak bunların bir kısmını kanıtlarıyla tartışmışlardır. Bu özellikler, Pell ve Pell-Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonlarını, polinomları, bölünebilirlik özelliklerini, matrislerini, determinantlarını ve diğer birçok uygulamayı türetmek için kullanılır.

Koshy (2001), Fibonacci ve Lucas sayılarının ortaya çıkmasına dair tarihsel bir araştırma yapıp açıklayıcı örneklerde bulunmuştur. Fibonacci ve Lucas sayılarının uygulamalarını mühendislik, nörofizyoloji gibi çeşitli disiplinlere göre uyarlamışlardır. Ayrıca Koshy (2014), Pell sayıları ve Pell-Lucas sayılarının sırasıyla Pell polinomları ve Pell-Lucas polinomlarının özel değerleri olduğuna değinmiştir.

Alptekin (2005) Pell, Pell- Lucas ve Modifiye Pell sayıları yardımıyla tanımlanan matrisler üzerine çalışmalar yapmıştır.

Halıcı ve Daşdemir (2010), Modifiye Pell dizileri ve Pell, Pell-Lucas sayıları arasındaki bazı ilişkiler üzerinde çalışmıştır.

Szynal ve Wloch (2015) Pell sayıları, Pell-Lucas sayıları, kuaterniyonlar, oktonyonlar ve yineleme ilişkileri üzerinde çalışmıştır.

Catarino (2016), k-Pell kuaterniyonlarını ve oktonyonları ele alıp Binet tarzı formüller ve üretim fonksiyonları dahil olmak üzere bazı özellikler sunmaktadır.

Fibonacci ve benzeri tamsayı dizileri matematiğin birçok alanında karşımıza çıktığı gibi fizik, mühendislik ve bilgisayar bilimlerinde oldukça geniş bir kullanım alanına sahiptir. Fibonacci ve Lucas sayı bileşenleriyle genelleştirilen kuaterniyonlar üzerine Polatlı ve Kesim (2015) çalışmıştır.

Özdemir (2009), split kuaterniyonlar üzerine yaptığı çalışma ile literatüre katkıda bulunmuştur.

Tokeşer, Ünal ve Bilgici (2017), split Pell ve split Pell-Lucas kuaterniyonlarını tanıtıp bu sayılar için üreteç fonksiyonları ve Binet formüllerini vermişlerdir. Ayrıca Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği ve d'Ocagne dahil olmak üzere split Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için birçok özdeşlik elde etmişlerdir.

Bu çalışmanın temelinde Çimen ve İpek (2015) in Pell, Pell-Lucas kuaterniyonları üzerine yaptığı çalışmadan yararlanılarak dual Pell, dual Pell-Lucas kuaterniyonları ve bunlarla ilgili özdeşlikler irdelenmiştir. Pell ve Pell-Lucas tamsayı dizileri ile kuaterniyonlar arasında kurulan ilişkiden ve bunun sonucunda ortaya çıkan bazı özelliklerden söz edilecektir. Bunlardan bazıları üreteç fonksiyonları, Binet formülleri, Catalan, Cassini, d'Ocagne özdeşlikleridir. Daha sonra ise dual Pell kuaterniyon ve dual Pell-Lucas kuaterniyonlar için benzer özellikler incelenecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Şimdi bazı temel kavramları ve tanımları ele alalım.

Tanım 2.1

Reel kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H} = \{a = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 : a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3\} \tag{2.1}$$

$\mathbb{R}$ üzerinde $\{e_0 = 1, e_1, e_2, e_3\}$ bazıyla 4 boyutlu bir vektör uzayıdır. Burada baz elemanları için çarpım tablosu aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{array}{c|cccc} & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_0 & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & e_2 & -e_3 & -e_0 & e_1 \\ e_3 & e_3 & e_2 & -e_1 & -e_0 \end{array} \tag{2.2}$$

Bir $a \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonunu $a = \sum_{s=0}^{3} a_s e_s \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$a = S_a + \overrightarrow{V}_a = a_0e_0 + \sum_{s=1}^{3} a_s e_s \tag{2.3}$$

şeklinde de gösterebiliriz. Burada S_a, a reel kuaterniyonunun skaler kısmı, $\overrightarrow{V}_a$ ise vektörel kısmıdır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2

$a, b \in \mathbb{H}$ olmak üzere, a ve b nin çarpımı skaler ve vektörel kısımlar yardımıyla

$$\begin{aligned} ab &= (S_a + \overrightarrow{V}_a)(S_b + \overrightarrow{V}_b) \\ &= S_aS_b + S_a\overrightarrow{V}_b + S_b\overrightarrow{V}_a - \overrightarrow{V}_a \cdot \overrightarrow{V}_b + \overrightarrow{V}_a \times \overrightarrow{V}_b \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklindedir. Burada bahsi geçen $\overrightarrow{V}_a \cdot \overrightarrow{V}_b$ ve $\overrightarrow{V}_a \times \overrightarrow{V}_b$ sırasıyla, $\mathbb{R}^3$ deki iççarpım ve vektörel çarpımdır (Hacısalihoğlu, 1983).

Örnek 2.1

$a = 2e_0 + e_1 - e_2 + e_3$ ve $b = e_0 + 2e_1 + e_2 + e_3$ olsun. ab yi bulalım.

$$\begin{aligned} a =& 2e_0 + e_1 - e_2 + e_3 = S_a + \overrightarrow{V}_a \Rightarrow S_a = 2, \overrightarrow{V}_a = \{e_1 - e_2 + e_3\} \\ b =& e_0 + 2e_1 + e_2 + e_3 = S_b + \overrightarrow{V}_b \Rightarrow S_b = 1, \overrightarrow{V}_b = \{2e_1 + e_2 + e_3\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} ab &= S_aS_b + S_a\overrightarrow{V}_b + S_b\overrightarrow{V}_a - \overrightarrow{V}_a \cdot \overrightarrow{V}_b + \overrightarrow{V}_a \times \overrightarrow{V}_b \\ &= 2 + 4e_1 + 2e_2 + 2e_3 + e_1 - e_2 + e_3 - 2 + -2e_1 + e_2 + 3e_3 \\ &= 3e_1 + 2e_2 + 6e_3 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 2.3

Bir $a = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ kuaterniyonunun eşleniği ve normu aşağıdaki eşitliklerle ifade edilir:

$$\begin{aligned} \overline{a} &= a_0e_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 \\ &= S_a - \overrightarrow{V}_a \end{aligned} \tag{2.5}$$

ve

$$\|a\| = a\overline{a} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \tag{2.6}$$

(Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.4

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi ve $x, x^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi üzerinde eşitlik, toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ cümlesine dual sayılar sistemi ve her $(x, x^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da dual sayı denir.

Eşitlik: $X = (x, x^*)$ ve $Y = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ için

$$x = y \text{ ve } x^* = y^*$$

Toplama:

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

iç işlemi $X = (x, x^*)$ ve $Y = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$X \oplus Y = (x, x^*) \oplus (y, y^*) = (x + y, x^* + y^*)$$

Çarpma:

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

iç işlemi $X = (x, x^*)$ ve $Y = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$X \odot Y = (x, x^*) \odot (y, y^*) = (xy, xy^* + x^*y)$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.5

İki reel kuaterniyon, $i = 0, 1, 2, 3$ için $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} a = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ a^* = a_0^* + a_1^* e_1 + a_2^* e_2 + a_3^* e_3 \end{cases}$$

şeklinde ve bir dual kuaterniyon da

$$A = a + \varepsilon a^*, \ \varepsilon \neq 0 \text{ ve } \varepsilon^2 = 0$$

şeklinde tanımlanır. Bu dual kuaterniyonu

$$A = A_0 e_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$$

olarak yazmak mümkündür. Burada

$$A_0 = a_0 + \varepsilon a_0^*$$

$$A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*$$

$$A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*$$

$$A_3 = a_3 + \varepsilon a_3^*$$

şeklindedir ve A_0, A_1, A_2, A_3 sayıları A nın dual bileşenleri olarak adlandırılır. Dual kuaterniyonu kısaca

$$A = \sum_{s=0}^{3} A_s e_s$$

şeklinde de ifade edebiliriz (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.6

Bir dual kuaterniyonun skalar ve vektörel kısımları sırası ile S_A ve $\vec{V}_A$ ile gösterilirse,

$$\begin{cases} S_A = S_a + \varepsilon S_{a^*} = A_0 \\ \vec{V}_A = \vec{V}_a + \varepsilon \vec{V}_{a^*} = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 \end{cases}$$

elde edilir. Bir dual kuaterniyonun skalar kısmı bir dual sayıdır, vektörel kısmı ise bir dual vektördür. Buna göre bu dual sayıyı

$$A = S_A + \overrightarrow{V_A}$$

$$A = A_0 + \sum_{s=1}^{3} A_s e_s$$

şeklinde ifade edebiliriz (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.7

$K_1 = k_1 + \varepsilon k_1^*$, $K_2 = k_2 + \varepsilon k_2^* \in \mathbb{D}$ modül dual vektörlerinin iç çarpımı $f : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}$ şeklinde bir dönüşümdür ve

$$f(K_1, K_2) = \langle K_1, K_2 \rangle = \langle k_1 + \varepsilon k_1^*, k_2 + \varepsilon k_2^* \rangle$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.8

$A, B \in \mathbb{D}$ Modül dual vektörlerinin dış çarpımı yani vektörel çarpımı

$$\Lambda : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

şeklinde bir işlemdir ve

$$A \Lambda B = a \times b + \varepsilon (a \times b^* + a^* \times b)$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.9

İki dual kuaterniyonun çarpımı; A ve B dual kuaterniyon olmak üzere, A ve B nin skaler ve vektörel kısımlarının yardımıyla

$$\begin{aligned} AB &= (S_A + \overrightarrow{V_A})(S_B + \overrightarrow{V_B}) \\ &= S_A S_B + S_A \overrightarrow{V_B} + S_B \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{V_A} \times \overrightarrow{V_B} \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. Burada bahsi geçen $S_A S_B$, $\overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{V_B}$ ve $\overrightarrow{V_A} \times \overrightarrow{V_B}$ sırası ile $\mathbb{D}$ deki çarpma işlemi, kuaterniyonlar kümesindeki iç çarpım ve kuaterniyonlar kümesindeki vektörel çarpım işlemidir (Hacısalihoğlu, 1983).

Örnek 2.2

$A = a + \varepsilon a^*$ve $B = b + \varepsilon b^*$ olmak üzere $a = e_0 - 2e_1 + e_2 + 2e_3$, $a^* = e_0 + e_1 + e_2 + 2e_3$, $b = 2e_0 - e_1 + e_2 - e_3$, $b^* = e_0 + e_1 + e_2 - e_3$ olsun. AB yi bulalım.

$$AB = S_A S_B + S_A \overrightarrow{V_B} + S_B \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{V_A} \times \overrightarrow{V_B}$$

$S_A = S_a + \varepsilon S_{a^*} = A_0$ ve $\vec{V}_A = \vec{V}_a + \varepsilon \vec{V}_{a^*} = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$

$S_B = S_b + \varepsilon S_{b^*} = B_0$ ve $\vec{V}_B = \vec{V}_b + \varepsilon \vec{V}_{b^*} = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3$

olduğunu da gözönüne alırsak

$S_a = 1$, $V_a = \{-2e_1 + e_2 + 2e_3\}$, $S_{a^*} = 1$, $\vec{V}_{a^*} = \{e_1 + e_2 + 2e_3\}$, $S_b = 2$,

$\vec{V}_b = \{-e_1 + e_2 - e_3\}$, $S_{b^*} = 1$, $\vec{V}_{b^*} = \{e_1 + e_2 - e_3\}$ şeklindedir.

Buradan $S_A = 1+\varepsilon$, $\vec{V}_A = \{(-2+\varepsilon)e_1 + (1+\varepsilon)e_2 + (2+2\varepsilon)e_3\}$, $S_B = 2+\varepsilon$, $\vec{V}_B = \{(-1+\varepsilon)e_1 + (1+\varepsilon)e_2 + (-1-\varepsilon)e_3\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
AB &= S_A S_B + S_A \overrightarrow{V_B} + S_B \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{V_A} \times \overrightarrow{V_B} \\
&= (2+3\varepsilon) - e_1 + (1+2\varepsilon)e_2 + (-1-2\varepsilon)e_3 - 4e_1 \\
&+ (2+3\varepsilon)e_2 + (4+6\varepsilon)e_3 - 1 + 5\varepsilon + (-3-6\varepsilon)e_1 - (4+\varepsilon)e_2 + (-1-\varepsilon)e_3 \\
&= 1 + 8\varepsilon + (-8-6\varepsilon)e_1 + (-1+4\varepsilon)e_2 + (2+3\varepsilon)e_3
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.10

Bir $A = a + \varepsilon a^*$ dual kuaterniyonun eşleniği $\bar{A}$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \overline{a + \varepsilon a^*} \\
&= A_0 - A_1 e_1 - A_2 e_2 - A_3 e_3 \\
&= S_A - \overrightarrow{V_A}
\end{aligned}$$

şeklindedir ve bir dual kuaterniyonun normu

$$\|A\| = A\overline{A} = \overline{A}A = A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Şimdi İngiliz diplomat ve matematikçi John Pell tarafından tanımlanan Pell ve Pell-Lucas sayıları ve bunlara ilişkin özellikleri verelim.

Tanım 2.11

$n \geq 2$ için $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ başlangıç koşulları ile verilen Pell sayıları

$$p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2} \tag{2.7}$$

şeklindedir. Aynı rekürans bağıntısı ile verilen fakat, başlangıç koşulları $q_0 = q_1 = 1$ olan Pell-Lucas sayıları ise

$$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır (Horadam, 1971).

Bu rekürans bağıntısı yerine kullanılan Binet formülü olarak anılan bağıntı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Teorem 2.1

Pell ve Pell-Lucas sayıları için Binet formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$p_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.9}$$

$$q_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta}. \tag{2.10}$$

Burada $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$; $x^2 - 2x - 1 = 0$ kuadratik denkleminin çözümleridir (Horadam, 1971; Filipponi ve Horadam, 1995; Cerin ve Ginella, 2006, 2007).

3. PELL VE PELL-LUCAS KUATERNİYONLARI

Bu bölümde Pell kuaterniyonları ve Pell-Lucas kuaterniyonları diye adlandırılan sayı dizilerinden bahsedeceğiz. Çimen ve İpek (2015), (2.1) ile verilen kuaterniyonlar kümesinde a_i reel terimleri yerine Pell ve Pell-Lucas sayılarını alarak Pell, Pell-Lucas kuaterniyonlarını inşa etmişlerdir. Binet formülleri, rekürans bağıntıları ile bazı özdeşlikleri vermişlerdir.

Tanım 3.1

n-yinci Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları sırasıyla

$$QP_n = p_n e_0 + p_{n+1} e_1 + p_{n+2} e_2 + p_{n+3} e_3 = \sum_{s=0}^{3} p_{n+s} e_s \tag{3.1}$$

$$QPL_n = q_n e_0 + q_{n+1} e_1 + q_{n+2} e_2 + q_{n+3} e_3 = \sum_{s=0}^{3} q_{n+s} e_s \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada p_n ve q_n sırasıyla n-yinci Pell ve Pell-Lucas sayılarıdır (Çimen ve İpek, 2015).

Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları üzerinde tanımlanan işlemler aşağıdaki gibidir:

$$QP_n \pm QP_m = \sum_{s=0}^{3} (p_{n+s} \pm p_{m+s}) e_s \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} QP_n QP_m &= (S_{QP_n} + \overrightarrow{V_{QP_n}})(S_{QP_m} + \overrightarrow{V_{QP_m}}) \\ &= S_{QP_n} S_{QP_m} + S_{QP_n} \overrightarrow{V_{QP_m}} + S_{QP_m} \overrightarrow{V_{QP_n}} \\ &- \overrightarrow{V_{QP_n}} . \overrightarrow{V_{QP_m}} + \overrightarrow{V_{QP_n}} \times \overrightarrow{V_{QP_m}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$QPL_n \pm QPL_m = \sum_{s=0}^{3} (q_{n+s} \pm q_{m+s}) e_s \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} QPL_n QPL_m &= (S_{QPL_n} + \overrightarrow{V_{QPL_n}})(S_{QPL_m} + \overrightarrow{V_{QPL_m}}) \\ &= S_{QPL_n} S_{QPL_m} + S_{QPL_n} \overrightarrow{V_{QPL_m}} + S_{QPL_m} \overrightarrow{V_{QPL_n}} \\ &- \overrightarrow{V_{QPL_n}} . \overrightarrow{V_{QPL_m}} + \overrightarrow{V_{QPL_n}} \times \overrightarrow{V_{QPL_m}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tanım 3.2

QP_n ve QPL_n Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonlarının eşlenikleri

$$\overline{QP_n} = p_n e_0 - p_{n+1} e_1 - p_{n+2} e_2 - p_{n+3} e_3 \tag{3.7}$$

$$\overline{QPL_n} = q_n e_0 - q_{n+1} e_1 - q_{n+2} e_2 - q_{n+3} e_3 \tag{3.8}$$

ve normları

$$N_{QP_n} = QP_n \overline{QP_n} = p_n^2 + p_{n+1}^2 + p_{n+2}^2 + p_{n+3}^2 \tag{3.9}$$

$$N_{QPL_n} = QPL_n \overline{QPL_n} = q_n^2 + q_{n+1}^2 + q_{n+2}^2 + q_{n+3}^2 \tag{3.10}$$

ile verilir (Çimen ve İpek, 2015).

Bazı özellikleri bir önerme ile ifade edelim.

Önerme 3.1

$n \geq 2$ için

$$QP_n + \overline{QP_n} = 2p_n \tag{3.11}$$

$$QP_n^2 + QP_n \overline{QP_n} = 2p_n QP_n \tag{3.12}$$

$$QP_n \overline{QP_n} = 6p_{2n+3} \tag{3.13}$$

olur (Çimen ve İpek, 2015).

İspat

(3.1) ve (3.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} QP_n + \overline{QP_n} &= p_n e_0 + p_{n+1} e_1 + p_{n+2} e_2 + p_{n+3} e_3 + p_n e_0 - p_{n+1} e_1 - p_{n+2} e_2 - p_{n+3} e_3 \\ &= 2p_n \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan (3.11) özdeşliğini kullanarak

$$QP_n^2 = QP_n QP_n = QP_n \left(2p_n - \overline{QP_n}\right) = 2p_n QP_n - QP_n \overline{QP_n}$$

buluruz ve böylece

$$QP_n^2 + QP_n\overline{QP_n} = 2p_nQP_n$$

dir. Ayrıca (3.13) için Horadam (1971) ın verdiği $p_n^2 + p_{n+1}^2 = p_{2n+1}$ özdeşliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} QP_n\overline{QP_n} &= p_n^2 + p_{n+1}^2 + p_{n+2}^2 + p_{n+3}^2 \\ &= p_{2n+1} + p_{2n+5} \end{aligned}$$

bulunur ve (2.7) bağıntısı kullanılırsa,

$$QP_n\overline{QP_n} = 6p_{2n+3}$$

elde edilir. □

Önerme 3.2

$n \geq 2$ için

$$QP_n + 2QP_{n+1} = QP_{n+2} \tag{3.14}$$

$$QP_n - QP_{n+1}e_1 - QP_{n+2}e_2 - QP_{n+3}e_3 = 12q_{n+3} \tag{3.15}$$

olur (Çimen ve İpek, 2015).

İspat

(3.1) ve (3.3) eşitliklerinden

$$QP_n + 2QP_{n+1} = \sum_{s=0}^{3} p_{n+s}e_s + 2\sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s}e_s$$

ve böylece

$$QP_n + 2QP_{n+1} = \sum_{s=0}^{3} p_{n+2+s}e_s = QP_{n+2}.$$

(2.7) göz önünde bulundurularak (3.4) ve (3.11) eşitliklerinden

$$QP_n - QP_{n+1}e_1 - QP_{n+2}e_2 - QP_{n+3}e_3 = \sum_{s=0}^{3} p_{n+2s}.$$

$q_{n+1} = p_{n+1} + p_n$ ve $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$ Horadam (1971) ifadeleri kullanılarak

$$QP_n - QP_{n+1}e_1 - QP_{n+2}e_2 - QP_{n+3}e_3 = 12q_{n+3}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan ispat tamamlanır. □

Aşağıdaki teoremdeki tanımlamalar $q_n = p_{n+1} - p_n$ ve $q_{n+1} = p_{n+1} + p_n$ bağıntılarına benzerdir (Horadam, 1971).

Teorem 3.1

$n \geq 2$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$QP_n + QP_{n+1} = QPL_{n+1}, \tag{3.16}$$

$$QP_{n+1} - QP_n = QPL_n, \tag{3.17}$$

$$QP_{n-1} + QP_{n+1} = 2QPL_n, \tag{3.18}$$

$$2QP_n + QPL_n = QPL_{n+1}. \tag{3.19}$$

(Çimen ve İpek, 2015).

İspat

(3.1) ve (3.3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} QP_n + QP_{n+1} &= \sum_{s=0}^{3} p_{n+s}e_s + \sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s}e_s \\ &= \sum_{s=0}^{3} (p_{n+s} + p_{n+1+s})e_s, \end{aligned}$$

ve böylece $q_{n+1} = p_{n+1} + p_n$ bağıntısı (Horadam, 1971) ve (3.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} QP_n + QP_{n+1} &= \sum_{s=0}^{3} q_{n+1+s}e_s \\ &= QPL_{n+1}. \end{aligned}$$

Benzer şekilde, (3.1) ve (3.3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} QP_{n+1} - QP_n &= \sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s} e_s - \sum_{s=0}^{3} p_{n+s} e_s \\ &= \sum_{s=0}^{3} (p_{n+1+s} - p_{n+s}) e_s \end{aligned}$$

ve sonuç olarak $q_n = p_{n+1} - p_n$ bağıntısı (Horadam, 1971) ve (3.2) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} QP_{n+1} - QP_n &= \sum_{s=0}^{3} q_{n+s} e_s \\ &= QPL_n. \end{aligned}$$

(3.1) ve (3.3) eşitlikleri ile $p_{n-1} + p_{n+1} = 2q_n$ (Filipponi ve Horadam, 1995) bağıntısı ve bazı basit hesaplamalarla

$$QP_{n-1} + QP_{n+1} = \sum_{s=0}^{3} \left(p_{n-1+s} + p_{n+1+s}\right) e_s$$

elde ederiz ki bu da

$$QP_{n-1} + QP_{n+1} = 2QPL_n$$

denkleminden elde edilir.

(3.1) ve (3.2) eşitlikleri ile $q_{n+1} - q_n = 2p_n$ bağıntısı (Cerin ve Gianella, 2007) kullanılarak aynı hesaplamalarla

$$\begin{aligned} 2QP_n + QPL_n &= 2\sum_{s=0}^{3} p_{n+s} e_s + \sum_{s=0}^{3} q_{n+s} e_s \\ &= \sum_{s=0}^{3} (2p_{n+s} + q_{n+s}) e_s \\ &= QPL_{n+1} \end{aligned}$$

olduğunu anlayabiliriz. □

Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için Binet formüllerini vermeden önce bazı eşitlikleri bir lemma ile verelim.

$QP_n + 2QP_{n+1} = QP_{n+2}$ rekürans bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \tag{3.20}$$

dır. $\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$ bu karakteristik denklemin kökleri olmak üzere,

$$\alpha+\beta = 2,\ \alpha-\beta = 2\sqrt{2} \text{ ve } \alpha\beta = -1 \tag{3.21}$$

şeklindedir.

Lemma 3.1

$n \geq 1$ için

$$\alpha QP_n + QP_{n-1} = \alpha^n \alpha^*$$

ve

$$\beta QP_n + QP_{n-1} = \beta^n \beta^*$$

olup burada $\alpha^* = \sum_{s=0}^{3} \alpha^s e_s$ ve $\beta^* = \sum_{s=0}^{3} \beta^s e_s$ dir (Çimen ve İpek, 2015).

İspat

$n \geq 1$ olsun. QP_n ve QP_{n+1} Pell kuaterniyonları için

$$\alpha QP_n + QP_{n-1} = \sum_{s=0}^{3} \left(\alpha p_{n+s} + p_{n-1+s}\right) e_s \tag{3.22}$$

eşitliğini elde ederiz.

$\alpha^n = \alpha p_n + p_{n-1}$ özdeşliği ile bazı basit hesaplamalarla

$$\alpha QP_n + QP_{n-1} = \alpha^n \alpha^* \tag{3.23}$$

bulunur. Burada $\alpha^* = \sum_{s=0}^{3} \alpha^s e_s$ dir. Buna ek olarak $\beta^n = \beta p_n + p_{n-1}$ olduğu dikkate alınarak benzer yollarla

$$\beta QP_n + QP_{n-1} = \beta^n \beta^* \tag{3.24}$$

elde edilir. Burada $\beta^* = \sum_{s=0}^{3} \beta^s e_s$ dir. $\square$

Şimdi (3.20) rekürans denklemi ile ilişkili α ve β nın bir fonksiyonu ile Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonlar için Binet formüllerini verelim.

Teorem 3.2

QP_n ve QPL_n için Binet formülleri sırası ile aşağıdaki gibidir:

$$QP_n = \frac{\alpha^n\alpha^* - \beta^n\beta^*}{\alpha - \beta} \tag{3.25}$$

$$QPL_n = \frac{\alpha^n\alpha^* + \beta^n\beta^*}{\alpha + \beta} \tag{3.26}$$

burada $\alpha^* = \sum_{s=0}^{3} \alpha^s e_s$ ve $\beta^* = \sum_{s=0}^{3} \beta^s e_s$ dir (Çimen ve İpek, 2015).

İspat

Öncelikle,

$$\alpha QP_n + QP_{n-1} = \alpha^n\alpha^* \tag{3.27}$$

$$\beta QP_n + QP_{n-1} = \beta^n\beta^* \tag{3.28}$$

olduğunu Lemma 3.1 de ispatlamıştık. (3.27) den (3.28) çıkarıldığında

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)QP_n &= \alpha^n\alpha^* - \beta^n\beta^* \\ QP_n &= \frac{\alpha^n\alpha^* - \beta^n\beta^*}{\alpha - \beta}\end{aligned}$$

(3.27) ve (3.28) toplandığında ise $p_n+p_{n-1} = q_n$ Horadam (1971) eşitliğinin ve $\alpha+\beta = 2$ olmasının da yardımıyla

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)QP_n + 2QP_{n-1} &= \alpha^n\alpha^* + \beta^n\beta^* \\ QP_n + QP_{n-1} &= \frac{\alpha^n\alpha^* + \beta^n\beta^*}{\alpha + \beta} \\ QPL_n &= \frac{\alpha^n\alpha^* + \beta^n\beta^*}{\alpha + \beta}\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.3

Pell kuaterniyonları için toplam ifadeleri:

$$\sum_{s=1}^{n} QP_s = \frac{1}{2}\left(QPL_{n+1} - QPL_1\right), \tag{3.29}$$

$$\sum_{s=1}^{n} QP_{2s} = \frac{1}{2}\left(QP_{2n+1} - QP_1\right), \tag{3.30}$$

$$\sum_{s=1}^{n} QP_{2s-1} = \frac{1}{2}\left(QP_{2n} - QP_0\right) \tag{3.31}$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2015).

İspat

$$\sum_{i=0}^{m} p_{k+i} = \frac{1}{2}\left(q_{k+m+1} - q_k\right)$$

(Cerin ve Gianella, 2007) olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} QP_s &= \left(\sum_{s=1}^{n} p_s\right) e_0 + \left(\sum_{s=1}^{n} p_{s+1}\right) e_1 + \left(\sum_{s=1}^{n} p_{s+2}\right) e_2 + \left(\sum_{s=1}^{n} p_{s+3}\right) e_3 \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(q_{n+1} - q_0\right) - p_0\right] e_0 + \left[\frac{1}{2}\left(q_{n+2} - q_1\right) - p_1\right] e_1 \\
&+ \left[\frac{1}{2}\left(q_{n+3} - q_2\right) - p_2\right] e_2 + \left[\frac{1}{2}\left(q_{n+4} - q_3\right) - p_3\right] e_3 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{s=0}^{3} q_{n+1+s} e_s - \sum_{s=0}^{3} q_s e_s - 2\sum_{s=0}^{3} p_s e_s\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(QPL_{n+1} - QPL_0 - 2QP_0\right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

ve böylece $QPL_{n+1} = 2QP_n + QPL_n$ eşitliğinden

$$\sum_{s=1}^{n} QP_s = \frac{1}{2}\left(QPL_{n+1} - QPL_1\right)$$

olduğunu anlayabiliriz.

$$QP_n = \frac{\alpha^n \alpha^* - \beta^n \beta^*}{\alpha - \beta} \text{ ve } QPL_n = \frac{\alpha^n \alpha^* + \beta^n \beta^*}{\alpha + \beta}$$

formülleri ile

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} QP_s &= \sum_{s=1}^{n} \frac{\alpha^s\alpha^* - \beta^s\beta^*}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^*\alpha\sum_{s=1}^{n}\alpha^{s-1} - \beta^*\beta\sum_{s=1}^{n}\beta^{s-1}\right] \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^*\alpha\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} - \beta^*\beta\frac{\beta^n-1}{\beta-1}\right]\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\alpha^* = \sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s$ ve $\beta^* = \sum_{s=0}^{3}\beta^s e_s$ dir. Böylece bazı basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} QP_s &= \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha^*\alpha^{n+1} - \beta^*\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha^*\alpha - \beta^*\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha^* - \beta^*}{\alpha-\beta}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[QP_n + QP_{n+1} - QP_1 - QP_0\right],\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $QPL_{n+1} = QP_n + QP_{n+1}$ tanımından

$$\sum_{s=1}^{n} QP_s = \frac{1}{2}\left[QPL_{n+1} - QPL_1\right]$$

yazılır. Böylece (3.29) un diğer ispatı tamamlanır. Hem (3.1) hem de QP_n in tanımı ve (3.32) deki yaklaşım ile

$$\sum_{s=1}^{n} QP_{2s} = e_0\sum_{s=1}^{n} p_{2s} + e_1\sum_{s=1}^{n} p_{2s+1} + e_2\sum_{s=1}^{n} p_{2s+2} + e_3\sum_{s=1}^{n} p_{2s+3}$$

eşitliğine sahibiz. Böylece

$$\sum_{i=0}^{m} p_{2k+2i} = \frac{1}{2}\left(q_{2k+2m+2} - p_{2k+2m+2} + q_{2k} + p_{2k}\right)$$

ve

$$\sum_{i=0}^{m} p_{2k+2i+1} = \frac{1}{2}(2q_{2k+2m} + 3p_{2k+2m} - p_{2k}),\ \text{(Cerin ve Gianella, 2007)}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} QP_{2s} &= \frac{1}{2}\left(q_{2n} + p_{2n} - q_0 + p_0\right)e_0 + \frac{1}{2}(2q_{2n} + 3p_{2n} - p_0 - 2p_1)e_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(q_{2n+2} + p_{2n+2} - q_2 - p_2\right)e_2 + \frac{1}{2}\left(2q_{2n+2} + 3p_{2n+2} - p_2 - 2p_3\right)\end{aligned}$$

eşitliğine sahibiz. $q_n = p_{n+1} - p_n$ (Horadam, 1971) ve $QP_n + 2QP_{n+1} = QP_{n+2}$ (Çimen ve İpek, 2015) özdeşlikleri yardımı ve bazı basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} QP_{2s} &= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{3} p_{2n+1+s}e_s - \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{3} p_{1+s}e_s \\ &= \frac{1}{2}\left(QP_{2n+1} - QP_1\right)\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

Yukarıdaki ispat, Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonlarının Binet formülleri yardımıyla daha basit yapılabilir.

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} QP_{2s} &= \sum_{s=1}^{n} \frac{\alpha^{2s}\alpha^* - \beta^{2s}\beta^*}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^*\alpha^2 \sum_{s=1}^{n} \alpha^{2(s-1)} - \beta^*\beta^2 \sum_{s=1}^{n} \beta^{2(s-1)}\right] \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^*\alpha^2 \frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1} - \beta^*\beta^2 \frac{\beta^{2n}-1}{\beta^2-1}\right],\end{aligned}$$

eşitliğine sahibiz. Burada $\alpha^* = \sum_{s=0}^{3} \alpha^s e_s$ ve $\beta^* = \sum_{s=0}^{3} \beta^s e_s$ dir. Sonuç olarak, (3.21) göz önünde bulundurularak basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} QP_{2s} &= -\frac{1}{4}\left[\frac{\alpha^*\alpha^{2n} - \beta^*\beta^{2n}}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha^*\alpha^{2n+2} - \beta^*\beta^{2n+2}}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha^*\alpha^2 - \beta^*\beta^2}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha^* - \beta^*}{\alpha-\beta}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(QP_{2n+2} - QP_{2n} + QP_0 - QP_2\right)\end{aligned}$$

bulunur ve böylece $QP_n + 2QP_{n+1} = QP_{n+2}$ (Çimen ve İpek, 2015) özdeşliğinden aşağıdaki yazılır;

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} QP_{2s} &= \frac{1}{4}\left(2QP_{2n+1} - 2QP_1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(QP_{2n+1} - QP_1\right).\end{aligned}$$

Buradan,

$$\sum_{i=1}^{m} p_{2k+2i} = \frac{1}{2}(q_{2k+2m+2} - p_{2k+2m+2} + q_{2k} + p_{2k})$$

ve

$$\sum_{i=1}^{m} p_{2k+2i+1} = \frac{1}{2}(q_{2k+2m} - 3p_{2k+2m} - p_{2k}),\ \text{(Cerin ve Gianella, 2007)}$$

o zaman $\sum_{s=1}^{n} QP_{2s-1}$ toplamı aşağıdaki gibi yazılır;

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} QP_{2s-1} &= \left(\sum_{s=1}^{n} QP_{2s-1}\right)e_0 + \left(\sum_{s=1}^{n} QP_{2s}\right)e_1 + \left(\sum_{s=1}^{n} QP_{2s+1}\right)e_2 \\ &\quad + \left(\sum_{s=1}^{n} QP_{2s+2}\right)e_3 \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(2q_{2n-2} + 3p_{2n-2} - p_{-2} - 2p_{-1}\right)\right]e_0 + \left[\frac{1}{2}\left(p_{2n+1} - p_1\right)\right]e_1 \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}\left(p_{2n+2} - p_2\right)\right]e_2 + \left[\frac{1}{2}\left(p_{2n+3} - p_3\right)\right]e_3.\end{aligned}$$

$q_n = p_{n+1} - p_n$, $p_{-n} = (-1)^{n+1} p_n$ (Horadam, 1971) ve $QP_n + 2QP_{n+1} = QP_{n+2}$ (Çimen ve İpek, 2015) özdeşlikleri birleştirilerek son formül ile aşağıdaki eşitlik üretilir;

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} QP_{2s-1} &= \left[\frac{1}{2}(2q_{2n-2} + 3p_{2n-2} + p_2 - 2p_1)\right] e_0 + \left[\frac{1}{2}\left(p_{2n+1} - p_1\right)\right] e_1 \\
&+ \left[\frac{1}{2}\left(p_{2n+2} - p_2\right)\right] e_2 + \left[\frac{1}{2}\left(p_{2n+3}\right) - p_3\right] e_3 \\
&= \left[\frac{1}{2}(p_{2n} + p_0)\right] e_0 + \left[\frac{1}{2}(p_{2n+1} - p_1)\right] e_1 + \left[\frac{1}{2}\left(p_{2n+2} - p_2\right)\right] e_2 \\
&+ \left[\frac{1}{2}\left(p_{2n+3}\right) - p_3\right] e_3 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{3} p_{2n+s} e_s - \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{3} p_s e_s \\
&= \frac{1}{2}(QP_{2n} - QP_0).
\end{aligned}$$

Pell kuaterniyonları ve (3.21) için Binet formüllerinden aynı yolla toplamlar için yaptığımız gibi $\sum_{s=1}^{n} QP_s$ ve $\sum_{s=1}^{n} QP_{2s}$ sonuçlarını da aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} QP_{2s-1} &= \sum_{s=1}^{n} \frac{\alpha^{2s-1}\alpha^* - \beta^{2s-1}\beta^*}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^*\alpha \sum_{s=1}^{n} \alpha^{2(s-1)} - \beta^*\beta \sum_{s=1}^{n} \beta^{2(s-1)}\right] \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^*\alpha \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} - \beta^*\beta \frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^2 - 1}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{\alpha^*\alpha^{2n-1} - \beta^*\beta^{2n-1}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^*\alpha^{2n+1} - \beta^*\beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{(\alpha^* - \beta^*)(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta}\right],
\end{aligned}$$

$\alpha^* = \sum_{s=0}^{3} \alpha^s e_s$ ve $\beta^* = \sum_{s=0}^{3} \beta^s e_s$ şeklindedir. Buradan aşağıdakini yazarız;

$$\sum_{s=1}^{n} QP_{2s-1} = \frac{1}{2}(QP_{2n} - QP_0).$$

Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi Cassini, Catalan, d'Ocagne gibi özdeşliklerde kullanacağımız bazı faydalı eşitlikleri verelim.

Lemma 3.2

$\alpha^* = \sum_{s=0}^{3} \alpha^s e_s$ ve $\beta^* = \sum_{s=0}^{3} \beta^s e_s$ olmak üzere,

$$\alpha^*\beta^* = 2QPL_0 - 2\sqrt{2}\lambda \tag{3.33}$$

$$\beta^*\alpha^* = 2QPL_0 + 2\sqrt{2}\lambda \tag{3.34}$$

şeklindedir. Burada $\lambda = e_1 + 2e_2 - e_3$ dür.

İspat

α^* ve β^* ifadeleri yerlerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\alpha^*\beta^* &= (1 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3)(1 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3) \\
&= 1 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3 + \alpha e_1 + \alpha\beta e_1^2 + \alpha\beta^2 e_1 e_2 \\
&+ \alpha\beta^3 e_1 e_3 + \alpha^2 e_2 + \alpha^2\beta e_2 e_1 + \alpha^2\beta^2 e_2^2 + \alpha^2\beta^3 e_2 e_3 \\
&+ \alpha^3 e_3 + \alpha^3\beta e_3 e_1 + \alpha^3\beta^2 e_3 e_2 + \alpha^3\beta^3 e_3^2 \\
&= 1 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3 + \alpha e_1 - \alpha\beta + \alpha\beta^2 e_3 - \alpha\beta^3 e_2 \\
&+ \alpha^2 e_2 - \alpha^2\beta e_3 - \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta^3 e_1 + \alpha^3 e_3 + \alpha^3\beta e_2 \\
&- \alpha^3\beta^2 e_1 - \alpha^3\beta^3 \\
&= 1 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3 + \alpha e_1 + 1 + \alpha\beta^2 e_3 - \alpha\beta^3 e_2 \\
&+ \alpha^2 e_2 - \alpha^2\beta e_3 - 1 + \alpha^2\beta^3 e_1 + \alpha^3 e_3 + \alpha^3\beta e_2 \\
&- \alpha^3\beta^2 e_1 + 1 \\
&= 2 + (\alpha + \beta + \alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2)e_1 + (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta^3 + \alpha^3\beta)e_2 \\
&+ (\alpha^3 + \beta^3 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta)e_3 \\
&= 2 + (2 - 2\sqrt{2})e_1 + (6 - 4\sqrt{2})e_2 + (14 + 2\sqrt{2})e_3 \\
&= 2(1 + e_1 + 3e_2 + 7e_3) - 2\sqrt{2}(e_1 + 2e_2 - e_3) \\
&= 2QPL_0 - 2\sqrt{2}\lambda
\end{aligned}$$

(3.33) ifadesine ulaşılmış olur. Benzer hesaplamalar yapıldığında (3.34) bulunur.

Böylece $\alpha^*\beta^* \neq \beta^*\alpha^*$ olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz.

Şimdi de Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için Catalan özdeşliğini verelim.

Teorem 3.4

Sırasıyla Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için Catalan özdeşlikleri $\lambda = e_1 + 2e_2 - e_3$ olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} QP_{n+r}QP_{n-r} - QP_n^2 &= \frac{1}{2}(-1)^{n-r+1}q_{2r}QPL_0 \\ &+ (-1)^{n-r}p_{2r}\lambda + \frac{1}{2}(-1)^n QPL_0 \\ &= (-1)^{n-r+1}(2p_r^2 QPL_0 - p_{2r}\lambda) \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} QPL_{n+r}QPL_{n-r} - QPL_n^2 &= (-1)^{n-r}q_{2r}QPL_0 \\ &+ 2(-1)^{n-r+1}p_{2r}\lambda + (-1)^{n+1}QPL_0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

İspat

(3.35) için (3.25) Binet formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} QP_{n+r}QP_{n-r} - QP_n^2 &= \frac{\alpha^{n+r}\alpha^* - \beta^{n+r}\beta^*}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n-r}\alpha^* - \beta^{n-r}\beta^*}{\alpha-\beta} - \left(\frac{\alpha^n\alpha^* - \beta^n\beta^*}{\alpha-\beta}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}\left[-\alpha^{n-r}\beta^{n-r}(\alpha^{2r}\alpha^*\beta^* + \beta^{2r}\beta^*\alpha^*) + \alpha^n\beta^n\alpha^*\beta^* + \beta^n\alpha^n\beta^*\alpha^*\right] \end{aligned}$$

bulunur. Burada Lemma 3.2 deki (3.33) ve (3.34) ifadelerinin eşitlikteki değerleri yazılır ve (3.21) den $\alpha\beta = -1$ olduğu dikkate alınırsa,

$$QP_{n+r}QP_{n-r} - QP_n^2 = (-1)^{n-r+1}(2p_r^2 QPL_0 - p_{2r}\lambda)$$

elde edilmiş olur. Benzer hesaplamalarla (3.36) için de bulunur. □

Catalan özdeşliğinin $r = 1$ özel hali literatürde Cassini özdeşliği olarak bilinir. Dolayısıyla bunu ispatsız olarak aşağıdaki gibi verebiliriz.

Sonuç 3.1

Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için Cassini özdeşlikleri şeklinde verilir.

Bu türdeki sayı dizileri için verilen bir başka özdeşlik de d'Ocagne özdeşliğidir:

Teorem 3.5

Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için d'Ocagne özdeşliği $\lambda = e_1 + 2e_2 - e_3$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} QP_{m+1}QP_n - QP_mQP_{n+1} &= 2(-1)^{n+1}QPL_0 p_{m-n} \\ &+ 2(-1)^n \lambda q_{m-n} \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} QPL_{m+1}QPL_n - QPL_mQPL_{n+1} &= 4(-1)^n QPL_0 p_{m-n} \\ &+ 4(-1)^{n+1} \lambda q_{m-n} \end{aligned} \tag{3.40}$$

şeklindedir.

İspat

(3.25) Binet formülünden hareketle

$$\begin{aligned} &QP_{m+1}QP_n - QP_mQP_{n+1} \\ &= \frac{\alpha^{m+1}\alpha^* - \beta^{m+1}\beta^*}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^n\alpha^* - \beta^n\beta^*}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha^m\alpha^* - \beta^m\beta^*}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n+1}\alpha^* - \beta^{n+1}\beta^*}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{1}{8}\left[-\alpha^{m+1}\beta^n\alpha^*\beta^* - \alpha^n\beta^{m+1}\beta^*\alpha^* + \alpha^m\beta^{n+1}\alpha^*\beta^* + \alpha^{n+1}\beta^m\beta^*\alpha^*\right] \\ &= \frac{1}{8}\left[(\alpha^m\beta^{n+1} - \alpha^{m+1}\beta^n)\alpha^*\beta^* + (\alpha^{n+1}\beta^m - \alpha^n\beta^{m+1})\beta^*\alpha^*\right] \\ &= \frac{1}{8}\left[\alpha^m\beta^n(\beta-\alpha)\alpha^*\beta^* + \alpha^n\beta^m(\alpha-\beta)\beta^*\alpha^*\right] \end{aligned}$$

bulunur. (3.21) den $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} QP_{m+1}QP_n - QP_mQP_{n+1} &= \frac{1}{8}\left[\alpha^m\beta^n(-2\sqrt{2})\alpha^*\beta^* + \alpha^n\beta^m 2\sqrt{2}\beta^*\alpha^*\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha^n\beta^n[-\alpha^{m-n}\alpha^*\beta^* + \beta^{m-n}\beta^*\alpha^*] \end{aligned}$$

olur. (3.21), (3.33) ve (3.34) gereğince

$$QP_{m+1}QP_n - QP_mQP_{n+1} = 2(-1)^{n+1}QPL_0 p_{m-n} + 2(-1)^n \lambda q_{m-n}$$

elde edilir. Teoremin ikinci kısmı da benzer şekilde bulunur. □

4. DUAL PELL VE DUAL PELL-LUCAS KUATERNİYONLARI

Bu bölümde 3. bölümdeki bilgilerden faydalanarak Pell, Pell-Lucas kuaterniyonlarının dualini tanımlayacağız. Bu sayı dizileri için ayrıca Binet formülleri, rekürans bağıntıları ve diğer bazı özdeşlikleri elde edeceğiz. Bunun için önce bazı tanımları verelim.

Tanım 4.1

p_n ve q_n sırasıyla n-yinci Pell ve Pell-Lucas sayıları olmak üzere; dual Pell sayısı ve dual Pell-Lucas sayıları sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$P_n = p_n + \varepsilon p_{n+1}$$

$$Q_n = q_n + \varepsilon q_{n+1}$$

Tanım 4.2

Dual Pell kuaterniyon ve dual Pell-Lucas kuaterniyon sırasıyla;

$$\widetilde{QP}_n = QP_n + \varepsilon QP_{n+1} \tag{4.1}$$

$$\widetilde{QPL}_n = QPL_n + \varepsilon QPL_{n+1} \tag{4.2}$$

şeklindedir. (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden yararlanarak (4.1), (4.2) yerine

$$\widetilde{QP}_n = \sum_{s=0}^{3} P_{n+s} e_s$$

$$\widetilde{QPL}_n = \sum_{s=0}^{n} PL_{n+s} e_s$$

yazılabilir. Farklı bir yaklaşımla dual Pell, dual Pell-Lucas kuaterniyonları

$$\widetilde{QP}_n = \frac{\alpha^n \alpha' - \beta^n \beta'}{\alpha - \beta}$$

$$\widetilde{QPL}_n = \frac{\alpha^n \alpha' + \beta^n \beta'}{\alpha + \beta}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Şimdi bunun doğruluğunu ispatlayalım.

Teorem 4.1

Dual Pell ve dual Pell-Lucas sayıları için Binet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\widetilde{QP}_n = \frac{\alpha^n \alpha^{'} - \beta^n \beta^{'}}{\alpha - \beta} \tag{4.3}$$

$$\widetilde{QPL}_n = \frac{\alpha^n \alpha^{'} + \beta^n \beta^{'}}{\alpha + \beta} \tag{4.4}$$

Burada $\alpha = 1 + \sqrt{2}, \beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere

$$\alpha^{'} = (1 + \varepsilon\alpha) \sum_{s=0}^{3} \alpha^s e_s$$

$$\beta^{'} = (1 + \varepsilon\beta) \sum_{s=0}^{3} \beta^s e_s$$

şeklindedir.

İspat

Öncelikle

$$\alpha\widetilde{QP}_n + \widetilde{QP}_{n-1} = \alpha^n \alpha^{'} \tag{4.5}$$

$$\beta\widetilde{QP}_n + \widetilde{QP}_{n-1} = \beta^n \beta^{'} \tag{4.6}$$

olduğunu $\alpha^n = \alpha p_n + p_{n-1}$ özdeşliğinden yararlanarak gösterelim.

$$\begin{aligned}
\alpha\widetilde{QP}_n + \widetilde{QP}_{n-1} &= \alpha(QP_n + \varepsilon QP_{n+1}) + (QP_{n-1} + \varepsilon QP_n) \\
&= \alpha\left(\sum_{s=0}^{3} p_{n+s}e_s + \varepsilon\sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s}e_s\right) + \left(\sum_{s=0}^{3} p_{n-1+s}e_s + \varepsilon\sum_{s=0}^{3} p_{n+s}e_s\right) \\
&= \sum_{s=0}^{3}(\alpha p_{n+s}e_s + p_{n-1+s}e_s) + \varepsilon\sum_{s=0}^{3}(\alpha p_{n+1+s}e_s + p_{n+s}e_s) \\
&= \sum_{s=0}^{3}(\alpha p_{n+s} + p_{n-1+s})\,e_s + \varepsilon\sum_{s=0}^{3}(\alpha p_{n+1+s} + p_{n+s})\,e_s \\
&= \sum_{s=0}^{3}\alpha^{n+s}e_s + \varepsilon\sum_{s=0}^{3}\alpha^{n+s+1}e_s \\
&= \alpha^n\sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s + \varepsilon\alpha^{n+1}\sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s \\
&= \alpha^n\left(\sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s + \varepsilon\alpha\sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s\right) \\
&= \alpha^n(1+\varepsilon\alpha)\sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s \\
&= \alpha^n\alpha'
\end{aligned}$$

olup (4.5) ifadesi elde edilmiş olur. Benzer şekilde (4.6) ifadesi de gösterilebilir. (4.5) ten (4.6) çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
\alpha\widetilde{QP}_n - \beta\widetilde{QP}_n &= \alpha^n\alpha' - \beta^n\beta' \\
(\alpha-\beta)\widetilde{QP}_n &= \alpha^n\alpha' - \beta^n\beta' \\
\widetilde{QP}_n &= \frac{\alpha^n\alpha' - \beta^n\beta'}{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

elde edilir ve (4.5) ile (4.6) toplanırsa

$$\begin{aligned}
\alpha\widetilde{QP}_n + \beta\widetilde{QP}_n + 2\widetilde{QP}_{n-1} &= \alpha^n\alpha' + \beta^n\beta' \\
(\alpha+\beta)\widetilde{QP}_n + 2\widetilde{QP}_{n-1} &= \alpha^n\alpha' + \beta^n\beta'
\end{aligned}$$

bulunur ve $\alpha+\beta = 2$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)(\widetilde{QP}_n + \widetilde{QP}_{n-1}) &= \alpha^n\alpha' + \beta^n\beta' \\
(\widetilde{QP}_n + \widetilde{QP}_{n-1}) &= \frac{\alpha^n\alpha' + \beta^n\beta'}{\alpha+\beta} \\
\widetilde{QPL}_n &= \frac{\alpha^n\alpha' + \beta^n\beta'}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 4.1

$\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon^2 = 0$, $\lambda = e_1 + 2e_2 - e_3$, $\alpha' = (1+\varepsilon\alpha)\sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s$, $\beta' = (1+\varepsilon\beta)\sum_{s=0}^{3}\beta^s e_s$ olmak üzere,

$$\alpha'\beta' = (2+4\varepsilon)(QPL_0 - \sqrt{2}\lambda), \tag{4.7}$$

$$\beta'\alpha' = (2+4\varepsilon)(QPL_0 + \sqrt{2}\lambda), \tag{4.8}$$

$$(\alpha')^2 = (1+2\varepsilon\alpha)(-120 - 84\sqrt{2} + 2QPL_0 + 2\sqrt{2}QP_0), \tag{4.9}$$

$$(\beta')^2 = (1+2\varepsilon\beta)(-120 + 84\sqrt{2} + 2QPL_0 - 2\sqrt{2}QP_0). \tag{4.10}$$

şeklindedir.

İspat

$$\begin{aligned}
\alpha'\beta' &= (1+\varepsilon\alpha)\sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s(1+\varepsilon\beta)\sum_{s=0}^{3}\beta^s e_s \\
&= (1+\varepsilon\alpha)\,(1+\varepsilon\beta)\,(\sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s\sum_{s=0}^{3}\beta^s e_s) \\
&= (1+\varepsilon\alpha)\,(1+\varepsilon\beta)\,\alpha^*\beta^* \\
&= (1+\varepsilon\beta+\varepsilon\alpha+\varepsilon^2\alpha\beta)(2QPL_0 - 2\sqrt{2}\lambda) \\
&= (1+2\varepsilon)(2QPL_0 - 2\sqrt{2}\lambda) \\
&= (2+4\varepsilon)(QPL_0 - \sqrt{2}\lambda) \\
\beta'\alpha' &= (1+\varepsilon\beta)\sum_{s=0}^{3}\beta^s e_s\,(1+\varepsilon\alpha)\sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s \\
&= (1+\varepsilon\beta)\,(1+\varepsilon\alpha)\,(\sum_{s=0}^{3}\beta^s e_s\sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s) \\
&= (1+\varepsilon\beta)\,(1+\varepsilon\alpha)\,\beta^*\alpha^* \\
&= (1+\varepsilon\alpha+\varepsilon\beta+\varepsilon^2\beta\alpha)(2QPL_0 + 2\sqrt{2}\lambda) \\
&= (1+2\varepsilon)(2QPL_0 + 2\sqrt{2}\lambda) \\
&= (2+4\varepsilon)(QPL_0 + \sqrt{2}\lambda)
\end{aligned}$$

Böylece $\alpha'\beta' \neq \beta'\alpha'$ olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz. Şimdi $(\alpha')^2$ ve $(\beta')^2$ yi bulalım.

$$
\begin{aligned}
(\alpha^{'})^2 &= [(1+\varepsilon\alpha)\sum_{s=0}^{3}\alpha^s e_s]^2 \\
&= (1+\varepsilon\alpha)^2(1+\alpha e_1+\alpha^2 e_2+\alpha^3 e_3)(1+\alpha e_1+\alpha^2 e_2+\alpha^3 e_3) \\
&= (1+2\varepsilon\alpha+\varepsilon^2\alpha^2)(1+\alpha e_1+\alpha^2 e_2+\alpha^3 e_3+\alpha e_1+\alpha^2 e_1^2+\alpha^3 e_1 e_2 \\
&+ \alpha^4 e_1 e_3+\alpha^2 e_2+\alpha^3 e_2 e_1+\alpha^4 e_2^2+\alpha^5 e_2 e_3+\alpha^3 e_3+\alpha^4 e_3 e_1 \\
&+ \alpha^5 e_3 e_2+\alpha^6 e_3^2) \\
&= (1+2\varepsilon\alpha)(1+\alpha e_1+\alpha^2 e_2+\alpha^3 e_3+\alpha e_1-\alpha^2+\alpha^3 e_3-\alpha^4 e_2 \\
&+ \alpha^2 e_2-\alpha^3 e_3-\alpha^4+\alpha^5 e_1+\alpha^3 e_3+\alpha^4 e_{2-}\alpha^5 e_1-\alpha^6) \\
&= (1+2\varepsilon\alpha)((1-\alpha^2-\alpha^4-\alpha^6)e_0+(\alpha+\alpha+\alpha^5-\alpha^5)e_1+(\alpha^2 \\
&- \alpha^4+\alpha^2+\alpha^4)e_2+(\alpha^3+\alpha^3-\alpha^3+\alpha^3)e_3) \\
&= (1+2\varepsilon\alpha)((1-\alpha^2-\alpha^4-\alpha^6)e_0+2\alpha e_1+2\alpha^2 e_2+2\alpha^3 e_3) \\
&= (1+2\varepsilon\alpha)((1-3-2\sqrt{2}-17-12\sqrt{2}-99-70\sqrt{2})e_0 \\
&+ (2+2\sqrt{2})e_1+(6+4\sqrt{2})e_2+(14+10\sqrt{2})e_3) \\
&= (1+2\varepsilon\alpha)((-118-84\sqrt{2})e_0+(2+2\sqrt{2})e_1+(6+4\sqrt{2})e_2 \\
&+ (14+10\sqrt{2})e_3) \\
&= (1+2\varepsilon\alpha)(-118-84\sqrt{2}+2e_1+6e_2+14e_3+2\sqrt{2}e_1+4\sqrt{2}e_2+10\sqrt{2}e_3 \\
&= (1+2\varepsilon\alpha)(-120-84\sqrt{2}+2(1+e_1+3e_2+7e_3)+2\sqrt{2}(e_1+2e_2+5e_3)) \\
&= (1+2\varepsilon\alpha)(-120-84\sqrt{2}+2QPL_0+2\sqrt{2}QP_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\beta^{'})^2 &= [(1+\varepsilon\beta)\sum_{s=0}^{3}\beta^s e_s]^2 \\
&= (1+\varepsilon\beta)^2(1+\beta e_1+\beta^2 e_2+\beta^3 e_3)(1+\beta e_1+\beta^2 e_2+\beta^3 e_3) \\
&= (1+2\varepsilon\beta+\varepsilon^2\beta^2)(1+\beta e_1+\beta^2 e_2+\beta^3 e_3+\beta e_1+\beta^2 e_1^2+\beta^3 e_1 e_2 \\
&+ \beta^4 e_1 e_3+\beta^2 e_2+\beta^3 e_2 e_1+\beta^4 e_2^2+\beta^5 e_2 e_3+\beta^3 e_3+\beta^4 e_3 e_1+\beta^5 e_3 e_2 \\
&+ \beta^6 e_3^2) \\
&= (1+2\varepsilon\beta)(1+\beta e_1+\beta^2 e_2+\beta^3 e_3+\beta e_1-\beta^2+\beta^3 e_3-\beta^4 e_2 \\
&+ \beta^2 e_2-\beta^3 e_3-\beta^4+\beta^5 e_1+\beta^3 e_3+\beta^4 e_2-\beta^5 e_1-\beta^6) \\
&= (1+2\varepsilon\beta)((1-\beta^2-\beta^4-\beta^6)e_0+(\beta+\beta+\beta^5-\beta^5)e_1 \\
&+ (\beta^2-\beta^4+\beta^2+\beta^4)e_2+(\beta^3+\beta^3-\beta^3+\beta^3)e_3) \\
&= (1+2\varepsilon\beta)((1-\beta^2-\beta^4-\beta^6)e_0+2\beta e_1+2\beta^2 e_2+2\beta^3 e_3 \\
&= (1+2\varepsilon\beta)((1-3+2\sqrt{2}-17+12\sqrt{2}-99+70\sqrt{2})e_0 \\
&+ (2-2\sqrt{2})e_1+(6-4\sqrt{2})e_2+(14-10\sqrt{2})e_3) \\
&= (1+2\varepsilon\beta)((-118+84\sqrt{2})e_0+(2-2\sqrt{2})e_1+(6-4\sqrt{2})e_2 \\
&+ (14-10\sqrt{2})e_3) \\
&= (1+2\varepsilon\beta)(-118+84\sqrt{2}+2e_1+6e_2+14e_3-2\sqrt{2}e_1-4\sqrt{2}e_2-10\sqrt{2}e_3) \\
&= (1+2\varepsilon\beta)(-120+84\sqrt{2}+2(1+e_1+3e_2+7e_3)-2\sqrt{2}(e_1+2e_2+5e_3) \\
&= (1+2\varepsilon\beta)(-120+84\sqrt{2}+2QPL_0-2\sqrt{2}QP_0)
\end{aligned}
$$

bulunur. □

Şimdi dual Pell ve dual Pell-Lucas kuaterniyonları için bazı ifadeleri bir önerme ile verelim.

Önerme 4.1

$n \geq 2$ için aşağıdakiler doğrudur.

$$\widetilde{QP}_n + \widetilde{QP}_{n+1} = \widetilde{QPL}_{n+1} \tag{4.11}$$

$$\widetilde{QP}_{n+1} - \widetilde{QP}_n = \widetilde{QPL}_n \tag{4.12}$$

$$\widetilde{QP}_{n-1} + \widetilde{QP}_{n+1} = 2\widetilde{QPL}_n \tag{4.13}$$

$$\widetilde{QP}_n + 2\widetilde{QP}_{n+1} = \widetilde{QP}_{n+2} \tag{4.14}$$

$$\widetilde{QP}_n + \overline{\widetilde{QP}_n} = 2QP_n \tag{4.15}$$

$$\widetilde{QP}_n^2 + \widetilde{QP}_n\overline{\widetilde{QP}_n} = 2QP_n\widetilde{QP}_n \tag{4.16}$$

$$\left\|\widetilde{QP}_n\right\| = \widetilde{QP}_n\overline{\widetilde{QP}_n} \tag{4.17}$$

İspat

Önce (4.11) den başlayıp sırasıyla doğruluğunu gösterelim.

$q_{n+1} = p_{n+1} + p_n$ (Horadam, 1971) ve 4.1 yardımıyla;

$$\begin{aligned}
\widetilde{QP}_n + \widetilde{QP}_{n+1} &= \sum_{s=0}^{3} p_{n+s}e_s + \varepsilon\sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s}e_s + \sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s}e_s + \varepsilon\sum_{s=0}^{3} p_{n+2+s}e_s \\
&= \sum_{s=0}^{3} p_{n+s}e_s + \sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s}e_s + \varepsilon\left(\sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s} + \sum_{s=0}^{3} p_{n+2+s}\right)e_s \\
&= \sum_{s=0}^{3}(p_{n+s} + p_{n+1+s})e_s + \varepsilon\left(\sum_{s=0}^{3}(p_{n+1+s} + p_{n+2+s})e_s\right) \\
&= \sum_{s=0}^{3} q_{n+1+s}e_s + \varepsilon\sum_{s=0}^{3} q_{n+2+s}e_s \\
&= QPL_{n+1} + \varepsilon QPL_{n+2} \\
&= \widetilde{QPL}_{n+1}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{QP}_{n+1} - \widetilde{QP}_n &= QP_{n+1} + \varepsilon QP_{n+2} - QP_n - \varepsilon QP_{n+1} \\
&= \sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s} e_s + \varepsilon \sum_{s=0}^{3} p_{n+2+s} e_s - \sum_{s=0}^{3} p_{n+s} e_s - \varepsilon \sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s} e_s \\
&= \sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s} e_s - \sum_{s=0}^{3} p_{n+s} e_s + \varepsilon \left(\sum_{s=0}^{3} p_{n+2+s} - \sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s} \right) e_s \\
&= \sum_{s=0}^{3} (p_{n+1+s} - p_{n+s}) e_s + \varepsilon \left(\sum_{s=0}^{3} (p_{n+2+s} - p_{n+1+s}) e_s \right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Horadam (1971) dan

$$
q_n = p_{n+1} - p_n
$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$
\begin{aligned}
\widetilde{QP}_{n+1} - \widetilde{QP}_n &= \sum_{s=0}^{3} q_{n+s} e_s + \varepsilon \sum_{s=0}^{3} q_{n+1+s} e_s \\
&= QPL_n + \varepsilon QPL_{n+1} \\
&= \widetilde{QPL}_n
\end{aligned}
$$

bulunur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\widetilde{QP}_{n-1} + \widetilde{QP}_{n+1} &= QP_{n-1} + \varepsilon QP_n + QP_{n+1} \\
&+ \varepsilon QP_{n+2} \\
&= \sum_{s=0}^{3} p_{n-1+s} e_s + \varepsilon \sum_{s=0}^{3} p_{n+s} e_s + \sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s} e_s + \varepsilon \sum_{s=0}^{3} p_{n+2+s} e_s \\
&= \sum_{s=0}^{3} (p_{n-1+s} + p_{n+1+s}) e_s + \varepsilon \left(\sum_{s=0}^{3} (p_{n+s} + p_{n+2+s}) e_s \right)
\end{aligned}
$$

olur ve Filipponi ve Horadam (1995) dan biliyoruz ki

$$
p_{n-1} + p_{n+1} = 2q_n
$$

o halde,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{QP}_{n-1} + \widetilde{QP}_{n+1} &= 2 \sum_{s=0}^{3} q_{n+s} e_s + 2\varepsilon \sum_{s=0}^{3} q_{n+1+s} e_s \\
&= 2(QPL_n + \varepsilon QPL_{n+1}) \\
&= 2\widetilde{QPL}_n
\end{aligned}
$$

bulunur. Şimdi de

$$\widetilde{QP}_n + 2\widetilde{QP}_{n+1} = \widetilde{QP}_{n+2}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\widetilde{QP}_n + 2\widetilde{QP}_{n+1} &= QP_n + \varepsilon QP_{n+1} + 2QP_{n+1} + 2\varepsilon QP_{n+2} \\
&= \sum_{s=0}^{3} p_{n+s} e_s + 2\sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s} e_s + \varepsilon \left(\sum_{s=0}^{3} p_{n+1+s} + 2\sum_{s=0}^{3} p_{n+2+s} \right) e_s \\
&= \sum_{s=0}^{3} p_{n+2+s} e_s + \varepsilon \sum_{s=0}^{3} p_{n+3+s} e_s \\
&= QP_{n+2} + \varepsilon QP_{n+3} \\
&= \widetilde{QP}_{n+2}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\widetilde{QP}_n + \overline{\widetilde{QP}_n} &= QP_n + \varepsilon QP_{n+1} + QP_n - \varepsilon QP_{n+1} \\
&= 2QP_n
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\widetilde{QP}_n^2 + \widetilde{QP}_n \overline{\widetilde{QP}_n} &= \widetilde{QP}_n \widetilde{QP}_n + \widetilde{QP}_n \overline{\widetilde{QP}_n} \\
&= \widetilde{QP}_n (2QP_n - \overline{\widetilde{QP}_n}) + \widetilde{QP}_n \overline{\widetilde{QP}_n} \\
&= 2QP_n \widetilde{QP}_n - \widetilde{QP}_n \overline{\widetilde{QP}_n} + \widetilde{QP}_n \overline{\widetilde{QP}_n} \\
&= 2QP_n \widetilde{QP}_n
\end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak,

$$\left\| \widetilde{QP}_n \right\| = \widetilde{QP}_n \overline{\widetilde{QP}_n}$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

$$\left\| \widetilde{QP}_n \right\| = \| QP_n + \varepsilon QP_{n+1} \| = QP_n^2$$

ve

$$\widetilde{QP}_n \overline{\widetilde{QP}_n} = (QP_n + \varepsilon QP_{n+1})(QP_n - \varepsilon QP_{n+1}) = QP_n^2$$

olduğundan son iki eşitlikten

$$\left\| \widetilde{QP}_n \right\| = \widetilde{QP}_n \overline{\widetilde{QP}_n}$$

olduğu görülür. $\square$

Teorem 4.2

Sırasıyla Dual Pell ve dual Pell-Lucas kuaterniyonları için Catalan özdeşlikleri

$\alpha'\beta' = (2+4\varepsilon)(QPL_0 - \sqrt{2}\lambda)$ ve $\beta'\alpha' = (2+4\varepsilon)(QPL_0 + \sqrt{2}\lambda)$ olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{QP}_{n+r}\widetilde{QP}_{n-r} - \widetilde{QP}_n^2 = (1+2\varepsilon)(QP_{n+r}QP_{n-r} - QP_n^2) \tag{4.18}$$

$$\widetilde{QPL}_{n+r}\widetilde{QPL}_{n-r} - \widetilde{QPL}_n^2 = (1+2\varepsilon)(QPL_{n+r}QPL_{n-r} - QPL_n^2) \tag{4.19}$$

İspat

(4.18) için (4.3) Binet formülü kullanılırsa,

$$\widetilde{QP}_{n+r}\widetilde{QP}_{n-r} - \widetilde{QP}_n^2 = \left(\frac{\alpha^{n+r}\alpha' - \beta^{n+r}\beta'}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r}\alpha' - \beta^{n-r}\beta'}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^{n}\alpha' - \beta^{n}\beta'}{\alpha - \beta}\right)^2$$

elde edilir. İspatı iki kısımda inceleyelim:

Birinci kısım;

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \left(\frac{\alpha^{n+r}\alpha' - \beta^{n+r}\beta'}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r}\alpha' - \beta^{n-r}\beta'}{\alpha-\beta}\right)\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 - \alpha^{n+r}\beta^{n-r}\alpha'\beta' - \beta^{n+r}\alpha^{n-r}\beta'\alpha' + \beta^{2n}\beta'^2)\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) - \frac{1}{8}\alpha^{n-r}\beta^{n-r}(\alpha^{2r}\alpha'\beta' + \beta^{2r}\beta'\alpha')\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) - \frac{1}{8}(-1)^{n-r}[\alpha^{2r}(2+4\varepsilon)(QPL_0 - \sqrt{2}\lambda)\\
&+ (\beta^{2r}(2+4\varepsilon)(QPL_0 + \sqrt{2}\lambda)]\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) - \frac{1}{8}(-1)^{n-r}[(2+4\varepsilon)(\alpha^{2r}QPL_0 - \alpha^{2r}\sqrt{2}\lambda\\
&+ \beta^{2r}QPL_0 + \beta^{2r}\sqrt{2}\lambda)]\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) - \frac{1}{8}(-1)^{n-r}[(2+4\varepsilon)(QPL_0(\alpha^{2r} + \beta^{2r})\\
&- (\sqrt{2}\lambda(\alpha^{2r} - \beta^{2r})]\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) - \frac{1}{8}(-1)^{n-r}[(2+4\varepsilon)(2QPL_0q_{2r} - 4\lambda p_{2r})]\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) - \frac{1}{2}(-1)^{n-r}[(1+2\varepsilon)(QPL_0q_{2r} - 2\lambda p_{2r})]\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) - \frac{1+2\varepsilon}{2}(-1)^{n-r}q_{2r}QPL_0 + (1+2\varepsilon)(-1)^{n-r}p_{2r}\lambda
\end{aligned}
$$

elde edilir

İkinci kısım;

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \left(\frac{\alpha^{n}\alpha' - \beta^{n}\beta'}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n}\alpha' - \beta^{n}\beta'}{\alpha-\beta}\right)\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 - \alpha^{n}\beta^{n}\alpha'\beta' - \beta^{n}\alpha^{n}\beta'\alpha' + \beta^{2n}\beta'^2)\\
&= \frac{1}{8}((\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) - (\alpha^{n}\beta^{n})(\alpha'\beta' + \beta'\alpha'))\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) - \frac{1}{8}(-1)^{n}[(2+4\varepsilon)(QPL_0 - \sqrt{2}\lambda)\\
&+ (2+4\varepsilon)(QPL_0 + \sqrt{2}\lambda)]\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) - \frac{1}{8}(-1)^{n}(2+4\varepsilon)(2QPL_0)\\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) - \frac{1}{2}(-1)^{n}(1+2\varepsilon)(QPL_0)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan;

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{QP}_{n+r}\widetilde{QP}_{n-r}-\widetilde{QP}_n^2 = C_1 - C_2 \\
&= \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2+\beta^{2n}\beta'^2) - \frac{1+2\varepsilon}{2}(-1)^{n-r}q_{2r}QPL_0 + (1+2\varepsilon)(-1)^{n-r}p_{2r}\lambda \\
&- \frac{1}{8}(\alpha^{2n}\alpha'^2+\beta^{2n}\beta'^2) + \frac{1}{2}(-1)^n(1+2\varepsilon)(QPL_0) \\
&= -\frac{1+2\varepsilon}{2}(-1)^{n-r}q_{2r}QPL_0 + (1+2\varepsilon)(-1)^{n-r}p_{2r}\lambda + \frac{1}{2}(-1)^n(1+2\varepsilon)(QPL_0) \\
&= \frac{(-1)^{n-r+1}}{2}(1+2\varepsilon)\,q_{2r}QPL_0 + (-1)^{n-r}(1+2\varepsilon)p_{2r}\lambda + \frac{(-1)^n}{2}(1+2\varepsilon)(QPL_0) \\
&= (1+2\varepsilon)[(\frac{1}{2}(-1)^{n-r+1}q_{2r}QPL_0) + (-1)^{n-r}p_{2r}\lambda + \frac{(-1)^n}{2}(QPL_0)]
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $4p_r^2 = q_{2r} - (-1)^r$ eşitsizliğinden;

$$
\begin{aligned}
\widetilde{QP}_{n+r}\widetilde{QP}_{n-r}-\widetilde{QP}_n^2 &= (1+2\varepsilon)(\frac{1}{2}(-1)^nQPL_0)[(-1)^{1-r}q_{2r}+1] \\
&+ (1+2\varepsilon)(-1)^{n-r}p_{2r}\lambda \\
&= (1+2\varepsilon)(\frac{1}{2}(-1)^nQPL_0)[(-1)(-1)^{-r}q_{2r} \\
&+ (-1)^r(-1)^{-r}] + (1+2\varepsilon)(-1)^{n-r}p_{2r}\lambda \\
&= (1+2\varepsilon)(\frac{1}{2}(-1)^nQPL_0)(-1)^{-r}[-q_{2r}+(-1)^r] \\
&+ (1+2\varepsilon)(-1)^{n-r}p_{2r}\lambda \\
&= (1+2\varepsilon)(\frac{1}{2}(-1)^nQPL_0)(-1)^{-r}(-4p_r^2) \\
&+ (1+2\varepsilon)(-1)^{n-r}p_{2r}\lambda \\
&= (1+2\varepsilon)(-1)^{n-r+1}[2p_r^2QPL_0 - p_{2r}\lambda] \\
&= (1+2\varepsilon)(QP_{n+r}QP_{n-r} - QP_n^2)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Şimdi Dual Pell-Lucas kuaterniyonları için Catalan özdeşliğini bulalım. (4.19) için (4.4) Binet formülü kullanılırsa,

$$
\widetilde{QPL}_{n+r}\widetilde{QPL}_{n-r}-\widetilde{QPL}_n^2 = \left(\frac{\alpha^{n+r}\alpha' + \beta^{n+r}\beta'}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r}\alpha' + \beta^{n-r}\beta'}{\alpha+\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^{n}\alpha' + \beta^{n}\beta'}{\alpha+\beta}\right)^2
$$

elde edilir. İspatı iki kısımda inceleyelim:

Birinci kısım;

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \left(\frac{\alpha^{n+r}\alpha' + \beta^{n+r}\beta'}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r}\alpha' + \beta^{n-r}\beta'}{\alpha+\beta}\right) \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \alpha^{n+r}\beta^{n-r}\alpha'\beta' + \beta^{n+r}\alpha^{n-r}\beta'\alpha' + \beta^{2n}\beta'^2) \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) + \frac{1}{4}\alpha^{n-r}\beta^{n-r}(\alpha^{2r}\alpha'\beta' + \beta^{2r}\beta'\alpha') \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) + \frac{1}{4}(-1)^{n-r}[\alpha^{2r}(2+4\varepsilon)(QPL_0 - \sqrt{2}\lambda) \\
&+ \beta^{2r}(2+4\varepsilon)(QPL_0 + \sqrt{2}\lambda)] \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) + \frac{1}{4}(-1)^{n-r}[(2+4\varepsilon)(\alpha^{2r}QPL_0 \\
&- \alpha^{2r}\sqrt{2}\lambda + \beta^{2r}QPL_0 + \beta^{2r}\sqrt{2}\lambda)] \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) + \frac{1}{4}(-1)^{n-r}[(2+4\varepsilon)(QPL_0(\alpha^{2r} + \beta^{2r})) \\
&- \sqrt{2}\lambda(\alpha^{2r} - \beta^{2r})] \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) + \frac{1}{4}(-1)^{n-r}[(2+4\varepsilon)(2q_{2r}QPL_0 - 4p_{2r}\lambda)] \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) + (-1)^{n-r}(1+2\varepsilon)q_{2r}QPL_0 - (-1)^{n-r}2(1+2\varepsilon)p_{2r}\lambda
\end{aligned}
$$

elde edilir.

İkinci kısım;

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \left(\frac{\alpha^{n}\alpha' + \beta^{n}\beta'}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n}\alpha' + \beta^{n}\beta'}{\alpha+\beta}\right) \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \alpha^{n}\beta^{n}\alpha'\beta' + \beta^{n}\alpha^{n}\beta'\alpha' + \beta^{2n}\beta'^2) \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) + \frac{1}{4}(-1)^{n}(\alpha'\beta' + \beta'\alpha') \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) + \frac{1}{4}(-1)^{n}[(2+4\varepsilon)(QPL_0 - \sqrt{2}\lambda) \\
&+ (2+4\varepsilon)(QPL_0 + \sqrt{2}\lambda)] \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) + \frac{1}{4}(-1)^{n}(2+4\varepsilon)(2QPL_0) \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n}\alpha'^2 + \beta^{2n}\beta'^2) + (-1)^{n}(1+2\varepsilon)QPL_0
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan;

$$
\begin{aligned}
\widetilde{QPL}_{n+r}\widetilde{QPL}_{n-r}-\widetilde{QPL}_{n}^{2} &= D_1 - D_2 \\
&= (-1)^{n-r}(1+2\varepsilon)q_{2r}QPL_0 - (-1)^{n-r}2(1+2\varepsilon)p_{2r}\lambda \\
&- (-1)^{n}(1+2\varepsilon)QPL_0 \\
&= (1+2\varepsilon)((-1)^{n-r}q_{2r}QPL_0 + 2(-1)^{n-r+1}p_{2r}\lambda \\
&+ (-1)^{n+1}QPL_0) \\
&= (1+2\varepsilon)(QPL_{n+r}QPL_{n-r} - QPL_n^2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Catalan özdeşliğinin $r = 1$ özel hali literatürde Cassini özdeşliği olarak bilindiğinden bahsetmiştik. Aynı durum dualleri için de geçerlidir. Dolayısıyla bunu ispatsız olarak verebiliriz.

Sonuç 4.1

Dual Pell ve Dual Pell-Lucas kuaterniyonları için Cassini özdeşlikleri

$$
\widetilde{QP}_{n+1}\widetilde{QP}_{n-1}-\widetilde{QP}_{n}^{2} = (1+2\varepsilon)(QP_{n+1}QP_{n-1} - QP_n^2) \tag{4.20}
$$

$$
\widetilde{QPL}_{n+1}\widetilde{QPL}_{n-1}-\widetilde{QPL}_{n}^{2} = (1+2\varepsilon)(QPL_{n+1}QPL_{n-1} - QPL_n^2) \tag{4.21}
$$

şeklinde verilir.

Bu türdeki sayı dizileri için verilen bir başka özdeşlik de d'Ocagne özdeşliğidir:

Teorem 4.3

Dual Pell ve Dual Pell-Lucas kuaterniyonları için d'Ocagne özdeşliği

$\alpha'\beta' = (2+4\varepsilon)(QPL_0 - \sqrt{2}\lambda)$ ve $\beta'\alpha' = (2+4\varepsilon)(QPL_0 + \sqrt{2}\lambda)$ olmak üzere sırasıyla;

$$\widetilde{QP}_{m+1}\widetilde{QP}_n - \widetilde{QP}_m\widetilde{QP}_{n+1} = (1+2\varepsilon)(QP_{m+1}QP_n - QP_mQP_{n+1}) \tag{4.22}$$

$$\widetilde{QPL}_{m+1}\widetilde{QPL}_n - \widetilde{QPL}_m\widetilde{QPL}_{n+1} = (1+2\varepsilon)(QPL_{m+1}QPL_n - QPL_mQPL_{n+1}) \tag{4.23}$$

şeklindedir.

İspat

(4.22) için (4.3) Binet formülü kullanılırsa;

$$\begin{aligned}\widetilde{QP}_{m+1}\widetilde{QP}_n - \widetilde{QP}_m\widetilde{QP}_{n+1} &= \left(\frac{\alpha^{m+1}\alpha' - \beta^{m+1}\beta'}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^n\alpha' - \beta^n\beta'}{\alpha-\beta}\right)\\ &- \left(\frac{\alpha^m\alpha' - \beta^m\beta'}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}\alpha' - \beta^{n+1}\beta'}{\alpha-\beta}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. İspatı iki kısımda inceleyelim:

Birinci kısım;

$$\begin{aligned}E_1 &= \left(\frac{\alpha^{m+1}\alpha' - \beta^{m+1}\beta'}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^n\alpha' - \beta^n\beta'}{\alpha-\beta}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(\alpha^{m+n+1}\alpha'^2 - \alpha^{m+1}\beta^n\alpha'\beta' - \beta^{m+1}\alpha^n\beta'\alpha' + \beta^{m+n+1}\beta'^2\right)\end{aligned}$$

İkinci kısım;

$$\begin{aligned}E_2 &= \left(\frac{\alpha^m\alpha' - \beta^m\beta'}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}\alpha' - \beta^{n+1}\beta'}{\alpha-\beta}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(\alpha^{m+n+1}\alpha'^2 - \alpha^m\beta^{n+1}\alpha'\beta' - \beta^m\alpha^{n+1}\beta'\alpha' + \beta^{m+n+1}\beta'^2\right)\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan;

$$\begin{aligned}&\widetilde{QP}_{m+1}\widetilde{QP}_n - \widetilde{QP}_m\widetilde{QP}_{n+1} = E_1 - E_2\\ &= \frac{1}{8}(-\alpha^{m+1}\beta^n\alpha'\beta' - \beta^{m+1}\alpha^n\beta'\alpha' + \alpha^m\beta^{n+1}\alpha'\beta' + \beta^m\alpha^{n+1}\beta'\alpha')\\ &= \frac{1}{8}[\alpha^m\beta^n\alpha'\beta'(-\alpha+\beta) + \beta^m\alpha^n\beta'\alpha'(-\beta+\alpha)]\end{aligned}$$

bulunur. (3.21) den $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\widetilde{QP}_{m+1}\widetilde{QP}_{n} - \widetilde{QP}_{m}\widetilde{QP}_{n+1} &= \frac{1}{8}(-\alpha^m\beta^n\alpha'\beta' 2\sqrt{2} + \beta^m\alpha^n\beta'\alpha' 2\sqrt{2}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha^n\beta^n(-\alpha^{m-n}\alpha'\beta' + \beta^{m-n}\beta'\alpha') \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(-1)^n[-\alpha^{m-n}(2+4\varepsilon)(QPL_0 - \sqrt{2}\lambda) \\
&+ \beta^{m-n}(2+4\varepsilon)(QPL_0 + \sqrt{2}\lambda)] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(-1)^n(2+4\varepsilon)[-\alpha^{m-n}QPL_0 + \alpha^{m-n}\sqrt{2}\lambda \\
&+ \beta^{m-n}QPL_0 + \beta^{m-n}\sqrt{2}\lambda)] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^n(1+2\varepsilon)[-QPL_0(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}) \\
&+ \sqrt{2}\lambda(\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})]
\end{aligned}$$

olur. (3.21), (4.7) ve (4.8) gereğince

$$\begin{aligned}
\widetilde{QP}_{m+1}\widetilde{QP}_{n} - \widetilde{QP}_{m}\widetilde{QP}_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^n(1+2\varepsilon)(-2\sqrt{2}QPL_0 p_{m-n} + 2\sqrt{2}\lambda q_{m-n}) \\
&= (1+2\varepsilon)(2(-1)^{n+1}QPL_0 p_{m-n} + 2(-1)^n\lambda q_{m-n}) \\
&= (1+2\varepsilon)(QP_{m+1}QP_n - QP_m QP_{n+1})
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi Dual Pell-Lucas kuaterniyonları için d'Ocagne özdeşliğini bulalım. (4.23) için (4.4) Binet formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\widetilde{QPL}_{m+1}\widetilde{QPL}_{n} - \widetilde{QPL}_{m}\widetilde{QPL}_{n+1} &= \left(\frac{\alpha^{m+1}\alpha' + \beta^{m+1}\beta'}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n}\alpha' + \beta^{n}\beta'}{\alpha+\beta}\right) \\
&- \left(\frac{\alpha^{m}\alpha' + \beta^{m}\beta'}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}\alpha' + \beta^{n+1}\beta'}{\alpha+\beta}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. İspatı iki kısımda inceleyelim:

Birinci kısım;

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left(\frac{\alpha^{m+1}\alpha' + \beta^{m+1}\beta'}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n}\alpha' + \beta^{n}\beta'}{\alpha+\beta}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\alpha^{m+n+1}\alpha'^2 + \alpha^{m+1}\beta^n\alpha'\beta' + \beta^{m+1}\alpha^n\beta'\alpha' + \beta^{m+n+1}\beta'^2\right)
\end{aligned}$$

İkinci kısım;

$$\begin{aligned} F_2 &= \left(\frac{\alpha^m\alpha' + \beta^m\beta'}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}\alpha' + \beta^{n+1}\beta'}{\alpha+\beta}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\alpha^{m+n+1}\alpha'^2 + \alpha^m\beta^{n+1}\alpha'\beta' + \beta^m\alpha^{n+1}\beta'\alpha' + \beta^{m+n+1}\beta'^2\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan;

$$\begin{aligned} \widetilde{QPL}_{m+1}\widetilde{QPL}_n - \widetilde{QPL}_m\widetilde{QPL}_{n+1} &= F_1 - F_2 \\ &= \frac{1}{4}(\alpha^{m+1}\beta^n\alpha'\beta' - \alpha^m\beta^{n+1}\alpha'\beta' + \beta^{m+1}\alpha^n\beta'\alpha' \\ &- \beta^m\alpha^{n+1}\beta'\alpha') \\ &= \frac{1}{4}[\alpha^m\beta^n\alpha'\beta'(\alpha-\beta) + \alpha^n\beta^m\beta'\alpha'(\beta-\alpha)] \end{aligned}$$

bulunur. (3.21) den $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \widetilde{QPL}_{m+1}\widetilde{QPL}_n - \widetilde{QPL}_m\widetilde{QPL}_{n+1} &= \frac{1}{4}(\alpha^m\beta^n\alpha'\beta'2\sqrt{2} - \alpha^n\beta^m\beta'\alpha'2\sqrt{2}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha^n\beta^n(\alpha^{m-n}\alpha'\beta' - \beta^{m-n}\beta'\alpha') \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^n[\alpha^{m-n}(2+4\varepsilon)(QPL_0 - \sqrt{2}\lambda) \\ &- \beta^{m-n}(2+4\varepsilon)(QPL_0 + \sqrt{2}\lambda)] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^n(2+4\varepsilon)[(\alpha^{m-n}QPL_0 - \alpha^{m-n}\sqrt{2}\lambda \\ &- \beta^{m-n}QPL_0 - \beta^{m-n}\sqrt{2}\lambda)] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^n(2+4\varepsilon)[QPL_0(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}) \\ &- \sqrt{2}\lambda(\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})] \end{aligned}$$

olur. (3.21), (4.7) ve (4.8) gereğince

$$\begin{aligned} \widetilde{QPL}_{m+1}\widetilde{QPL}_n - \widetilde{QPL}_m\widetilde{QPL}_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^n(2+4\varepsilon)(2\sqrt{2}QPL_0p_{m-n} - 2\sqrt{2}\lambda q_{m-n}) \\ &= (1+2\varepsilon)(4(-1)^nQPL_0p_{m-n} + 4(-1)^{n+1}\lambda q_{m-n}) \\ &= (1+2\varepsilon)(QPL_{m+1}QPL_n - QPL_mQPL_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. □

KAYNAKLAR

Clifford W.K., (1871). Preliminary Sketch of Bi-Quaternions. *Proc. Lond. Math. Soc.* 4(1), 381-395.

Kula, L., Yaylı, Y., (2006). A Commutative Multiplication Of Dual Number Triplets. *Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi,* (10), 53-60.

Hacısalihoğlu, H.,H., (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Ankara: Gazi Üniversitesi Y.

Ünal, Z., Tokeşer, Ü. and Bilgici, G., (2017). Some Properties of Dual Fibonacci and Dual Lucas Octonions, *Adv. App. Clifford Algebr.* 27(2), 1907-1916.

Horadam, A. F., (1971). Pell identites. *Fibonacci Quart. 9,* 245-252.

Patel, N., Shrivastava, P., (2013). Pell, Pell-Lucas Identities. *Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical, Vol:*5, *Number:*4, 229-236.

Koshy, T., (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. *Wiley, Canada.*

Koshy, T., (2014). Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications. *Springer, NewYork.*

Alptekin, EG., (2005). Pell, Pell Lucas ve Modified Pell sayıları ile tanımlı Circulant ve Semicirculant Matrisler. Doktora tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Konya.

Halıcı, S., Daşdemir, A., (2010). On Some Relationships Among Pell, Pell-Lucas and Modified Pell Sequences. *SAÜ. Fen Bilimleri Dergisi*, 14(2), 141-145.

Szynal-Liana A, Wloch I., (2016). The Pell Quaternions and the Pell Octonions, *Adv. App. Clifford Algebr.* 26:435-440.

Catarino,P., (2016). The Modified Pell and the Modified k-Pell Quaternions and Octonions. *Adv. App. Clifford Algebr. Vol:*26, 577-590.

Polatlı, E., Kesim S., (2015). A generalization of Fibonacci and Lucas Quaternions. *Adv. App. Clifford Algebr.*, 26(2), 719-730.

Özdemir, M., (2009). The roots of split quaternion. *Applied Mathematics Letter,* Vol.22, pages 258-263.

Tokeşer, Ü., Ünal, Z. and Bilgici, G., (2017). Spilit Pell and Pell-Lucas Quaternions. *Adv. App. Clifford Algebr.* 27(2), 1881-1893.

Cerin, Z., Gianella, G. M., (2007). On sums of Pell numbers. *Acc. Sc. Torino-Atti Sc. Fis.* 141, 23-31.

Filipponi, P., Horadam, A. F., (1995). Real Pell and Pell-Lucas numbers with real subscripts. *Fibonacci Quart.* 33, 5.

Gürlebeck, K., Sprössig,W., (1997). *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers.* Wiley, New York.

Falcon, S., (2011). On the k-Lucas Numbers, *Int. J. Contemp. Math. Sci. vol:*21, 1039-1050.

Cerin, Z., Ginella, G.M., (2006). On sums squares of Pell-Lucas numbers. *Integers Electron. J. Comb. Number Theory,*6:1-16.

Catarino, P., Vasco, P., (2017). On Dual k-Pell Quaternions and Octonions. *Mediterr. J. Math., Vol:*14, 75-87.

Çimen, C. B., İpek, A., (2015). On Pell quaternions and Pell-Lucas quaternions, *Adv. App. Clifford Algebr.* 26, 39-51.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Banu YILMAZ
Doğum Yeri ve Yılı : Azdavay/Kastamonu 1986
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ylmzzbanu@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Kuzeykent Süper Lisesi-2005
Lisans : Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik -2011

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Kastamonu Matfen Dershanesi (2013-2014)
İş Yeri : T.C Halk Bankası A.Ş. (2014-Halen)