T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLIT DUAL FIBONACCI VE SPLIT DUAL LUCAS OKTONYONLAR

Yakup DÜNDAR

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER**
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Tuğba MERT**
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KASTAMONU –2018

TEZ ONAYI

Yakup DÜNDAR tarafından hazırlanan "**Split Dual Fibonacci ve Split Dual Lucas Oktonyonlar**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Tuğba MERT Cumhuriyet Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	....

05/06/2018

Enstitü Müdür V.	Doç. Dr. Mehmet Altan KURNAZ	....

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

Yakup DÜNDAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SPLIT DUAL FIBONACCI VE SPLIT DUAL LUCAS OKTONYONLAR

Yakup DÜNDAR
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER

Bu tezde Split Dual Fibonacci ve Split Dual Lucas Oktonyonlar tanımlanıp, bunların; Binet formülleri, Catalan, Cassini, d'Ocagne özdeşlikleri ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Oktonyonlar, Dual Fibonacci ve Dual Lucas sayıları, Split Dual Fibonacci ve Split Dual Lucas Oktonyonlar

2018, 45 sayfa
Bilim Kodu: 204

ABSTRACT

MSc. Thesis

SPLIT DUAL FIBONACCI AND SPLIT DUAL LUCAS OCTONIONS

Yakup DÜNDAR
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathemathics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ümit TOKEŞER

In this thesis, Split Dual Fibonacci and Lucas Octonions are defined, Binet formulas, Catalan's, Cassini's and d'Ocagne's identities and some results are obtained.

Keywords: Octonions, Dual Fibonacci and Dual Lucas numbers, Split Dual Fibonacci and Split Dual Lucas Octonions

2018, 45 pages
Science Code: 204

TEŞEKKÜR

Değerli fikir, yardım ve yol göstericiliği ile tezin sonuca ulaşmasında büyük katkıları olan Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü)'e teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan Eşim Berrin DÜNDAR'a destek ve teşviklerinden dolayı sonsuz teşekkürler.

Yakup DÜNDAR
Kastamonu, Haziran, 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

H	Reel kuaterniyonlar kümesi
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
D	Dual sayı sistemi
ε	Dual birim
$\tilde{F}_n$	n. dual Fibonacci sayısı
$\tilde{L}_n$	n. dual Lucas sayısı
O	Reel sayılar üzerindeki oktonyonlar cebiri
$\overline{p}$	p oktonyonunun eşleniği
N_p	p oktonyonunun normu
p^{-1}	p oktonyonunun tersi
$\tilde{\tilde{O}}$	Split Dual Oktonyon cebiri
P_n	n. Lucas oktonyonu
Q_n	n. Fibonacci oktonyonu
$\tilde{P}_n$	n. Split Lucas oktonyonu
$\tilde{Q}_n$	n. Split Fibonacci oktonyonu
$\tilde{\tilde{Q}}_n$	n. Split Dual Fibonacci oktonyonu
$\tilde{\tilde{P}}_n$	n. Split Dual Lucas oktonyonu
$\breve{P}_n$	n. Dual Lucas oktonyonu
$\breve{Q}_n$	n. Dual Fibonacci oktonyonu

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar ilk olarak 1843 te Sir William R. Hamilton tarafından tanımlanmış ve bu tarihten sonra uygulamalı matematik, fizik ve bilgisayar bilimleri gibi çeşitli alanlarda yaygın olarak kullanılmaya başlamıştır. İlerleyen zamanlarda, split kuaterniyon, para kuaterniyon gibi alt katagorilere ayrılmıştır. Fibonacci kuaterniyonları üzerine uzun yıllar çalışmalar yapıldı. A.F. Horadam tarafından ilk olarak yapılan çalışmalar bazı yazarların da ilgisini çekmiştir. 1845 yılında Cayley oktonyonları tanımlamıştır. Fibonacci kuaterniyonlarından ilham alarak, Keçilioğlu ve Akkuş ([9] ve [16]) sırasıyla Fibonacci ve Lucas oktonyonlar ile Split Fibonacci ve Split Lucas Oktonyonları tanımlayıp onlarla ilgili bazı sonuçlar çıkarmıştır. Halıcı da [4] dual Fibonacci oktonyonları üzerine çalışmış ve bunun üreteç fonksiyonu ile Binet formülünü elde etmiştir. Bundan sonra Bilgici, Ünal, Tokeşer ve Mert [15] Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Oktonyonları elde edip, bunlarla ilgili önemli sonuçlar bulmuşlardır.

Bu tezde Split Dual Fibonacci ve Split Dual Lucas Oktonyonları tanımlayıp, bunlar arasında ortaya çıkan Binet formülleri, Catalan, Cassini , d’Ocagne özdeşliklerini ve bazı eşitlikleri elde edeceğiz.

2. TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLER

2.1. Reel Kuaterniyonlar

2.1.1. Tanım

Reel kuaterniyonlar kümesi;

$$H = \{a = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 : a_i \in R, i = 0,1,2,3\}$$

R üzerinde $\{e_0 = 1, e_1, e_2, e_3\}$ bazıyla 4 boyutlu bir vektör uzayıdır. Burada baz elemanları için çarpım tablosu aşağıdaki gibi verilir:

Tablo 2.1. *Kuaterniyonlar için çarpım tablosu*

.	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Bir $a \in H$ reel kuaterniyonunu $a = \sum_{s=0}^{3} a_s e_s \in H$ olmak üzere;

$$a = S_a + \vec{V}_a = a_0 e_0 + \sum_{s=1}^{3} a_s e_s$$

şeklinde de gösterebiliriz [5].

2.1.2. Tanım

$a,b \in H$ olmak üzere a ve b nin çarpımı skaler ve vektörel kısımlar yardımıyla

$$
\begin{aligned}
ab &= (S_a + \vec{V}_a)(S_b + \vec{V}_b) \\
&= S_a S_b + S_a \vec{V}_b + S_b \vec{V}_a - \vec{V}_a . \vec{V}_b + \vec{V}_a \times \vec{V}_b
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Burada bahsi geçen $\vec{V}_a . \vec{V}_b$ ve $\vec{V}_a \times \vec{V}_b$ sırasıyla R^3 deki iç çarpım ve vektörel çarpımdır [3].

2.1.3. Tanım

Bir $a = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ kuaterniyonunun eşleniği ve normu aşağıdaki eşitliklerle ifade edilir:

$$\bar{a} = a_0 e_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 = S_a - \vec{V}_a, \ \|a\| = a\bar{a} = a_0^{\ 2} + a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}$$

[3].

2.2. Fibonacci ve Lucas sayıları

2.2.1. Tanım

$n > 0$ için $F_0 = 0, \ F_1 = 1$ başlangıç koşulları ile verilen Fibonacci sayıları

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

şeklindedir.

Aynı rekürans bağıntısı ile verilen fakat başlangıç koşulları $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olan Lucas sayıları

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

şeklinde tanımlanır [10].

Bu rekürans bağıntısı yerine kullanılan Binet formülü olarak anılan bağıntı aşağıdaki gibi tanımlanır.

2.2.2. Tanım

Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$
$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $x^2 - x - 1 = 0$ kuadratik denkleminin çözümleridir [2].

2.2.3. Tanım

1873 yılında Clifford reel sayıları dual sayılara genişletmiştir.

R reel sayılar kümesi olmak üzere;

$$D = R \times R$$

kümesi üzerinde eşitlik, toplama, çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanmış ise D kümesine dual sayılar sistemi, $\varepsilon = (0,1)$ dual birim $a, a^* \in R$ ve $\varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0$ olmak üzere $d = (a, a^*) = a + \varepsilon a^*$ elemanına da dual sayı denir.

$A = (a, a^*) = a + \varepsilon a^* \in D$ ve $B = (b, b^*) = b + \varepsilon b^* \in D$ olmak üzere:

Eşitlik:

$a = b,\ a^* = b^*$ ise A ile B eşittir yani $A = B$ şeklindedir.

Toplama: $D \times D \to D$

$$A + B = (a, a^*) + (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*) = a + b + \varepsilon(a^* + b^*)$$

şeklindedir.

Çarpma: $D \times D \to D$

$$A.B = (a, a^*).(b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b) = ab + \varepsilon(ab^* + a^*b)$$

şeklindedir [17].

2.2.4. Tanım

ε dual birim olmak üzere sırasıyla dual Fibonacci ve dual Lucas sayıları;

$$\widetilde{F}_n = F_n + \varepsilon F_{n+1}$$

ve

$$\widetilde{L}_n = L_n + \varepsilon L_{n+1}$$

şeklinde tanımlanır [2].

2.3. Oktonyonlar

2.3.1. Tanım

Reel sayılar üzerindeki oktonyonlar cebirini O şeklinde gösterelim. $q', q'' \in H$ olmak üzere Cayley-Dickson metodu kullanılarak p oktonyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$p = q' + q'' e.$$

Reel sayılar üzerindeki oktonyonlar cebiri için doğal baz

$$e_0 = 1, e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k, e_4 = e, e_5 = ie, e_6 = je, e_7 = ke$$

şeklinde ve herhangi bir p oktonyonu

$$p = \sum_{s=0}^{7} a_s e_s, a_s \in R$$

şeklindedir [9].

$\mathrm{Re}(p) = a_0$ ve $\mathrm{Im}(p) = \sum_{s=1}^{7} a_s e_s$ olmak üzere herhangi bir $p \in O$ için

$$p = a_0 + \sum_{s=1}^{7} a_s e_s = \mathrm{Re}(p) + \mathrm{Im}(p)$$

şeklinde ifade edilir [9].

Reel sayılar üzerindeki genelleştirilmiş oktonyonlar cebirini $O(a,b,c)$ şeklinde gösterelim. Reel sayılar üzerindeki genelleştirilmiş oktonyonlar cebiri için doğal baz

$$\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

olmak üzere $O(a,b,c)$ için çarpım tablosu aşağıdaki gibi verilir.

Tablo 2.2. *Genelleştirilmiş oktonyonlar için çarpım tablosu*

.	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-a$	e_3	$-ae_2$	e_5	$-ae_4$	$-e_7$	ae_6
e_2	e_2	$-e_3$	$-b$	be_1	e_6	e_7	$-be_4$	$-be_5$
e_3	e_3	ae_2	$-be_1$	$-ab$	e_7	$-ae_6$	be_5	$-abe_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-c$	ce_1	ce_2	ce_3
e_5	e_5	ae_4	$-e_7$	ae_6	$-ce_1$	$-ac$	$-ce_3$	ace_2
e_6	e_6	e_7	be_4	$-be_5$	$-ce_2$	ce_3	$-bc$	$-bce_1$
e_7	e_7	$-ae_6$	be_5	abe_4	$-ce_3$	$-ace_2$	bce_1	$-abc$

Bu çarpım tablosunda a=1, b=1 ve c=1 alındığında $O(1,1,1)$ oktonyon çarpım tablosu aşağıdaki gibi oluşur.

Tablo 2.3. *Oktonyonlar için çarpım tablosu*

.	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

2.3.2. Tanım

p oktonyonunun normu ve eşleniği aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\overline{p} = \mathrm{Re}(p) - \mathrm{Im}(p)$$
$$N_p = p\overline{p} = \overline{p}p = \sum_{s=0}^{7} a_s^2 .$$

Sıfırdan farklı herhangi bir oktonyonun inversi (tersi)

$$p^{-1} = \frac{\overline{p}}{N_p}$$

şeklindedir [9].

2.3.3. Tanım

$\overline{q_1^{\prime}}, \overline{q_2^{\prime}}$ sırasıyla $q^{\prime}$ ve $q^{\prime\prime}$ kuaterniyonlarının eşlenikleri $p_1 = q_1^{\prime} + q_1^{\prime\prime} e$ ve $p_2 = q_2^{\prime} + q_2^{\prime\prime} e$ olsun. Oktonyonlar cebirine göre iki oktonyonun toplam ve çarpımı

$$p_1 + p_2 = (q_1^{\prime} + q_1^{\prime\prime} e) + (q_2^{\prime} + q_2^{\prime\prime} e) = q_1^{\prime} + q_2^{\prime} + (q_1^{\prime\prime} + q_2^{\prime\prime}) e$$
$$p_1 p_2 = (q_1^{\prime} + q_1^{\prime\prime} e)(q_2^{\prime} + q_2^{\prime\prime} e) = (q_1^{\prime} q_2^{\prime} - \overline{q_2^{\prime\prime}} q_1^{\prime\prime}) + (q_2^{\prime\prime} q_1^{\prime} + q_1^{\prime\prime} \overline{q_2^{\prime}}) e$$

şeklindedir [9].

Reel sayılar üzerinde 8 boyutlu oktonyonlar tanımlanan cebire göre değişme ve birleşme özelliklerine sahip değillerdir.

2.3.4. Tanım

F_n ve L_n n. Fibonacci ve Lucas sayıları ve $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ oktonyonların standart bazı olmak üzere $n \geq 0$ için n. Fibonacci ve Lucas oktonyonları;

$$Q_n = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s} e_s, P_n = \sum_{s=0}^{7} L_{n+s} e_s$$

şeklindedir [9].

Biz de n. split Fibonacci ve n. split Lucas oktonyonları sırasıyla;

$$\widetilde{Q}_n = \sum_{s=0}^{7} \widetilde{F}_{n+s} e_s, \widetilde{P}_n = \sum_{s=0}^{7} \widetilde{L}_{n+s} e_s$$

şeklinde gösterelim.

2.3.1. Teorem (Binet Formülü)

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ayrıca $\alpha^* = \sum_{s=0}^{7} \alpha^s e_s$ ve $\beta^* = \sum_{s=0}^{7} \beta^s e_s$ olmak üzere $n \geq 0$ için n. split Fibonacci oktonyon ve n. split Lucas oktonyonun Binet formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{Q}_n = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.1}$$

$$\tilde{P}_n = \alpha^* \alpha^n + \beta^* \beta^n \tag{2.2}$$

[15].

İspat

Eş. 2.1 için

$$\alpha \tilde{Q}_n + \tilde{Q}_{n-1} = \sum_{s=0}^{7} (\alpha F_{n+s} + F_{n+s-1}) e_s$$

eşitliğine ve

$$\alpha F_n + F_{n-1} = \alpha^n \tag{2.3}$$

$$\beta F_n + F_{n-1} = \beta^n \tag{2.4}$$

eşitliklerine ihtiyacımız olacak. Eş. 2.3 yardımıyla

$$\alpha \tilde{Q}_n + \tilde{Q}_{n-1} = \alpha^n \alpha^* \tag{2.5}$$

eşitliğine ve Eş. 2.4 yardımıyla da

$$\beta\tilde{Q}_n + \tilde{Q}_{n-1} = \beta^n \beta^* \qquad (2.6)$$

eşitliğine ulaşabiliriz [10]. Eş. 2.5 ve Eş. 2.6 taraf tarafa çıkarılırsa;

$$\tilde{Q}_n = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta}$$

elde edilir. Eş. 2.5 ve Eş. 2.6 taraf tarafa toplanırsa;

$$\tilde{Q}_n + 2\tilde{Q}_{n-1} = \alpha^* \alpha^n + \beta^* \beta^n$$

eşitliğine ulaşılır. $L_n = F_n + 2F_{n-1}$ olduğu dikkate alınırsa;

$$\tilde{P}_n = \alpha^* \alpha^n + \beta^* \beta^n$$

elde edilir. ■

2.3.5. Tanım

Keçilioğlu ve Akkuş Fibonacci ve Lucas octonyonları ve bunların Binet formüllerini vermiştir. Serpil Halıcı da dual Fibonacci octonyonları üzerine çalışmış ve bunun üreteç fonksiyonu ile Binet formülünü elde etmiştir.

Keçilioğlu ve Akkuş'un çalışmasına göre bizde bu çalışmamızda dual Fibonacci ve dual Lucas octonyonları sırasıyla;

$$\breve{\tilde{Q}}_n = \sum_{s=0}^{7} \tilde{F}_{n+s} e_s, \; \breve{\tilde{P}}_n = \sum_{s=0}^{7} \tilde{L}_{n+s} e_s$$

şeklinde gösterelim.

Bütün dual Fibonacci ve dual Lucas octonyonların kümesi;

$$\breve{\tilde{O}}_F = \left\{ \breve{\tilde{Q}}_n = Q_n + \varepsilon Q_{n+1} : Q_n, Q_{n+1} \in O_F \,,\ \varepsilon^2 = 0 \right\}$$

$$\breve{\tilde{O}}_L = \left\{ \breve{\tilde{P}}_n = P_n + \varepsilon P_{n+1} : P_n,\ P_{n+1} \in O_L \,, \varepsilon^2 = 0 \right\}$$

olsun.

Dual Fibonacci octonyon ve dual Lucas octonyonların eşleniği, normu ve negatif indisli ifadeleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\overline{\breve{\tilde{Q}}_n} = \tilde{F}_n - \sum_{s=1}^{7} \tilde{F}_{n+s} e_s$$

$$\overline{\breve{\tilde{P}}_n} = \tilde{L}_n - \sum_{s=1}^{7} \tilde{L}_{n+s} e_s$$

$$N(\breve{\tilde{Q}}_n) = \breve{\tilde{Q}}_n \overline{\breve{\tilde{Q}}_n} = \overline{\breve{\tilde{Q}}_n} \breve{\tilde{Q}}_n$$

$$N(\breve{\tilde{P}}_n) = \breve{\tilde{P}}_n \overline{\breve{\tilde{P}}_n} = \overline{\breve{\tilde{P}}_n} \breve{\tilde{P}}$$

$$\breve{\tilde{Q}}_{-n} = \sum_{s=0}^{7} (-1)^{n-s+1} F_{n-s} e_s + \varepsilon \sum_{s=1}^{8} (-1)^{n-s+1} F_{n-s} e_{s-1}$$

$$\breve{\tilde{P}}_{-n} = \sum_{s=0}^{7} (-1)^{n-s} L_{n-s} e_s + \varepsilon \sum_{s=1}^{8} (-1)^{n-s} L_{n-s} e_{s-1} \,.$$

2.3.2. Teorem (Binet Formülü)

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ayrıca $\alpha^* = (1+\varepsilon\alpha)\sum_{s=0}^{7} \alpha^s e_s$ ve $\beta^* = (1+\varepsilon\alpha)\sum_{s=0}^{7} \beta^s e_s$

olmak üzere $n \geq 0$ için n. dual Fibonacci oktonyon ve n. dual Lucas oktonyonun Binet formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\breve{\overset{\frown}{Q}}_n = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.1}$$

$$\breve{\overset{\frown}{P}}_n = \alpha^* \alpha^n + \beta^* \beta^n \tag{2.2}$$

[14].

3. SPLIT DUAL FIBONACCI VE SPLIT DUAL LUCAS OKTONYONLAR

3.1. Split Fibonacci ve Split Lucas Oktonyonlar

Split oktonyonlar, Cayley-Dickson tarafından iki kuaterniyonun çarpılması ile oluşturulmuştur. Akkuş ve Keçilioğlu [6], yeni bir sanal birim olan l ile (a,b) şeklinde gösterilen bir çift kuaterniyonun $a+lb$ formunu alıp, çarpım kuralını;

$$(a+lb)(c+ld)=(ac+\lambda d\overline{b})+l(\overline{a}d+cb)$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $\lambda^2=1$ dir. $\lambda=-1$ olduğunda oktonyonlar, $\lambda=1$ olduğunda split oktonyonlar elde edilir. Split oktonyonlar reel sayılar üzerinde 8 boyutlu bir cebir oluşturur. Standart oktonyondan farkı, sıfırdan farklı elemanlar içermesidir. Buna göre reel sayılar üzerinde Split dual oktonyon cebirini $\tilde{\tilde{O}}$ ile gösterelim. Genelleştirilmiş oktonyonlar çarpım tablosunda a=1, b=1 ve c=-1 alındığında $O(1,1,-1)$ split oktonyon çarpım tablosu oluşur. Bu cebirin bazları reel sayılar uzayında formu aşağıdaki gibidir:

$$e_0=1,\ e_1=i,\ e_2=j,\ e_3=k,\ e_4=l,\ e_5=li,\ e_6=lj,\ e_7=lk\ .$$

Tablo 3.1. *Split Oktonyon Çarpım Tablosu*

.	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	$-e_5$	e_4	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4
e_4	e_4	e_5	e_6	e_7	1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6	$-e_1$	1	e_3	$-e_2$
e_6	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$	$-e_2$	$-e_3$	1	e_1
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$	$-e_3$	e_2	$-e_1$	1

3.2. Split Dual Fibonacci ve Split Dual Lucas Oktonyonlar

Split dual Fibonacci ve split dual Lucas oktonyonları

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{Q}}_n &= \tilde{Q}_n + \varepsilon \tilde{Q}_{n+1} \\ \tilde{\tilde{P}}_n &= \tilde{P}_n + \varepsilon \tilde{P}_{n+1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{F}}_n &= \tilde{F}_n + \varepsilon \tilde{F}_{n+1} \\ \tilde{\tilde{L}}_n &= \tilde{L}_n + \varepsilon \tilde{L}_{n+1} \end{aligned} \tag{3.2}$$

olmak üzere

$$\tilde{\tilde{Q}}_n = \sum_{s=0}^{7} \tilde{\tilde{F}}_{n+s} e_s,\ \tilde{\tilde{P}}_n = \sum_{s=0}^{7} \tilde{\tilde{L}}_{n+s} e_s$$

şeklinde gösterelim. Buna göre sırasıyla split dual Fibonacci ve split dual Lucas oktonyonların eşleniği;

$$\overline{\tilde{\tilde{Q}}_n} = \tilde{\tilde{F}}_n - \sum_{s=1}^{7} \tilde{\tilde{F}}_{n+s} e_s,\ \overline{\tilde{\tilde{P}}_n} = \tilde{\tilde{L}}_n - \sum_{s=0}^{7} \tilde{\tilde{L}}_{n+s} e_s\ ,$$

normu;

$$N\left(\tilde{\tilde{Q}}_n\right) = \tilde{\tilde{Q}}_n \overline{\tilde{\tilde{Q}}_n} = \overline{\tilde{\tilde{Q}}_n} \tilde{\tilde{Q}}_n,\ N\left(\tilde{\tilde{P}}_n\right) = \tilde{\tilde{P}}_n \overline{\tilde{\tilde{P}}_n} = \overline{\tilde{\tilde{P}}_n} \tilde{\tilde{P}}_n,$$

ve negatif indislileri;

$$\tilde{\tilde{Q}}_{-n}=\sum_{s=0}^{7}(-1)^{n-s+1}F_{n-s}e_s+\varepsilon\sum_{s=1}^{8}(-1)^{n-s+1}F_{n-s}e_{s-1}$$
$$\tilde{\tilde{P}}_{-n}=\sum_{s=0}^{7}(-1)^{n-s}L_{n-s}e_s+\varepsilon\sum_{s=1}^{8}(-1)^{n-s}L_{n-s}e_{s-1}$$

şeklindedir.

Şimdi split dual Fibonacci ve split dual Lucas oktonyonlar için Binet formülünü aşağıdaki teorem ile verelim.

3.2.1. Teorem (Binet Formülü)

$\alpha^*=(1+\varepsilon\alpha)\sum_{s=0}^{7}\alpha^s e_s$ ve $\beta^*=(1+\varepsilon\beta)\sum_{s=0}^{7}\beta^s e_s$ olmak üzere $n\geq 0$ için n. split dual Fibonacci oktonyon ve n. split dual Lucas oktonyonun Binet formülleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{\tilde{Q}}_n=\frac{\alpha^*\alpha^n-\beta^*\beta^n}{\alpha-\beta} \tag{3.3}$$
$$\tilde{\tilde{P}}_n=\alpha^*\alpha^n+\beta^*\beta^n. \tag{3.4}$$

3.2.1. Lemma

$a,b,c\in R$ için;

$$\omega_1=-1-\frac{843}{2}abc-9ab-\frac{123}{2}ac-161bc-\frac{3}{2}a-\frac{7}{2}b-\frac{47}{2}c,$$
$$\omega_2=\frac{-337}{2}abc-4ab-72bc-\frac{55}{2}ac-\frac{a}{2}-\frac{3}{2}b-\frac{21}{2}c,$$
$$\lambda=(bc-b-c)e_1+(ac-a-c)e_2+(-3c+1)e_3+(-3ab-3a+3b)e_4$$
$$+(7b+2)e_5+(7a-1)e_6-6e_7$$
$$\mu=abc+ab+ac-bc+a-b-c-1$$

olmak üzere;

$$(\alpha^*)^2 = \omega_1 + P_0 + \sqrt{5}(\omega_2 + Q_0),$$
$$(\beta^*)^2 = \omega_1 + P_0 - \sqrt{5}(\omega_2 + Q_0),$$
$$\alpha^*\beta^* = \mu + P_0 + \sqrt{5}\lambda$$
$$\beta^*\alpha^* = \mu + P_0 - \sqrt{5}\lambda$$

dır [15].

İspat

$O(a,b,c)$ için çarpım tablosunu kullanarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
(\alpha^*)^2 &= (\sum_{s=0}^{7}\alpha^s e_s)(\sum_{s=0}^{7}\alpha^s e_s) \\
&= -1-\frac{843}{2}abc-9ab-\frac{123}{2}ac-161bc-\frac{3}{2}a-\frac{7}{2}b-\frac{47}{2}c \\
&\quad + e_1+3e_2+4e_3+7e_4+11e_5+18e_6+29e_7 \\
&\quad + \sqrt{5}(\frac{-337}{2}abc-4ab-72bc-\frac{55}{2}ac-\frac{a}{2}-\frac{3}{2}b-\frac{21}{2}c) \\
&\quad + e_1+e_2+2e_3+3e_4+5e_5+8e_6+13e_7 \\
&= \omega_1 + P_0 + \sqrt{5}(\omega_2 + Q_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\beta^*)^2 &= (\sum_{s=0}^{7}\beta^s e_s)(\sum_{s=0}^{7}\alpha\beta^s e_s) \\
&= -1-\frac{843}{2}abc-9ab-\frac{123}{2}ac-161bc-\frac{3}{2}a-\frac{7}{2}b-\frac{47}{2}c \\
&\quad + e_1+3e_2+4e_3+7e_4+11e_5+18e_6+29e_7 \\
&\quad - \sqrt{5}(\frac{-337}{2}abc-4ab-72bc-\frac{55}{2}ac-\frac{a}{2}-\frac{3}{2}b-\frac{21}{2}c) \\
&\quad + e_1+e_2+2e_3+3e_4+5e_5+8e_6+13e_7 \\
&= \omega_1 + P_0 - \sqrt{5}(\omega_2 + Q_0)
\end{aligned}$$

Burada a=1, b=1 ve c=-1 alarak $\omega_1, \omega_2, \lambda, \mu$ yü bulduktan sonra Split oktonyonlar için $(\alpha^*)^2$ yi ve $(\beta^*)^2$ yi hesaplayalım.

$$\omega_1 = -1 + \frac{843}{2} - 9 + \frac{123}{2} + 161 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} + \frac{47}{2} = \frac{1305}{2}$$
$$\omega_2 = \frac{337}{2} - 4 + 72 + \frac{55}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{21}{2} = \frac{545}{2}$$
$$\lambda = -e_1 - e_2 + 4e_3 - 3e_4 + 9e_5 + 6e_6 - 6e_7$$
$$\mu = -1+1-1+1+1-1+1-1 = 0$$

şeklindedir. Bu değerlere göre Split oktonyonlar için $(\alpha^*)^2$ ve $(\beta^*)^2$ aşağıdaki gibidir.

$$(\alpha^*)^2 = \frac{1305}{2} + P_0 + \sqrt{5}(\frac{545}{2} + Q_0)$$

$$(\beta^*)^2 = \frac{1305}{2} + P_0 - \sqrt{5}(\frac{545}{2} + Q_0)$$

Benzer şekilde $\alpha^* \beta^* = \mu + P_0 + \sqrt{5}\lambda$ ve $\beta^* \alpha^* = \mu + P_0 - \sqrt{5}\lambda$ eşitliklerini de gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
\alpha^* \beta^* &= (\sum_{s=0}^{7} \alpha^s e_s)(\sum_{s=0}^{7} \beta^s e_s) \\
&= abc + ab + ac - bc + a - b - c + 1 + e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 7e_4 + 11e_5 + 18e_6 + 29e_7 \\
&\quad + \sqrt{5}[(bc - b - c)e_1 + (ac - a - c)e_2 + (-3c + 1)e_3 + (-3ab - 3a + 3b)e_4 \\
&\quad + (7b + 2)e_5 + (7a - 1)e_6 - 6e_7] \\
&= \mu + P_0 + \sqrt{5}\lambda
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta^{*}\alpha^{*} &= (\sum_{s=0}^{7}\beta^{s}e_{s})(\sum_{s=0}^{7}\alpha^{s}e_{s}) \\
&= abc+ab+ac-bc+a-b-c+1+e_1+3e_2+4e_3+7e_4+11e_5+18e_6+29e_7 \\
&\quad -\sqrt{5}[(bc-b-c)e_1+(ac-a-c)e_2+(-3c+1)e_3+(-3ab-3a+3b)e_4 \\
&\quad +(7b+2)e_5+(7a-1)e_6-6e_7] \\
&= \mu+P_0-\sqrt{5}\lambda
\end{aligned}
$$

■

Burada a=1, b=1 ve c=-1 alındığında $\mu=0$ olduğundan $\alpha^{*}\beta^{*}$ ve $\beta^{*}\alpha^{*}$ aşağıdaki gibi olur.

$$
\begin{aligned}
\alpha^{*}\beta^{*} &= \mu+P_0+\sqrt{5}\lambda \\
&= P_0+\sqrt{5}\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta^{*}\alpha^{*} &= \mu+P_0-\sqrt{5}\lambda \\
&= P_0-\sqrt{5}\lambda
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki lemmaya göre aşağıdaki teoremi Split dual Fibonacci ve Split dual Lucas oktonyonlar için verebiliriz.

3.2.2. Lemma

$$\omega_1=\frac{1305}{2}$$
$$\omega_2=\frac{545}{2}$$
$$\lambda=-e_1-e_2+4e_3-3e_4+9e_5+6e_6-6e_7$$

olmak üzere;

$$(\alpha^*)^2 = \frac{1305}{2} + P_0 + \sqrt{5}(\frac{545}{2} + Q_0),$$
$$(\beta^*)^2 = \frac{1305}{2} + P_0 - \sqrt{5}(\frac{545}{2} + Q_0),$$
$$\alpha^*\beta^* = P_0 + \sqrt{5}\lambda$$
$$\beta^*\alpha^* = P_0 - \sqrt{5}\lambda$$

dır.

İspat

Lemma 3.2.1 de a=1, b=1 ve c=-1 alındığında sonuçlar açıkça görülür. ∎

3.2.2. Teorem (Catalan Özdeşliği)

Her n *ve* r tamsayıları için ve $\lambda = -e_1 - e_2 + 4e_3 - 3e_4 + 9e_5 + 6e_6 - 6e_7$ olmak üzere split dual Fibonacci ve split dual Lucas oktonyonların Catalan özdeşliği sırası ile aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{\tilde{Q}}_n^2 - \tilde{\tilde{Q}}_{n+r}\tilde{\tilde{Q}}_{n-r} = (-1)^{n-r}[P_0F_r^2 + \lambda F_{2r}](1+\varepsilon) \quad (3.5)$$
$$\tilde{\tilde{P}}_n^2 - \tilde{\tilde{P}}_{n+r}\tilde{\tilde{P}}_{n-r} = 5(-1)^{n-r+1}[F_r^2P_0 + \lambda F_{2r}](1+\varepsilon)\,. \quad (3.6)$$

.

İspat

Eş. 3.5 için Eş. 3.3 Binet formülü kullanılırsa;

$$\tilde{Q}_n^2-\tilde{Q}_{n+r}\tilde{Q}_{n-r}=(\frac{\alpha^*\alpha^n-\beta^*\beta^n}{\alpha-\beta})^2-(\frac{\alpha^*\alpha^{n+r}-\beta^*\beta^{n+r}}{\alpha-\beta})(\frac{\alpha^*\alpha^{n-r}-\beta^*\beta^{n-r}}{\alpha-\beta})$$
$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}[(\alpha^*)^2\alpha^{2n}+(\beta^*)^2\beta^{2n}-\alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^n-\beta^*\alpha^*\beta^n\alpha^n$$
$$-(\alpha^*)^2\alpha^{2n}+\alpha^*\beta^*\alpha^{n+r}\beta^{n-r}+\beta^*\alpha^*\beta^{n+r}\alpha^{n-r}-(\beta^*)^2\beta^{2n}]$$
$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(-\alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^n-\beta^*\alpha^*\beta^n\alpha^n$$
$$+\alpha^*\beta^*\alpha^{n+r}\beta^{n-r}+\beta^*\alpha^*\beta^{n+r}\alpha^{n-r})$$
$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}[-\alpha^n\beta^n(\alpha^*\beta^*+\beta^*\alpha^*)$$
$$+\alpha^{n-r}\beta^{n-r}(\alpha^*\beta^*\alpha^{2r}+\beta^*\alpha^*\beta^{2r})]$$

elde edilir. Burada Lemma 3.2.2 deki $\alpha^*\beta^*$ ve $\beta^*\alpha^*$ ifadeleri yerine yazılır $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ ve $\alpha\beta=-1$ olduğu dikkate alınırsa;

$$\tilde{Q}_n^2-\tilde{Q}_{n+r}\tilde{Q}_{n-r}=\frac{1}{5}\{(-1)^{n+1}2P_0+(-1)^{n-r}[(P_0+\sqrt{5}\lambda)\alpha^{2r}+(P_0-\sqrt{5}\lambda)\beta^{2r}]\}$$
$$=\frac{1}{5}\{(-1)^{n+1}2P_0+(-1)^{n-r}[P_0(\alpha^{2r}+\beta^{2r})+\sqrt{5}\lambda(\alpha^{2r}-\beta^{2r})]\}$$
$$=\frac{1}{5}\{(-1)^{n+1}2P_0+(-1)^{n-r}P_0(5F_r^2+2(-1)^r)+5\lambda(\frac{\alpha^{2r}-\beta^{2r}}{\sqrt{5}})\}$$
$$=\frac{1}{5}\{(-1)^{n+1}2P_0+(-1)^{n-r}P_05F_r^2+2P_0(-1)^n+5\lambda F_{2r}\}$$
$$=(-1)^{n-r}(P_0F_r^2+\lambda F_{2r})$$

elde edilir. Eş. 3.1 den;

$$\tilde{\tilde{Q}}_n=\tilde{Q}_n+\varepsilon\tilde{Q}_{n+1}$$
$$\tilde{\tilde{Q}}_{n+r}=\tilde{Q}_{n+r}+\varepsilon\tilde{Q}_{n+r+1}$$
$$\tilde{\tilde{Q}}_{n-r}=\tilde{Q}_{n-r}+\varepsilon\tilde{Q}_{n-r+1}$$

olduğundan ve

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{Q}}_n \tilde{\tilde{Q}}_n - \tilde{\tilde{Q}}_{n+r} \tilde{\tilde{Q}}_{n-r} &= (\tilde{Q}_n + \varepsilon \tilde{Q}_{n+1})(\tilde{Q}_n + \varepsilon \tilde{Q}_{n+1}) - (\tilde{Q}_{n+r} + \varepsilon \tilde{Q}_{n+r+1})(\tilde{Q}_{n-r} + \varepsilon \tilde{Q}_{n-r+1}) \\
&= \tilde{Q}_n^{\;2} + \varepsilon \tilde{Q}_n \tilde{Q}_{n+1} + \varepsilon \tilde{Q}_{n+1} \tilde{Q}_n - \tilde{Q}_{n+r} \tilde{Q}_{n-r} - \varepsilon \tilde{Q}_{n+r} \tilde{Q}_{n-r+1} - \varepsilon \tilde{Q}_{n+r+1} \tilde{Q}_{n-r} \\
&= \tilde{Q}_n^{\;2} - \tilde{Q}_{n+r} \tilde{Q}_{n-r} + \varepsilon (\tilde{Q}_n \tilde{Q}_{n+1} + \tilde{Q}_{n+1} \tilde{Q}_n - \tilde{Q}_{n+r} \tilde{Q}_{n-r+1} - \tilde{Q}_{n+r+1} \tilde{Q}_{n-r}) \\
&= \tilde{Q}_n^{\;2} - \tilde{Q}_{n+r} \tilde{Q}_{n-r} + \varepsilon (\tilde{Q}_n^{\;2} - \tilde{Q}_{n+r} \tilde{Q}_{n-r}) \\
&= (\tilde{Q}_n^{\;2} - \tilde{Q}_{n+r} \tilde{Q}_{n-r})(1+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$
\tilde{\tilde{Q}}_n^2 - \tilde{\tilde{Q}}_{n+r} \tilde{\tilde{Q}}_{n-r} = (-1)^{n-r} \left[F_r^2 P_0 + \lambda F_{2r} \right] (1+\varepsilon)
$$

bulunur. ∎

Benzer hesaplamalarla Eş. 3.6 elde edilir.

Teorem 3.2.2 de $r=1$ için, split dual Fibonacci ve split dual Lucas oktonyonlar için Cassini özdeşliği aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

3.2.1. Sonuç (Cassini Özdeşliği)

Her n tamsayısı için ve $\lambda = -e_1 - e_2 + 4e_3 - 3e_4 + 9e_5 + 6e_6 - 6e_7$ olmak üzere;

$$
\tilde{\tilde{Q}}_n^{\;2} - \tilde{\tilde{Q}}_{n+1} \tilde{\tilde{Q}}_{n-1} = (-1)^n (\lambda + P_0)(1+\varepsilon)
$$

ve

$$
\tilde{\tilde{P}}_n^{\;2} - \tilde{\tilde{P}}_{n+1} \tilde{\tilde{P}}_{n-1} = 5(-1)^{n-1} (\lambda + P_0)(1+\varepsilon)
$$

dir.

3.2.3. Teorem (d’Ocagne Özdeşliği)

Her m *ve* n tamsayıları için ve $\lambda = -e_1 - e_2 + 4e_3 - 3e_4 + 9e_5 + 6e_6 - 6e_7$ olmak üzere split dual Fibonacci ve split dual Lucas oktonyonların d’Ocagne özdeşliği sırası ile aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{\tilde{Q}}_{m+1}\tilde{\tilde{Q}}_n - \tilde{\tilde{Q}}_m\tilde{\tilde{Q}}_{n+1} = (-1)^m \left[F_{n-m}P_0 - \lambda L_{n-m}\right](1+\varepsilon) \tag{3.7}$$

$$\tilde{\tilde{P}}_{m+1}\tilde{\tilde{P}}_n - \tilde{\tilde{P}}_m\tilde{\tilde{P}}_{n+1} = 5(-1)^{m+1} \left[F_{n-m}P_0 - \lambda L_{n-m}\right](1+\varepsilon). \tag{3.8}$$

İspat

Eş. 3.7 için Eş.3.3 Binet formülü kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_{m+1}\tilde{Q}_n-\tilde{Q}_m\tilde{Q}_{n+1} &= \left(\frac{\alpha^*\alpha^{m+1}-\beta^*\beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n}-\beta^*\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)\\
&\quad-\left(\frac{\alpha^*\alpha^{m}-\beta^*\beta^{m}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+1}-\beta^*\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}[((\alpha^*)^2\alpha^{m+1}\alpha^n-\alpha^*\beta^*\alpha^{m+1}\beta^n\\
&\quad-\beta^*\alpha^*\beta^{m+1}\alpha^n+(\beta^*)^2\beta^{m+1}\beta^n)\\
&\quad-((\alpha^*)^2\alpha^m\alpha^{n+1}-\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^{n+1}\\
&\quad-\beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^{n+1}+(\beta^*)^2\beta^m\beta^{n+1})]\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}[-\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n(\alpha-\beta)+\beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n(\alpha-\beta)]\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)}[-\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n+\beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n]\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)}\alpha^m\beta^m[-\alpha^*\beta^*\beta^{n-m}+\beta^*\alpha^*\alpha^{n-m}]\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)}(-1)^m[-(P_0+\sqrt{5}\lambda)\beta^{n-m}+(P_0-\sqrt{5}\lambda)\alpha^{n-m}]\\
&= (-1)^m\left[\frac{\alpha^{n-m}P_0}{\alpha-\beta}-\alpha^{n-m}\lambda-\frac{\beta^{n-m}P_0}{\alpha-\beta}-\beta^{n-m}\lambda\right]\\
&= (-1)^m\left[\left(\frac{\alpha^{n-m}-\beta^{n-m}}{\alpha-\beta}\right)P_0-\lambda(\alpha^{n-m}+\beta^{n-m})\right]\\
&= (-1)^m[F_{n-m}P_0-\lambda L_{n-m}]
\end{aligned}
$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{Q}}_{m+1}\tilde{\tilde{Q}}_n-\tilde{\tilde{Q}}_m\tilde{\tilde{Q}}_{n+1} &= (\tilde{Q}_{m+1}+\varepsilon\tilde{Q}_{m+2})(\tilde{Q}_n+\varepsilon\tilde{Q}_{n+1})-(\tilde{Q}_m+\varepsilon\tilde{Q}_{m+1})(\tilde{Q}_{n+1}+\varepsilon\tilde{Q}_{n+2})\\
&= \tilde{Q}_{m+1}\tilde{Q}_n-\tilde{Q}_m\tilde{Q}_{n+1}+\varepsilon(\tilde{Q}_{m+1}\tilde{Q}_n-\tilde{Q}_m\tilde{Q}_{n+1})\\
&= \tilde{Q}_{m+1}\tilde{Q}_n-\tilde{Q}_m\tilde{Q}_{n+1}(1+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{Q}}_{m+1}\tilde{\tilde{Q}}_n-\tilde{\tilde{Q}}_m\tilde{\tilde{Q}}_{n+1} &= (-1)^m[F_{n-m}P_0-\lambda L_{n-m}]+\varepsilon(-1)^m[F_{n-m}P_0-\lambda L_{n-m}]\\
&= (-1)^m[F_{n-m}P_0-\lambda L_{n-m}](1+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

elde edilir. ∎

Benzer şekilde Eş. 3.8 de ispat edilebilir.

4. SPLIT DUAL FIBONACCI VE SPLIT DUAL LUCAS OKTONYONLAR İÇİN BAZI SONUÇLAR

Keçilioğlu ve Akkuş [16], Split Fibonacci ve Split Lucas Oktonyonları tanımlayıp onlarla ilgili bazı sonuçlar çıkarmıştır. Bu bölümde, Split Fibonacci ve Split Lucas Oktonyonlar için bulunan sonuçları Split Dual Fibonacci ve Split Dual Lucas Oktonyonlar için elde edeceğiz.

4.1. Teorem

$$\omega_1 = \frac{1305}{2}$$
$$\omega_2 = \frac{545}{2}$$
$$\lambda = -e_1 - e_2 + 4e_3 - 3e_4 + 9e_5 + 6e_6 - 6e_7$$

olmak üzere;

$$\overset{\approx}{Q}_n^{\,2} + \overset{\approx}{P}_n^{\,2} = \{\frac{6}{5}[(\omega_1 + P_0)L_{2n} + 5(\omega_2 + Q_0)F_{2n}] + \frac{8}{5}(-1)^n P_0\}(1+\varepsilon), \tag{4.1}$$
$$\overset{\approx}{P}_n^{\,2} - \overset{\approx}{Q}_n^{\,2} = \{\frac{4}{5}[(\omega_1 + P_0)L_{2n} + 5(\omega_2 + Q_0)F_{2n}] + \frac{12}{5}(-1)^n P_0\}(1+\varepsilon), \tag{4.2}$$
$$\overset{\approx}{P}_{n+r}\overset{\approx}{Q}_{n+s} - \overset{\approx}{P}_{n+s}\overset{\approx}{Q}_{n+r} = 2(-1)^{n+r} P_0 F_{s-r}(1+\varepsilon), \tag{4.3}$$
$$\overset{\approx}{Q}_{m+n} + (-1)^n \overset{\approx}{Q}_{m-n} = \overset{\approx}{Q}_m L_n (1+\varepsilon), \tag{4.4}$$
$$\overset{\approx}{Q}_m \overset{\approx}{P}_n - \overset{\approx}{Q}_n \overset{\approx}{P}_m = 2(-1)^{m+1} P_0 F_{n-m}(1+\varepsilon), \tag{4.5}$$
$$\overset{\approx}{Q}_m \overset{\approx}{P}_n - \overset{\approx}{P}_m \overset{\approx}{Q}_n = 2(-1)^{m+1}[P_0 F_{n-m} + \lambda L_{n-m}](1+\varepsilon) \tag{4.6}$$

dır.

İspat

Split Fibonacci ve Lucas oktonyonlar için verilen Binet formüllerini kullanarak ispatlayacağız.

Eş. 4.1 için;

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_n^{\,2}+\tilde{P}_n^{\,2} &= \frac{1}{5}(\alpha^*\alpha^n-\beta^*\beta^n)^2+(\alpha^*\alpha^n+\beta^*\beta^n)^2\\
&= \frac{1}{5}((\alpha^*)^2\alpha^{2n}+(\beta^*)^2\beta^{2n}-\alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^n-\beta^*\alpha^*\alpha^n\beta^n)\\
&\quad +((\alpha^*)^2\alpha^{2n}+(\beta^*)^2\beta^{2n}+\alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^n+\beta^*\alpha^*\alpha^n\beta^n)
\end{aligned}
$$

olur. Lemma 3.2.1 deki $\lambda,\omega_1,\omega_2,\mu,(\alpha^*)^2,(\beta^*)^2,\alpha^*\beta^*$ ve $\beta^*\alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$
\tilde{Q}_n^{\,2}+\tilde{P}_n^{\,2}=\frac{6}{5}[(\omega_1+P_0)L_{2n}+5(\omega_2+Q_0)F_{2n}]+\frac{8}{5}(-1)^n(\mu+P_0)
$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{Q}}_n^2+\tilde{\tilde{P}}_n^2 &= \tilde{\tilde{Q}}_n\tilde{\tilde{Q}}_n+\tilde{\tilde{P}}_n\tilde{\tilde{P}}_n\\
&= (\tilde{Q}_n+\varepsilon\tilde{Q}_{n+1})(\tilde{Q}_n+\varepsilon\tilde{Q}_{n+1})+(\tilde{P}_n+\varepsilon\tilde{P}_{n+1})(\tilde{P}_n+\varepsilon\tilde{P}_{n+1})\\
&= \tilde{Q}_n^2+\varepsilon\tilde{Q}_n\tilde{Q}_{n+1}+\varepsilon\tilde{Q}_{n+1}\tilde{Q}_n+\tilde{P}_n^2+\varepsilon\tilde{P}_n\tilde{P}_{n+1}+\varepsilon\tilde{P}_{n+1}\tilde{P}_n\\
&= \tilde{Q}_n^2+\tilde{P}_n^2+\varepsilon(\tilde{Q}_n\tilde{Q}_{n+1}+\tilde{Q}_{n+1}\tilde{Q}_n+\tilde{P}_n\tilde{P}_{n+1}+\tilde{P}_{n+1}\tilde{P}_n)\\
&= \tilde{Q}_n^2+\tilde{P}_n^2+\varepsilon(\tilde{Q}_n^2+\tilde{P}_n^2)\\
&= (\tilde{Q}_n^2+\tilde{P}_n^2)(1+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra ve Lemma 3.2.2 deki tanımlamalar da kullanılarak;

$$\tilde{\tilde{Q}}_n^{\,2} + \tilde{\tilde{P}}_n^{\,2} = \{\frac{6}{5}[(\omega_1 + P_0)L_{2n} + 5(\omega_2 + Q_0)F_{2n}] + \frac{8}{5}(-1)^n P_0\}(1+\varepsilon)$$

bulunur. ∎

Eş. 4.2 için;

$$\begin{aligned}\tilde{P}_n^{\,2} - \tilde{Q}_n^{\,2} &= (\alpha^*\alpha^n + \beta^*\beta^n)^2 - \frac{1}{5}(\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n)^2 \\ &= ((\alpha^*)^2\alpha^{2n} + (\beta^*)^2\beta^{2n} + \alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^n + \beta^*\alpha^*\alpha^n\beta^n) \\ &\quad - \frac{1}{5}((\alpha^*)^2\alpha^{2n} + (\beta^*)^2\beta^{2n} - \alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^n - \beta^*\alpha^*\alpha^n\beta^n)\end{aligned}$$

olur. Lemma 3.2.1 deki $\lambda, \omega_1, \omega_2, \mu, (\alpha^*)^2, (\beta^*)^2, \alpha^*\beta^*$ ve $\beta^*\alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$\tilde{P}_n^{\,2} - \tilde{Q}_n^{\,2} = \frac{4}{5}((\alpha^*)^2\alpha^{2n} + \beta^{*2}\beta^{2n}) + \frac{12}{5}(-1)^n P_0$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{P}}_n^2 - \tilde{\tilde{Q}}_n^2 &= \tilde{\tilde{P}}_n\tilde{\tilde{P}}_n - \tilde{\tilde{Q}}_n\tilde{\tilde{Q}}_n \\ &= (\tilde{P}_n + \varepsilon\tilde{P}_{n+1})(\tilde{P}_n + \varepsilon\tilde{P}_{n+1}) - (\tilde{Q}_n + \varepsilon\tilde{Q}_{n+1})(\tilde{Q}_n + \varepsilon\tilde{Q}_{n+1}) \\ &= \tilde{P}_n^2 + \varepsilon\tilde{P}_n\tilde{P}_{n+1} + \varepsilon\tilde{P}_{n+1}\tilde{P}_n - \tilde{Q}_n^2 - \varepsilon\tilde{Q}_n\tilde{Q}_{n+1} - \varepsilon\tilde{Q}_{n+1}\tilde{Q}_n \\ &= \tilde{P}_n^2 - \tilde{Q}_n^2 + \varepsilon(\tilde{P}_n\tilde{P}_{n+1} + \tilde{P}_{n+1}\tilde{P}_n - \tilde{Q}_n\tilde{Q}_{n+1} - \tilde{Q}_{n+1}\tilde{Q}_n) \\ &= \tilde{P}_n^2 - \tilde{Q}_n^2 + \varepsilon(\tilde{P}_n^2 - \tilde{Q}_n^2) \\ &= (\tilde{P}_n^2 - \tilde{Q}_n^2)(1+\varepsilon)\end{aligned}$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra ve Lemma 3.2.2 deki tanımlamalar da kullanılarak;

$$\tilde{\tilde{P}}_n^{\,2} - \tilde{\tilde{Q}}_n^{\,2} = \{\frac{4}{5}[(\omega_1 + P_0)L_{2n} + 5(\omega_2 + Q_0)F_{2n}] + \frac{12}{5}(-1)^n P_0\}(1+\varepsilon)$$

bulunur. ■

Eş 4.3 için Lemma 3.2.1 deki $\lambda, \omega_1, \omega_2, \mu, (\alpha^*)^2, (\beta^*)^2, \alpha^*\beta^*$ ve $\beta^*\alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{n+r}\tilde{Q}_{n+s} - \tilde{P}_{n+s}\tilde{Q}_{n+r} &= \frac{1}{\alpha-\beta}[(\alpha^*\alpha^{n+r} + \beta^*\beta^{n+r})(\alpha^*\alpha^{n+s} - \beta^*\beta^{n+s}) \\
&\quad -(\alpha^*\alpha^{n+s} + \beta^*\beta^{n+s})(\alpha^*\alpha^{n+r} - \beta^*\beta^{n+r})] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}[(\alpha^*)^2\alpha^{n+r}\alpha^{n+s} - \alpha^*\beta^*\beta^{n+s}\alpha^{n+r} \\
&\quad + \beta^*\alpha^*\alpha^{n+s}\beta^{n+r} - (\beta^*)^2\beta^{n+r}\beta^{n+s} \\
&\quad - (\alpha^*)^2\alpha^{n+r}\alpha^{n+s} + \alpha^*\beta^*\beta^{n+r}\alpha^{n+s} \\
&\quad - \beta^*\alpha^*\alpha^{n+r}\beta^{n+s} + (\beta^*)^2\beta^{n+r}\beta^{n+s}] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}[-\alpha^*\beta^*\beta^{n+s}\alpha^{n+r} + \beta^*\alpha^*\alpha^{n+s}\beta^{n+r} \\
&\quad + \alpha^*\beta^*\beta^{n+r}\alpha^{n+s} - \beta^*\alpha^*\alpha^{n+r}\beta^{n+s}] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\alpha^{n+r}\beta^{n+r}[\alpha^*\beta^*\alpha^{s-r} - \alpha^*\beta^*\beta^{s-r} \\
&\quad + \beta^*\alpha^*\alpha^{s-r} - \beta^*\alpha^*\beta^{s-r}] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}(-1)^{n+r}[\alpha^{s-r}(\alpha^*\beta^* + \beta^*\alpha^*) - \beta^{s-r}(\alpha^*\beta^* + \beta^*\alpha^*)] \\
&= (-1)^{n+r}(\alpha^*\beta^* + \beta^*\alpha^*)\frac{\alpha^{s-r} - \beta^{s-r}}{\alpha-\beta} \\
&= 2(\mu + P_0)(-1)^{n+r}F_{s-r}
\end{aligned}$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{P}}_{n+r}\tilde{\tilde{Q}}_{n+s}-\tilde{\tilde{P}}_{n+s}\tilde{\tilde{Q}}_{n+r} &= (\tilde{P}_{n+r}+\varepsilon\tilde{P}_{n+r+1})(\tilde{Q}_{n+s}+\varepsilon\tilde{Q}_{n+s+1}) \\
&\quad -(\tilde{P}_{n+s}+\varepsilon\tilde{P}_{n+s+1})(\tilde{Q}_{n+r}+\varepsilon\tilde{Q}_{n+r+1}) \\
&= \tilde{P}_{n+r}\tilde{Q}_{n+s}+\varepsilon\tilde{P}_{n+r}\tilde{Q}_{n+s+1}+\varepsilon\tilde{P}_{n+r+1}\tilde{Q}_{n+s} \\
&\quad -\tilde{P}_{n+s}\tilde{Q}_{n+r}-\varepsilon\tilde{P}_{n+s}\tilde{Q}_{n+r+1}-\varepsilon\tilde{P}_{n+s+1}\tilde{Q}_{n+r} \\
&= \tilde{P}_{n+r}\tilde{Q}_{n+s}-\tilde{P}_{n+s}\tilde{Q}_{n+r} \\
&\quad +\varepsilon(\tilde{P}_{n+r}\tilde{Q}_{n+s+1}+\tilde{P}_{n+r+1}\tilde{Q}_{n+s}-\tilde{P}_{n+s}\tilde{Q}_{n+r+1}-\tilde{P}_{n+s+1}\tilde{Q}_{n+r}) \\
&= \tilde{P}_{n+r}\tilde{Q}_{n+s}-\tilde{P}_{n+s}\tilde{Q}_{n+r}+\varepsilon(\tilde{P}_{n+r}\tilde{Q}_{n+s}-\tilde{P}_{n+s}\tilde{Q}_{n+r}) \\
&= (\tilde{P}_{n+r}\tilde{Q}_{n+s}-\tilde{P}_{n+s}\tilde{Q}_{n+r})(1+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra ve Lemma 3.2.2 deki tanımlamalar da kullanılarak;

$$
\tilde{\tilde{P}}_{n+r}\tilde{\tilde{Q}}_{n+s}-\tilde{\tilde{P}}_{n+s}\tilde{\tilde{Q}}_{n+r} = 2(-1)^{n+r}P_0F_{s-r}(1+\varepsilon)
$$

elde edilir. ■

Eş 4.4 için Lemma 3.2.1 deki $\lambda,\omega_1,\omega_2,\mu,(\alpha^*)^2,(\beta^*)^2,\alpha^*\beta^*$ ve $\beta^*\alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_{m+n}+(-1)^n\tilde{Q}_{m-n} &= \frac{\alpha^*\alpha^{m+n}-\beta^*\beta^{m+n}}{\alpha-\beta}+(\alpha\beta)^n\frac{\alpha^*\alpha^{m-n}-\beta^*\beta^{m-n}}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{\alpha^*\alpha^{m+n}-\beta^*\beta^{m+n}+\alpha^*\alpha^m\beta^n-\beta^*\beta^m\alpha^n}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{\alpha^n(\alpha^*\alpha^m-\beta^*\beta^m)+\beta^n(\alpha^*\alpha^m-\beta^*\beta^m)}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{(\alpha^*\alpha^m-\beta^*\beta^m)(\alpha^n+\beta^*)}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{(\alpha^*\alpha^m-\beta^*\beta^m)}{\alpha-\beta}(\alpha^n+\beta^*) \\
&= \tilde{Q}_mL_n
\end{aligned}
$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$\tilde{\tilde{Q}}_{m+n} + (-1)^n \tilde{\tilde{Q}}_{m-n} = (\tilde{Q}_{m+n} + \varepsilon\tilde{Q}_{m+n+1}) + (-1)^n (\tilde{Q}_{m-n} + \varepsilon\tilde{Q}_{m-n+1})$$
$$= \tilde{Q}_{m+n} + (-1)^n \tilde{Q}_{m-n} + \varepsilon\tilde{Q}_{m+n+1} + \varepsilon(-1)^n \tilde{Q}_{m-n+1})$$
$$= (\tilde{Q}_{m+n} + (-1)^n \tilde{Q}_{m-n}) + \varepsilon(\tilde{Q}_{m+n+1} + (-1)^n \tilde{Q}_{m-n+1})$$
$$= (\tilde{Q}_{m+n} + (-1)^n \tilde{Q}_{m-n})(1+\varepsilon)$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra

$$\tilde{\tilde{Q}}_{m+n} + (-1)^n \tilde{\tilde{Q}}_{m-n} = \tilde{\tilde{Q}}_m L_n (1+\varepsilon)$$

elde edilir. ▪

Eş 4.5 için Lemma 3.2.1 deki $\lambda, \omega_1, \omega_2, \mu, (\alpha^*)^2, (\beta^*)^2, \alpha^*\beta^*$ ve $\beta^*\alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$\tilde{Q}_m \tilde{P}_n - \tilde{Q}_n \tilde{P}_m = \frac{1}{\alpha-\beta}[(\alpha^*\alpha^m - \beta^*\beta^m)(\alpha^*\alpha^n + \beta^*\beta^n)$$
$$-(\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n)(\alpha^*\alpha^m + \beta^*\beta^m)]$$
$$= \frac{1}{\alpha-\beta}[(\alpha^*)^2\alpha^m\alpha^n + \alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n - \beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n - (\beta^*)^2\beta^m\beta^n$$
$$-(\alpha^*)^2\alpha^m\alpha^n - \alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^m + \beta^*\alpha^*\beta^n\alpha^m + (\beta^*)^2\beta^n\beta^m]$$
$$= \frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n - \beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n - \alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^m + \beta^*\alpha^*\beta^n\alpha^m]$$
$$= \frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^*\beta^*(\alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m) + \beta^*\alpha^*(\alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m)]$$
$$= \frac{1}{\alpha-\beta}[(\alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m)(\alpha^*\beta^* + \beta^*\alpha^*)]$$
$$= \alpha^m\beta^m(\frac{\beta^{n-m} - \alpha^{n-m}}{\alpha-\beta})2(\mu + P_0)$$
$$= -2(\mu + P_0)(-1)^m(\frac{-\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}}{\alpha-\beta})$$
$$= 2(-1)^{m+1}(\mu + P_0)F_{n-m}$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{Q}}_m \tilde{\tilde{P}}_n - \tilde{\tilde{Q}}_n \tilde{\tilde{P}}_m &= (\tilde{Q}_m + \varepsilon \tilde{Q}_{m+1})(\tilde{P}_n + \varepsilon \tilde{P}_{n+1}) - (\tilde{Q}_n + \varepsilon \tilde{Q}_{n+1})(\tilde{P}_m + \varepsilon \tilde{P}_{m+1}) \\
&= \tilde{Q}_m \tilde{P}_n + \varepsilon \tilde{Q}_m \tilde{P}_{n+1} + \varepsilon \tilde{Q}_{m+1} \tilde{P}_n - \tilde{Q}_n \tilde{P}_m - \varepsilon \tilde{Q}_n \tilde{P}_{m+1} - \varepsilon \tilde{Q}_{n+1} \tilde{P}_m \\
&= \tilde{Q}_m \tilde{P}_n - \tilde{Q}_n \tilde{P}_m + \varepsilon (\tilde{Q}_m \tilde{P}_{n+1} + \tilde{Q}_{m+1} \tilde{P}_n - \tilde{Q}_n \tilde{P}_{m+1} - \tilde{Q}_{n+1} \tilde{P}_m) \\
&= (\tilde{Q}_m \tilde{P}_n - \tilde{Q}_n \tilde{P}_m) + \varepsilon (\tilde{Q}_m \tilde{P}_n - \tilde{Q}_n \tilde{P}_m) \\
&= (\tilde{Q}_m \tilde{P}_n - \tilde{Q}_n \tilde{P}_m)(1 + \varepsilon)
\end{aligned}$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra ve Lemma 3.2.2 deki tanımlamalar da kullanılarak;

$$\tilde{\tilde{Q}}_m \tilde{\tilde{P}}_n - \tilde{\tilde{Q}}_n \tilde{\tilde{P}}_m = 2(-1)^{m+1} P_0 F_{n-m} (1 + \varepsilon)$$

elde edilir. ∎

Eş. 4.6 için Lemma 3.2.1 deki $\lambda, \omega_1, \omega_2, \mu, (\alpha^*)^2, (\beta^*)^2, \alpha^* \beta^*$ ve $\beta^* \alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Q}_m\widetilde{P}_n-\widetilde{P}_m\widetilde{Q}_n &= \frac{1}{\alpha-\beta}[(\alpha^*\alpha^m-\beta^*\beta^m)(\alpha^*\alpha^n+\beta^*\beta^n)\\
&\quad -(\alpha^*\alpha^m+\beta^*\beta^m)(\alpha^*\alpha^n-\beta^*\beta^n)]\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}[(\alpha^*)^2\alpha^m\alpha^n+\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n-\beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n-(\beta^*)^2\beta^m\beta^n\\
&\quad -(\alpha^*)^2\alpha^m\alpha^n+\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n-\beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n+(\beta^*)^2\beta^n\beta^m]\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n-\beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n+\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n-\beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n]\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^*\beta^*(\alpha^m\beta^n+\alpha^m\beta^n)-\beta^*\alpha^*(\beta^m\alpha^n+\beta^m\alpha^n)]\\
&= \frac{2}{\alpha-\beta}[\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n-\beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n]\\
&= \frac{2}{\alpha-\beta}\alpha^m\beta^m(\alpha^*\beta^*\beta^{n-m}-\beta^*\alpha^*\alpha^{n-m})\\
&= \frac{2}{\alpha-\beta}(-1)^m[(\mu+P_0)\beta^{n-m}-(\mu+P_0)\alpha^{n-m}\\
&\quad +\sqrt{5}\lambda\beta^{n-m}+\sqrt{5}\lambda\alpha^{n-m})]\\
&= \frac{2}{\alpha-\beta}(-1)^m[(\mu+P_0)(\beta^{n-m}-\alpha^{n-m})+\sqrt{5}\lambda(\beta^{n-m}+\alpha^{n-m})]\\
&= 2(-1)^{m+1}[(\mu+P_0)\frac{-\beta^{n-m}+\alpha^{n-m}}{\alpha-\beta}+\frac{\sqrt{5}}{\alpha-\beta}\lambda(\beta^{n-m}+\alpha^{n-m})]\\
&= 2(-1)^{m+1}[(\mu+P_0)F_{n-m}+\lambda L_{n-m}]
\end{aligned}
$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{Q}}_m\widetilde{\widetilde{P}}_n-\widetilde{\widetilde{P}}_m\widetilde{\widetilde{Q}}_n &= (\widetilde{Q}_m+\varepsilon\widetilde{Q}_{m+1})(\widetilde{P}_n+\varepsilon\widetilde{P}_{n+1})-(\widetilde{P}_m+\varepsilon\widetilde{P}_{m+1})(\widetilde{Q}_n+\varepsilon\widetilde{Q}_{n+1})\\
&= \widetilde{Q}_m\widetilde{P}_n+\varepsilon\widetilde{Q}_m\widetilde{P}_{n+1}+\varepsilon\widetilde{Q}_{m+1}\widetilde{P}_n-\widetilde{P}_m\widetilde{Q}_n-\varepsilon\widetilde{P}_m\widetilde{Q}_{n+1}-\varepsilon\widetilde{P}_{m+1}\widetilde{Q}_n\\
&= (\widetilde{Q}_m\widetilde{P}_n-\widetilde{P}_m\widetilde{Q}_n)+\varepsilon(\widetilde{Q}_m\widetilde{P}_{n+1}+\widetilde{Q}_{m+1}\widetilde{P}_n-\widetilde{P}_m\widetilde{Q}_{n+1}-\widetilde{P}_{m+1}\widetilde{Q}_n)\\
&= (\widetilde{Q}_m\widetilde{P}_n-\widetilde{P}_m\widetilde{Q}_n)+\varepsilon(\widetilde{Q}_m\widetilde{P}_n-\widetilde{P}_m\widetilde{Q}_n)\\
&= (\widetilde{Q}_m\widetilde{P}_n-\widetilde{P}_m\widetilde{Q}_n)(1+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra ve Lemma 3.2.2 deki tanımlamalar da kullanılarak;

$$\overset{\approx}{Q}_m \overset{\approx}{P}_n - \overset{\approx}{P}_m \overset{\approx}{Q}_n = 2(-1)^{m+1}[P_0 F_{n-m} + \lambda L_{n-m}](1+\varepsilon)$$

elde edilir.

■

4.2. Teorem:

$$\overset{\approx}{Q}_{n+r} F_{n+r} - \overset{\approx}{Q}_{n-r} F_{n-r} = F_{2r} \overset{\approx}{Q}_{2n} (1+\varepsilon), \tag{4.7}$$
$$\overset{\approx}{Q}_{n+r} L_{n+r} + \overset{\approx}{Q}_{n-r} L_{n-r} = [L_{2r} \overset{\approx}{Q}_{2n} + 2(-1)^{n+r} Q_0](1+\varepsilon), \tag{4.8}$$
$$\overset{\approx}{P}_{n+r} L_{n+r} - \overset{\approx}{P}_{n-r} L_{n-r} = 5F_{2r} \overset{\approx}{Q}_{2n} (1+\varepsilon), \tag{4.9}$$
$$\overset{\approx}{P}_{n+r} L_{n+r} + \overset{\approx}{P}_{n-r} L_{n-r} = [L_{2r} \overset{\approx}{P}_{2n} + 2(-1)^{n+r} P_0](1+\varepsilon), \tag{4.10}$$
$$\overset{\approx}{P}_{n+r} F_{n+t} + \overset{\approx}{P}_{n+t} F_{n+r} = [2\overset{\approx}{Q}_{2n+r+t} - (-1)^{n+t} L_{r-t} Q_0](1+\varepsilon) \tag{4.11}$$

İspat

Split Fibonacci ve Lucas oktonyonlar için verilen Binet formüllerini kullanarak ispatlayacağız.

Eş. 4.7 için Lemma 3.2.1 deki $\lambda, \omega_1, \omega_2, \mu, (\alpha^*)^2, (\beta^*)^2, \alpha^* \beta^*$ ve $\beta^* \alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_{n+r}F_{n+r}-\tilde{Q}_{n-r}F_{n-r} &= \left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n+r}-\beta^{*}\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad -\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n-r}-\beta^{*}\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right) \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^{2}}(\alpha^{*}\alpha^{2n+2r}+\beta^{*}\beta^{2n+2r}-\alpha^{*}\alpha^{2n-2r}-\beta^{*}\beta^{2n-2r}) \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^{2}}\left[\alpha^{*}\alpha^{2n+2r}+\beta^{*}\beta^{2n+2r}-\frac{(\alpha^{*}\alpha^{2n}\beta^{2r}-\beta^{*}\alpha^{2r}\beta^{2n})}{(\alpha\beta)^{2r}}\right] \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^{2}}(\alpha^{*}\alpha^{2n+2r}+\beta^{*}\beta^{2n+2r}-\alpha^{*}\alpha^{2n}\beta^{2r}-\beta^{*}\alpha^{2r}\beta^{2n}) \\
&= \left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n}-\beta^{*}\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{2r}-\beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right) \\
&= \tilde{Q}_{2n}F_{2r}
\end{aligned}
$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{Q}}_{n+r}F_{n+r}-\tilde{\tilde{Q}}_{n-r}F_{n-r} &= (\tilde{Q}_{n+r}+\varepsilon\tilde{Q}_{n+r+1})F_{n+r}-(\tilde{Q}_{n-r}+\varepsilon\tilde{Q}_{n-r+1})F_{n-r} \\
&= \tilde{Q}_{n+r}F_{n+r}-\tilde{Q}_{n-r}F_{n-r}+\varepsilon(\tilde{Q}_{n+r+1}F_{n+r}-\tilde{Q}_{n-r+1}F_{n-r}) \\
&= (\tilde{Q}_{n+r}F_{n+r}-\tilde{Q}_{n-r}F_{n-r})(1+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra ve Lemma 3.2.2 deki tanımlamalar da kullanılarak;

$$
\tilde{\tilde{Q}}_{n+r}F_{n+r}-\tilde{\tilde{Q}}_{n-r}F_{n-r}=F_{2r}\tilde{\tilde{Q}}_{2n}(1+\varepsilon)
$$

elde edilir. ∎

Eş. 4.8 için Lemma 3.2.1 deki $\lambda,\omega_1,\omega_2,\mu,(\alpha^{*})^{2},(\beta^{*})^{2},\alpha^{*}\beta^{*}$ ve $\beta^{*}\alpha^{*}$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{n+r}L_{n+r}+\tilde{Q}_{n-r}L_{n-r} &= \left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n+r}-\beta^{*}\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)(\alpha^{n+r}+\beta^{n+r}) \\
&\quad +\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n-r}-\beta^{*}\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)(\alpha^{n-r}+\beta^{n-r}) \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)}[\alpha^{*}\alpha^{2n+2r}+\alpha^{*}\alpha^{n+r}\beta^{n+r}-\beta^{*}\beta^{n+r}\alpha^{n+r}-\beta^{*}\beta^{2n+2r} \\
&\quad +\alpha^{*}\alpha^{2n-2r}+\alpha^{*}\alpha^{n-r}\beta^{n-r}-\beta^{*}\beta^{n-r}\alpha^{n-r}-\beta^{*}\beta^{2n-2r}] \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)}[\alpha^{*}\alpha^{2n+2r}+\alpha^{*}\alpha^{n+r}\beta^{n+r}-\beta^{*}\beta^{n+r}\alpha^{n+r}-\beta^{*}\beta^{2n+2r} \\
&\quad +\alpha^{*}\alpha^{n-r}\beta^{n-r}-\beta^{*}\beta^{n-r}\alpha^{n-r} \\
&\quad +\frac{\alpha^{2r}\beta^{2r}(\alpha^{*}\alpha^{2n-2r}-\beta^{*}\beta^{2n-2r})}{\alpha^{2r}\beta^{2r}} \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)}[\alpha^{*}\alpha^{2n+2r}+\alpha^{*}\alpha^{n+r}\beta^{n+r}-\beta^{*}\beta^{n+r}\alpha^{n+r}-\beta^{*}\beta^{2n+2r} \\
&\quad +\alpha^{*}\alpha^{n-r}\beta^{n-r}-\beta^{*}\beta^{n-r}\alpha^{n-r}+\alpha^{*}\alpha^{2n}\beta^{2r}-\beta^{*}\beta^{2n}\alpha^{2r}] \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)}[\alpha^{*}\alpha^{2n}(\alpha^{2r}+\beta^{2r})-\beta^{*}\beta^{2n}(\alpha^{2r}+\beta^{2r}) \\
&\quad +\alpha^{n+r}\beta^{n+r}(\alpha^{*}-\beta^{*})+\alpha^{n-r}\beta^{n-r}(\alpha^{*}-\beta^{*})] \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)}[(\alpha^{2r}+\beta^{2r})(\alpha^{*}\alpha^{2n}-\beta^{*}\beta^{2n}) \\
&\quad +(\alpha^{*}-\beta^{*})(\alpha^{n+r}\beta^{n+r}+\alpha^{n-r}\beta^{n-r})] \\
&= (\alpha^{2r}+\beta^{2r})\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n}-\beta^{*}\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad +\left(\frac{\alpha^{*}-\beta^{*}}{\alpha-\beta}\right)(\alpha^{n+r}\beta^{n+r}+\alpha^{n-r}\beta^{n-r}) \\
&= L_{2r}\tilde{Q}_{2n}+[(-1)^{n+r}+(-1)^{n-r}]Q_{0} \\
&= L_{2r}\tilde{Q}_{2n}+2(-1)^{n+r}Q_{0}
\end{aligned}$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{Q}}_{n+r}L_{n+r}-\tilde{\tilde{Q}}_{n-r}L_{n-r} &= (\tilde{Q}_{n+r}+\varepsilon\tilde{Q}_{n+r+1})L_{n+r}+(\tilde{Q}_{n-r}+\varepsilon\tilde{Q}_{n-r+1})L_{n-r} \\
&= \tilde{Q}_{n+r}L_{n+r}+\tilde{Q}_{n-r}L_{n-r}+\varepsilon(\tilde{Q}_{n+r+1}L_{n+r}+\tilde{Q}_{n-r+1}L_{n-r}) \\
&= (\tilde{Q}_{n+r}L_{n+r}+\tilde{Q}_{n-r}L_{n-r})(1+\varepsilon)
\end{aligned}$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra

$$\tilde{\tilde{Q}}_{n+r}L_{n+r}+\tilde{\tilde{Q}}_{n-r}L_{n-r}=[L_{2r}\tilde{\tilde{Q}}_{2n}+2(-1)^{n+r}Q_0](1+\varepsilon)$$

elde edilir. ■

Eş. 4.9 için Lemma 3.2.1 deki $\lambda,\omega_1,\omega_2,\mu,(\alpha^*)^2,(\beta^*)^2,\alpha^*\beta^*$ ve $\beta^*\alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{n+r}L_{n+r}-\tilde{P}_{n-r}L_{n-r}&=(\alpha^*\alpha^{n+r}+\beta^*\beta^{n+r})(\alpha^{n+r}+\beta^{n+r})\\&\quad-(\alpha^*\alpha^{n-r}+\beta^*\beta^{n-r})(\alpha^{n-r}+\beta^{n-r})\\&=(\alpha^*\alpha^{2n+2r}+\beta^*\beta^{2n+2r}-\alpha^*\alpha^{2n-2r}-\beta^*\beta^{2n-2r})\\&=(\alpha^*\alpha^{2n+2r}+\beta^*\beta^{2n+2r}-\alpha^*\alpha^{2n}\beta^{2r}-\beta^*\alpha^{2r}\beta^{2n})\\&=(\alpha-\beta)^2\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n}-\beta^*\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{2r}-\beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right)\\&=5\tilde{Q}_{2n}F_{2r}\end{aligned}$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{P}}_{n+r}L_{n+r}-\tilde{\tilde{P}}_{n-r}L_{n-r}&=(\tilde{P}_{n+r}+\varepsilon\tilde{P}_{n+r+1})L_{n+r}-(\tilde{P}_{n-r}+\varepsilon\tilde{P}_{n-r+1})L_{n-r}\\&=\tilde{P}_{n+r}L_{n+r}-\tilde{P}_{n-r}L_{n-r}+\varepsilon(\tilde{P}_{n+r+1}L_{n+r}-\tilde{P}_{n-r+1}L_{n-r})\\&=(\tilde{P}_{n+r}L_{n+r}-\tilde{P}_{n-r}L_{n-r})(1+\varepsilon)\end{aligned}$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra ve Lemma 3.2.2 deki tanımlamalar da kullanılarak;

$$\tilde{\tilde{P}}_{n+r}L_{n+r}-\tilde{\tilde{P}}_{n-r}L_{n-r}=5F_{2r}\tilde{\tilde{Q}}_{2n}(1+\varepsilon)$$

elde edilir. ■

Eş. 4.10 için Lemma 3.2.1 deki $\lambda, \omega_1, \omega_2, \mu, (\alpha^*)^2, (\beta^*)^2, \alpha^*\beta^*$ ve $\beta^*\alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_{n+r}L_{n+r} + \widetilde{P}_{n-r}L_{n-r} &= (\alpha^*\alpha^{n+r} + \beta^*\beta^{n+r})(\alpha^{n+r} + \beta^{n+r}) \\
&\quad + (\alpha^*\alpha^{n-r} + \beta^*\beta^{n-r})(\alpha^{n-r} + \beta^{n-r}) \\
&= \alpha^*\alpha^{2n+2r} + \alpha^*\alpha^{n+r}\beta^{n+r} + \beta^*\beta^{n+r}\alpha^{n+r} + \beta^*\beta^{2n+2r} \\
&\quad + \alpha^*\alpha^{2n-2r} + \alpha^*\alpha^{n-r}\beta^{n-r} + \beta^*\beta^{n-r}\alpha^{n-r} + \beta^*\beta^{2n-2r}) \\
&= \alpha^*\alpha^{2n+2r} + \alpha^*\alpha^{n+r}\beta^{n+r} + \beta^*\beta^{n+r}\alpha^{n+r} + \beta^*\beta^{2n+2r} \\
&\quad + \alpha^*\alpha^{n-r}\beta^{n-r} + \beta^*\beta^{n-r}\alpha^{n-r} \\
&\quad + \alpha^{2r}\beta^{2r}(\alpha^*\alpha^{2n-2r} + \beta^*\beta^{2n-2r}) \\
&= \alpha^*\alpha^{2n+2r} + \alpha^*\alpha^{n+r}\beta^{n+r} + \beta^*\beta^{n+r}\alpha^{n+r} + \beta^*\beta^{2n+2r} \\
&\quad + \alpha^*\alpha^{n-r}\beta^{n-r} + \beta^*\beta^{n-r}\alpha^{n-r} + \alpha^*\alpha^{2n}\beta^{2r} + \beta^*\beta^{2n}\alpha^{2r} \\
&= \alpha^*\alpha^{2n}(\alpha^{2r} + \beta^{2r}) + \beta^*\beta^{2n}(\alpha^{2r} + \beta^{2r}) \\
&\quad + \alpha^{n+r}\beta^{n+r}(\alpha^* + \beta^*) + \alpha^{n-r}\beta^{n-r}(\alpha^* + \beta^*) \\
&= (\alpha^{2r} + \beta^{2r})(\alpha^*\alpha^{2n} + \beta^*\beta^{2n}) \\
&\quad + (\alpha^* + \beta^*)(\alpha^{n+r}\beta^{n+r} + \alpha^{n-r}\beta^{n-r}) \\
&= L_{2r}\widetilde{P}_{2n} + 2(-1)^{n+r}P_0
\end{aligned}$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{P}}_{n+r}L_{n+r} + \widetilde{\widetilde{P}}_{n-r}L_{n-r} &= (\widetilde{P}_{n+r} + \varepsilon\widetilde{P}_{n+r+1})L_{n+r} + (\widetilde{P}_{n-r} + \varepsilon\widetilde{P}_{n-r+1})L_{n-r} \\
&= \widetilde{P}_{n+r}L_{n+r} + \widetilde{P}_{n-r}L_{n-r} + \varepsilon(\widetilde{P}_{n+r+1}L_{n+r} + \widetilde{P}_{n-r+1}L_{n-r}) \\
&= (\widetilde{P}_{n+r}L_{n+r} - \widetilde{P}_{n-r}L_{n-r})(1+\varepsilon)
\end{aligned}$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra ve Lemma 3.2.2 deki tanımlamalar da kullanılarak;

$$\widetilde{\widetilde{P}}_{n+r}L_{n+r} + \widetilde{\widetilde{P}}_{n-r}L_{n-r} = [L_{2r}\widetilde{\widetilde{P}}_{2n} + 2(-1)^{n+r}P_0](1+\varepsilon)$$

elde edilir. ∎

Eş. 4.11 için Lemma 3.2.1 deki $\lambda, \omega_1, \omega_2, \mu, (\alpha^*)^2, (\beta^*)^2, \alpha^*\beta^*$ ve $\beta^*\alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{n+r}F_{n+t} + \tilde{P}_{n+t}F_{n+r} &= \frac{1}{\alpha-\beta}[(\alpha^*\alpha^{n+r} + \beta^*\beta^{n+r})(\alpha^{n+t} - \beta^{n+t}) \\
&\quad + (\alpha^*\alpha^{n+t} + \beta^*\beta^{n+t})(\alpha^{n+r} - \beta^{n+r})] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}[(\alpha^*\alpha^{2n+r+t} - \alpha^*\alpha^{n+r}\beta^{n+t} + \beta^*\beta^{n+r}\alpha^{n+t} \\
&\quad - \beta^*\beta^{2n+r+t} + \alpha^*\alpha^{2n+r+t} \\
&\quad - \alpha^*\alpha^{n+t}\beta^{n+r} + \beta^*\beta^{n+t}\alpha^{n+r} - \beta^*\beta^{2n+r+t}] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}[2(\alpha^*\alpha^{2n+r+t} - \beta^*\beta^{2n+r+t}) - \alpha^*(\alpha^{n+r}\beta^{n+t} + \alpha^{n+t}\beta^{n+r}) \\
&\quad + \beta^*(\beta^{n+r}\alpha^{n+t} + \beta^{n+t}\alpha^{n+r})] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}[2(\alpha^*\alpha^{2n+r+t} - \beta^*\beta^{2n+r+t}) \\
&\quad - (\alpha^{n+r}\beta^{n+t} + \alpha^{n+t}\beta^{n+r})(\alpha^* - \beta^*)] \\
&= 2\frac{\alpha^*\alpha^{2n+r+t} - \beta^*\beta^{2n+r+t}}{\alpha-\beta} - (\alpha\beta)^{n+t}(\alpha^{r-t} + \beta^{r-t})\frac{\alpha^* - \beta^*}{\alpha-\beta} \\
&= 2\tilde{Q}_{2n+r+t} - (-1)^{n+t}L_{r-t}Q_0
\end{aligned}$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{P}}_{n+r}F_{n+t} + \tilde{\tilde{P}}_{n+t}F_{n+r} &= (\tilde{P}_{n+r} + \varepsilon\tilde{P}_{n+r+1})F_{n+t} + (\tilde{P}_{n+t} + \varepsilon\tilde{P}_{n+t+1})F_{n+r} \\
&= \tilde{P}_{n+r}F_{n+t} + \tilde{P}_{n+t}F_{n+r} + \varepsilon(\tilde{P}_{n+r+1}F_{n+t} + \tilde{P}_{n+t+1}F_{n+r}) \\
&= (\tilde{P}_{n+r}F_{n+t} + \tilde{P}_{n+t}F_{n+r})(1+\varepsilon)
\end{aligned}$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra ve Lemma 3.2.2 deki tanımlamalar da kullanılarak;

$$\tilde{\tilde{P}}_{n+r}F_{n+t} + \tilde{\tilde{P}}_{n+t}F_{n+r} = 2\tilde{\tilde{Q}}_{2n+r+t} - (-1)^{n+t}L_{r-t}Q_0(1+\varepsilon)$$

elde edilir. ∎

4.3. Teorem:

$$\lambda = -e_1 - e_2 + 4e_3 - 3e_4 + 9e_5 + 6e_6 - 6e_7$$

olmak üzere;

$$\tilde{\tilde{Q}}_n \tilde{\tilde{Q}}_m - \tilde{\tilde{Q}}_m \tilde{\tilde{Q}}_n = 2(-1)^{m+1} \lambda F_{n-m}(1+\varepsilon) \tag{4.12}$$
$$\tilde{\tilde{P}}_n \tilde{\tilde{P}}_m - \tilde{\tilde{P}}_m \tilde{\tilde{P}}_n = 10(-1)^{m} \lambda F_{n-m}(1+\varepsilon) \tag{4.13}$$

dır.

İspat

Split Fibonacci ve Lucas oktonyonlar için verilen Binet formüllerini kullanalım.

Eş. 4.12 için;

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_n \tilde{Q}_m - \tilde{Q}_m \tilde{Q}_n &= \frac{1}{5}[(\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n)(\alpha^* \alpha^m - \beta^* \beta^m) \\ &\quad - (\alpha^* \alpha^m - \beta^* \beta^m)(\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n)] \\ &= \frac{1}{5}[-\alpha^* \beta^* \alpha^n \beta^m - \beta^* \alpha^* \alpha^m \beta^n + \alpha^* \beta^* \alpha^m \beta^n + \beta^* \alpha^* \alpha^n \beta^m]\end{aligned}$$

olur. Lemma 3.2.1 deki $\lambda, \omega_1, \omega_2, \mu, (\alpha^*)^2, (\beta^*)^2, \alpha^* \beta^*$ ve $\beta^* \alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_n \tilde{Q}_m - \tilde{Q}_m \tilde{Q}_n &= \frac{1}{5}[-\alpha^n \beta^m 2\sqrt{5}\lambda + \alpha^m \beta^n 2\sqrt{5}\lambda] \\ &= \frac{-2\sqrt{5}}{5} \lambda \alpha^m \beta^m (\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}) \\ &= 2(-1)^{m+1} \lambda F_{n-m}\end{aligned}$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{Q}}_n\tilde{\tilde{Q}}_m-\tilde{\tilde{Q}}_m\tilde{\tilde{Q}}_n &= (\tilde{Q}_n+\varepsilon\tilde{Q}_{n+1})(\tilde{Q}_m+\varepsilon\tilde{Q}_{m+1})-(\tilde{Q}_m+\varepsilon\tilde{Q}_{m+1})(\tilde{Q}_n+\varepsilon\tilde{Q}_{n+1})\\
&=\tilde{Q}_n\tilde{Q}_m+\varepsilon\tilde{Q}_n\tilde{Q}_{m+1}+\varepsilon\tilde{Q}_{n+1}\tilde{Q}_m-\tilde{Q}_m\tilde{Q}_n-\varepsilon\tilde{Q}_m\tilde{Q}_{n+1}-\varepsilon\tilde{Q}_{m+1}\tilde{Q}_n\\
&=\tilde{Q}_n\tilde{Q}_m-\tilde{Q}_m\tilde{Q}_n+\varepsilon(\tilde{Q}_n\tilde{Q}_{m+1}+\tilde{Q}_{n+1}\tilde{Q}_m-\tilde{Q}_m\tilde{Q}_{n+1}-\tilde{Q}_{m+1}\tilde{Q}_n)\\
&=\tilde{Q}_n\tilde{Q}_m-\tilde{Q}_m\tilde{Q}_n+\varepsilon(\tilde{Q}_n\tilde{Q}_m-\tilde{Q}_m\tilde{Q}_n)\\
&=(\tilde{Q}_n\tilde{Q}_m-\tilde{Q}_m\tilde{Q}_n)(1+\varepsilon)
\end{aligned}$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra ve Lemma 3.2.2 deki tanımlamalar da kullanılarak;

$$\tilde{\tilde{Q}}_n\tilde{\tilde{Q}}_m-\tilde{\tilde{Q}}_m\tilde{\tilde{Q}}_n=2(-1)^{m+1}\lambda F_{n-m}(1+\varepsilon)$$

elde edilir. ■

Eş. 4.13 için Lemma 3.2.1 deki $\lambda,\omega_1,\omega_2,\mu,(\alpha^*)^2,(\beta^*)^2,\alpha^*\beta^*$ ve $\beta^*\alpha^*$ ifadelerinin eşitlikleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_n\tilde{P}_m-\tilde{P}_m\tilde{P}_n &= (\alpha^*\alpha^n+\beta^*\beta^n)(\alpha^*\alpha^m+\beta^*\beta^m)\\
&\quad -(\alpha^*\alpha^m+\beta^*\beta^m)(\alpha^*\alpha^n+\beta^*\beta^n)\\
&=\alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^m+\beta^*\alpha^*\alpha^m\beta^n-\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n-\beta^*\alpha^*\alpha^n\beta^m\\
&=\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^m(\alpha^{n-m}-\beta^{n-m})-\beta^*\alpha^*\alpha^m\beta^m(\alpha^{n-m}-\beta^{n-m})\\
&=\alpha^m\beta^m(\alpha^{n-m}-\beta^{n-m})(\alpha^*\beta^*-\beta^*\alpha^*)\\
&=(-1)^m.(\alpha-\beta)\frac{\alpha^{n-m}-\beta^{n-m}}{\alpha-\beta}2\sqrt{5}\lambda\\
&=10(-1)^m\lambda F_{n-m}
\end{aligned}$$

split oktonyonlar için elde edilir. Eş 3.1 den;

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{P}}_n\tilde{\tilde{P}}_m-\tilde{\tilde{P}}_m\tilde{\tilde{P}}_n &= (\tilde{P}_n+\varepsilon\tilde{P}_{n+1})(\tilde{P}_m+\varepsilon\tilde{P}_{m+1})-(\tilde{P}_m+\varepsilon\tilde{P}_{m+1})(\tilde{P}_n+\varepsilon\tilde{P}_{n+1}) \\
&= \tilde{P}_n\tilde{P}_m+\varepsilon\tilde{P}_n\tilde{P}_{m+1}+\varepsilon\tilde{P}_{n+1}\tilde{P}_m-\tilde{P}_m\tilde{P}_n-\varepsilon\tilde{P}_m\tilde{P}_{n+1}-\varepsilon\tilde{P}_{m+1}\tilde{P}_n \\
&= \tilde{P}_n\tilde{P}_m-\tilde{P}_m\tilde{P}_n+\varepsilon(\tilde{P}_n\tilde{P}_{m+1}+\tilde{P}_{n+1}\tilde{P}_m-\tilde{P}_m\tilde{P}_{n+1}-\tilde{P}_{m+1}\tilde{P}_n) \\
&= \tilde{P}_n\tilde{P}_m-\tilde{P}_m\tilde{P}_n+\varepsilon(\tilde{P}_n\tilde{P}_m-\tilde{P}_m\tilde{P}_n) \\
&= (\tilde{P}_n\tilde{P}_m-\tilde{P}_m\tilde{P}_n)(1+\varepsilon)
\end{aligned}$$

olup benzer işlemler yapıldıktan sonra

$$\tilde{\tilde{P}}_n\tilde{\tilde{P}}_m-\tilde{\tilde{P}}_m\tilde{\tilde{P}}_n=10(-1)^m\lambda F_{n-m}(1+\varepsilon)$$

elde edilir. ■

KAYNAKLAR

1. Akyiğit, M. Köksal, H.H. Tosun, M. (2014). Fibonacci Generalized Quaternions. *Adv. App Clifford Algebr*, 24, 631-641.

2. Clifford, W.K. (1873). *Preliminary Sketch of Bi-quaternions*. Proc. London Math. Soc, 4: 381-395.

3. Halıcı, S. (2012). On Fibonacci Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebr*, 22:321-327.

4. Halıcı, S. (2015). On Dual Fibonacci Octonions. *Adv. Appl. Clifford Algebr*, 25:905-914.

5. Horadam, A.F. (1963). Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions. *Amer. Math. Monthly*, 70:289-291.

6. Horadam, A.F. (1993). Quaternion Recurrence Relations. *Ulam Quarterly,* 2. 23-33.

7. Iakin, A.L. (1977). Generalized Quaternions of Higher Order. *The Fib. Quarterly*, 15, 343-346.

8. Iyer, M.R. (1969). A Note on Fibonacci Quaternions. *The Fib. Quarterly*, 3. 225-229.

9. Keçilioğlu, O. Akkuş, İ. (2015). The Fibonacci Octonions, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 25:151-158.

10. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. A Wiley-Interscience Publication, USA.

11. Ramirez, J.L. (2015). Some Combinatorial Properties of the k-Fibonacci and the k-Lucas Quaternions. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 23(2), 201-212.

12. Swamy, M.N.S. (1973). On Generalized Fibonacci Quaternions. *The Fib. Quaterly*, 5, 547-550.

13. Tan, E. Yilmaz, S. Şahin, (2016). M. On a New Generalized Fibonacci Quaternions. Chaos, *Solitons and Fractals,* 82, 1-4.

14. Ünal, Z. Tokeşer, Ü. Bilgici, G. (2017). “Some Properties of Dual Fibonacci and Dual Lucas Octonions”, *Adv. Appl. Clifford Algebr,* 27 (2), 1907-1916.

15. Bilgici, G. Ünal, Z. Tokeşer, Ü. Mert, T. (2018). On Fibonacci and Lucas Generalized Octonions, *Ars Combinatoria*, 138, 35-44.

16. Akkuş, İ. Keçilioğlu, O. (2015). Split Fibonacci and Lucas Octonions. *Adv. Appl. Clifford Algebr*, 25:517-525.

17. Hacısalihoğlu, H.H. (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara, 2-8.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yakup DÜNDAR
Doğum Yeri ve Yılı : Boyabat - 1981
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : dymatematik@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Samsun Akpınar Anadolu Öğretmen Lisesi - 1998
Lisans : Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi O.Ö. Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Matematik Öğretmenliği - 2006

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Maltepe Birey Dershanesi (2006 - 2009)
İş Yeri : Erfelek Şehit Özkan Çelikkaya ÇPL (2010 - 2011)
İş Yeri : Ayancık Lisesi (2011 - 2012)
İş Yeri : Taşköprü Lisesi (2012 - 2015)
İş Yeri : Kastamonu Bilim ve Sanat Merkezi (2015 - Halen)