T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL FIBONACCI VE LUCAS OKTONYONLAR

Meral DEMİRCİ

Danışman Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL
Jüri Üyesi Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ
Jüri Üyesi Doç. Dr. Ahmet EROĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASTAMONU – 2019

TEZ ONAYI

Meral DEMİRCİ tarafından hazırlanan **"Dual Fibonacci ve Dual Lucas Oktonyonlar"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Ahmet EROĞLU Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi	....

03/05/2019

Enstitü Müdürü Prof. Dr. Hasbi YAPRAK ....

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

Meral DEMİRCİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DUAL FIBONACCI VE LUCAS OKTONYONLAR

Meral DEMİRCİ
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi. Zafer ÜNAL

Bu tezde, dual Fibonacci ve dual Lucas oktonyonları verilmiştir.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin önemi irdelenmiştir. İkinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, Fibonacci ve Lucas oktonyonları verilmiştir. Dördüncü bölümde, dual Fibonacci ve Lucas oktonyonları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Oktonyon, Fibonacci ve Lucas sayıları, dual oktonyon, Binet formülü

2019, 44 sayfa
Bilim Kodu: 204

ABSTRACT

MSc. Thesis

DUAL FIBONACCI AND LUCAS OCTONIONS

Meral DEMİRCİ
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathemathics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Zafer ÜNAL

This thesis consists of four parts.
In the first chapter, the importance of the thesis has been discussed. In the second chapter, the basic definitions and concepts used in the thesis have been given. In the third chapter, Fibonacci and Lucas octonions are discussed. In the fourth chapter, dual Fibonacci and Lucas octonions have been given.

Keywords: Octonion, Fibonacci and Lucas numbers, Dual Octonion, Binet's formula.

2019, 44 pages
Science Code: 204

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan değerli hocam Sayın. Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü) 'a teşekkürlerimi borç bilirim.

Her zaman yanımda olan aileme gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Meral DEMİRCİ

Kastamonu, Mayıs, 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	Açıklaması
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{K}$	Kuaterniyonların Kümesi
$\mathbb{O}$	Oktonyonlar Kümesi
N_q	q Kuaterniyonun Normu
S_q	q Kuaterniyonun Skaler kısmı
V_q	q Kuaterniyonun Vektörel Kısmı
F_n	n-yinci Fibonacci Dizisi
L_n	n-yinci Lucas Dizisi
U_n	n-yinci Fibonacci
V_n	n-yinci Lucas oktonyonları
$\tilde{U}_n$	n-yinci Dual Fibonacci Oktonyon
$\tilde{V}_n$	n-yinci Dual Lucas Oktonyon

TABLOLAR DİZİNİ

1. GİRİŞ

Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları Horadam tarafından tanımlanmıştır [2]. Birçok yazar Fibonacci veya genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları ile ilgilenmiştir. Bu çalışmaların bazıları [3,5,7,9].

Karmaşık sayılar teorisini sağlam bir matematiksel temel üzerine yerleştirme girişiminin dönüm noktasını İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton'ın (1805-1865) çalışması oluşturmuştur. Hamilton, gerçek kısım ve sanal kısımdan oluşan iki boyutlu karmaşık sayıların üç boyutlu ifade edilmesi üzerine çalışıyordu ve karmaşık sayıları üç boyutlu uzaya genişletmeyi umuyordu. Kuaterniyonların keşfine kadar, uzayda noktalar sayı üçlü-leri olarak gösteriliyordu. Hamilton üçlüleri a, b ve c'nin asal sayılar $i^2 = j^2 = -1$ olması durumunda $a+bi+cj$ şeklinde yazılır. Bu üçlülerle toplama, çıkarma işlemleri yapılabiliyor fakat çarpma ve bölme yapılamıyordu. Toplama ve çıkarma işlemlerinde her i ve j biriminin katsayılarının toplamı veya farkı alınarak hesaplanır:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j) + (a_2 + b_2 i + c_3 j) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j$$

Üçlülerin çarpımı için Hamilton $a_1 + b_1 i + c_1 j$ üçlüsünün karesini alma şeklindeki en basit durumu ele almıştır.

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j)^2 = a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 + 2a_1 b_1 i + 2a_1 c_1 j + 2bc_1 ij$$

elde etmiştir [13].

$n > 2$ için n adet sayının çarpımı Hamilton'ı on yıl kadar uğraştırmış ancak bir çözüme ulaşamamıştır. Bir gün karısıyla Dublin'de Royal Canal'da gezinirken bir içgörü anında çarpmadaki yer değiştirme yasasını bir kenara atıp üçlü sıralama yerine dörtlü sıralamayı kullanırsa karşılaştığı sorunun ortadan kalkacağını fark etti. Dörtlü sıralamada, $a + bi + cj + dk$ için $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ alınması gerektiğini kabul etmiştir. Bu aşamadan yola çıkarak $ij = k$ diyebileceğini $ji = -k$, aynı şekilde $jk = i = -kj$ ve $ki = j = -ik$ olması gerektiğini düşünmüştür.

Lobachevski'nin paralellik postulatını dışlayarak kendi içinde tutarlı yeni bir geometri kurgulaması gibi Hamilton da çarpmadaki yer değiştirme kuralını yok sayarak kendi içinde tutarlı bir cebir ortaya koymuştur. Yürürken bir anda durmuş ve bir çakıyla temel formülü $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ biçiminde Royal Canal'daki Brougham Köprüsünün taşlarına kazımıştır. Aynı gün İrlanda Kraliyet Akademisi'ne giderek keşfini ilan etmiştir. Buluş ani bir esin sonucu gerçekleşmiş fakat Hamilton keşfi üzerinde on beş yıla yakın bir süre uğraşmıştır [11]. Günümüzde kuaterniyonlar özellikle fizik, kinematik, bilgisayar grafikleri, animasyon, katı cisimler dönüşümleri içeren optimizasyon problemlerinde kullanılmaktadır. 1849 yılında James Cackle tarafından bölüntülü kuaterniyonlar ileri sürülmüştür.

Hamilton'un kuaterniyonları keşfinin ilk üç ayı içerisinde, John Graves sekiz birim elemanlı bir sistem olan oktonyonlar sonucuna varmıştır. Bu cebirdeki çarpma sadece sıra bağımlı değil aynı zamanda birleşme kuralına da sahip değildir. 1845 yılında Arthur Cayley, Graves'in oktonyonları ile temelde aynı olan bir cebir tanımlayan çalışmasını yayınlamıştır [13].

Kuaterniyonlar ve oktonyonlar hakkında özellikle son yıllarda artan pek çok çalışma yapılmıştır. Keçilioğlu ve Akkuş [8] çalışmalarında Fibonacci ve Lucas oktonyonlar ile Split Fibonacci ve Split Lucas Oktonyonları [10] tanımlamış ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar çıkarmıştır. Halıcı [4] dual Fibonacci oktonyonları üzerine çalışmasında üreteç fonksiyonunu ve Binet formülünü elde etmiştir. Bilgici, Ünal, Tokeşer ve Mert [12] genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Oktonyonları ile ilgili çalışmalarında önemli sonuçlar bulmuşlardır. 1830 yılından itibaren İrlandalı Sir William Rowan Hamilton kompleks sayılar üzerinde çalışmış. 1833 te iki reel sayıdan oluşan kompleks sayıların bir cebir oluşturduğu sonucuna varmıştır. Clifford reel sayıları dual sayılara genişletmiştir [1]. Hacısalihoğlu, Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi adlı kitabında dual sayılara kuaterniyonlara ve dual kuaterniyonlara geniş yer ayırarak konuya değinmiştir [4].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde bazı temel kavramları ve teoremleri ele alalım. İlk olarak reel kuaterniyonlar kümesi ile ilgili bazı tanımları vereceğiz.

Tanım 2.1

Tüm kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{K} = \left\{ a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k} : a, b, c, d \ \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak ifade edilmiştir. Burada $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$; $\mathbb{R}^3$ ün ortonormal temel baz vektörleri ve

$$\begin{aligned} \hat{\imath}^2 &= \hat{\jmath}^2 = \hat{k}^2 = -1 \\ \hat{i}\hat{j} &= -\hat{j}\hat{k} = \hat{k} \\ \hat{j}\hat{k} &= -\hat{k}\hat{j} = -\hat{i} \\ \hat{k}\hat{i} &= -\hat{i}\hat{k} = \hat{j} \end{aligned}$$

şartlarını sağlar.

Bir $q = a + b\hat{\imath} + c\hat{\jmath} + d\hat{k}$ kuaterniyonunun skaler kısmı, S_q ve vektörel kısmı, V_q olarak gösterilir. Buna göre $S_q = a$ ve $V_q = b\hat{\imath} + c\hat{\jmath} + d\hat{k}$ olup herhangi bir q kuaterniyonu $q = S_q + V_q$ şeklinde ifade edilir [4].

Tanım 2.2

Toplama İşlemi;

$$\begin{aligned} \oplus : \quad & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \quad \mathbb{K} \\ & (q_1, q_2) \rightarrow \quad q_1 \oplus q_2 = S_{q_1+q_2} + V_{q_1+q_2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [4].

Tanım 2.3

Skaler ile Çarpma:

$$\begin{aligned} \odot: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{K} \rightarrow & \quad \mathbb{K} \\ (\lambda, q) \rightarrow & \quad \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \overrightarrow{V_q} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikler sağlanır.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{K}$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall q \in \mathbb{K}$ için

• $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = \lambda \odot q_1 \oplus \lambda \odot q_2,$

• $(\lambda + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)\,,$

• $(\lambda_1 \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)\,,$

•$1 \odot q = q$ [4].

Tanım 2.4

Çarpma (Kuaterniyon Çarpma)

$$\begin{aligned} \times: \quad \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow & \quad \mathbb{K} \\ (q_1, q_2) \rightarrow & \quad q_1 \times q_2 \end{aligned}$$

işlemi aşağıdaki çarpım tablosu ile tanımlanır:

Tablo 2.1. Çarpım Tablosu

$\times$	1	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
1	1	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	$\hat{i}$	-1	$\hat{k}$	$-\hat{j}$
$\hat{j}$	$\hat{j}$	$-\hat{k}$	-1	$\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{i}$	-1

Tablo 2.1 den

$$\begin{aligned}
q_1 \times q_2 &= \left(a_1 + b_1\hat{i} + c_1\hat{j} + d_1\hat{k}\right) \times \left(a_2 + b_2\hat{i} + c_2\hat{j} + d_2\hat{k}\right) \\
&= q_1q_2 - b_1b_2 + c_1c_2 + \left(d_1d_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2\right)\hat{i} \\
&\quad + \left(a_1c_2 + c_1a_2 + d_1a_2 - b_1d_2\right)\hat{j} \\
&\quad + \left(a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - c_1b_2\right)\hat{k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece kuaterniyon çarpımınının şu özelliklere sahip olduğu görülür.

- İki kuaterniyon çarpımı bir kuaterniyondur,
- Kuaterniyon çarpımı birleşme özelliğine sahiptir,
- Kuaterniyon çarpımı dağılma özelliğine sahiptir.

Kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir. Bu özellikleri ile $\{\mathbb{K}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times\}$ sistemi bir birleşmeli kümedir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir. $\mathbb{K}$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.5

Eşitlik: Kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı her $q_1, q_2 \in \mathbb{K}$ için

$$q_1 = q_2 \iff S_{q_1} = S_{q_2},\ \overrightarrow{V_{q_1}} = \overrightarrow{V_{q_2}}$$

ve şeklinde tanımlanır.

Fark: Toplama ve skaler ile çarpma işlemlerinde iki kueterniyonun farkı

$$q_1 - q_2 = \left(S_{q_1} - S_{q_2}\right) + \left(\overrightarrow{V_{q_1}} - \overrightarrow{V_{q_2}}\right)$$

yani $S_{q_1-q_2} = S_{q_1} - S_{q_2}$, $\overrightarrow{V_{q_1-q_2}} = \overrightarrow{V_{q_1}} - \overrightarrow{V_{q_2}}$ olarak tanımlanır.

Eşlenik: $K : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $q \to K(q) = K_q$ işlemi $q = S_q + \overrightarrow{V_q} \longrightarrow K_q = S_q - \overrightarrow{V_q}$ şeklinde tanımlanır ve K_q kuaterniyonuna q nun eşleniği denir. $\overrightarrow{V_{K_q}} = -\overrightarrow{V_q}$ olduğundan

$$q \times K_q = K_q \times q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}$$

dır. O halde; $q \times K_q = K_q \times q \geq 0$ dır ve $q \times K_q = K_q \times q = 0 \iff q = 0$ dır. Eşlenik işleminin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu açıktır.

• $K(aq_1 + bq_2) = aK_{q_1} + bK_{q_2}$;

• $K(q_1 \times q_2) = K_{q_1} \times K_{q_2}$;

• $K(K_q) = q$.

O halde eşlenik işlemi $\mathbb{K}$ cebirinde bir involusyonlu bağıntıdır.

Norm:

$$\begin{aligned} N: \quad & \mathbb{K} \to \mathbb{R} \\ & q \longrightarrow N(q) = N_q = q \times K_q = K_q \times q \end{aligned}$$

veya $q = a + b\hat{\imath} + c\hat{\jmath} + d\hat{k}$ ise $N_q = q \times K_q = K_q \times q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ pozitif reel sayısına q kuaterniyonunun normu denir. q kuaterniyonun çarpmanın normu için aşağıdaki özellik verilebilir:

$$\begin{aligned} N(q_1 \times q_2) &= N(q_1 \times q_2)\,1 = (q_1 \times q_2)\,K(q_1 \times q_2) \\ &= q_1 \times (N(q_2)\,1)\,K_q = N(q_2)\,1 N(q_1)\,1 \\ &= N(q_1)\,N(q_2) \end{aligned}$$

İnvers:

$$\begin{aligned} ()^{-1}: \quad \mathbb{K} - \{0\} &\longrightarrow \quad \mathbb{K} - \{0\} \\ q &\longrightarrow \quad q^{-1} = \tfrac{K_q}{\mathbb{N}_q} \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece $q \times q^{-1} = q^{-1} \times q = 1$ elde edilir [4].

Şimdi Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.6

$n > 0$ için $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ başlangıç koşulları ile verilen Fibonacci sayıları

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

şeklindedir.

Aynı bağıntı ile verilen fakat başlangıç noktaları $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ olan Lucas sayıları

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

şeklinde tanımlanır [6].

Teorem 2.1

$x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olan $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{1.1}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{1.2}$$

şeklindedir [1].

Fibonacci ve Lucas sayılarının Vajda teoremlerini verelim:

Teorem 2.2

$i, j, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} &= (-1)^n F_jF_i \\ L_{n+i}L_{n+j} - L_nL_{n+i+j} &= (-1)^{n+1} 5F_iF_j \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Binet formülünden yararlanarak,

$$
\begin{aligned}
F_{n+i}F_{n+j}-F_nF_{n+i+j} &= \left(\frac{\alpha^{n+i}-\beta^{n+i}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+j}-\beta^{n+j}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad -\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+i+j}-\beta^{n+i+j}}{\alpha-\beta}\right) \\
&= \left[\frac{-(-1)^n\alpha^i\beta^j-(-1)^n\beta^i\alpha^j}{(\alpha-\beta)^2}\right]-\left[\frac{-(-1)^n\beta^{i+j}-(-1)^n\alpha^{i+j}}{(\alpha-\beta)^2}\right] \\
&= (-1)^n\left(\frac{\alpha^{i+j}+\beta^{i+j}-\alpha^i\beta^j-\beta^i\alpha^j}{(\alpha-\beta)^2}\right) \\
&= (-1)^n\left[\frac{\alpha^i\left(\alpha^j-\beta^j\right)}{(\alpha-\beta)^2}-\frac{\beta^i\left(\alpha^j-\beta^j\right)}{(\alpha-\beta)^2}\right] \\
&= (-1)^n\left(\frac{\alpha^j-\beta^j}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^i-\beta^i}{\alpha-\beta}\right) \\
&= (-1)^n F_jF_i
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Lucas sayıları için Vajda özdeşliği

Binet formülünden yararlanarak;

$$
\begin{aligned}
L_{n+i}L_{n+j}-L_nL_{n+i+j} &= \left(\alpha^{n+i}+\beta^{n+i}\right)\left(\alpha^{n+j}+\beta^{n+j}\right) \\
&\quad -\left(\alpha^{n}+\beta^{n}\right)\left(\alpha^{n+i+j}+\beta^{n+i+j}\right) \\
&= (-1)^n\left[\alpha^i\beta^j+\beta^i\alpha^j-\beta^{i+j}-\alpha^{i+j}\right] \\
&= (-1)^n\left[-\alpha^i\left(\alpha^j-\beta^j\right)+\beta^i\left(\alpha^j-\beta^j\right)\right] \\
&= (-1)^n\left(\alpha^j-\beta^j\right)\left(\beta^i-\alpha^i\right) \\
&= (-1)^{n+1}\left(\alpha^j-\beta^j\right)\left(\alpha^i-\beta^i\right) \\
&= (-1)^{n+1}5F_iF_j
\end{aligned}
$$

elde edilir.■

Tanım 2.8

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi $(+)$ toplama $(\cdot)$ çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. Reel sayılar cismi de $\mathbb{R}$ ile gösterilsin. $\forall\ a, a^*$ ikilisine bir sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin.

$\mathbb{D} = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$ kümesi üzerinde bir eşitlik ve iki iç işlem aşağıdaki gibi tanımlanır [4].

Tanım 2.9

$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ iç işleminde A ile B sırasıyla (a, a^*) ve (b, b^*) için

$$A \oplus B = (a, a^*) + (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

biçiminde yapılır [4].

Tanım 2.10

$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ iç işleminde A ile B sırasıyla (a, a^*) ve (b, b^*) şeklinde alınırsa tanımı $A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab,\ ab^* + a^*b)$ biçiminde yapılır. $\mathbb{D}$ üzerindeki tanımlı işlemi çarpma olarak adlandırılır [4].

Tanım 2.11

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi iken $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi üzerinde eşitlik,toplama ve çarpma işlemleri yukarıdaki gibi tanımlandığında $\mathbb{D}$ kümesine dual sayılar sistemi ve bu eşitliği sağlayan her bir $\mathbb{D}$ elemanına da bir dual sayı denir [4].

Tanım 2.12

$A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısında "a^*" reel sayısına A nın dual kısmı, "a" reel sayısına da A nın reel kısmı denir ve $ReA = a$, $DuA = a^*$ biçiminde tanımlanır.

$i = 0, 1, 2, 3$ için $a_i, a_i^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ ve $a^* = a_0^* + a_1^*e_1 + a_2^*e_2 + a_3^*e_3$ reel kuaterniyonlar yardımıyla bir dual kuaterniyon $A = a + \varepsilon a^*, \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0$ şeklinde tanımlanır. Bu dual kuaterniyonu $A = A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$ olarak yazmak mümkündür. Burada

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 + \varepsilon e_0^* \\ A_1 &= a_1 + \varepsilon e_1^* \\ A_2 &= a_2 + \varepsilon e_2^* \\ A_3 &= a_3 + \varepsilon e_3^* \end{aligned}$$

şeklindedir ve $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3$ sayıları A nın dual bileşenleri olarak adlandırılır. Dual kuaterniyonu kısaca

$$A = \sum_{s=0}^{3} A_s e_s$$

şeklinde ifade edebiliriz [4].

Bir dual kuaterniyonun skaler ve vektörel kısımları sırası ile $S_A, \vec{V}_A$ ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} S_A &= S_a + \varepsilon S_{a^*} = A_0 \\ \vec{V}_A &= \vec{V}_a + \varepsilon \vec{V}_a^* = A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Bir dual kuaterniyonun skaler kısmı bir dual sayıdır, vektörel kısmı ise bir dual vektördür. Buna göre bu dual sayıyı

$$\begin{aligned} A &= S_A + \vec{V}_A \\ A &= A_0 + \sum_{s=1}^{3} A_s e_s \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz [4].

Tanım 2.9

ε dual birim olmak üzere sırasıyla dual Fibonacci ve dual Lucas sayıları:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_n &= F_n + \varepsilon F_{n+1} \\ \tilde{L}_n &= L_n + \varepsilon L_{n+1}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 2.10

Reel sayılar üzerindeki oktonyonlar cebirini $\mathbb{O}$ şeklinde gösterelim. $q^{'}, q^{"} \in \mathbb{K}$ olmak üzere Cayley-Dickson metodu kullanılarak p oktonyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$p = q^{'} + q^{"}e$$

Reel sayılar üzerindeki oktonyonlar cebiri için doğal baz $e_0 = 1,\ e_1 = i,\ e_2 = j,\ e_3 = k,\ e_4 = e,\ e_5 = ie, e_6 = je,\ e_7 = ke$ şeklinde ve herhangi bir p oktonyonu $p_0, ..., p_7 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$p = \sum_{s=0}^{7} a_s e_s$$

şeklindedir [8].

$Re(p) = a_0$ ve $Im(p) = \sum_{s=1}^{7} a_s e_s$ olmak üzere herhangi bir $p \in \mathbb{O}$ için

$$p = a_0 + \sum_{s=1}^{7} a_s e_s = Re(p) + Im(p)$$

şeklinde ifade edilir [8].

Bir p oktonyonunun eşleniği ve normu sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\bar{p} = Re(p) - Im(p)$$

ve

$$N_p = p\bar{p} = \bar{p}p = \sum_{s=0}^{7} a_s^2.$$

Sıfırdan farklı herhangi bir oktonyonun inversi(tersi)

$$p^{-1} = \frac{\bar{p}}{N_p}$$

şeklindedir [8].

$\overline{q_1^{'}}, \overline{q_2^{'}}$ sırasıyla $q_1^{'}$ ve $q_2^{'}$ kuaterniyonlarının eşlenikleri $p_1 = q_1^{'}+q_1^{''}e$ ve $p_2 = q_2^{'}+q_2^{''}e$ olsun. Oktonyonlar cebirine göre iki oktonyonun toplam ve çarpımı :

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= \left(q_1^{'} + q_1^{''}e\right) + \left(q_2^{'} + q_2^{''}e\right) = q_1^{'} + q_2^{'} + \left(q_1^{''} + q_2^{''}\right)e \\ p_1p_2 &= \left(q_1^{'} + q_1^{''}e\right)\left(q_2^{'} + q_2^{''}e\right) = \left(q_1^{'}q_2^{'} - \overline{q_2^{''}}q_1^{''}\right) + \left(q_2^{''}q_1^{'} + q_1^{''}\overline{q_2^{'}}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Reel sayılar üzerinde 8 boyutlu oktonyonlar tanımlanan cebire göre değişme ve birleşme özelliklerine sahip değillerdir [8].

3. FIBONACCI VE LUCAS OKTONYONLARI

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas oktonyonları ile ilgili bazı tanım ve teoremleri vereceğiz.

Keçilioğlu ve Akkus, Fibonacci ve Lucas oktonyonlarını ve onların Binet formüllerini tanıtmıştır. F_n ve L_n n'inci Fibonacci ve Lucas sayıları ve $\{e_0, e_1, ..., e_7\}$ oktonyonların standart temeli olduğu taktirde n-yinci Fibonacci ve Lucas oktonyonları sırasıyla

$$U_n = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s} e_s$$

ve

$$V_n = \sum_{s=0}^{7} L_{n+s} e_s$$

şeklindedir [8].

$\{e_0 = 1, e_1, ..., e_7\}$ standart taban elemanlarının çarpım tablosu aşağıdaki gibidir:

Tablo 3.1.Oktonyon bazlarının çarpımı [5]

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	1

Binet formülü ile Fibonacci ve Lucas oktonyonları sırasıyla;

$$U_n = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$V_n = \alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n$$

şeklinde gösterilir. Burada $\alpha^* = \sum\limits_{s=0}^{7} \alpha^s e_s$ $\beta^* = \sum\limits_{s=0}^{7} \beta^s e_s$ şeklindedir.[5]

Şimdi Fibonacci ve Lucas oktonyonları için Catalan özdeşliklerini verelim.

Teorem 3.1

n, r negatif olmayan tamsayılar ve $\lambda = 2e_5 + 2e_6 + e_7$ olsun. O halde Fibonacci ve Lucas oktonyonları için, Catalan özdeşliği aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} U_n^2 - U_{n+r}U_{n-r} &= (-1)^{n+r}\left[F_r^2 V_0 - F_{2r}\left(U_0 - 14e_5 - 14e_6 - 7e_7\right)\right] \\ V_n^2 - V_{n+r}V_{n-r} &= 5\left(-1\right)^{n-r+1}\left[F_r^2 V_0 - F_{2r}\left(U_0 - 7\lambda\right)\right] \end{aligned}$$

[8].

İspat

$$
\begin{aligned}
U_n^2 - U_{n+r}U_{n-r} &= \left(\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+r} - \beta^*\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n-r} - \beta^*\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right) \\
&= \left[\left(\frac{(\alpha^*)^2\alpha^{2n} - \alpha^*\beta^*(\alpha\beta)^n - \beta^*\alpha^*(\alpha\beta)^n + (\beta^*)^2\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{(\alpha^*)^2\alpha^{2n} - \alpha^*\beta^*(\alpha\beta)^n\alpha^r\beta^{-r} - \beta^*\alpha^*(\alpha\beta)^n\beta^r\alpha^{-r} + (\beta^*)^2\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[(\alpha^*)^2\alpha^{2n} - \alpha^*\beta^*(-1)^n - \beta^*\alpha^*(-1)^n + (\beta^*)^2\beta^{2n}\right. \\
&\quad \left. - (\alpha^*)^2\alpha^{2n} - \alpha^*\beta^*(-1)^{n+r}\alpha^{2r} - \beta^*\alpha^*(-1)^{n+r}\beta^{2r} + (\beta^*)^2\beta^{2n}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[(-1)^{n+r}\alpha^*\beta^*\left(\left(\alpha^{2r}\right) - (-1)^r\right) + \beta^*\alpha^*\left(\beta^{2r} - (-1)^r\right)\right] \\
&= \frac{1}{5}(-1)^{n+r}\left[\left(V_0 - \sqrt{5}U_0 + 7\sqrt{5}\left(2e_5 + 2e_6 + e_7\right)\right)\left(\alpha^{2r} - (-1)^r\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(V_0 + \sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}\left(2e_5 + 2e_6 + e_7\right)\right)\left(\beta^{2r} - (-1)^r\right)\right] \\
&= \frac{1}{5}(-1)^{n+r}\left[\left(\alpha^{2r} - 2(-1)^r + \beta^{2r}\right)V_0 - \sqrt{5}\left(\alpha^{2r} - \beta^{2r}\right)U_0\right. \\
&\quad \left. + 7\sqrt{5}\left(\alpha^{2r} - \beta^{2r}\right)\left(2e_5 + 2e_6 + e_7\right)\right] \\
&= \frac{1}{5}(-1)^{n+r}\left[5\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2 V_0 - 5\left(\frac{\alpha^{2r} - \beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right)U_0\right. \\
&\quad \left. + 35\left(\frac{\alpha^{2r} - \beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right)\left(2e_5 + 2e_6 + e_7\right)\right] \\
&= \frac{1}{5}(-1)^{n+r}\left[5F_r^2 V_0 - 5F_{2r}U_0 + 35F_{2r}\left(2e_5 + 2e_6 + e_7\right)\right] \\
&= (-1)^{n+r}\left[F_r^2 V_0 - F_{2r}\left(U_0 - 14e_5 - 14e_6 - 7e_7\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& V_n^2 - V_{n+r}V_{n-r} \\
= \ & (\alpha^*\alpha^n + \beta^*\beta^n)(\alpha^*\alpha^n + \beta^*\beta^n) - \left(\alpha^*\alpha^{n+r} + \beta^*\beta^{n+r}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n-r} + \beta^*\beta^n - r\right) \\
= \ & (-1)^n 2V_0 + (-1)^{n+1}\alpha^*\beta^*\alpha^r\beta^{-r} + (-1)^{n+1}\beta^*\alpha^*\beta^r\alpha^{-r} \\
= \ & (-1)^n 2V_0 + (-1)^{n+1-r}\alpha^{2r}\alpha^*\beta^* + (-1)^{n+1-r}\beta^*\alpha^*\beta^{2r} \\
= \ & (-1)^n 2V_0 + (-1)^{n+1-r}\left[\left(V_0 - \sqrt{5}U_0 + 7\sqrt{5}\lambda\right)\alpha^{2r} + \left(V_0 + \sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}\lambda\right)\beta^{2r}\right] \\
= \ & (-1)^n 2V_0 + (-1)^{n+1-r}\left[V_0\left(\alpha^{2r} + \beta^{2r}\right) - \sqrt{5}U_0\left(\alpha^{2r} - \beta^{2r}\right) + 7\sqrt{5}\lambda\left(\alpha^{2r} - \beta^{2r}\right)\right] \\
= \ & (-1)^n 2V_0 + (-1)^{n+1-r}\left[V_0L_{2r} - F_{2r}\left(\sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}\lambda\right)\right] \\
= \ & 5(-1)^{n-r+1}\left[F_r^2V_0 - F_{2r}(U_0 - 7\lambda)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.■

Catalan özdeşliğinde $r = 1$ alınarak Cassini özdeşliği elde edilir.

Sonuç 3.1

Herhangi bir n tamsayısı için

$$U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = (-1)\left[V_0 - U_0 + 14e_5 + 14e_6 + 7e_7\right]$$

eşitliği sağlanır [8].

Teorem 3.2 (d'Ocagne Özdeşliği)

Keyfi n, m tamsayıları için

$$
\begin{aligned}
U_{m+1}U_n - U_mU_{n+1} &= (-1)^m\left[F_{n-m}V_0 + L_{n-m}(U_0 - 14e_5 - 14e_6 - 7e_7)\right] \\
V_{m+1}V_n - V_mV_{n+1} &= 5(-1)^{m+1}\left[F_{n-m}V_0 + L_{n-m}(U_0 - 14e_5 - 14e_6 - 7e_7)\right]
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanır [8].

$$
\begin{aligned}
& U_{m+1}U_n - U_mU_{n+1} \\
= & \left(\frac{\alpha^*\alpha^{m+1} - \beta^*\beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\right) \\
& - \left(\frac{\alpha^*\alpha^m - \beta^*\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+1} - \beta^*\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right) \\
= & \left(\frac{(\alpha^*)^2\alpha^{m+1}\alpha^n - \alpha^*\beta^*\alpha^{m+1}\beta^n - \beta^*\alpha^*\beta^{m+1}\alpha^n + (\beta^*)^2\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}\right) \\
& - \left(\frac{(\alpha^*)^2\alpha^m\alpha^{n+1} - \alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^{n+1} - \beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^{n+1} + (\beta^*)^2\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}\right) \\
= & \left[\frac{-\alpha^*\beta^*\alpha^{m+1}\beta^n - \beta^*\alpha^*\beta^{m+1}\alpha^n + \alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^{n+1} + \beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)^2}\right] \\
= & \frac{1}{5}\left[\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n(\beta-\alpha) + \beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n(\alpha-\beta)\right] \\
= & \left[\frac{\beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}\right] \\
= & \left[\frac{\beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n(\alpha^m)}{(\alpha-\beta)(\alpha^m)} - \frac{\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n\beta^m}{(\alpha-\beta)\beta^m}\right] \\
= & \frac{(-1)^m}{(\alpha-\beta)}\left[\beta^*\alpha^*\alpha^{n-m} - \alpha^*\beta^*\beta^{n-m}\right] \\
= & \frac{(-1)^m}{(\alpha-\beta)}\left[\left(V_0 + \sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}(2e_5+2e_6+e_7)\alpha^{n-m}\right)\right. \\
& \left. - \left(V_0 - \sqrt{5}U_0 + 7\sqrt{5}(2e_5+2e_6+e_7)\beta^{n-m}\right)\right] \\
= & \frac{(-1)^m}{(\alpha-\beta)}\left(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}\right)V_0 + \sqrt{5}\left(\alpha^{n-m} + \beta^{n-m}\right)U_0 \\
& -7\sqrt{5}\left(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}\right)(2e_5+2e_6+e_7) \\
= & (-1)^m\left[F_{n-m}V_0 + L_{n-m}(U_0 - 14e_5 - 14e_6 - 7e_7)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& V_{m+1}V_n - V_mV_{n+1} \\
= \; & \left(\alpha^*\alpha^{m+1} + \beta^*\beta^{m+1}\right)\left(\alpha^*\alpha^n + \beta^*\beta^n\right) - \left(\alpha^*\alpha^m + \beta^*\beta m\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+1} + \beta^*\beta^{n+1}\right) \\
= \; & \alpha^*\beta^*\alpha^{m+1}\beta^n + \beta^*\alpha^*\beta^{m+1}\alpha^n - \alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^{n+1} - \beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^{n+1} \\
= \; & \alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n(\alpha-\beta) + \beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n(\beta-\alpha) \\
= \; & (\alpha-\beta)\left[\alpha^*\beta^*\alpha^m\beta^n - \beta^*\alpha^*\beta^m\alpha^n\right] \\
= \; & (\alpha-\beta)\left[\alpha^*\beta^*\alpha^m\frac{\beta^m}{\beta^m}\beta^n - \beta^*\alpha^*\beta^m\frac{\alpha^m}{\alpha^m}\alpha^n\right] \\
= \; & (\alpha-\beta)(-1)^m\left[\alpha^*\beta^*\beta^{n-m} - \beta^*\alpha^*\alpha^{n-m}\right] \\
= \; & \sqrt{5}(-1)^m\left[\left(V_0 - \sqrt{5}U_0 + 7\sqrt{5}\lambda\right)\beta^{n-m} - \left(V_0 + \sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}\lambda\right)\alpha^{n-m}\right] \\
= \; & \sqrt{5}(-1)^m\left[V_0\left(\beta^{n-m} - \alpha^{n-m}\right) - \sqrt{5}U_0\left(\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\right) + 7\sqrt{5}\lambda\left(\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\right)\right] \\
= \; & \sqrt{5}(-1)^m\left[-V_0\left(\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\right) - \sqrt{5}U_0\left(\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\right) + 7\sqrt{5}\lambda\left(\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\right)\right] \\
= \; & \sqrt{5}(-1)^{m+1}\left[V_0\left(\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\right) + \sqrt{5}U_0\left(\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\right) - 7\sqrt{5}\lambda\left(\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\right)\right] \\
\\
= \; & \sqrt{5}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}(-1)^{m+1}\left[V_0\left(\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\right) + \sqrt{5}U_0\left(\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\right) - 7\sqrt{5}\lambda\left(\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\right)\right] \\
\\
= \; & \sqrt{5}(-1)^{m+1}\left[V_0F_{n-m} + U_0L_{n-m} - 7\lambda L_{n-m}\right] \\
= \; & \sqrt{5}(-1)^{m+1}\left[V_0F_{n-m} + L_{n-m}\left(U_0 - 7\lambda\right)\right]
\end{aligned}
$$

■

Fibonacci ve Lucas oktonyonları için sırası ile Vajda teoremlerini verelim:

Teorem 3.3

$n, i, j \in \mathbb{Z}$ ve $\lambda = 2e_5 + 2e_6 + e_7$ için

$$\begin{aligned} U_{n+i}U_{n+j} - U_nU_{n+i+j} &= (-1)^n F_i \left[V_0F_j + L_j \left(U_0 - 7\lambda\right)\right] \\ V_{n+i}V_{n+j} - V_nV_{n+i+j} &= (-1)^n F_i \left[-5V_0F_j + L_j \left(35\lambda - 5U_0\right)\right] \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Binet formülünden yararlanılarak;

$$\begin{aligned} & U_{n+i}U_{n+j} - U_nU_{n+i+j} \\ = \ & \frac{1}{5}\left[\left(\alpha^*\alpha^{n+i} - \beta^*\beta^{n+i}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+j} - \beta^*\beta^{j}\right) - \left(\alpha^*\alpha^{n} - \beta^*\beta^{n}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+i+j} - \beta^*\beta^{n+i+j}\right)\right] \\ = \ & \frac{1}{5}\left[\alpha^*\beta^*\left(-\alpha^{n+i}\beta^{n+j} + \alpha^n\beta^{n+i+j}\right) + \beta^*\alpha^*\left(-\alpha^{n+j}\beta^{n+i} + \beta^n\alpha^{n+i+j}\right)\right] \\ = \ & \frac{(-1)^n}{5}\left[\alpha^*\beta^*\left(-\alpha^i\beta^j + \beta^{i+j}\right) + \beta^*\alpha^*\left(-\alpha^j\beta^i + \alpha^{i+j}\right)\right] \\ = \ & \frac{(-1)^n}{5}\left[-\alpha^*\beta^*\beta^j\left(\alpha^i - \beta^i\right) + \beta^*\alpha^*\alpha^j\left(\alpha^i - \beta^i\right)\right] \\ = \ & \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}F_i\left[-\alpha^*\beta^*\beta^j + \beta^*\alpha^*\alpha^j\right] \\ = \ & \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}F_i\left[\beta^j\left(-V_0 + \sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}\lambda\right) + \alpha^j\left(V_0 + \sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}\lambda\right)\right] \\ = \ & (-1)^n V_0F_iF_j + (-1)^n U_0F_iL_j - (-1)^n 7\lambda F_iL_j \\ = \ & (-1)^n F_i\left[V_0F_j + L_j\left(U_0 - 7\lambda\right)\right] \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
V_{n+i}V_{n+j} - V_nV_{n+i+j} &= \left(\alpha^*\alpha^{n+i} + \beta^*\beta^{n+i}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+j} + \beta^*\beta^{n+j}\right) \\
&\quad - \left(\alpha^*\alpha^{n} - \beta^*\beta^{n}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+i+j} - \beta^*\beta^{n+i+j}\right) \\
&= \alpha^*\beta^*\left(-1\right)^n\alpha^i\beta^j + \beta^*\alpha^*\left(-1\right)^n\beta^i\alpha^j - \alpha^*\beta^*\left(-1\right)^n\beta^{i+j} \\
&\quad -\beta^*\alpha^*\left(-1\right)^n\alpha^{i+j} \\
&= \left(-1\right)^n\left(\alpha^i - \beta^i\right)\left[\alpha^*\beta^*\beta^j - \beta^*\alpha^*\alpha^j\right] \\
&= \left(-1\right)^n\left(\alpha^i - \beta^i\right)\left[\left(V_0 - \sqrt{5}U_0 + 7\sqrt{5}\lambda\right)\beta^j\right. \\
&\quad \left. - \left(V_0 + \sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}\lambda\right)\alpha^j\right] \\
&= \left(-1\right)^n\left(\alpha^i - \beta^i\right)\left[-V_0\left(\alpha^j - \beta^j\right)\right. \\
&\quad \left. -\sqrt{5}U_0\left(\alpha^j + \beta^j\right) + 7\sqrt{5}\lambda\left(\alpha^j + \beta^j\right)\right] \\
&= \left(-1\right)^n\frac{\left(\alpha^i - \beta^i\right)}{\alpha - \beta}\left[-5V_0F_j - 5U_0L_j + 35\lambda L_j\right] \\
&= \left(-1\right)^n F_i\left[-5V_0F_j + L_j\left(35\lambda - 5U_0\right)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4. DUAL FIBONACCI VE LUCAS OKTONYONLARI

Bu bölümde 3. bölümdeki bilgilerden yararlanarak Fibonacci ve Lucas oktonyonların duallerini tanımlayacağız. Bu sayı dizileri için ayrıca binet formülleri, rekürans bağıntıları ve diğer bazı özdeşlikleri elde edeceğiz. Bunun için önce bazı tanımları verelim.

Tanım 4.1

F_n ve L_n sırasyıla n-yinci Fibonacci ve Lucas sayıları olmak üzere sırasıyla dual Fibonacci ve Lucas sayıları sırası ile aşağıdaki şekildedir:

$$\tilde{F}_n = F_n + \varepsilon F_{n+1} \text{ ve } \tilde{L}_n = L_n + \varepsilon L_{n+1}.$$

Tanım 4.2

n-yinci Dual Fibonacci oktonyon ve dual Lucas oktonyon sırası ile;

$$\tilde{U}_n = U_n + \varepsilon U_{n+1} \tag{4.1}$$

ve

$$\tilde{V}_n = V_n + \varepsilon V_{n+1} \tag{4.2}$$

şeklindedir. (3.1), (3.2) den yararlanarak (4.1), (4.2) yerine

$$\tilde{U}_n = \sum_{s=0}^{7} \tilde{F}_{n+s} e_s$$

ve

$$\tilde{V}_n = \sum_{s=0}^{7} \tilde{L}_{n+s} e_s$$

yazılabilir.

Başka bir yaklaşımla dual Fibonacci, dual Lucas oktonyonları

$$\tilde{U}_n = \frac{\alpha' \alpha^n - \beta' \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$\tilde{V}_n = \alpha' \alpha^n + \beta' \beta^n$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\alpha' = (1 + \varepsilon a) \sum_{s=0}^{7} a^s e_s$ $\beta' = (1 + \varepsilon \beta) \sum_{s=0}^{7} \beta^s e_s$ şeklindedir. [3]

Şimdi Dual Fibonacci ve Lucas Oktonyonları için Catalan özdeşliklerini verelim.

Teorem 4.4

n, r negatif olmayan tamsayılar ve $\lambda = 2e_5 + 2e_6 + e_7$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_n^2 - \tilde{U}_{n+r}\tilde{U}_{n-r} &= (-1)^{n-r} \left[F_r^2 V_0 - F_{2r} \left(U_0 - 7\lambda\right)\right] (1 + \varepsilon) \\
\tilde{V}_n^2 - V_{n+r}V_{n-r} &= 5(-1)^{n-r+1} \left[Fr^2 V_0 - F_r (U_0 - 7\lambda) (1 + \varepsilon)\right]
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_n^2 - \tilde{U}_{n+r}\tilde{U}_{n-r} &= \left(U_n + \varepsilon U_{n+1}\right)^2 - \left(U_{n+r} + \varepsilon U_{n+r+1}\right)\left(U_{n-r} + \varepsilon U_{n-r+1}\right) \\
&= U_n^2 - U_{n+r}U_{n-r} \\
&\quad + \varepsilon \left(U_n U_{n+1} + U_{n+1} U_n - U_{n+r} U_{n-r+1} - U_{n+r+1} U_{n-r}\right)
\end{aligned}$$

İspatı iki kısımda inceleyelim.

Birinci kısım;

$$
\begin{aligned}
& U_n^2 - U_{n+r}U_{n-r} \\
= \;& \left(\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+r} - \beta^*\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n-r} - \beta^*\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right) \\
= \;& \left[\left(\frac{(\alpha^*)^2\alpha^{2n} - \alpha^*\beta^*(\alpha\beta)^n - \beta^*\alpha^*(\alpha\beta)^n + (\beta^*)^2\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}\right)\right. \\
& \left. - \left(\frac{(\alpha^*)^2\alpha^{2n} - \alpha^*\beta^*(\alpha\beta)^n\alpha^r\beta^{-r} - \beta^*\alpha^*(\alpha\beta)^n\beta^r\alpha^{-r} + (\beta^*)^2\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}\right)\right] \\
= \;& \frac{1}{5}\left[(\alpha^*)^2\alpha^{2n} - \alpha^*\beta^*(-1)^n - \beta^*\alpha^*(-1)^n + (\beta^*)^2\beta^{2n}\right. \\
& \left. - (\alpha^*)^2\alpha^{2n} - \alpha^*\beta^*(-1)^{n+r}\alpha^{2r} - \beta^*\alpha^*(-1)^{n+r}\beta^{2r} + (\beta^*)^2\beta^{2n}\right] \\
= \;& \frac{1}{5}\left[(-1)^{n+r}\alpha^*\beta^*\left(\left(\alpha^{2r}\right) - (-1)^r\right) + \beta^*\alpha^*\left(\beta^{2r} - (-1)^r\right)\right] \\
= \;& \frac{1}{5}(-1)^{n+r}\left[\left(V_0 - \sqrt{5}U_0 + 7\sqrt{5}\left(2e_5 + 2e_6 + e_7\right)\right)\left(\alpha^{2r} - (-1)^r\right)\right. \\
& \left. + \left(V_0 + \sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}\left(2e_5 + 2e_6 + e_7\right)\right)\left(\beta^{2r} - (-1)^r\right)\right] \\
= \;& \frac{1}{5}(-1)^{n+r}\left[\left(\alpha^{2r} - 2(-1)^r + \beta^{2r}\right)V_0 - \sqrt{5}\left(\alpha^{2r} - \beta^{2r}\right)U_0\right. \\
& \left. + 7\sqrt{5}\left(\alpha^{2r} - \beta^{2r}\right)\left(2e_5 + 2e_6 + e_7\right)\right] \\
= \;& \frac{1}{5}(-1)^{n+r}\left[5\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2 V_0 - 5\left(\frac{\alpha^{2r} - \beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right)U_0\right. \\
& \left. + 35\left(\frac{\alpha^{2r} - \beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right)\left(2e_5 + 2e_6 + e_7\right)\right] \\
= \;& \frac{1}{5}(-1)^{n+r}\left[5F_r^2V_0 - 5F_{2r}U_0 + 35F_{2r}\left(2e_5 + 2e_6 + e_7\right)\right] \\
= \;& (-1)^{n+r}\left[F_r^2V_0 - F_{2r}\left(U_0 - 14e_5 - 14e_6 - 7e_7\right)\right]
\end{aligned}
$$

İkinci kısım;

$$
\begin{aligned}
& \left(U_n U_{n+1} + U_{n+1} U_n - U_{n+r} U_{n-r+1} - U_{n+r+1} U_{n-r}\right) \\
= \; & \frac{1}{5}\left[\left(\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n\right)\left(\alpha^* \alpha^{n+1} - \beta^* \beta^{n+1}\right)\right. \\
& \left(+\alpha^* \alpha^{n+1} - \beta^* \beta^{n+1}\right)\left(\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n\right) \\
& -\left(\alpha^* \alpha^{n+r} - \beta^* \beta^{n+r}\right)\left(\alpha^* \alpha^{n-r+1} - \beta^* \beta^{n-r+1}\right) \\
& \left.-\left(\alpha^* \alpha^{n+r+1} - \beta^* \beta^{n+r+1}\right)\left(\alpha^* \alpha^{n-r} - \beta^* \beta^{n-r}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
= \; \frac{1}{5}\left[-\alpha^n \beta^n (\alpha+\beta)\left(\alpha^* \beta^* + \beta^* \alpha^*\right) + \alpha^{n-r} \beta^{n-r} (\alpha+\beta)\left(\alpha^* \beta^* \alpha^{2r} + \beta^* \alpha^* \beta^{2r}\right)\right]
$$

$\alpha^* \beta^* = V_0 - \sqrt{5} U_0 + 7\sqrt{5}\lambda$

$\beta^* \alpha^* = V_0 + \sqrt{5} U_0 - 7\sqrt{5}\lambda$

$\alpha^* \beta^* + \beta^* \alpha^* = 2V_0$

$5F_r^2 = L_{2r} - 2(-1)^r$

özdeşliklerinden yararlanılarak,

$$
\begin{aligned}
& \left(U_nU_{n+1}+U_{n+1}U_n-U_{n+r}U_{n-r+1}-U_{n+r+1}U_{n-r}\right) \\
= \; & \frac{1}{5}\Big[2\left(-1\right)^{n+1}V_0+\left(-1\right)^{n-r}\left(V_0-\sqrt{5}U_0+7\sqrt{5}\lambda\right)\alpha^{2r} \\
& +\left(V_0+\sqrt{5}U_0-7\sqrt{5}\lambda\right)\beta^{2r}\Big] \\
= \; & \frac{1}{5}\Big[2\left(-1\right)^{n+1}V_0 \\
& +\left(-1\right)^{n-r}\left(V_0\left(\alpha^{2r}+\beta^{2r}\right)-\sqrt{5}U_0\left(\alpha^{2r}-\beta^{2r}\right)+7\sqrt{5}\lambda\left(\alpha^{2r}-\beta^{2r}\right)\right)\Big] \\
= \; & \frac{1}{5}\left[2\left(-1\right)^{n+1}V_0+\left(-1\right)^{n-r}\left(L_{2r}V_0-5F_{2r}\left(U_0-7\lambda\right)\right)\right] \\
= \; & \left(-1\right)^{n-r}\left[F_r^2V_0-F_{2r}\left(U_0-7\lambda\right)\right]
\end{aligned}
$$

Birinci ve ikinci kısım birleştirilirse, istenen elde edilir.

$$
\begin{aligned}
& \tilde{V}_n^2-\tilde{V}_{n+r}\tilde{V}_{n-r} \\
= \; & \left(V_n+\varepsilon V_{n+1}\right)^2-\left(V_{n+r}+\varepsilon V_{n+r+1}\right)\left(V_{n-r}+\varepsilon V_{n-r+1}\right) \\
= \; & V_nV_n-V_{n+r}V_{n-r}+\varepsilon\left[V_nV_{n+1}+V_{n+1}V_n-V_{n+r}V_{n-r+1}-V_{n+r+1}V_{n-r}\right]
\end{aligned}
$$

İspatı iki kısımda inceleyelim:

Birinci kısım,

$$
\begin{aligned}
& V_n^2 - V_{n+r}V_{n-r} \\
= \; & (\alpha^*\alpha^n + \beta^*\beta^n)(\alpha^*\alpha^n + \beta^*\beta^n) - \left(\alpha^*\alpha^{n+r} + \beta^*\beta^{n+r}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n-r} + \beta^*\beta^n - r\right) \\
= \; & (-1)^n 2V_0 + (-1)^{n+1} \alpha^*\beta^*\alpha^r\beta^{-r} + (-1)^{n+1} \beta^*\alpha^*\beta^r\alpha^{-r} \\
= \; & (-1)^n 2V_0 + (-1)^{n+1-r} \alpha^{2r}\alpha^*\beta^* + (-1)^{n+1-r} \beta^*\alpha^*\beta^{2r} \\
= \; & (-1)^n 2V_0 + (-1)^{n+1-r} \left[\left(V_0 - \sqrt{5}U_0 + 7\sqrt{5}\lambda\right)\alpha^{2r} + \left(V_0 + \sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}\lambda\right)\beta^{2r}\right] \\
= \; & (-1)^n 2V_0 + (-1)^{n+1-r} \left[V_0\left(\alpha^{2r} + \beta^{2r}\right) - \sqrt{5}U_0\left(\alpha^{2r} - \beta^{2r}\right) + 7\sqrt{5}\lambda\left(\alpha^{2r} - \beta^{2r}\right)\right] \\
= \; & (-1)^n 2V_0 + (-1)^{n+1-r} \left[V_0 L_{2r} - F_{2r}(5U_0 - 35\lambda)\right] \\
= \; & (-1)^{n+1-r} V_0 L_{2r} + (-1)^n 2V_0 + (-1)^{n+1-r} \left[-F_{2r}(5U_0 - 35\lambda)\right] \\
= \; & (-1)^{n+1-r} V_0 L_{2r} - (-1)^{n+1} 2V_0 + (-1)^{n+1-r} \left[-F_{2r}(5U_0 - 35\lambda)\right] \\
= \; & (-1)^{n+1-r} V_0 L_{2r} - (-1)^r (-1)^{n-r+1} 2V_0 + (-1)^{n+1-r} \left[-F_{2r}(5U_0 - 35\lambda)\right] \\
= \; & \left[L_{2r} - 2(-1)^r\right] P_0 (-1)^{n-r+1} + (-1)^{n+1-r} \left[-F_{2r}(5U_0 - 35\lambda)\right] \\
= \; & 5F_r^2 P_0 (-1)^{n-r+1} + (-1)^{n+1-r} \left[-F_{2r}(5U_0 - 35\lambda)\right] \\
= \; & 5(-1)^{n-r+1} \left[F_r^2 V_0 - F_{2r}(U_0 - 7\lambda)\right]
\end{aligned}
$$

İkinci kısım,

$$
\begin{aligned}
& V_nV_{n+1}+V_{n+1}V_n-V_{n+r}V_{n-r+1}-V_{n+r+1}V_{n-r} \\
= \; & \left(\alpha^*\alpha^n+\beta^*\beta^n\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+1}+\beta^*\beta^{n+1}\right)+\left(\alpha^*\alpha^{n+1}+\beta^*\beta^{n+1}\right)\left(\alpha^*\alpha^n+\beta^*\beta^n\right) \\
& -\left(\alpha^*\alpha^{n+r}+\beta^*\beta^{n+r}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n-r+1}+\beta^*\beta^{n-r+1}\right) \\
& -\left(\alpha^*\alpha^{n+r+1}+\beta^*\beta^{n+r+1}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n-r}+\beta^*\beta^{n-r}\right) \\
= \; & (-1)^n\alpha\left(\alpha^*\beta^*+\beta^*\alpha^*\right)+(-1)^n\beta\left(\alpha^*\beta^*+\beta^*\alpha^*\right)+(-1)^{n+1}\alpha^*\beta^*\alpha^r\beta^{-r}\beta \\
& +(-1)^{n+1}\beta^*\alpha^*\beta^r\alpha^{-r}\alpha+(-1)^{n+1}\alpha^*\beta^*\alpha^r\beta^{-r}\alpha+(-1)^{n+1}\beta^*\alpha^*\beta^r\alpha^{-r}\beta \\
= \; & 2V_0(-1)^n+(-1)^{n+1}\alpha^*\beta^*\alpha^r\beta^{-r}\left[\alpha+\beta\right]+(-1)^{n+1}\beta^*\alpha^*\beta^r\alpha^{-r}\left[\alpha+\beta\right] \\
= \; & 2V_0(-1)^n+(-1)^{n+r+1}\alpha^*\beta^*\alpha^{2r}+(-1)^{n+r+1}\beta^*\alpha^*\beta^{2r} \\
= \; & 2V_0(-1)^n+(-1)^{n+r+1}\left[\alpha^*\beta^*\alpha^{2r}+\beta^*\alpha^*\beta^{2r}\right] \\
= \; & 2V_0(-1)^n+(-1)^{n+r+1}\left[\left(V_0-\sqrt{5}U_0+7\sqrt{5}\lambda\right)\alpha^{2r}+\left(V_0+\sqrt{5}U_0-7\sqrt{5}\lambda\right)\beta^{2r}\right] \\
= \; & (-1)^n 2V_0+(-1)^{n+1-r}\left[V_0\left(\alpha^{2r}+\beta^{2r}\right)-\sqrt{5}U_0\left(\alpha^{2r}-\beta^{2r}\right)+7\sqrt{5}\lambda\left(\alpha^{2r}-\beta^{2r}\right)\right] \\
= \; & (-1)^n 2V_0+(-1)^{n+1-r}\left[V_0L_{2r}-F_{2r}\left(5U_0-35\lambda\right)\right] \\
= \; & 5\left(-1\right)^{n-r+1}\left[F_r^2V_0-F_{2r}\left(U_0-7\lambda\right)\right]
\end{aligned}
$$

Birinci ve ikinci kısım birleştirilirse istenen elde edilir.■

Şimdi dual Fibonacci ve Lucas oktonyonları için sırası ile Vajda teoremlerini verelim.

Teorem 4.5

n negatif olmayan tamsayı, $i, j \in \mathbb{Z}$ ve $\lambda = 2e_5 + 2e_6 + e_7$ için,

$$\tilde{U}_{n+i}\tilde{U}_{n+j}-\tilde{U}_n\tilde{U}_{n+i+j}=(-1)^n F_i\left[V_0F_j+L_j\left(U_0-7\lambda\right)\right](1+\varepsilon) \tag{4.3}$$

$$\tilde{V}_{n+i}\tilde{V}_{n+j}-\tilde{V}_n\tilde{V}_{n+i+j}=(-1)^n F_i\left[-5V_0F_j+L_j\left(35\lambda-5U_0\right)\right](1+\varepsilon) \tag{4.4}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Binet formülünden yararlanarak;

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{n+i}\tilde{U}_{n+j}-\tilde{U}_{n}\tilde{U}_{n+i+j} &= \left(U_{n+i}+\varepsilon U_{n+i+1}\right)\left(U_{n+j}+\varepsilon U_{n+j+1}\right) \\
&\quad -\left(U_{n}+\varepsilon U_{n+1}\right)\left(U_{n+i+j}+\varepsilon U_{n+i+j+1}\right) \\
&= U_{n+i}U_{n+j}-U_{n}U_{n+i+j} \\
&\quad +\varepsilon\left(U_{n+i}U_{n+j+1}+U_{n+i+1}U_{n+j}-U_{n}U_{n+i+j+1}-U_{n+1}U_{n+i+j}\right)
\end{aligned}$$

İspatı iki kısımda inceleyelim:

Birinci kısım;

$$\begin{aligned}
U_{n+i}U_{n+j} - U_nU_{n+i+j} &= \frac{1}{5}\left[\left(\alpha^*\alpha^{n+i} - \beta^*\beta^{n+i}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+j} - \beta^*\beta^{j}\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(\alpha^*\alpha^{n} - \beta^*\beta^{n}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+i+j} - \beta^*\beta^{n+i+j}\right)\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\alpha^*\beta^*\left(-\alpha^{n+i}\beta^{n+j} + \alpha^{n}\beta^{n+i+j}\right)\right. \\
&\quad \left. +\beta^*\alpha^*\left(-\alpha^{n+j}\beta^{n+i} + \beta^{n}\alpha^{n+i+j}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{5}\left[\alpha^*\beta^*\left(-\alpha^{i}\beta^{j} + \beta^{i+j}\right) + \beta^*\alpha^*\left(-\alpha^{j}\beta^{i} + \alpha^{i+j}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{5}\left[-\alpha^*\beta^*\beta^{j}\left(\alpha^{i} - \beta^{i}\right) + \beta^*\alpha^*\alpha^{j}\left(\alpha^{i} - \beta^{i}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}F_i\left[-\alpha^*\beta^*\beta^{j} + \beta^*\alpha^*\alpha^{j}\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}F_i\left[\beta^{j}\left(-V_0 + \sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}\lambda\right)\right. \\
&\quad \left. +\alpha^{j}\left(V_0 + \sqrt{5}U_0 - 7\sqrt{5}\lambda\right)\right] \\
&= (-1)^n V_0F_iF_j + (-1)^n U_0F_iL_j - (-1)^n 7\lambda F_iL_j \\
&= (-1)^n F_i\left[V_0F_j + L_j\left(U_0 - 7\lambda\right)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

İkinci kısım: (4.3) de j yerine $j+1$ yazılırsa;

$$U_{n+i}U_{n+j+1} - U_nU_{n+i+j+1} = (-1)^n F_i\left[V_0F_{j+1} + L_{j+1}\left(U_0 - 7\lambda\right)\right] \tag{4.5}$$

elde edilir.

Yine (4.3) de n yerine $n+1$ ve j yerine $j-1$ yazılırsa;

$$U_{n+i+1}U_{n+j} - U_{n+1}U_{n+i+j} = (-1)^{n+1} F_i \left[V_0 F_{j-1} + L_{j-1}\left(U_0 - 7\lambda\right)\right] \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) dan

$$\begin{aligned} U_{n+i}U_{n+j+1} &+ U_{n+i+1}U_{n+j} - U_nU_{n+i+j+1} - U_{n+1}U_{n+i+j} \\ &= (-1)^n F_i \left[V_0\left(F_{j+1} - F_{j-1}\right) + \left(L_{j+1} - L_{j-1}\right)\left(U_0 - 7\lambda\right)\right] \\ &= (-1)^n F_i \left[V_0 F_j + L_j\left(U_0 - 7\lambda\right)\right] \end{aligned}$$

olur. O halde; birinci kısım ve ikinci kısım birleştirilirse, istenen elde edilir.

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{n+i}\tilde{V}_{n+j} - \tilde{V}_n\tilde{V}_{n+i+j} &= \left[\left(V_{n+i} + \varepsilon V_{n+i+1}\right)\left(V_{n+j} + \varepsilon V_{n+j+1}\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(V_n + \varepsilon V_{n+1}\right)\left(V_{n+i+j} + \varepsilon V_{n+i+j+1}\right)\right] \\ &= \left[V_{n+i}V_{n+j} - V_nV_{n+i+j}\right. \\ &\quad \left. + \varepsilon\left(V_{n+i+1}V_{n+j} + V_{n+i}V_{n+j+1} - V_nV_{n+i+j+1} - V_{n+1}V_{n+i+j}\right)\right] \end{aligned}$$

İspatı iki kısımda inceleyim:

Birinci kısım,

$$
\begin{aligned}
V_{n+i}V_{n+j}-V_nV_{n+i+j} &= \left(\alpha^*\alpha^{n+i}+\beta^*\beta^{n+i}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+j}+\beta^*\beta^{n+j}\right) \\
&\quad -\left(\alpha^*\alpha^{n}+\beta^*\beta^{n}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+i+j}+\beta^*\beta^{n+i+j}\right) \\
&= \alpha^*\beta^*\left(-1\right)^n\alpha^i\beta^j+\beta^*\alpha^*\left(-1\right)^n\beta^i\alpha^j \\
&\quad -\alpha^*\beta^*\left(-1\right)^n\beta^{i+j}-\beta^*\alpha^*\left(-1\right)^n\alpha^{i+j} \\
&= \left(-1\right)^n\left(\alpha^i-\beta^i\right)\left[\alpha^*\beta^*\beta^j-\beta^*\alpha^*\alpha^j\right] \\
&= \left(-1\right)^n\left(\alpha^i-\beta^i\right)\left[\left(V_0-\sqrt{5}U_0+7\sqrt{5}\lambda\right)\beta^j\right. \\
&\quad \left.-\left(V_0+\sqrt{5}U_0-7\sqrt{5}\lambda\right)\alpha^j\right] \\
&= \left(-1\right)^n\left(\alpha^i-\beta^i\right)\left[-V_0\left(\alpha^j-\beta^j\right)-\sqrt{5}U_0\left(\alpha^j+\beta^j\right)\right. \\
&\quad \left.+7\sqrt{5}\lambda\left(\alpha^j+\beta^j\right)\right] \\
&= \left(-1\right)^n\frac{\left(\alpha^i-\beta^i\right)}{\alpha-\beta}\left[-5V_0F_j-5U_0L_j+35\lambda L_j\right] \\
&= \left(-1\right)^nF_i\left[-5V_0F_j+L_j\left(35\lambda-5U_0\right)\right]
\end{aligned}
$$

İkinci kısım,

(4.4) de j yerine $j+1$ yazılırsa

$$V_{n+i}V_{n+j+1}-V_nV_{n+i+j+1}=\left(-1\right)^nF_i\left[V_0F_{j+1}+L_{j+1}\left(U_0-7\lambda\right)\right] \tag{4.7}$$

elde edilir.

(4.4) de n yerine $n+1$, j yerine $j-1$ yazılırsa

$$V_{n+i+1}V_{n+j}-V_{n+1}V_{n+i+j}=\left(-1\right)^{n+1}F_i\left[V_0F_{j-1}+L_{j-1}\left(U_0-7\lambda\right)\right] \tag{4.8}$$

elde edilir.

(4.7) ve (4.8) den

$$V_{n+i+1}V_{n+j}+V_{n+i}V_{n+j+1}-V_nV_{n+i+j+1}-V_{n+1}V_{n+i+j}\left(-1\right)^nF_i\left[-5V_0F_j+L_j\left(35\lambda-5U_0\right)\right]$$

olur.

Birinci ve ikinci kısım birleştirilirse istenen elde edilir.

Şimdi dual Fibonacci ve Lucas oktonyonları ile ilgili bazı özdeşlikler verelim.

Lemma 4.3

n, m, s, r negatif olmayan tamsayılar ve $\lambda = 2e_5 + 2e_6 + e_7$ için aşağıdakiler sağlanır.

1. $\tilde{V}_n = \tilde{U}_{n-1} + \tilde{U}_{n+1}$
2. $\tilde{U}_{n+r}L_{n+r} + \tilde{U}_{n-r}L_{n-r} = L_{2r}\tilde{U}_{2n} + 2\left(-1\right)^{n+r}\tilde{U}_0$
3. $\tilde{U}_{n+r}F_{n+r} - \tilde{U}_{n-r}F_{n-r} = F_{2r}\tilde{U}_{2n}$
4. $\tilde{V}_{n+r}\tilde{U}_{n+s} - \tilde{V}_{n+s}\tilde{U}_{n+r} = 2V_0\left(-1\right)^{n+r}F_{s-r}\left(1+\varepsilon\right)$
5. $\tilde{U}_{m+n} + \left(-1\right)^n\tilde{U}_{m-n} = L_n\tilde{U}_m$
6. $\tilde{V}_{n+r}L_{n+r} + \tilde{V}_{n-r}L_{n-r} = 2\left(-1\right)^{n+r}\tilde{V}_0 + L_{2r}\tilde{V}_{2n}$
7. $\tilde{V}_{n+r}L_{n+r} - \tilde{V}_{n-r}L_{n-r} = 5F_r\tilde{U}_{2n}$
8. $\tilde{V}_{n+r}F_{n+t} + \tilde{V}_{n+t}F_{n+r} = 2\tilde{U}_{2n+r+t} - \left(-1\right)^{n+t}L_{r-t}\tilde{U}_0$

İspat

1. $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ ve $V_n = \sum\limits_{s=0}^{7} L_{n+s} e_s$ özdeşlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{n-1} + \tilde{U}_{n+1} &= U_{n-1} + \varepsilon U_n + U_{n+1} + \varepsilon U_{n+2} \\
&= \sum_{s=0}^{7} \left(F_{n+s-1} + F_{n+s+1} \right) e_s + \sum_{s=0}^{7} \left(F_{n+s} + F_{n+s+2} \right) e_s \\
&= \sum_{s=0}^{7} L_{n+s} e_s + \varepsilon \sum_{s=0}^{7} L_{n+s+1} e_s \\
&= V_n + \varepsilon V_{n+1} \\
&= \tilde{V}_n
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{n+r} L_{n+r} + \tilde{U}_{n-r} L_{n-r} &= \left(U_{n+r} + \varepsilon U_{n+r+1} \right) L_{n+r} + \left(U_{n-r} + \varepsilon U_{n-r+1} \right) L_{n-r} \\
&= U_{n+r} L_{n+r} + U_{n-r} L_{n-r} + \varepsilon \left[U_{n+r+1} L_{n+r} + U_{n-r+1} L_{n-r} \right]
\end{aligned}$$

İspatı iki kısımda inceleyelim. Önce reel kısmı ele alalım.

$$
\begin{aligned}
U_{n+r}L_{n+r}+U_{n-r}L_{n-r} &= \left[\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+r}-\beta^*\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+r}+\beta^*\beta^{n+r}\right)\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n-r}-\beta^*\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n-r}+\beta^*\beta^{n-r}\right)\right] \\
&= \left[\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n+2r}-\beta^*\beta^{2n+2r}}{\alpha-\beta}\right)+\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n-2r}-\beta^*\beta^{2n-2r}}{\alpha-\beta}\right)\right. \\
&\quad \left.+(-1)^{n+r}\left(\frac{\alpha^*-\beta^*}{\alpha-\beta}\right)+(-1)^{n+r}\left(\frac{\alpha^*-\beta^*}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
&= \left[\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n+2r}-\beta^*\beta^{2n+2r}}{\alpha-\beta}\right)+\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n-2r}-\beta^*\beta^{2n-2r}}{\alpha-\beta}\right)\right. \\
&\quad \left.+2(-1)^{n+r}\left(\frac{\alpha^*-\beta^*}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
&= \left(\alpha^{2r}+\beta^{2r}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n}-\beta^*\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right)+2(-1)^{n+r}\left(\frac{\alpha^*-\beta^*}{\alpha-\beta}\right)
\end{aligned}
$$

İkinci olarak dual kısım;

$$\begin{aligned}
U_{n+r+1}L_{n+r}+U_{n-r+1}L_{n-r} &= \left[\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n+r+1}-\beta^{*}\beta^{n+r+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^{*}\alpha^{n+r}+\beta^{*}\beta^{n+r}\right)\right.\\
&\quad \left.+\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n-r+1}-\beta^{*}\beta^{n-r+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^{*}\alpha^{n+r}+\beta^{*}\beta^{n+r}\right)\right]\\
&= \left[\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n+2r+1}-\beta^{*}\beta^{2n+2r+1}}{\alpha-\beta}\right)+(-1)^{n+r}\left(\frac{\alpha^{*}\alpha-\beta^{*}\beta}{\alpha-\beta}\right)\right.\\
&\quad \left.+(-1)^{n-r}\left(\frac{\alpha^{*}\alpha-\beta^{*}\beta}{\alpha-\beta}\right)+\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n+2r+1}-\beta^{*}\beta^{2n+2r+1}}{\alpha-\beta}\right)\right]\\
&= \left[\left(\alpha^{2r}+\beta^{2r}\right)\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n+1}-\beta^{*}\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\right)\right.\\
&\quad \left.+2\left(-1\right)^{n+r}\left(\frac{\alpha^{*}\alpha-\beta^{*}\beta}{\alpha-\beta}\right)\right]
\end{aligned}$$

Birinci ve ikinci kısım birleştirilirse;

$$\begin{aligned}
&= \left(\alpha^{2r}+\beta^{2r}\right)\left[\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n}-\beta^{*}\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right)+\varepsilon\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n+1}-\beta^{*}\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\right)\right]\\
&\quad +2\left(-1\right)^{n+r}\left[\left(\frac{\alpha^{*}-\beta^{*}}{\alpha-\beta}\right)+\varepsilon\left(\frac{\alpha^{*}\alpha-\beta^{*}\beta}{\alpha-\beta}\right)\right]\\
&= L_{2r}\tilde{U}_{2n}+2\left(-1\right)^{n+r}\tilde{U}_{0}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}_{n+r}F_{n+r}-\tilde{U}_{n-r}F_{n-r} &= (U_{n+r}+\varepsilon U_{n+r+1})F_{n+r}-(U_{n-r}+\varepsilon U_{n-r+1})F_{n-r} \\
&= U_{n+r}F_{n+r}-U_{n-r}F_{n-r}+\varepsilon(U_{n+r+1}F_{n+r}-U_{n-r+1}F_{n-r} \\
&= \left[\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n+r}-\beta^{*}\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\right. \\
&\quad -\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n-r}-\beta^{*}\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad +\varepsilon\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n+r+1}-\beta^{*}\beta^{n+r+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad \left.-\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n-r+1}-\beta^{*}\beta^{n-r+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
&= \left(\frac{\alpha^{2r}-\beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n}-\beta^{*}\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad +\varepsilon\left[\left(\frac{\alpha^{2r}-\beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n+1}-\beta^{*}\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
&= \left(\frac{\alpha^{2r}-\beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right)\left[\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n}-\beta^{*}\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right)\right. \\
&\quad \left.+\varepsilon\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n+1}-\beta^{*}\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
&= F_{2r}\left(U_{2n}+\varepsilon U_{2n+1}\right) \\
&= F_{2r}\tilde{U}_{2n}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

4.

$$
\begin{aligned}
& \tilde{V}_{n+r}\tilde{U}_{n+s} - \tilde{V}_{n+s}\tilde{U}_{n+r} \\
= \; & \left(V_{n+r} + \varepsilon V_{n+r+1}\right)\left(U_{n+s} + \varepsilon U_{n+s+1}\right) - \left(V_{n+s} + \varepsilon V_{n+s+1}\right)\left(U_{n+r} + \varepsilon U_{n+r+1}\right) \\
= \; & V_{n+r}U_{n+s} - V_{n+s}U_{n+r} \\
& +\varepsilon\left(U_{n+s+1}V_{n+r} + V_{n+r+1}U_{n+s} - V_{n+s}U_{n+r+1} - U_{n+r}V_{n+s+1}\right) \\
= \; & \left(\alpha^*\alpha^{n+r} + \beta^*\beta^{n+r}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+s} - \beta^*\beta^{n+s}}{\alpha-\beta}\right) \\
& -\left(\alpha^*\alpha^{n+s} + \beta^*\beta^{n+s}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+s} - \beta^*\beta^{n+s}}{\alpha-\beta}\right) \\
& +\varepsilon\left[\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+s+1} - \beta^*\beta^{n+s+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+r} + \beta^*\beta^{n+r}\right)\right. \\
& + \left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+s} - \beta^*\beta^{n+s}}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+r+1} + \beta^*\beta^{n+r+1}\right) \\
& \left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+r+1} - \beta^*\beta^{n+r+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+s} + \beta^*\beta^{n+s}\right) - \\
& \left. -\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+r} - \beta^*\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n+s+1} + \beta^*\beta^{n+s+1}\right)\right] \\
= \; & (-1)^n\left(\alpha^*\beta^* + \beta^*\alpha^*\right)\left(\frac{\beta^r\alpha^s - \alpha^r\beta^s}{\alpha-\beta}\right) + \\
& \varepsilon\left[\left(\frac{(-1)^n\left(\alpha^*\beta^* + \beta^*\alpha^*\right)\alpha^{s+1}\beta^r + \left(\alpha^*\beta^* + \beta^*\alpha^*\right)\beta^{-r}\alpha^{s+1}}{\alpha-\beta}\right)\right. \\
& \left. -\left(\frac{(-1)^n\left(\alpha^*\beta^* + \beta^*\alpha^*\right)\beta^{n+s}\alpha^{n+r+1} + \left(\alpha^*\beta^* + \beta^*\alpha^*\right)\beta^{n+s}\alpha^{n+r+1}}{\alpha-\beta}\right)\right. \\
= \; & (-1)^n\left[\left(\alpha^*\beta^* + \beta^*\alpha^*\right)\left(\frac{\beta^r\alpha^s - \alpha^r\beta^s}{\alpha-\beta}\right)\right. \\
& +\varepsilon(-1)^n\left(\alpha^*\beta^* + \beta^*\alpha^*\right)\left[\frac{\alpha^s\beta^r(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta} - \frac{\beta^s\alpha^r(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}\right] \\
= \; & (-1)^{n+r}\left(2V_0F_{s-r}\right) + \varepsilon\left(2V_0F_{s-r}\right) \\
= \; & 2V_0(-1)^{n+r}F_{s-r}(1+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{U}_{m+n}+(-1)^n\,\tilde{U}_{m-n} \\
=\;& \left(U_{m+n}+\varepsilon U_{m+n+1}\right)+(\alpha\beta)^n\left(U_{m-n}+\varepsilon U_{m-n+1}\right) \\
=\;& \left(\frac{\alpha^*\alpha^{m+n}-\beta^*\beta^{m+n}}{\alpha-\beta}\right)+\varepsilon\left(\frac{\alpha^*\alpha^{m+n+1}-\beta^*\beta^{m+n+1}}{\alpha-\beta}\right) \\
& +\left(\alpha^n\beta^n\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{m-n}-\beta^*\beta^{m-n}}{\alpha-\beta}\right)+\varepsilon\left(\frac{\alpha^*\alpha^{m-n+1}-\beta^*\beta^{m-n+1}}{\alpha-\beta}\right) \\
=\;& \left(\frac{\alpha^*\alpha^{m+n}-\beta^*\beta^{m+n}}{\alpha-\beta}\right)+\left(\frac{\alpha^*\alpha^{m}\beta^n-\beta^*\beta^{m}\alpha^n}{\alpha-\beta}\right) \\
& +\varepsilon\left[\left(\frac{\alpha^*\alpha^{m+n+1}-\beta^*\beta^{m+n+1}}{\alpha-\beta}\right)+\left(\frac{\alpha^*\alpha^{m+1}\beta^n-\beta^*\beta^{m+1}\alpha^n}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
=\;& \left(\frac{\alpha^*\alpha^{m}-\beta^*\beta^{m}}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^n+\beta^n\right) \\
& +\varepsilon\left[\left(\frac{\alpha^*\alpha^{m+1}-\beta^*\beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^n+\beta^n\right)\right] \\
=\;& \left(\alpha^n+\beta^n\right)\left[\left(\frac{\alpha^*\alpha^{m}-\beta^*\beta^{m}}{\alpha-\beta}\right)+\varepsilon\left(\frac{\alpha^*\alpha^{m+1}-\beta^*\beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
=\;& L_n\left(U_m+\varepsilon U_{m+1}\right) \\
=\;& L_n\tilde{U}_m
\end{aligned}
$$

elde edilir.

6.

$$
\begin{aligned}
& \tilde{V}_{n+r}L_{n+r}+\tilde{V}_{n-r}L_{n-r} \\
= \; & \left(V_{n+r}+\varepsilon V_{n+r+1}\right)L_{n+r}+\left(V_{n-r}+\varepsilon V_{n-r+1}\right)L_{n-r} \\
= \; & V_{n+r}L_{n+r}+V_{n-r}L_{n-r}+\varepsilon\left(V_{n+r+1}L_{n+r}+V_{n-r+1}L_{n-r}\right) \\
= \; & \alpha^{*}\alpha^{2n}\left(\alpha^{2r}+\alpha^{-2r}\right)+\beta^{*}\beta^{2n}\left(\beta^{2r}+\beta^{-2r}\right)+2\left(-1\right)^{n+r}\left(\alpha^{*}+\beta^{*}\right) \\
& +\varepsilon\left[\alpha^{*}\alpha^{2n+1}\left(\alpha^{2r}+\alpha^{-2r}\right)+\beta^{*}\beta^{2n+1}\left(\beta^{2r}+\beta^{-2r}\right)+2\left(-1\right)^{n+r}\left(\alpha^{*}\alpha+\beta^{*}\beta\right)\right] \\
= \; & \left(\alpha^{2r}+\beta^{2r}\right)\left(\alpha^{*}\alpha^{2n}+\beta^{*}\beta^{2n}\right)+2\left(-1\right)^{n+r}\left(\alpha^{*}+\beta^{*}\right) \\
& +\varepsilon\left[\left(\alpha^{2r}+\beta^{2r}\right)\left(\alpha^{*}\alpha^{2n+1}+\beta^{*}\beta^{2n+1}\right)+2\left(-1\right)^{n+r}\left(\alpha^{*}\alpha+\beta^{*}\beta\right)\right] \\
= \; & 2\left(-1\right)^{n+r}\left[\alpha^{*}+\beta^{*}+\varepsilon\left(\alpha^{*}\alpha+\beta^{*}\beta\right)\right] \\
& +\left(\alpha^{2r}+\beta^{2r}\right)\left[\left(\alpha^{*}\alpha^{2n}+\beta^{*}\beta^{2n}\right)+\varepsilon\left(\alpha^{*}\alpha^{2n+1}+\beta^{*}\beta^{2n+1}\right)\right] \\
= \; & 2\left(-1\right)^{n+r}\left(V_{0}+\varepsilon V_{0}\right)+L_{2r}\left(V_{2n}+\varepsilon V_{2n+1}\right) \\
= \; & 2\left(-1\right)^{n+r}\tilde{V}_{0}+L_{2r}\tilde{V}_{2n}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

7.

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}_{n+r}L_{n+r}-\tilde{V}_{n-r}L_{n-r} &= \left(V_{n+r}+\varepsilon V_{n+r+1}\right)L_{n+r}-\left(V_{n-r}+\varepsilon V_{n-r+1}\right)L_{n-r} \\
&= V_{n+r}L_{n+r}-V_{n-r}L_{n-r}+\varepsilon\left(V_{n+r+1}L_{n+r}-V_{n-r+1}L_{n-r}\right) \\
&= \left(\alpha^{*}\alpha^{n+r}+\beta^{*}\beta^{n+r}\right)\left(\alpha^{n+r}+\beta^{n+r}\right) \\
&\quad -\left(\alpha^{*}\alpha^{n-r}+\beta^{*}\beta^{n-r}\right)\left(\alpha^{n-r}+\beta^{n-r}\right) \\
&\quad +\varepsilon\left[\left(\alpha^{*}\alpha^{n+r+1}+\beta^{*}\beta^{n+r+1}\right)\left(\alpha^{n+r}+\beta^{n+r}\right)\right. \\
&\quad \left.-\left(\alpha^{*}\alpha^{n-r+1}+\beta^{*}\beta^{n-r+1}\right)\left(\alpha^{n-r}+\beta^{n-r}\right)\right] \\
&= \alpha^{*}\alpha^{2n+2r}+\beta^{*}\beta^{2n+2r}-\alpha^{*}\alpha^{2n-2r}-\beta^{*}\beta^{2n-2r} \\
&\quad +\varepsilon\left(\alpha^{*}\alpha^{2n+2r+1}+\beta^{*}\beta^{2n+2r+1}-\alpha^{*}\alpha^{2n-2r+1}-\beta^{*}\beta^{2n-2r+1}\right) \\
&= 5\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{2r}-\alpha^{-2r}}{\alpha-\beta}\right)-5\left(\frac{\beta^{*}\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\beta^{2r}-\beta^{-2r}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad +\varepsilon\left[5\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{2r}-\alpha^{-2r}}{\alpha-\beta}\right)\right. \\
&\quad \left.-5\left(\frac{\beta^{*}\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\beta^{2r}-\beta^{-2r}}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
&= 5\left(\frac{\alpha^{2r}-\beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n}-\beta^{*}\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad +\varepsilon\left[5\left(\frac{\alpha^{2r}-\beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n+1}-\beta^{*}\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
&= 5F_{r}U_{2n}+\varepsilon\left(5F_{r}U_{2n+1}\right) \\
&= 5F_{r}\left(U_{2n}+\varepsilon U_{2n+1}\right) \\
&= 5F_{r}\tilde{U}_{2n}
\end{aligned}
$$

8.

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{n+r}F_{n+t}+\tilde{V}_{n+t}F_{n+r} &= \left(V_{n+r}+\varepsilon V_{n+r+1}\right)F_{n+t}+\left(V_{n+t}+\varepsilon V_{n+t+1}\right)F_{n+r} \\
&= V_{n+r}F_{n+t}+V_{n+t}F_{n+r}+\varepsilon V_{n+r+1}F_{n+t}+V_{n+t+1}
\end{aligned}$$

İspatı iki kısımda inceleyelim. Önce reel kısım;

$$\begin{aligned}
V_{n+r}F_{n+t}+V_{n+t}F_{n+r} &= \Bigg[\left(\alpha^*\alpha^{n+r}+\beta^*\beta^{n+r}\right)\left(\frac{\alpha^{n+t}-\beta^{n+t}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad +\left(\alpha^*\alpha^{n+t}+\beta^*\beta^{n+t}\right)\left(\frac{\alpha^{n+t}-\beta^{n+t}}{\alpha-\beta}\right)\Bigg] \\
&= \Bigg[2\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n+r+t}-\beta^*\beta^{2n+r+t}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad -(-1)^n\left(\alpha^*-\beta^*\right)(-1)^t\left(\beta^{r-t}+\alpha^{r-t}\right)\Bigg] \\
&= 2U_{2n+r+t}-(-1)^{n+t}L_{r-t}U_0
\end{aligned}$$

Dual kısım;

$$\begin{aligned}
V_{n+r+1}F_{n+t}+V_{n+t+1}F_{n+r} &= 2\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n+r+t+1}-\beta^*\beta^{2n+r+t+1}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad -(-1)^{n+t}\left(\alpha^*\alpha-\beta^*\beta\right)\left(\beta^{r-t}+\alpha^{r-t}\right) \\
&= \varepsilon\left(2U_{2n+r+t+1}-(-1)^{n+t}L_{r-t}U_1\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\tilde{V}_{n+r}F_{n+t}+\tilde{V}_{n+t}F_{n+r}=2\tilde{U}_{2n+r+t}-(-1)^{n+t}L_{r-t}\tilde{U}_0$ elde edilir. ■

KAYNAKLAR

[1] Clifford, W.K. (1871). Preliminary sketch of bi-quaternions. Proc. Lond. Math. Soc. 4(1), 381-395.

[2] Horadam, A.F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. Am. Math. Mon. 70(3), 289-291.

[3] Iyer, M.R. (1969). A note on Fibonacci quaternions. Fibonacci Quart. 7(3), 225-229.

[4] Hacısalihoğlu, H., H. (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları.

[5] Horadam, A.F. (1993). Quaternion recurrence relations. Ulam Quart. 2(2), 23-33.

[6] Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Wiley Interscience Publication, Canada.

[7] Akyiğit, M., Kösal, H,. Tosun, M. (2014). Fibonacci generalized quaterions. Adv. Appl. Clifford Algebras. 24(3), 631-641.

[8] Keçilioğlu, O., Akkus, I. (2015). The Fibonacci octonions. Adv. Appl. Clifford Algebras 25(1), 151-158.

[9] Halici, S. (2015). On Fibonacci quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebras. 25(4), 905-914.

[10] Akkus, I., Keçilioğlu, O. (2015). Split Fibonacci and Lucas octonions. Adv. Appl. Clifford Algebras 25(3), 517-525.

[11] Boyer., C., B, (2015). Matematiğin Tarihi, Doruk Yayınları, s.626-628.

[12] Ünal. Z., Tokeşer, Ü. and Bilgici, G. (2017). Some Properties of Dual Fibonacci and Dual Lucas Octonions. Adv. Appl. Clifford Algebras. 27(2), 1907-1916.

[13] Burton, D., M, (2018). Matematik Tarihi Giriş, Nobel Yayınları, Ankara.