T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLIT PELL VE PELL-LUCAS KUATERNİYONLARI

Elif ÇAKIR

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL**
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ**
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Ahmet EROĞLU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KASTAMONU – 2019

TEZ ONAYI

Elif ÇAKIR tarafından hazırlanan **"Split Pell ve Pell-Lucas Kuaterniyonları "** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Ahmet EROĞLU Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi	....

03/ 05 /2019

Enstitü Müdürü	Prof. Dr. Hasbi YAPRAK	....

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

Elif ÇAKIR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SPLIT PELL VE PELL-LUCAS KUATERNİYONLARI

Elif ÇAKIR
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL

Bu tez çalışması dört bölüm olup, birinci bölümde genel tanımlar yapılmış, ikinci bölümde kuaterniyonlar tanımlanmış temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde Pell ve Pell-Lucas sayıları hakkında bilgiler verilmiş, Binet formülündeki gösterimi, özdeşlikleri ve Vajda gibi özel teoremlerin ispatları yapılmıştır. Pell ve Pell-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonları tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde ise Split Pell ve Split Pell-Lucas kuaterniyonları çalışılmış olup bunların Binet formülündeki gösterimi, Catalan, Cassini, d'Ocagne ve Vajda gibi özel teoremleri ve ispatları verilmiş olup son olarak da Split Pell ve Split Pell-Lucas kuaterniyonları, özdeşlikleri ve ispatları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kuaterniyon, Pell ve Pell-Lucas Sayıları, Split Pell, Pell-Lucas kuaterniyonları

2019, 41 sayfa
Bilim Kodu:204

ABSTRACT

MSc. Thesis

SPLIT PELL AND PELL-LUCAS QUATERNIONS

Elif ÇAKIR
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathemathics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Zafer ÜNAL

Abstract: This thesis consists of four parts. In the first part, introduction is presented. In the second part, quaternions are defined, basic definitions and concepts are given. In the third part, information about Pell and Pell-Lucas numbers is provided, their notation in Binet formula, generator functions and special theorems such as Vajda are proven, genarator functions of Pell and Pell- Lucas numbers are defined. In the fourth part Split Pell and Split Pell-Lucas quaternions are worked. Their notation in the Binet formula special theorems such as Catalan, Cassini, d'Ocagne and Vajda and their proofs are given. Finally, identity of Split Pell and Split Pell-Lucas quaternions and their proofs are given.

Key Words: Quaternion, Pell, Pell-Lucas numbers, Split Pell, Pell-Lucas quaternions

2019,41 pages
Science Code: 204

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL (Kastamonu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü) ‘a ve maddi- manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ablam Şenay ÇAKIR ‘a teşekkürlerimi borç bilirim.

Elif ÇAKIR
Kastamonu, Mayıs, 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

R	Reel sayılar
H	Kuaterniyon kümesi
q	Kuaterniyon
H(q)	Kuaterniyon eşleniği
N(q)	Kuaterniyon normu
q^{-1}	Kuaterniyon inversi
P_n	n-yinci dereceden Pell sayısı
PL_n	n-yinci dereceden Pell-Lucas sayısı
SP_n	n-yinci dereceden Split Pell kuaterniyonu
SPL_n	n-yinci dereceden Split Pell-Lucas kuaterniyonu

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

1.GİRİŞ

Matematikte kuaterniyon, karmaşık sayılar cisminin değişmesiz genişletilmesidir. İlk defa İrlandalı matematikçi Sir. William Rowan Hamilton tarafından 1843 yılında tanımlanmış ve üç boyutlu matematiğe uygulanmıştır. Sir.W.R. Hamilton 1843 de kuaterniyonları tanımlamış bundan altı yıl sonrada J. Cackle, Split kuaterniyonları hakkında çalışma yapmıştır. Reel ve kompleks sayılar gibi kuaterniyonlarda bir sayı sistemidir. Reel sayılar bir, kompleks sayılar iki bileşen içerirken kuaterniyonlar dört bileşen içerir. Kompleks sayılar reel sayıların bir kombinasyonudur ve reel sayılar, aynı zamanda kompleks sayıların bir alt kümesidir. Dolayısıyla da kuaterniyonlar da iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşmuştur. Bu durumda kompleks sayılar da kuaterniyonların bir alt kümesi olmalıdır. Kuaterniyonların sonuç olarak hem reel sayılar hem de kompleks sayıları kapsayan daha geniş bir sayı sistemi olduğu görülür. Fizikte ölçülebilen her şey reel olmak zorundadır ve reel sayılar bilimin doğuşundan itibaren kendilerine her alanda uygulama sahası bulmuştur. Kompleks sayılarda mekanik ve elektriksel uygulamalarda özellikle devre analizlerinde kullanılmaktadır. Bu sayı sistemi uygulamalara sadece iki boyut getirirken, 3-boyutlu uygulamalarda ise vektörler kullanılır. Fakat vektörler bazı uygulamalarda yetersiz kalmaktadır. Kuaterniyonlar vektörleri ifade etmede kullanılabilir. Bu sayı sistemi vektörleri kapsadığı gibi, bir de reel bileşen ortaya koyarak uygulamalara dördüncü bir boyut ekler.

Kuaterniyon cebiri, birleşmeli fakat değişimli olmayan (1,i, j,k gibi) dört elemandan oluşur ve bunlardan biri reel, diğer üçü sanaldır. Kuaterniyonlar bölüm cebirine sahip olup her ne kadar kuaterniyonlar değişme özelliğini sağlamasa da pek çok uygulamada vektörler ve matrisler yerlerini almış hala kuramsal ve uygulamalı matematikte kullanılmaktadır. Başlıca kullanım alanı üç boyutlu uzayda dönme ve kayma hareketinin hesaplanmasıdır.

Pell sayıları ise $1+\sqrt{2}$ gümüş oranının katlarına orantılı üstel olarak büyür. Pell sayı dizisi $\{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, ...\}$ şeklindedir.

Eğer $x, y \in \mathbb{Z}$ için Pell denkleminde $x^2 + y^2 = 1$ çözümünü oluşturursak $\frac{x}{y}$ oranları $\sqrt{2}$ ye yakın yaklaşım sağlar. Bu formun yaklaşık dizisi $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, ...$

Pell-Lucas sayı dizisi : $\{2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, ...\}$ şeklindedir.

Fibonacci ve Lucas sayıları gibi Pell ve Pell-Lucas sayıları da matematik dünyasının güzelliğini ve uygulanabilirliğini göstermektedir. Analiz, geometri, trigonometrive ayrık matematiğin çeşitli alanlarını, sayı teorisini, grafik teorisini, lineer cebir ve alanları birbirine bağlayan deney, keşif, varsayım ve problem çözme teknikleri için fırsatlar sunar. Pell ve Pell-Lucas sayıları geniş bir sayı dizisinin ilginç özelliğini çıkarmak için güçlü bir araç olarak genişletilmiş bir Fibonacci ailesine aittir.

Koshy (2001), uygulamalı Pell ve Pell-Lucas sayıları, Pell denklemleri, Pell toplamları, Pell-Fibonacci Hibritleri ve genişletilmiş Pell ailesi üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Çimen (2016), Pell ve Pell-Lucas sayılarıyla ilişkili kuaterniyon sayılarının yeni sınıflarını sistematik bir şekilde incelemiştir.

Tokeşer, Ünal ve Bilgici (2016), Split Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

2.TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Bu bölümde kuaterniyon kümesi tanımlanıp kuaterniyon kümesi üzerinde tanımlı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1

Bir reel kuaterniyon, sıralı 1,i,j,k gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir ve $q = a + bi + cj + dk$ biçiminde ifade edilir (i,j,k birimleri üç boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınır).

Burada;

$$
\begin{aligned}
&i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ijk = -1 \\
&i\,j = \quad k = \quad -ji \\
&j\,k = \quad i = \quad -\ kj \\
&ki = \quad j = \quad -ik
\end{aligned}
$$

özelliklerine sahiptir. Bu çalışmamızda kuaterniyon kümesini $\mathbb{H}$ (Hamilton) ile gösterelim ve $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ile tanımlayalım. Bir q kuaterniyonu $S_q = a$ skaler kısım ve $V_q = bi + cj + dk$ vektörel kısım olmak üzere $q = S_q + V_q$ şeklinde yazılır. $\mathbb{H}$ üzerinde toplama, çıkarma, skaler ile çarpma, eşlenik ve norm gibi ifadeler aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2

Kuaterniyonlar üzerindeki işlemler:

$q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için; toplama işlemi, $\oplus :\ \mathbb{H} \times \mathbb{H}\ \to \mathbb{H}$, $q_1 \oplus q_2 = S_{q_1+q_2} \oplus V_{q_1+q_2}$ şeklinde tanımlanır.

Yani $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$, $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} q_1 \oplus q_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i + (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k \\ S_{q_1 \oplus q_2} &= S_{q_1} + S_{q_2} \\ V_{q_1 \oplus q_2} &= V_{q_1} + V_{q_2} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$q \in \mathbb{H}$ için, bir kuaterniyon ile bir skalerin çarpımı

$$\begin{aligned} \odot : \ \mathbb{R} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\lambda, q) &\rightarrow \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda V_q \end{aligned}$$

şeklindedir ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

1- $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = \lambda q_1 + \lambda q_2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$

2- $(\lambda_1 \oplus \lambda_2)\, q = (\lambda_1 q) + (\lambda_2 q_2)\, , \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

3- $(\lambda_{1\odot} \lambda_2)\, q = \lambda_1 (\lambda_2 q)$

4- $1 \odot q = q$, $1 \in \mathbb{R}$ [4].

$q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (q_1, q_2) &\rightarrow q_1 \times q_2 \end{aligned}$$

iki kuaterniyon çarpımı $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k,\ q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 = \ & (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\ (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + a_1 d_2 - d_1 a_2) i \\ &+ (a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 a_2 - b_1 d_2) j + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + b_1 c_2 - c_1 b_2) k \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu tanım aşağıdaki tablo yardımıyla elde edilir:

Tablo 1: *Kuaterniyonun bazlarının çarpımı*

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Kuaterniyon çarpımı için bazı özellikler aşağıdaki gibi verilebilir:

1- İki kuaterniyon çarpımı bir kuaterniyondur.

2- Kuaterniyon çarpımı birleşme özelliğine sahiptir.

3- Kuaterniyon çarpımı dağılma özelliğine sahiptir.

4- Kuaterniyonlarda çarpma işleminin değişme özelliği olmadığından bir cisim değildir,[4].

$q \in \mathbb{H}$ için,

$$\begin{aligned} H(q) : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ q &\rightarrow H(q) = a - (bi + cj + dk) \end{aligned}$$

bir kuaterniyonun eşleniği $H(q) = a-\ (bi + cj + dk)$ şeklindedir. $H(q) = H_q$ için $q = S_q + V_q \rightarrow H_q = S_q - V_q$ ve H_q kuaterniyonuna q nun eşleniği denir ve

$$\begin{aligned} H(aq_1 + bq_2) &= aH_{q_1} + bH_{q_2} \\ H(q_1 \times q_2) &= H_{q_1} \times H_{q_2} \\ H(H(q)) &= q \end{aligned}$$

özelliklerine sahiptir.

Bir q kuaterniyonun normu

$$\begin{aligned} N : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\rightarrow N(q) = N_q = q \times H_q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

O halde, $q \times H_q = H_q \times q \geq 0$ ve $q \times H_q = H_q \times q = 0 \Leftrightarrow q = 0$ dır.

Bir kuaterniyonun tersi

$$\begin{aligned} ()^{-1} &: \quad \mathbb{H} - \{0\} \to \mathbb{H} - \{0\} \\ q &\to \quad q^{-1} = \frac{H_q}{N_q} = \frac{a - (bi + cj + dk)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \end{aligned}$$

şeklindedir [4].

3. PELL VE PELL-LUCAS SAYILARI

Bu bölümde Pell ve Pell-Lucas sayıları tanımlanıp Binet formülündeki gösterimi ve Pell ve Pell-Lucas sayılarının özdeşlikleri ve Vajda gibi özel teorem ve ispatları verilecektir.

Tanım 3.1

Pell sayıları negatif olmayan n tamsayÄ±larÄ± için,

$$P_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 2P_{n-1} + P_{n-2,} & n \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Dizinin terimleri; $\{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, ...\}$ şeklindedir.

Pell sayıları Binet formülünde; $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\delta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Pell-Lucas sayıları negatif olmayan n tamsayıları için

$$PL_n = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 2PL_{n-1} + PL_{n-2,} & n \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Pell-Lucas dizisinin terimleri ise, $\{2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, ...\}$ şeklindedir.

Pell-Lucas sayılarının Binet formülü ise

$$PL_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}$$

ile verilir [2].

Pell ve Pell-Lucas sayıları arasındaki bazı bağıntılar :

$$\begin{aligned} P_n &= 2P_{n-2} + P_{n+2} \\ PL_{n+1} &= P_{n+1} + P_n \\ PL_n &= P_{n+1} - P_n \\ 2PL_n &= P_{n-1} - P_{n+1} \\ 2P_n &= 2PL_{n+1} - \ PL_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

[12]

elde edilir [12].■

Tanım 3.2

$a_0, a_1, a_2, ...$ bir reel sayı dizisi olsun $n \geqslant 0$ olmak üzere, $h\,(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$ ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir [6].

Pell ve Pell-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonlarını verelim.

Teorem 3.3

$P(x)$; Pell polinomu olmak üzere üreteç fonksiyonu

$$P(x) = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

dir.

İspat

$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \\
&= P_0 x^0 + P_1 x^1 + P_2 x^2 + P_3 x^3 + ... \\
&= 0 + 1x + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} x^{n+1} \\
&= x + \sum_{n=1}^{\infty} (2P_n + P_{n-1}) x^{n+1} \\
&= x + \sum_{n=1}^{\infty} 2P_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} x^{n+1} \\
&= x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n + x \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} x^n \\
&= x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n + x(P_0 x^1 + P_1 x^2 + P_2 x^3 ...) \\
&= x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n + x(0 + P_1 x^2 + P_2 x^3 + ...) \\
&= x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n + x^2 P(x) \\
&= x + 2xP(x) + x^2 P(x) \\
&= \frac{x}{1 - 2x - x^2}
\end{aligned}$$

$PL(x)$; Pell -Lucas polinomu olmak üzere üreteç fonksiyonu $PL(x) = \sum_{n=0}^{\infty} PL_n x^n$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
PL(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} PL_n x^n \\
&= PL_0x^0 + PL_1x^1 + PL_2x^2 + PL_3x^3 + ... \\
&= 2.1 + 2x + \sum_{n=1}^{\infty} PL_{n+1}x^{n+1} \\
&= 2 + 2x + \sum_{n=1}^{\infty}(PL_n + PL_{n-1})x^{n+1} \\
&= 2 + 2x + x\sum_{n=1}^{\infty} PL_nx^n + x\sum_{n=1}^{\infty} PL_{n-1}x^n \\
&= 2 + 2x + x(PL_1(x^1 + PL_2x^2 + ...) + x(PL_0x^1 + PL_1x^2...) \\
&= 2 + 2x + xPL(x) + x^2PL(x) \\
&= \frac{2-2x}{1-2x-x^2}
\end{aligned}
$$

■

Pell ve Pell-Lucas sayılarında Vajda teoremlerini verelim.

Teorem 3.4

$n, i, j \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, Pell ve Pell-Lucas sayıları için Vajda özdeşlikleri

$$P_{n+i}P_{n+j} - P_nP_{n+i+j} = (-1)^n P_iP_j$$

ve

$$PL_{n+i}PL_{n+j} - PL_nPL_{n+i+j} = 2(-1)^{n+1}P_iP_j$$

dır.

İspat

Pell sayılarının Binet formülünden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
P_{n+i}P_{n+j} - P_nP_{n+i+j} &= [(\frac{\gamma^{n+i}-\delta^{n+i}}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma^{n+j}-\delta^{n+j}}{2\sqrt{2}}) - (\frac{\gamma^{n}-\delta^{n}}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma^{n+i+j}-\delta^{n+i+j}}{2\sqrt{2}})] \\
&= \frac{1}{8}[\gamma^{2n+i+j} - \gamma^{n+i}\delta^{n+j} - \delta^{n+i}\gamma^{n+j} + \delta^{2n+i+j} \\
&\quad -\gamma^{2n+i+j} + \gamma^{n}\delta^{n+i+j} + \delta^{n}\gamma^{n+i+j} - \delta^{2n+i+j}] \\
&= \frac{1}{8}[-\gamma^{n+i}\delta^{n+j} - \delta^{n+i}\gamma^{n+j} + \gamma^{n}\delta^{n+i+j} + \delta^{n}\gamma^{n+i+j}] \\
&= \frac{1}{8}[\gamma^{n}\delta^{n+j}(\delta^{i}-\gamma^{i}) + \delta^{n}\gamma^{n+j}(\gamma^{i}-\delta^{i})] \\
&= \frac{1}{8}[-\gamma^{n}\delta^{n+j}(\gamma^{i}-\delta^{i}) + \delta^{n}\gamma^{n+j}(\gamma^{i}-\delta^{i})] \\
&= \frac{1}{8}(-1)^n[\frac{(\gamma^{i}-\delta^{i})}{2\sqrt{2}}\frac{(\gamma^{j}-\delta^{j})}{2\sqrt{2}}8] \\
&= (-1)^n P_iP_j
\end{aligned}$$

Pell-Lucas sayıları Binet formülünden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
PL_{n+i}PL_{n+j} - PL_nPL_{n+i+j} &= [(\frac{\gamma^{n+i}+\delta^{n+i}}{2}\frac{\gamma^{n+j}+\delta^{n+j}}{2}) - (\frac{\gamma^{n}+\delta^{n}}{2}\frac{\gamma^{n+i+j}+\delta^{n+i+j}}{2})] \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^{2n+i+j} + \gamma^{n+i}\delta^{n+j} + \delta^{n+i}\gamma^{n+j} + \delta^{2n+i+j} - \gamma^{2n+i+j} \\
&\quad -\gamma^{n}\delta^{n+i+j} - \delta^{n}\gamma^{n+i+j} - \delta^{2n+i+j} \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^{n+i}\delta^{n+j} + \delta^{n+i}\gamma^{n+j} - \gamma^{n}\delta^{n+i+j} - \delta^{n}\gamma^{n+i+j}] \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^{n}\delta^{n+j}(\gamma^{i}-\delta^{i}) + \delta^{n}\gamma^{n+j}(\delta^{i}-\gamma^{i})] \\
&= \frac{1}{4}(-1)^{n+1}.[\frac{(\gamma^{i}-\delta^{i})}{2\sqrt{2}}\frac{(\gamma^{j}-\delta^{j})}{2\sqrt{2}}8] \\
&= 2(-1)^{n+1}P_iP_j
\end{aligned}$$

■

4. SPLIT PELL VE SPLIT PELL-LUCAS KUATERNİYONLARI

Bu bölümde Split Pell ve Split Pell-Lucas sayıları tanımlanıp Binet formülündeki gösterimi ve Split Pell ve Split Pell-Lucas sayılarınında Catalan, Cassini, d'Ocagne ve Vajda gibi özel teoremleri ve ispatları verilmiş olup son olarak da Split Pell ve Split Pell-Lucas sayılarının özdeşlikleri ve ispatları yapılmıştır.

Tanım 4.1

F karekteristiği 2 olmayan keyfi bir cisim ve F', F nin çarpımsal grubu olsun. Kuaterniyon cebiri $(\frac{a,b}{\mathbb{R}})$ ve

$$i^2 = a \quad j = b \quad ij = -ji$$

bağıntısıyla tanımlanır.

Eğer $k = ij$, $k^2 = -ij \in F'$ ve $ik = -ki = a\ j$ alırsak $ki = -jk = bi$ elde ederiz.

$a = b = -1$ ve $F = \mathbb{R}$, $\left(\frac{-1,1}{\mathbb{R}}\right)$ durumunda reel sayılar üzerinde kuaterniyonlar halkasıdır denir. Split kuaterniyonları para kuaterniyonlar, antikuaterniyonlar, pseudo kuaterniyon hiperbolik kuaterniyon olarak da adlandırılır [12].

Tanım 4.2

Split kuaterniyon kümesi,

$$P_{\mathbb{R}} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, j^2 = k^2 = 1\}$$

şeklinde tanımlanır ve baz elemanlarının çarpım tablosu

Tablo 2: *Split kuaterniyonun bazlarının çarpımı*

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	1	$-i$
k	k	j	i	1

şeklindedir [12].

Tanım 4.3

$\alpha = a + bi + cj + dk$ bir split kuaterniyon olmak üzere, eşleniği

$$\overline{\alpha} = a - bi - cj - dk$$

normu ise,

$$N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

şeklinde tanımlanır [12].

Split Pell kuaterniyon $n \geq 0; \{1, i, j, k\}$ standart baz alınarak

$$SP_n = P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}j + P_{n+3}k$$

ile tanımlanır [12].

Negatif indisli Pell sayıları için $P_{-n} = (-1)^{n+1}P_n$ özdeşliğinden yararlanarak, negatif indisli split Pell kuaterniyonu

$$SP_{-n} = (-1)^n(P_{n+1}SP_0 - P_nSP_1)$$

şeklinde verilir.

$\gamma = 1+\sqrt{2}$ ve $\delta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere; split Pell kuaterniyon Binet formülü

$$SP_n = \frac{\gamma^n \gamma^* - \delta^n \delta^*}{\gamma - \delta} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır [12].

Split Pell-Lucas kuaterniyonu

$$SPL_n = PL_n + PL_{n+1}i + PL_{n+2}j + PL_{n+3}k$$

ile tanımlanır.

$\gamma = 1+\sqrt{2}$ ve $\delta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere; Split Pell-Lucas kuaterniyon Binet formülü

$$SPL_n = \frac{\gamma^n \gamma^* + \delta^n \delta^*}{\gamma + \delta} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Negatif indisli split Pell-Lucas kuaterniyonu ise

$$SPL_{-n} = (-1)^n (P_{n+1} SPL_0 - P_n SPL_1)$$

dır [12].

Şimdi ileride hesaplamalarda kullanacağımız bazı özellikleri bir lemma ile verelim.

Lemma 4.4

$\gamma = 1+\sqrt{2}, \delta = 1-\sqrt{2}, \gamma^* = 1+\gamma i+\gamma^2 j+\gamma^3 k \; ve \; \delta^* = 1+\delta i+\delta j^2+\delta^3 k$ ve $\lambda = i-2j+k$ olmak üzere,

$$(\gamma^*)^2 = 112+80\sqrt{2}+2SPL_0+2\sqrt{2}SP_0 \tag{4.3}$$

$$(\delta^*)^2 = 112-80\sqrt{2}+2SPL_0-2\sqrt{2}SP_0 \tag{4.4}$$

$$(\gamma^*\delta^*) = 2SPL_0+2\sqrt{2}\lambda \tag{4.5}$$

$$(\delta^*\gamma^*) = 2SPL_0-2\sqrt{2}\lambda \tag{4.6}$$

dır [12].

İspat

$$\begin{aligned}
(\gamma^*)^2 &= \left(1+\gamma i+\gamma^2 j+\gamma^3 k\right)\left(1+\gamma i+\gamma^2 j+\gamma^3 k\right)\\
&= 1+\gamma i+\gamma^2 j+\gamma^3 k+\gamma i+\gamma^2 i^2+\gamma^3 ij+\gamma^4 ik+\gamma^2 j+\gamma^3 ji+\gamma^4 j^2\\
&\quad +\gamma^3 k+\gamma^4 ki+\gamma^5 kj+\gamma^6 k^2\\
&= 1+2\gamma i+2\gamma^2 j+2\gamma^3 k-\gamma^2+\gamma^4+\gamma^6\\
&= 1+2(\gamma i+\gamma^2 j^2+\gamma^3 k)-3-2\sqrt{2}+17+12\sqrt{2}+99+70\sqrt{2}\\
&= 1+2[\left(1+\sqrt{2}\right)i+\left(3+2\sqrt{2}\right)j+\left(7+5\sqrt{2}\right)k]+113+80\sqrt{2}\\
&= 112+80\sqrt{2}+2+2i+6j+14k+2\sqrt{2}i+4\sqrt{2}j+10\sqrt{2}k\\
&= 112+80\sqrt{2}+2\left(1+i+3j+7k\right)+2\sqrt{2}\left(i+2j+5k\right)\\
&= 112+80\sqrt{2}+2SPL_0+2\sqrt{2}SP_0\\
&= 112+80\sqrt{2}+2SPL_0+2\sqrt{2}SP_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\delta^*)^2 &= \left(1+\delta i+\delta^2 j+\delta^3 k\right)\left(1+\delta i+\delta^2 j+\delta^3 k\right)\\
&= 1+\delta i+\delta^2 j+\delta^3 k+\delta i+\delta^2 i^2+\delta^3 ij+\delta^4 ik+\delta^2 j+\delta^3 ji+\delta^4 j^2+\delta^5 jk+\\
&\quad +\delta^3 k+\delta^4 ki+\delta^5 kj++\delta^6 k^2\\
&= 1+2\delta i+2\delta^2 j+2\delta^3 k-\delta^2+\delta^4+\delta^6\\
&= 1+2(\delta i+\delta^2 j+\delta^3 k)-3+2\sqrt{2}+17-12\sqrt{2}+99-70\sqrt{2}\\
&= 1+2(\delta i+\delta^2 j+\delta^3 k)+113-80\sqrt{2}\\
&= 1+2[\left(1-\sqrt{2}\right)i+\left(3-2\sqrt{2}\right)j+\left(7-5\sqrt{2}\right)k]+113-80\sqrt{2}\\
&= 1+2i-2\sqrt{2}i+6j-4\sqrt{2}j+14k-10\sqrt{2}k+113-80\sqrt{2}\\
&= 112-80\sqrt{2}+2+2i+6j+14k-2\sqrt{2}\left(i+2j+5k\right)\\
&= 112-80\sqrt{2}+2SPL_0-2\sqrt{2}SP_0\\
&= 112-80\sqrt{2}+2\left(1+i+3j+7k\right)-\delta^2\left(i+2j+5k\right)\\
&= 112-80\sqrt{2}+2SPL_0-2\sqrt{2}SP_0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma^*\delta^* &= \left(1+\gamma i+\gamma j^2+\gamma^3 k\right)\left(1+\delta i+\delta^2 j+\delta^3 k\right)\\
&= 1+\delta i+\delta^2 j+\delta^3 k+\gamma i+\gamma\delta i^2+\gamma\delta^2 ij+\gamma\delta^3 ik+\gamma^2 j\\
&\quad +\gamma^2\delta ji+\gamma^2\delta^2 j^2+\gamma^2\delta^3 jk+\gamma^3 k+\gamma^3\delta ki+\gamma^3\delta^2+\gamma^3\delta^3 k^2\\
&= 1+i\left(\gamma+\delta\right)+j\left(\gamma^2+\delta^2\right)+k\left(\gamma^3+\delta^3\right)-\gamma\delta ji-\gamma\delta^3 j^2+\gamma^3\delta j\\
&\quad +\gamma\delta^2 k-\gamma^2\delta k-\gamma^2\delta^3 i+\gamma^3\delta i^2+\gamma^2\delta^2+\gamma^3\delta^3\\
&= 1+2i+6j+14k-\gamma\delta+\gamma^2\delta^2+\gamma^3\delta^3+i\left(\gamma^3\delta^2-\gamma^2\delta^3\right)\\
&\quad +j\left(\gamma^3\delta-\gamma\delta^3\right)+k\left(\gamma\delta^2-\gamma^2\delta\right)\\
&= 1+2i+6j+14k+1+1-1+2\sqrt{2}\left(i-2j+k\right)\\
&= 2+2i+6j+14k+2\sqrt{2}\left(i-2j+k\right)\\
&= 2SPL_0+2\sqrt{2}\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta^*\gamma^* &= \left(1+\delta i+\delta j^2+\delta^3 k\right)\left(1+\gamma i+\gamma^2 j+\gamma^3 k\right)\\
&= 1+\gamma i+\gamma^2 j+\gamma^3 k+\delta i+\delta\gamma i^2+\delta\gamma^2 ij+\delta\gamma^3 ik+\delta j^2\\
&\quad +\delta^2\gamma ji+\delta^2\gamma^2 j^2+\delta^2\gamma jk+\delta^3 k\\
&= 1+i\left(\gamma-\delta\right)+j\left(\gamma^2-\delta^2\right)+k\left(\gamma^3-\delta^3\right)-\delta\gamma+\delta^2\gamma^2\\
&\quad +\delta^3\gamma^3+\left(\delta\gamma^2-\delta^2\gamma\right)k+\left(\delta^3\gamma-\delta\gamma^3\right)j+\left(\delta^3\gamma^2-\delta^2\gamma^3\right)i\\
&= 1+2i+6j+14k-(-1)+(+1)+(-1)+\left(-2\sqrt{2}\right)k+\left(4\sqrt{2}\right)j+\left(-2\sqrt{2}\right)i\\
&= 2+2i+6j+14k-2\sqrt{2}\left(i-2j+k\right)\\
&= 2SPL_0-2\sqrt{2}\lambda
\end{aligned}
$$

■

Sonuç 4.5

$\gamma=1+\sqrt{2},\delta=1-\sqrt{2},\gamma^*=1+\gamma i+\gamma^2 j+\gamma^3 k\ ve\ \delta^*=1+\delta i+\delta j^2+\delta^3 k$ ve $\lambda=$

$i - 2j + k$ olmak üzere,

$$\gamma^*\delta^* + \delta^*\gamma^* = 4SPL_0 \tag{4.7}$$

$$(\gamma^*)^2 + (\delta^*)^2 = 224 + 4SPL_0 \text{ [12].} \tag{4.8}$$

Split Pell ve Split Pell-Lucas kuaterniyonları için Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşliklerini ve ispatlarını verelim.

Teorem 4.6 (Catalan Özdeşlikleri)

Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için, $\lambda = i - 2j + k$ olmak üzere,

$$SP_{n+r}SP_{n-r} - SP_n^2 = (-1)^{n-r+1}\left[2P_r^2 SPL_0 + \lambda P_{2r}\right]$$

ve

$$SPL_{n+r}SPL_{n-r} - SPL_n^2 = -2[SP_{n+r}SP_{n-r} - SP_n^2]$$

dır [12].

İspat

Split Pell kuaterniyonlarında Catalan özdeşliği

$$
\begin{aligned}
SP_{n+r}SP_{n-r}-SP_n^2 &= \frac{\gamma^{n+r}\gamma^*-\delta^{n+r}\delta^*}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma^{n-r}\gamma^*-\delta^{n-r}\delta^*}{2\sqrt{2}}-\frac{\gamma^{n}\gamma^*-\delta^{n}\delta^*}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma^{n}\gamma^*-\delta^{n}\delta^*}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{8}[(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2-\gamma^{n+r}\gamma^*\delta^{n-r}\delta^*-\delta^{n+r}\delta^*\gamma^{n-r}\gamma^*+\delta^{2n}(\delta^*)^2 \\
&\quad -\gamma^{2n}(\gamma^*)^2+\gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^*+\delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^*-\delta^{2n}(\delta^*)^2)] \\
&= \frac{1}{8}\left[-\gamma^{n+r}\delta^{n-r}\gamma^*\delta^*-\delta^{n+r}\delta^*\gamma^{n-r}\gamma^*\right]-\left[\gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^*-\delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^*\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[(-1)^n\gamma^{n-r}\delta^{n-r}\left(\gamma^{2r}\gamma^*\delta^*+\delta^{2r}\delta\gamma^*\right)\right]+\left[\gamma^n\delta^n(\gamma^*\delta^*+\delta^*\gamma^*)\right] \\
&= \frac{1}{8}(-1)^{n-r+1}\left[\gamma^{2r}\left(2SPL_0+2\sqrt{2}\lambda\right)+\delta^{2r}\left(2SPL_0-2\sqrt{2}\lambda\right)\right] \\
&\quad +(-1)^n 4SPL_0 \\
&= \frac{1}{8}[(-1)^{n-r+1}2.2SPL_0\frac{(\gamma^{2r}+\delta^{2r})}{2}+2\sqrt{2}\lambda\frac{(\gamma^{2r}-\delta^{2r})}{2\sqrt{2}}2\sqrt{2} \\
&\quad +(-1)^n 4SPL_0] \\
&= \frac{1}{8}[16(-1)^{n-r+1}SPL_0P_r^2+(-1)^{n+1}4SPL_0 \\
&\quad +(-1)^{n-r+1}8P_{2r}+(-1)^n 4SPL_0] \\
&= (-1)^{n-r+1}\left[2P_r^2SPL_0+\lambda P_{2r}\right]
\end{aligned}
$$

Split Pell-Lucas kuaterniyonlarında Catalan özdeşliği

$$
\begin{aligned}
SPL_{n+r}.SPL_{n-r}-SPL_n^2 &= \left(\frac{\gamma^{n+r}\gamma^*+\delta^{n-r}\delta^*}{2}\frac{\gamma^{n-1}\gamma^*-\delta^{n-1}\delta^*}{2}\right)-\left(\frac{\gamma^n\gamma^*+\delta^n\delta^*}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}[(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2+\gamma^{n+r}\gamma^*\delta^{n-r}\delta^*+\delta^{n+r}\delta^*\gamma^{n-r}\gamma^*+\delta^{2n}(\delta^*)^2 \\
&\quad -\gamma^{2n}(\gamma^*)^2-\gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^*-\delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^*-\delta^{2n}(\delta^*)^2)] \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^{n+r}\gamma^*\delta^{n-r}\delta^*+\delta^{n+r}\delta^*\gamma^{n-r}\gamma^*-\gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^*-\delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^*] \\
&= \frac{1}{4}\left[\gamma^{n-r}\delta^{n-r}\left(\gamma^{2r}\gamma^*\delta^*+\delta^{2r}\delta^*\gamma^*\right)+(-1)^{n+1}(4SPL_0)\right] \\
&= \frac{1}{4}[(-1)^{n-r}\gamma^{2r}\left(4SPL_0PL_{2r}\right)+\delta^{2r}\left(8\lambda P_{2r}\right) \\
&\quad -(-1)^n 4SPL_0] \\
&= \frac{1}{4}\left[(-1)^{n-r}(4SPL_0PL_{2r}+8\lambda P_{2r})-(-1)^n 4SPL_0\right] \\
&= (-1)^{n-r}SPL_0PL_{2r}+2\lambda P_{2r}-(-1)^n SPL_0
\end{aligned}
$$

$4P_r^2=PL_{2r}-(-1)^r$ ve $PL_{2r}=4P_r^2+(-1)^r$ özdeşliklerinden yararlanılarak

$$SPL_{n+r}.SPL_{n-r}-SPL_n^2=-2\left[SP_{n+r}SP_{n-r}-SP_n^2\right]$$

elde edilir.■

Catalan özdeşliğinin $r=1$ hali Cassini özdeşliğidir.

Sonuç 4.7 (Cassini Özdeşlikleri)

Her $n\in\mathbb{Z}$ ve $\lambda=i-2j+k$ için Cassini özdeşliği

$$SP_{n+1}SP_{n-1}-SP_n^2=(-1)^n\left[2SPL_0+2\lambda\right]$$

ve

$$SPL_{n+1}SPL_{n-1}-SPL_n^2=4(-1)^{n-1}\left[SPL_0+\lambda\right]$$

dır [12].

Teorem 4.8 (d'Ocagne Özdeşlikleri)

Her $n, m \in \mathbb{Z}$ ve $\lambda = i - 2j + k$ için,

$$\begin{aligned} SP_{m+1}SP_n - SP_mSP_{n+1} &= 2(-1)^m (P_{n-m}SPL_0 - \lambda PL_{n-m}) \\ SPL_{m+1}SPL_n - SPL_mSPL_{n+1} &= 4(-1)^{m+1} (P_{n-m}SPL_0 - \lambda PL_{n-m}) \end{aligned}$$

dır [12].

İspat

Split Pell kuaterniyonlarının Binet formÃ¼lÃ¼nden

$$
\begin{aligned}
SP_{m+1}SP_n - SP_mSP_{n+1} &= \left(\frac{\gamma^{m+1}\gamma^* - \delta^{m+1}\delta^*}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^m\gamma^* - \delta^m\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) \\
&\quad \left(\frac{\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{8}[\gamma^{m+n+1}(\gamma^*)^2 - \gamma^{m+1}\gamma^*\delta^n\delta^* - \delta^{m+1}\delta^*\gamma^n\gamma^* \\
&\quad +\delta^{m+n+1}(\delta^*)^2 - \gamma^{m+n+1}(\gamma^*)^2 + \gamma^m\gamma^*\delta^{n+1}\delta^* + \delta^m\delta^*\gamma^{n+1}\gamma^* \\
&\quad -\gamma^{m+n+1}(\gamma^*)^2 + \gamma^m\gamma^*\delta^{n+1}\delta^* + \delta^m\delta^*\gamma^{n+1}\gamma^* \\
&\quad -\delta^{m+n+1}(\delta^*)^2] \\
&= \frac{1}{8}[-\gamma^{m+1}\gamma^*\delta^n\delta^* - \delta^{m+1}\delta^*\gamma^n\gamma^* + \gamma^m\gamma^*\delta^{n+1}\delta^* \\
&\quad +\delta^m\delta^*\gamma^{n+1}\gamma^*] \\
&= \frac{1}{8}[\left(\gamma^m\gamma^*\delta^{n+1}\delta^* - \gamma^{m+1}\gamma^*\delta^n\delta^*\right) \\
&\quad + \left(\delta^m\delta^*\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{m+1}\delta^*\gamma^n\gamma^*\right)] \\
&= \frac{1}{8}[((-1)^m\,\delta^{n-m}\gamma^*\delta^*\left(-2\sqrt{2}\right)) \\
&\quad +((-1)^m\,\gamma^{n-m}\delta^*\gamma^*\left(-2\sqrt{2}\right)] \\
&= \frac{1}{8}\,(-1)^m\,(-2\sqrt{2})\left[\delta^{n-m}\,(\gamma^*\delta^*) - \gamma^{n-m}\,(\delta^*\gamma^*)\right] \\
&= \frac{1[}{8}\,(-1)^m\,(-2\sqrt{2})\delta^{n-m}\left(2SPL_0 + 2\sqrt{2}\lambda\right) \\
&\quad -\gamma^{n-m}\left(2SPL_0 - 2\sqrt{2}\lambda\right)] \\
&= \frac{1}{8}[(-1)^m\,(-2\sqrt{2}) - 2SPL_0 2\sqrt{2}\frac{(-\delta^{n-m} + \gamma^{n-m})}{2\sqrt{2}} \\
&\quad +2\sqrt{2}\lambda\frac{2\,(\delta^{n-m} + \gamma^{n-m})}{2}] \\
&= \frac{1}{8}\,(-1)^m\,(-2\sqrt{2})\left[-4\sqrt{2}SPL_0.P_{n-m} + 4\sqrt{2}\lambda PL_{n-m}\right] \\
&= 2\,(-1)^m\,(SPL_0P_{n-m} - \lambda PL_{n-m})
\end{aligned}
$$

bulunur.

Split Pell-Lucas kuaterniyonları için Binet formülünden

$$\begin{aligned}
SPL_{m+1}SPL_n - SPL_mSPL_{n+1} &= (\frac{\gamma^{m+1}\gamma^* + \delta^{m+1}\delta^*}{2}\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}) \\
&\quad -(\frac{\gamma^m\gamma^* + \delta^m\delta^*}{2})(\frac{\gamma^{n+1}\gamma^* + \delta^{n+1}\delta^*}{2}) \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^{m+n+1}.(\gamma^*)^2 + \gamma^{m+1}\gamma^*\delta^n\delta^* \\
&\quad +\delta^{m+1}\delta^*\gamma^n\gamma^* + \delta^{m+n+1}(\delta^*)^2 \\
&\quad -\gamma^{m+n+1}(\gamma^*)^2 - \gamma^m\gamma^*\delta^{n+1}\delta^* \\
&\quad -\delta^m\delta^*\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{m+n+1}(\delta^*)^2] \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^{m+1}\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^{m+1}\delta^*\gamma^n\gamma^* \\
&\quad -\gamma^m\gamma^*\delta^{n+1}\delta^* - \delta^m\delta^*\gamma^{n+1}\gamma^*] \\
&= \frac{1}{4}\left(-1\right)^m[(2\sqrt{2})\left(\gamma^*\delta^*\right)\delta^{n-m} \\
&\quad +(-2\sqrt{2})\left(\delta^*\gamma^*\right)\gamma^{n-m}] \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{4}\left(-1\right)^m[\delta^{n-m}\left(2SPL_0 + 2\sqrt{2}\lambda\right) \\
&\quad -\gamma^{n-m}\left(2SPL_0 - 2\sqrt{2}\lambda\right)] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1\right)^m\left[-4\sqrt{2}(SPL_0.P_{n-m} + 4\sqrt{2}\lambda PL_{n-m})\right] \\
&= 4\left(-1\right)^{m+1}\left(SPL_0.P_{n-m} - \lambda PL_{n-m}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.■

Teorem 4.9 (Vajda teoremi)

Her $n, m, r \in \mathbb{Z}$, $\lambda = i - 2j + k$, $i, j, k \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned}
SP_{n+m}SP_{n+r} - SP_nSP_{n+m+r} &= 2(-1)^{n+1}P_m(SPL_0P_r - \lambda PL_r) \\
SPL_{n+m}SPL_{n+r} - SPL_nSPL_{n+m+r} &= 4(-1)^{n+1}P_m(\lambda PL_r - SPL_0P_r)
\end{aligned}$$

dır.

İspat

Split Pell kuaterniyonlarında Vajda teoremi

$$
\begin{aligned}
SP_{n+m}SP_{n+r} - SP_nSP_{n+m+r} &= [\left(\frac{\gamma^{n+m}\gamma^* - \delta^{n+m}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^{n+r}\gamma^* - \delta^{n+r}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\gamma^{n}\gamma^* - \delta^{n}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^{n+m+r}\gamma^* - \delta^{n+m+r}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)] \\
&= \frac{1}{8}[\gamma^{2n+m+r}\gamma^{2*} - \gamma^{n+m}\gamma^*\delta^{n+r}\delta^* - \delta^{n+m}\delta^*\gamma^{n+r}\gamma^* \\
&\quad +\delta^{2n+m+r}\delta^{2*} - \gamma^{2n+m+r}\gamma^{2*} + \gamma^n\gamma^*\delta^{n+m+r}\delta^* \\
&\quad +\delta^n\delta^*\gamma^{n+m+r}\gamma^* - \delta^{2n+m+r}\delta^{2*} - \delta^{2n+m+r}\delta^{2*}] \\
&= \frac{1}{8}[-\gamma^{n+m}\gamma^*\delta^{n+r}\delta^* - \delta^{n+m}\delta^*\gamma^{n+r}\gamma^* \\
&\quad +\gamma^n\gamma^*\delta^{n+m+r}\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^{n+m+r}\gamma^*] \\
&= \frac{1}{8}(-1)^{n+1}[\gamma^j\delta^*\gamma^*(\gamma^m - \delta^m) - \delta^r\gamma^*\delta^*(\gamma^m - \delta^m)] \\
&= \frac{1}{8}(-1)^{n+1}[\frac{(\gamma^m - \delta^m)}{2\sqrt{2}}2\sqrt{2}[\gamma^r(2SPL_0 - 2\lambda) \\
&\quad -\delta^r(2SPL_0 + 2\lambda)] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(-1)^{n+1}P_m[2SPL_0\frac{(\gamma^r - \delta^r)}{2\sqrt{2}}2\sqrt{2} \\
&\quad -2\sqrt{2}\lambda\frac{(\gamma^r + \delta^r)}{2}2] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(-1)^{n+1}P_m[4\sqrt{2}SPL_0P_r - 4\sqrt{2}\lambda PL_r] \\
&= 2(-1)^{n+1}P_m(SPL_0P_r - \lambda PL_r)
\end{aligned}
$$

Split Pell-Lucas kuaterniyonlarında Vajda teoremi

$$
\begin{aligned}
SPL_{n+m}SPL_{n+r} - SPL_nSPL_{n+m+r} &= [\left(\frac{\gamma^{n+m}\gamma^* + \delta^{n+m}\delta^*}{2}\right)\left(\frac{\gamma^{n+r}\gamma^* + \delta^{n+r}\delta^*}{2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\gamma^{n}\gamma^* + \delta^{n}\delta^*}{2}\right)\left(\frac{\gamma^{n+m+r}\gamma^* + \delta^{n+m+r}\delta^*}{2}\right)] \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^{2n+m+r}\gamma^{2*} + \gamma^{n+m}\gamma^*\delta^{n+r}\delta^* + \delta^{n+m}\delta^*\gamma^{n+r}\gamma^* \\
&\quad + \delta^{2n+m+r}\delta^{2*} - \gamma^{2n+m+r}\gamma^{2*} - \gamma^n\gamma^*\delta^{n+m+r}\delta^* \\
&\quad - \delta^n\delta^*\gamma^{n+m+r}\gamma^* - \delta^{2n+m+r}\delta^{2*}] \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^{n+m}\gamma^*\delta^{n+r}\delta^* + \delta^{n+m}\delta^*\gamma^{n+r}\gamma^* - \gamma^n\gamma^*\delta^{n+m+r}\delta^* \\
&\quad - \delta^n\delta^*\gamma^{n+m+r}\gamma^*] \\
&= \frac{1}{4}(-1)^n[\delta^r(2SPL_0 + 2\lambda)(\gamma^m - \delta^m) \\
&\quad - \gamma^r(2SPL_0 - 2\lambda)(\gamma^m - \delta^m)] \\
&= \frac{1}{4}(-1)^n\frac{(\gamma^m - \delta^m)}{2\sqrt{2}}2\sqrt{2}[-2SPL_0\frac{(\gamma^r - \delta^r)}{2\sqrt{2}}2\sqrt{2} \\
&\quad + 2\sqrt{2}\lambda\frac{(\gamma^r + \delta^r)}{2}2] \\
&= \frac{1}{4}(-1)^nP_m[-4\sqrt{2}SPL_0P_r + 4\sqrt{2}\lambda PL_r] \\
&= \sqrt{2}(-1)^{n+1}P_m[2\sqrt{2}(PL_r - SPL_0P_r)] \\
&= 4(-1)^{n+1}P_m[\lambda PL_r - SPL_0P_r)]
\end{aligned}
$$

■

Şimdi bazı özdeşlikleri aşağıdaki lemma ile verelim.

Lemma 4.10

$n, m, r, s \in \mathbb{Z}$ ve $\lambda = i - 2j + k$ olmak üzere

1. $SPL_{n+1} = SP_{n+1} + SP_n$
2. $SPL_n = SP_{n+1} - SP_n$
3. $2SPL_n = SP_{n-1} + SP_{n+1}$
4. $2SP_n = SPL_{n+1} - SPL_n$
5. $SPL_n^2 - 2SP_n^2 = 2(-1)^n SPL_0$
6. $SP_n^2 + SPL_n^2 = 3[28PL_{2n} + 40P_{2n} + \frac{1}{2}SPL_0PL_{2n} + SP_0P_{2n}] + (\frac{(-1)^n}{2}SPL_0)$
7. $SP_n^2 - SPL_n^2 = \frac{-1}{2}[56PL_{2n} + 80P_{2n} + SPL_0PL_{2n} + 2SP_0P_{2n} + 3(-1)^n SPL_0]$
8. $SP_nSPL_n = 56P_{2n} + 40PL_{2n} + P_{2n}SPL_0 + PL_{2n}SP_0 + (-1)^n \lambda$
9. $SP_{n+r}SPL_{n+s} - SP_{n+s}SPL_{n+r} = 2(-1)^{n+r+1} P_{s-r}SPL_0$
10. $SPL_{m+n} + (-1)^n SPL_{m-n} = 2SL_nSPL_m$
11. $SP_{m+n} + (-1)^n SP_{m-n} = 2PL_nSP_m$
12. $(-1)^n [P_{n-1}SP_m - P_nSP_{m-1}] = SP_{m-n}$
13. $P_{n+1}SP_n + P_nSP_{n-1} = SP_{2n}$
14. $P_{n+1}SP_{n+1} + P_nSP_n = SP_{2n+1}$
15. $(-1)^n [P_{n-1}SP_m - P_nSP_{m-1}] = SP_{m-n}$
16. $SPL_{m+n} + (-1)^n SPL_{m-n} = 2PL_n.SPL_m$
17. $SPL_n^2 - 2SP_n^2 = 2(-1)^n SPL_0$ [12]

İspat

$\gamma = 1+\sqrt{2}$, $\delta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere (4.1) ve (4.2) den,

1-$SP_{n+1}+SP_n = SPL_{n+1}$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
SP_{n+1}+SP_n &= \left(\frac{\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\gamma^{n}\gamma^* - \delta^{n}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^* + \gamma^{n}\gamma^* - \delta^{n}\delta^*\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\gamma^n\gamma^*\left(\gamma+1\right) - \delta^n\delta^*\left(\delta+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(2+2\sqrt{2}\right)\gamma^n\gamma^* - \left(2-2\sqrt{2}\right)\delta^n\delta^*\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[2\gamma^n\gamma^* - 2\delta^n\delta^* + \sqrt{2}\gamma^n\gamma^* + \sqrt{2}\delta^n\delta^*\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{2(\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*)}{2\sqrt{2}}2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}(\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*)}{2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{2(\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*)}{2\sqrt{2}}2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}(\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*)}{2}2\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[4\sqrt{2}SP_n + 2\sqrt{2}SPL_n\right] \\
&= 2SP_n + SPL_n \text{ (3.1) } 2SP_n = SPL_{n+1} - SPL_n \text{ eşitliğinden yararlanılarak} \\
&= SPL_{n+1} - SPL_n + SPL_n \\
&= SPL_{n+1}.
\end{aligned}
$$

2-$SP_{n+1} - SP_n = SPL_n$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
SP_{n+1} - SP_n &= \left(\frac{\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}[\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^* - \gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\gamma^n\gamma^*\left(\gamma - 1\right) - \delta^n\delta^*\left(\delta - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}\right)\gamma^n\gamma^* - \left(-\sqrt{2}\right)\delta^n\delta^*\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}(\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*)\right] \\
&= \frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2} \\
&= SPL_n.
\end{aligned}$$

3-$SP_{n-1} + SP_{n+1} = 2SPL_n$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
SP_{n-1} + SP_{n+1} &= \left(\frac{\gamma^{n-1}\gamma^* - \delta^{n-1}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\gamma^{n-1}\gamma^* - \delta^{n-1}\delta^* + \gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^*\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\gamma^n\gamma^*\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\right) - \delta^n\delta^*\left(\frac{1}{\delta} + \delta\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}[(-1)\left(4 + 2\sqrt{2}\right)\left(1 - 2\sqrt{2}\right)\gamma^n\gamma^* \\
&\quad - (-1)\left(4 - 2\sqrt{2}\right)\left(1 + 2\sqrt{2}\right)\delta^n\delta^*] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[2\sqrt{2}\gamma^n\gamma^* + 2\sqrt{2}\delta^n\delta^*\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}2\sqrt{2}\left[\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*\right] \\
&= \frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}2 \\
&= 2SPL_n.
\end{aligned}$$

4-$SPL_{n+1} - SPL_n = 2SP_n$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
SPL_{n+1} - SPL_n &= \left(\frac{\gamma^{n+1}\gamma^* + \delta^{n+1}\delta^*}{2}\right) - \left(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\gamma^{n+1}\gamma^* - \gamma^n\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^* + \delta^n\delta^*\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\gamma^n\gamma^*(\gamma - 1) + \delta^n\delta^*(\delta - 1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\gamma^n\gamma^* - \sqrt{2}\delta^n\delta^*\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*\right] \\
&= \frac{2(\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*)}{2\sqrt{2}} \\
&= 2SP_n.
\end{aligned}$$

5-$SPL_n^2 - 2SP_n^2 = 2(-1)^n SPL_0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
SPL_n^2 - 2SP_n^2 &= \left(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}\right)\left(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}\right) \\
&\quad -2\left(\frac{\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4}[(\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*)(\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*) \\
&\quad - \left(\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^*\right)\left(\gamma^{n+1}\gamma^* - \delta^{n+1}\delta^*\right)] \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 - \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^* + \delta^{2n}(\delta^*)^2 \\
&\quad -\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^* - \delta^{2n}(\delta^*)^2 \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^* + \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^*] \\
&= \frac{1}{4}\left[2(\gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^*) + 2(\delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^*)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(-1)^n(\gamma^*\delta^*) + (-1)^n(\delta^*\gamma^*)\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{2}\left[\gamma^*\delta^* + \delta^*\gamma^*\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{2}4SPL_0 \\
&= 2(-1)^n SPL_0.
\end{aligned}$$

6-$SP_n^2 + SPL_n^2 = 3[28PL_{2n} + 40P_{2n} + \frac{1}{2}SPL_0PL_{2n} + SP_0P_{2n}] + (\frac{(-1)^n}{2}SPL_0)$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
SP_n^2 + SPL_n^2 &= \left(\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}\right)\left(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8}(\gamma^{2n}.(\gamma^*)^2 - \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* - \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^* + \delta^{2n}(\delta^*)^2) \\
&\quad + \frac{2}{8}\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^* + \delta^{2n}(\delta^*)^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\left[3\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \delta^{2n}(\delta^*)^2\right) + \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^*\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[3\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \delta^{2n}(\delta^*)^2\right) + \gamma^n\delta^n(\gamma^*\delta^* + \delta^*\gamma^*)\right] \\
&= \frac{3}{8}[\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \delta^{2n}(\delta^*)^2\right)] + \frac{1}{8}[(-1)^n(\gamma^*\delta^* + \delta^*\gamma^*)] \\
&= \frac{3}{8}[\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \delta^{2n}(\delta^*)^2\right)] + \frac{1}{8}[(-1)^n(4SPL_0)] \\
&= \frac{3}{8}[\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \gamma^{2n}(\delta^*)^2\right)] + [\frac{(-1)^n}{2}SPL_0] \\
&= \frac{3}{8}[\gamma^{2n}\left(112 + 80\sqrt{2} + 2SPL_0 + 2\sqrt{2}SP_0\right) \\
&\quad + \delta^{2n}\left(112 - 80\sqrt{2} + 2SPL_0 - 2\sqrt{2}SP_0\right))] + [\frac{(-1)^n}{2}SPL_0] \\
&= \frac{3[}{8}112.2\frac{\gamma^{2n} + \gamma^{2n}}{2} + 80\sqrt{2}.2\sqrt{2}\frac{\gamma^{2n} - \gamma^{2n}}{2\sqrt{2}} + 2SPL_0 2\frac{\gamma^{2n} + \gamma^{2n}}{2} \\
&\quad + 2\sqrt{2}SP_0.2\sqrt{2}\frac{\gamma^{2n} - \gamma^{2n}}{2\sqrt{2}}] + [\frac{(-1)^n}{2}SPL_0] \\
&= \frac{3}{8}[224PL_{2n} + 320P_{2n} + 4SPL_0PL_{2n} + 8SP_0P_{2n}] + [\frac{(-1)^n}{2}SPL_0] \\
&= \left[84PL_{2n} + 120P_{2n} + \frac{3}{2}SPL_0PL_{2n} + 3SP_0P_{2n}\right] + [\frac{(-1)^n}{2}SPL_0] \\
&= 3\left[28PL_{2n} + 40P_{2n} + \frac{1}{2}SPL_0PL_{2n} + SP_0P_{2n}\right] + (\frac{(-1)^n}{2}SPL_0)
\end{aligned}
$$

7-$SP_n^2 - SPL_n^2 = \frac{-1}{2}[56PL_{2n} + 80P_{2n} + SPL_0 PL_{2n} + 2SP_0 P_{2n} + 3(-1)^n SPL_0]$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
SP_n^2 - SPL_n^2 &= \left(\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}\right)\left(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8}[(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 - \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* - \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^* + \delta^{2n}(\delta^*)^2)] \\
&\quad -\frac{2}{8}[\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^* + \delta^{2n}(\delta^*)^2\right)] \\
&= \frac{-1}{8}\left[\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \delta^{2n}(\delta^*)^2\right)] + \frac{3}{8}[\gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^*\right] \\
&= \frac{-1}{8}\left[\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \delta^{2n}(\delta^*)^2\right)] + \frac{3}{8}[\gamma^n\delta^n(\gamma^*\delta^* + \delta^*\gamma^*)\right] \\
&= \frac{-1}{8}[\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \delta^{2n}(\delta^*)^2\right)] + \frac{3}{8}[(-1)^n(\gamma^*\delta^* + \delta^*\gamma^*)] \\
&= \frac{-1}{8}[\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \delta^{2n}(\delta^*)^2\right)] + \frac{3}{8}[(-1)^n(4SPL_0)] \\
&= \frac{-1}{8}[\left(\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \delta^{2n}(\delta^*)^2\right)] + \frac{3}{8}[(-1)^n(4SPL_0)] \\
&\quad +\delta^{2n}\left(112 - 80\sqrt{2} + 2SPL_0 - 2\sqrt{2}SP_0\right) + 12(-1)^n SPL_0] \\
&= \frac{-1}{8}[1122\frac{\gamma^{2n} + \gamma^{2n}}{2} + 80\sqrt{2}.2\sqrt{2}\frac{\gamma^{2n} - \gamma^{2n}}{2\sqrt{2}} + 2SPL_0 2\frac{\gamma^{2n} + \gamma^{2n}}{2} \\
&\quad +2\sqrt{2}SP_0 2\sqrt{2}\frac{\gamma^{2n} - \gamma^{2n}}{2\sqrt{2}} + 12(-1)^n SPL_0] \\
&= \frac{-1}{8}[224PL_{2n} + 320P_{2n} + 4SPL_0 PL_{2n} + 8SP_0 P_{2n} + 12(-1)^n SPL_0] \\
&= \frac{-1}{2}[56PL_{2n} + 80P_{2n} + SPL_0 PL_{2n} + 2SP_0 P_{2n} + 3(-1)^n SPL_0].
\end{aligned}
$$

8-$SP_nSPL_n = 56P_{2n} + 40PL_{2n} + P_{2n}SPL_0 + PL_{2n}SP_0 + (-1)^n \lambda]$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
SP_nSPL_n &= \left(\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[(\gamma^{2n}.(\gamma^*)^2 + \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* - \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^* - \delta^{2n}(\delta^*)^2)\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[(\gamma^{2n}.(\gamma^*)^2 - \delta^{2n}(\delta^*)^2) + \gamma^n\delta^n(\gamma^*\delta^* - \delta^*\gamma^*)\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}[(\gamma^{2n}\left(112 + 80\sqrt{2} + 2SPL_0 + 2\sqrt{2}SP_0\right) \\
&\quad -\delta\left(112 - 80\sqrt{2} + 2SPL_0 - 2\sqrt{2}SP_0\right) + (-1)^n(\gamma^*\delta^* - \delta^*\gamma^*)] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}[112.2\sqrt{2}\frac{\gamma^{2n} - \gamma^{2n}}{2\sqrt{2}} + 80\sqrt{2}2\frac{\gamma^{2n} + \gamma^{2n}}{2} \\
&\quad +2SPL_0 2\sqrt{2}\frac{\gamma^{2n} - \gamma^{2n}}{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}SP_0.2\frac{\gamma^{2n} + \gamma^{2n}}{2} + (-1)^n 4\sqrt{2}\lambda] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}[224\sqrt{2}P_{2n} + 160\sqrt{2}PL_{2n} + 4\sqrt{2}SPL_0P_{2n} + 4\sqrt{2}SP_0PL_{2n} \\
&\quad + (-1)^n 4\sqrt{2}\lambda] \\
&= [56P_{2n} + 40\sqrt{2}PL_{2n} + SPL_0P_{2n} + SP_0PL_{2n} + (-1)^n\lambda].
\end{aligned}
$$

9-$SP_{n+r}SPL_{n+s}-SP_{n+s}SPL_{n+r}=2\left(-1\right)^{n+r+1}P_{s-r}SPL_{0}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
SP_{n+r}SPL_{n+s}-SP_{n+s}SPL_{n+r} &= \left(\frac{\gamma^{n+r}\gamma^{*}-\delta^{n+r}\delta^{*}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^{n+s}\gamma^{*}+\delta^{n+s}\delta^{*}}{2}\right) \\
&\quad -\left(\frac{\gamma^{n+s}\gamma^{*}-\delta^{n+s}\delta^{*}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^{n+r}\gamma^{*}+\delta^{n+r}\delta^{*}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}[\gamma^{2n+r+s}(\gamma^{*})^{2}+\gamma^{n+r}\gamma^{*}\delta^{n+s}\delta^{*}-\delta^{n+r}\delta^{*}\gamma^{n+s}\gamma^{*} \\
&\quad -\delta^{2n+r+s}(\delta^{*})^{2}-\gamma^{2n+r+s}(\gamma^{*})^{2}-\gamma^{n+s}\gamma^{*}\delta^{n+r}\delta^{*} \\
&\quad +\delta^{n+s}\delta^{*}\gamma^{n+r}\gamma^{*}+\delta^{2n+r+s}(\delta^{*})^{2}] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}[\gamma^{n+r}\delta^{n+r}\left(\delta^{s-r}\gamma^{*}\delta^{*}-\gamma^{s-r}\gamma^{*}\delta^{*}\right) \\
&\quad +\gamma^{n+r}\delta^{n+r}\left(-\delta^{*}\gamma^{*}\gamma^{s-r}+\delta^{*}\gamma^{*}\delta^{s-r}\right)] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}[\left(-1\right)^{n+r}\gamma^{*}\delta^{*}\left(\delta^{s-r}-\gamma^{s-r}\right) \\
&\quad +\left(-1\right)^{n+r}\delta^{*}\gamma^{*}\left(\delta^{s-r}-\gamma^{s-r}\right)] \\
&= \frac{\left(-1\right)^{n+r}}{4\sqrt{2}}[-\gamma^{*}\delta^{*}\frac{\left(\gamma^{s-r}-\delta^{s-r}\right)2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\
&\quad -\delta^{*}\gamma^{*}\frac{\left(\gamma^{s-r}-\delta^{s-r}\right)2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}] \\
&= \frac{\left(-1\right)^{n+r+1}}{4\sqrt{2}}\left[\gamma^{*}\delta^{*}2\sqrt{2}P_{s-r}+\delta^{*}\gamma^{*}2\sqrt{2}P_{s-r}\right] \\
&= \frac{\left(-1\right)^{n+r+1}}{4\sqrt{2}}2\sqrt{2}P_{s-r}(\gamma^{*}\delta^{*}+\delta^{*}\gamma^{*}) \\
&= \frac{\left(-1\right)^{n+r+1}}{4\sqrt{2}}.2\sqrt{2}P_{s-r}(4SPL_{0}) \\
&= 2\left(-1\right)^{n+r+1}P_{s-r}SPL_{0}.
\end{aligned}$$

10-$SPL_{m+n}+(-1)^n SPL_{m-n}=2SL_nSPL_m$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
SPL_{m+n}+(-1)^n SPL_{m-n} &= \left(\frac{\gamma^{m+n}\gamma^{*}+\delta^{m+n}\delta^{*}}{2}\right)+(-1)^n\left(\frac{\gamma^{m-n}\gamma^{*}+\delta^{m-n}\delta^{*}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\gamma^{m+n}\gamma^{*}+\delta^{m+n}\delta^{*}+(\gamma^{n}\delta^{n})(\gamma^{m-n}\gamma^{*}+\delta^{m-n}\delta^{*})\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\gamma^{m+n}\gamma^{*}+\delta^{m+n}\delta^{*}+\gamma^{m}\delta^{n}\gamma^{*}+\gamma^{n}\delta^{m}\delta^{*}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\gamma^{m}\gamma^{*}\left(\gamma^{n}+\delta^{n}\right)+\delta^{m}\delta^{*}\left(\delta^{n}+\gamma^{n}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(\gamma^{n}+\delta^{n}\right)}{2}\frac{2(\gamma^{m}\gamma^{*}+\delta^{m}\delta^{*})}{2}\right]\\
&= 2PL_nSPL_m.
\end{aligned}$$

11-$SP_{m+n}+(-1)^n SP_{m-n}=2PL_nSP_m$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
SP_{m+n}+(-1)^n SP_{m-n} &= \left(\frac{\gamma^{m+n}\gamma^{*}-\delta^{m+n}\delta^{*}}{2\sqrt{2}}\right)+(-1)^n\left(\frac{\gamma^{m-n}\gamma^{*}-\delta^{m-n}\delta^{*}}{2\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\gamma^{m+n}\gamma^{*}-\delta^{m+n}\delta^{*}+(\gamma^{n}\delta^{n})(\gamma^{m-n}\gamma^{*}-\delta^{m-n}\delta^{*})\right]\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\gamma^{m+n}\gamma^{*}-\delta^{m+n}\delta^{*}+\gamma^{m}\delta^{n}\gamma^{*}-\gamma^{n}\delta^{m}\delta^{*}\right]\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\gamma^{m}\gamma^{*}\left(\gamma^{n}+\delta^{n}\right)-\delta^{m}\delta^{*}\left(\delta^{n}+\gamma^{n}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\gamma^{n}+\delta^{n}\right)\left(\gamma^{m}\gamma^{*}-\delta^{m}\delta^{*}\right)\right]\\
&= \frac{2}{2}\left[\left(\gamma^{n}+\delta^{n}\right)\frac{(\gamma^{m}\gamma^{*}-\delta^{m}\delta^{*})}{2\sqrt{2}}\right]\\
&= 2PL_nSP_m.
\end{aligned}$$

12-$(-1)^n\left[P_{n-1}.SP_m - P_n.SP_{m-1}\right] = SP_{m-n}$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(-1)^n\left[P_{n-1}SP_m - P_nSP_{m-1}\right] &= (-1)^n\,[\frac{\gamma^{n-1}-\delta^{n-1}}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma^m\gamma^*-\delta^m\delta^*}{2\sqrt{2}} - \\
&\quad -\frac{\gamma^n-\delta^n}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma^{m-1}\gamma^*-\delta^{m-1}\delta^*}{2\sqrt{2}}] \\
&= \frac{(-1)^n}{8}[(\gamma^{n+m+1}\gamma^* - \gamma^{n-1}\delta^m\delta^* - \delta^{n-1}\gamma^m\gamma^* + \delta^{m+n+1}\delta^*) \\
&\quad -(\gamma^{n+m+1}\gamma^* - \gamma^n\delta^{m-1}\delta^* - \delta^n\gamma^{m-1}\gamma^* + \delta^{m+n+1}\delta^*)] \\
&= \frac{(-1)^n}{8}[-\gamma^{n-1}\delta^m\delta^* - \delta^{n-1}\gamma^m\gamma^* + \gamma^n\delta^{m-1}\delta^* + \delta^n\gamma^{m-1}\gamma^*] \\
&= \frac{(-1)^n}{8}\left[\gamma^n\delta^m\delta^*\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\gamma}\right) + \delta^n\gamma^m\gamma^*\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{8}\left[\gamma^n\delta^m\delta^*\left(-2\sqrt{2}\right) + \gamma^n\delta^m\delta^*\left(2\sqrt{2}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^n\,2\sqrt{2}}{8}\left[-\gamma^n\delta^m\delta^* + \delta^n\gamma^m\gamma^*\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\,2\sqrt{2}}{8}\left[\gamma^n\delta^n(\delta^{m-n}\delta^* - \gamma^{m-n}\gamma^*)\right] \\
&= \frac{-(-1)^n\,2\sqrt{2}}{8}\left[\gamma^n\delta^m\delta^* - \delta^n\gamma^m\gamma^*\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\,2\sqrt{2}}{8}\left[(-1)^n - (\gamma^{m-n}\gamma^* - \delta^{m-n}\delta^*)\right] \\
&= -\frac{(-1)^{2n+1}\,2\sqrt{2}}{8}\left[\frac{(\gamma^{m-n}\gamma^* - \delta^{m-n}\delta^*)2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right] \\
&= SP_{m-n}.
\end{aligned}
$$

13-$P_{n+1}SP_n + P_nSP_{n-1} = SP_{2n}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
P_{n+1}SP_n + P_n.SP_{n-1} &= \left(\frac{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\gamma^{n-1}\gamma^* - \delta^{n-1}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{8}[\gamma^{2n+1}\gamma^* - \gamma^{n+1}\delta^n\delta^* - \delta^{n+1}\gamma^n\gamma^* + \delta^{2n+1}\delta^* + \gamma^{2n-1}\gamma^* \\
&\quad -\gamma^n\delta^{n-1}\delta^* - \delta^n\gamma^{n-1}\gamma^* + \delta^{2n-1}\delta^*] \\
&= \frac{1}{8}[\gamma^{2n}\gamma^*\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) - \gamma^n\delta^n\delta^*\left(\gamma + \frac{1}{\delta}\right) - \delta^n\gamma^n\gamma^*\left(\delta + \frac{1}{\gamma}\right) \\
&\quad +\delta^{2n}\delta^*\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right)] \\
&= \frac{1}{8}\left[2\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.\gamma^{2n}\gamma^* + 2\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}.\delta^{2n}\delta^*\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\sqrt{2}\gamma^{2n}\gamma^* + \left(-\sqrt{2}\right)\delta^{2n}\delta^*\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2.2}\left[\gamma^{2n}\gamma^* - \delta^{2n}\delta^*\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\gamma^{2n}\gamma^* - \delta^{2n}\delta^*\right] \\
&= SP_{2n}.
\end{aligned}$$

14-$P_{n+1}SP_{n+1}+P_nSP_n=SP_{2n+1}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
P_{n+1}SP_{n+1}+P_nSP_n &= \left(\frac{\gamma^{n+1}-\delta^{n+1}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^{n+1}\gamma^{*}-\delta^{n+1}\delta^{*}}{2\sqrt{2}}\right) \\
&\quad +\left(\frac{\gamma^{n}-\delta^{n}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^{n}\gamma^{*}-\delta^{n}\delta^{*}}{2\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{8}[\gamma^{2n+1}\gamma^{*}-\gamma^{n+1}\delta^{n}\delta^{*}-\delta^{n+1}\gamma^{n+1}\gamma^{*}+\delta^{2n+1}\delta^{*}+\gamma^{2n}\gamma^{*} \\
&\quad -\gamma^{n}\delta^{n}\delta^{*}-\delta^{n}\gamma^{n}\gamma^{*}+\delta^{2n}\delta^{*}] \\
&= \frac{1}{8}[\gamma^{2n}\gamma^{*}\left(\gamma^{2}+1\right)-\gamma^{n}\delta^{n}\delta^{*}\left(\gamma\delta+1\right) \\
&\quad -\delta^{n}\gamma^{n}\gamma^{*}\left(\delta\gamma+1\right)+\delta^{2n}\delta^{*}\left(\delta^{2}+1\right)] \\
&= \frac{1}{8}[\gamma^{2n}\gamma^{*}\left(4+2\sqrt{2}\right)-\gamma^{n}\delta^{n}\delta^{*}.\left(0\right)-\delta^{n}\gamma^{n}\gamma^{*}.\left(0\right) \\
&\quad +\delta^{2n}\delta^{*}\left(4-2\sqrt{2}\right)] \\
&= \frac{1}{8}\left[4\left(\frac{\gamma^{2n}\gamma^{*}+\delta^{2n}\delta^{*}}{2}\right)2+2\sqrt{2}.\frac{2\sqrt{2}(\gamma^{2n}\gamma^{*}-\delta^{2n}\delta^{*})}{2\sqrt{2}}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[8SPL_{2n}+8SP_{2n}\right]. \\
&= SPL_{2n}+SP_{2n}\ \text{(3.1) bağıntılarından} \\
&= SP_{2n+1}\ \text{elde edilir.}
\end{aligned}$$

15-$(-1)^n\left[P_{n-1}SP_m - P_nSP_{m-1}\right] = SP_{m-n}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(-1)^n\left[P_{n-1}SP_m - P_nSP_{m-1}\right] &= (\gamma^n\delta^n)[\frac{\gamma^{n-1}-\delta^{n-1}}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma^m\gamma^*-\delta^m\delta^*}{2\sqrt{2}} \\
&\quad -\frac{\gamma^n-\delta^n}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma^{m-1}\gamma^*-\delta^{m-1}\delta^*}{2\sqrt{2}}] \\
&= \frac{1}{8}(\gamma^n\delta^n)[\gamma^{n+m+1}\gamma^* - \gamma^{n-1}\delta^m\delta^* - \delta^{n-1}\gamma^m\gamma^* + \delta^{m+n+1}\delta^* \\
&\quad -\gamma^{m+n+1}\gamma^* + \gamma^n\delta^{m-1}\delta^* + \delta^n\gamma^{m-1}\gamma^* - \delta^{m+n+1}\delta^*] \\
&= \frac{1}{8}(-1)^n\left[-\gamma^{n-1}\delta^m\delta^* - \delta^{n-1}\gamma^m\gamma^* + \gamma^n\delta^{m-1}\delta^*\right. \\
&\quad \left.+\delta^n\gamma^{m-1}\gamma^*\right] \\
&= \frac{1}{8}(-1)^n\left[\gamma^n\delta^m\delta^*\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\gamma}\right) + \delta^n\gamma^m\gamma^*\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}(-1)^n\left[\gamma^n\delta^m\delta^*\left(2\sqrt{2}\right) + \delta^n\gamma^m\gamma^*\left(-2\sqrt{2}\right)\right] \\
&= \frac{-2\sqrt{2}}{8}(-1)^n\left[(\gamma^n\delta^n)\left(\gamma^{m-n}\gamma^* - \delta^{m-n}\delta^*\right)\right] \\
&= \frac{-2\sqrt{2}}{8}(-1)^n(-1)^n\left[\left(\frac{\gamma^{m-n}\gamma^* - \delta^{m-n}\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)2\sqrt{2}\right] \\
&= SP_{m-n}.
\end{aligned}$$

16-$SPL_{m+n} + (-1)^n SPL_{m-n} = 2PL_nSPL_m$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
SPL_{m+n} + (-1)^n SPL_{m-n} &= (\frac{\gamma^{m+n}\gamma^* + \delta^{m+n}\delta^*}{2}) + (\gamma^n\delta^n)(\frac{\gamma^{m-n}\gamma^* + \delta^{m-n}\delta^*}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\gamma^{m+n}\gamma^* + \delta^{m+n}\delta^*\right) + \left(\gamma^m\gamma^*\delta^n + \delta^m\gamma^m\delta^*\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\gamma^m\gamma^*\left(\gamma^n+\delta^n\right) + \delta^m\delta^*\left(\delta^n+\gamma^n\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(\gamma^n+\delta^n\right)}{2} + \frac{2\left(\gamma^m\gamma^*+\delta^m\delta^*\right)}{2}\right] \\
&= 2PL_nSPL_m.
\end{aligned}$$

17-$SPL_n^2 - 2SP_n^2 = 2\left(-1\right)^n SPL_0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
SPL_n^2 - 2SP_n^2 &= (\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2})(\frac{\gamma^n\gamma^* + \delta^n\delta^*}{2}) - 2\left(\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\gamma^n\gamma^* - \delta^n\delta^*}{2\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^* + \delta^{2n}(\delta^*)^2 \\
&\quad -\gamma^{2n}(\gamma^*)^2 + \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^* - \delta^{2n}(\delta^*)^2] \\
&= \frac{1}{4}[\gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^* + \gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^*] \\
&= \frac{1}{4}\left[2\left(\gamma^n\gamma^*\delta^n\delta^* + \delta^n\delta^*\gamma^n\gamma^*\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\gamma^n\delta^n\right)\left(\gamma^*\delta^* + \delta^*\gamma^*\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(-1\right)^n\left(4SPL_0\right) \\
&= 2\left(-1\right)^n SPL_0.
\end{aligned}$$

■

KAYNAKLAR

[1] Akyiğit, M., Kösal, H.H., Tosun, M. (2014). Split Fibonacci quaternions. Adv. Appl., Clifford Algebr. 23, 535-545.

[2] Anetta, S.L. and Iwona, W. (2016). The Pell Quaternions and the Pell Octonions. Adv. Appl. Clifford Algebr.26 (1), 435-440.

[3] Çimen, C.B., İpek.A. (2016). On pell quaternions and Pell-Lucas quaternions. Adv. Appl., Clifford Algebr. 26, 39-51.

[4] Hacısalihoğlu, H.H. (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları.

[5] Horadam, A.F. (1993). Quaternion recurrence relations. Ulam Q.2, 23-33.

[6] Horadam, A.F. and Mahon, Bro.J.M. (1985). Pell and Pell-Lucas Polynomera

[7] Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Wiley, Canada.

[8] Koshy, T. (2014). Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications. Springer, New York.

[9] Swamy, M.N.S. (1973). On generalized Fibonacci quaternions. Fibonacci Q.5, 547-550.

[10] Stakhov, A., Rozin, B. (2006). Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers, Chaos, Solitons & Fractals 27, 1162-1177.

[11] Taşçı, D., Yalçın, F. (2015). Fibonacci-p quaternions Adv. Appl. Clifford Algebr. 25(1), 245-254.

[12] Tokeşer, Ü., Ünal, Z. and Bilgici, G. (2016). Split Pell and Pell-Lucas Quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebr. 27(2), 1881-1893.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif ÇAKIR
Doğum Yeri ve Yılı : Ankara - 1982
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : elifcakirr.15@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Aktepe Lisesi Ankara
Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi Orta Öğretim Matematik Öğrt. Tezsiz Yüksek Lisans

Mesleki Deneyim

İş Yeri : 2016 – Halen GSB Kredi Yurtlar Kurumu
İş Yeri : 2012-2016 Ankara Jale TEZER Eğitim Kurumları
İş Yeri : 2008-2012 Ankara TÜMAY Eğitim Kurumları
İş Yeri : 2005-2008 Trabzon AKEM Eğitim Kurumları