T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK GRUPLAR

Gülnur HAÇAT

Danışman Dr. Öğr. Üyesi Sibel DEMİRALP
Jüri Üyesi Prof. Dr. Erdal GÜNER
Jüri Üyesi Prof. Dr. Yaşar BOLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KASTAMONU – 2019

TEZ ONAYI

Gülnur HAÇAT tarafından hazırlanan "**Sezgisel Bulanık Topolojik Gruplar**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Dr. Öğr. Üyesi Sibel DEMİRALP Kastamonu Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	....
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Erdal GÜNER Ankara Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	....
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Yaşar BOLAT Kastamonu Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	....

16/04/19

Enstitü Müdürü	Prof. Dr. Hasbi YAPRAK	....

ii

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

İmza
Gülnur HAÇAT

iii

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK GRUPLAR

Gülnur HAÇAT
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sibel DEMİRALP

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde sezgisel bulanık kümeler ve bazı temel kavramları verilmiştir. Üçüncü bölümde sezgisel bulanık topolojik uzaylar incelenmiştir. Dördüncü bölümde sezgisel bulanık gruplar araştırılmıştır. Son olarak beşinci bölümde sezgisel bulanık topolojik gruplar çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sezgisel bulanık topolojik uzay, sezgisel bulanık topolojik grup, sezgisel bulanık normal grup, sezgisel bulanık bölüm grubu, sezgisel bulanık homomorfizm.

2019, 73 sayfa
Bilim Kodu: 204

ABSTRACT

MSc. Thesis

INTUITIONISTIC FUZZY TOPOLOGICAL GROUPS

Gülnur HAÇAT
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asisst. Prof. Dr. Sibel DEMİRALP

Abstract: This thesis consists of five chapters. The first part is divided into the introduction. In the second part, intuitionistic fuzzy sets and some basic concepts are given. In the third chapter, intuitionistic fuzzy topological spaces are examined. In the fourth chapter, intuitionistic fuzzy groups were investigated. Finally, in the fifth chapter, intuitionistic fuzzy topological groups were studied.

Key Words: Intuitionistic fuzzy topological space, intuitionistic fuzzy topological group, intuitionistic fuzzy normal group, intuitionistic fuzzy quotient group, intuitionistic fuzzy homomorphism.

2019, 73 pages
Science Code: 204

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başladığım andan itibaren sadece görüş ve öneriyle değil insancıl ve hoşgörülü yaklaşımları ile beni cesaretlendiren; tez çalışma süresince ve öncesinde her zaman her konuda beni bilgilendiren ve bu sayede tez yazım sürecinin kolay ve verimli geçmesini sağlayan; çalışmalarımda her zaman yanımda olup maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, hiçbir zaman hakkını ödeyemeyeceğim sayın danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Sibel DEMİRALP'e (Kastamonu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü) çok teşekkür ederim.

Ayrıca maddi ve manevi desteklerini hayatım boyunca hiçbir zaman esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Gülnur HAÇAT
Kastamonu, Nisan, 2019

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ ONAYI	ii
TAAHHÜTNAME	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. SEZGİSEL BULANIK KÜMELER	4
2.1. Sezgisel Bulanık Kümeler ve Özellikleri	4
2.2. Sezgisel Bulanık Kümelerden Bulanık Küme Elde Etme Operatörü	16
3. SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR	19
3.1. Sezgisel Bulanık Noktalar	19
3.2. Sezgisel Bulanık Topolojik Uzaylar ve Alt Uzaylar	20
4. SEZGİSEL BULANIK ALT GRUPLAR	34
4.1. Sezgisel Bulanık Grupoid	34
4.2. Sezgisel Bulanık İdeal	37
4.3. Sezgisel Bulanık Alt Gruplar	41
4.4. Sezgisel Bulanık Normal Alt Gruplar ve Bölüm Alt Grupları	54
5. SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK GRUPLAR	58
5.1. Sezgisel Bulanık Topolojik Gruplar ve Özellikleri	58
5.2. Sezgisel Bulanık Homomorfizm	61
5.3. Sezgisel Bulanık Bölüm ve Çarpım Topolojik Grupları	65
KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	73

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\square$	Sezgisel bulanık kümelerin modal operatörü
$\lozenge$	Sezgisel bulanık kümelerin modal operatörü
$A \wedge B$	A ve B sezgisel bulanık kümelerinin kesişimi
$A \vee B$	A ve B sezgisel bulanık kümelerinin birleşimi
$C(\alpha, \beta)$	Sezgisel bulanık nokta
$çek(A)$	A sezgisel bulanık kümesinin çekirdeği
$des(A)$	A sezgisel bulanık kümesinin desteği
$D_\alpha(A)$	Bulanık küme elde etme operatörü
μ_A	A kümesinin üyelik fonksiyonu
ν_A	A kümesinin üye olmama fonksiyonu
π_A	A kümesinin kararsızlık fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Sezgisel bulanık kümelerin geometrik yorumu	4
Şekil 2.2. Kararsızlık değeri her üye için 0 olan sezgisel bulanık kümenin (bulanık kümenin) geometrik gösterimi	5
Şekil 2.3. Kararsızlık değeri her üye için farklı olan sezgisel bulanık kümenin geometrik gösterimi	5
Şekil 2.4. Sezgisel bulanık küme geometrik gösterimi	6
Şekil 2.5. Sezgisel bulanık küme olmayan geometrik gösterim	6

1. GİRİŞ

Aristo mantığına göre bir şey ya vardır ya yoktur, ya iyidir ya kötü, ya siyahtır ya beyaz, ya 0 dır ya da 1… İfadeler arasında net, keskin bir geçiş vardır. Kesin sonuçlarla ayıramadığımız yargılar arasında kalan değerleri kullanabilmemiz için bulanık mantığa ihtiyaç duyulmuştur. Kesinlikten daha çok aitlik kavramını savunan Zadeh [20], bulanık kümeler teorisini ortaya çıkarmıştır.

Zadeh'in bulanık mantığına göre hayatta sadece varlık (1) ve yokluk (0) olarak uç sınırlar yoktur. Örneğin, hızlı giden araçların alt hız limitinin 100 km/s olduğunu varsayalım. Klasik mantığa göre, herhangi bir araç hızlı mıdır, sorusuna yanıt, aracın alt sınır değerine bakılarak verilir. Araç 99 km/s hızla gitse bile klasik mantığa göre araç yavaştır. Bulanık mantık ise aracın kaç km/s hız ile hareket ettiğini sormaktadır. Yani klasik mantık gibi hızlı giden araca 1, yavaş giden araca 0 değerini vermez. [0,1] aralığında ki daha esnek ve hassas değerleri kullanır. 99 km/s hızla giden bir araca yavaş demez yani 0 değerini vermez, 0.1 hızdadır şeklinde ifade eder. Bu mantık sayesinde her alanda daha hassas veriler elde edilir.

Aynı durum kümeler içinde geçerlidir. Klasik kümelerde bir nesne kümenin ya elemanıdır ya da elemanı değildir. Nesnelerin kümelere ait olup olmama durumları arasında keskin bir geçiş vardır. Zadeh'e göre aitlik kavramı [0,1] aralığı olarak genelleştirilmiştir. Bulanık kümelerde bir elemanın kümeye ait olma fonksiyonu $\mu_A: X \to [0,1]$ iken ait olmama fonksiyonu ise $\nu_A: X \to [0,1]$ şeklinde ifade edilir. Burada ki $\nu_A(x)$ değeri $1 - \mu_A(x)$ e eşittir. Böylece bir elemanın kümeye ait olma derecesi ve ait olmama derecesi toplamı 1'e eşit olmuş olur. Fakat bu yaklaşım gerçek hayatta karşılaşılan uygulamalardaki belirsizliği ele almakta etkin bir yöntem değildir. Çünkü ait olma ve ait olmama derecelerinin toplamı 1'den küçük olabilmektedir. Bu nedenle Atanassov [1] sezgisel bulanık kümeleri, bulanık kümelere kararsızlık derecesini dahil ederek göstermiştir. Bu değeri $\pi_A(x)$ şeklinde ifade edebiliriz.

Şirketlerde personel seçimi, ekonomi, robotik, kontrol sistemleri alanı, bilgisayar ve cebirsel yapılar gibi birçok alanda sezgisel bulanık kümeler etkindir. Örneğin, pamuk üretim ve işleme esnasında oluşan veya dışarıdan gelen gözden kaçan yabancı maddeler oluşabilir. Bu tarz yabancı maddelerin ayırt edilmesinde kullanılan metotlar hız ve kalite açısından verimli değildir. Gelişen sistemlerde kameradan alınan görüntüdeki yabancı maddelerin belirlenmesi işlemi için sezgisel bulanık mantık kullanılmıştır. Günümüzde bu tarz ürünlerde yabancı madde olup olmadığına ilgili bölgede kalan görüntü parçasının sayısal değerlerinin toplamı değerlendirilerek karar verilmiş ve kararsızlık değerine göre yapılan denemeler sonucunda bir eşik değeri belirlenmiştir. Bu sayede önceki çalışmaların aksine sezgisel bulanık mantığa dayanan bilgisayarlı görüş sistemi hız ve kalite olarak çok önemli bir avantaj sağlamıştır.

Sezgisel bulanık kümelerin temeli ile hayattaki belirsizlikler ve tekdüze olmayan durumların tanımlanması sağlanmış, insanların karar verme sürecinde konunun bütün yönleri hakkındaki düşüncesi belirginleşmiştir. Buna örnek olarak personel seçim sürecindeki TOPSIS çok kriterli grup karar verme yöntemini söyleyebiliriz. Personel seçimi probleminde karar vericilerin, adayların kriterleri ne derecede sağladıkları hakkındaki bilgilerini yansıtmalarında sezgisel bulanık kümelerdeki fonksiyonlardan yararlanmışlardır.

Sezgisel bulanık kümeleri içeren sezgisel bulanık sistemler insanlar ve bilgisayar sistemleri arasındaki iletişim için mekanizmalar sağlar. Bu mekanizmalar sistemin çalışmasını etkileyen girişi değiştirerek sistemin davranışını etkiler. Sezgisel bulanık çıkarım sistemleri, sezgisel bulanık girişten net çıktı elde etmek için kullanılır. Örneğin, bir ısıtıcı fanının sezgisel bulanık veri girişi ortam sıcaklığı ise çıktısı da fanın hızıdır. Bu tarz çıkarım motorlarında sezgisel bulanık mantık kuralları uygulanarak durulama işlemi gerçekleştirilir.

Zadeh, klasik kümelerin bir genellemesi olarak bulanık kümeleri tanımladıktan sonra birçok araştırmacı bulanık kümeler kavramını cebire ve topolojik grup teorisine uygulamıştır. Atanassov bulanık kümeleri genelleştirerek sezgisel bulanık kümeleri tanımladıktan sonra da Çoker [7], sezgisel bulanık topolojik uzayı ve diğer bazı kavramları tanıtmıştır. K. Hur, H.W. Kang ve H.K. Song [12] sezgisel bulanık alt grubu tanımlamıştır. K. Hur, Y.B. Jun ve J.H. Ryou [13] sezgisel bulanık topolojik grubu tanıtmışlardır. Bu çalışmada da sezgisel bulanık topolojik gruplar ve özellikleri ayrıntılı bir şekilde ele alınacaktır.

2. SEZGİSEL BULANIK KÜMELER

Bu bölümde sezgisel bulanık kümelerin tanımı verilip, bazı temel özellikleri incelenecektir.

2.1. Sezgisel Bulanık Kümeler ve Bazı Temel Kavramlar

Bulanık A kümesinde bir x elemanın kümeye ait olma derecesi $\mu_A(x)$ iken ait olmama derecesi ise $1 - \mu_A(x)$ dir. Böylece ait olma derecesi ve ait olmama derecelerinin toplamı 1 e eşittir. Fakat bu yaklaşım gerçek hayatta karşılaşılan uygulamalardaki belirsizliği ele almakta etkin bir yöntem değildir. Çünkü ait olma ve ait olmama derecelerinin toplamı birden küçük olabilmektedir. Bu nedenle Atanassov, bulanık küme teorisini genelleştirerek sezgisel bulanık küme teorisini tanımlamıştır.

Sezgisel bulanık küme kavramı tanımlandıktan sonra bu küme üzerindeki yapılar birçok araştırmacı için merak konusu olmuş ve halen birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır.

Tanım 2.1.1: [1] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. $\mu_A : X \to [0,1]$ ve $\nu_\mathrm{A} : X \to [0,1]$ fonksiyonları tarafından karakterize edilen,

$$\mathrm{A} = \{\langle x,\ \mu_A(x), \nu_\mathrm{A}(x)\rangle \mid x \in \mathrm{X}\}$$

kümesine X de bir sezgisel bulanık küme denir. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine x in A ya üye olma derecesi, $\nu_\mathrm{A}(x)$ değerine ise x in A ya üye olmama derecesi denir ve
$\forall x \in X$ için,

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$$

şartı sağlanır. X deki bir sezgisel bulanık küme kısaca $A = \langle x,\ \mu_A(x), \nu_\mathrm{A}(x)\rangle$ şeklinde gösterilebilir.

Açıkça görülebilir ki her bir bulanık küme,

$$A = \{\langle x,\ \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$$

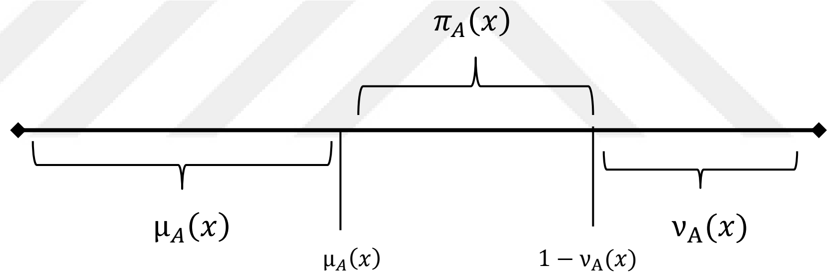
şeklinde sezgisel bulanık küme olarak ifade edilebilir. Ayrıca,

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$$

şeklinde tanımlı $\pi_A\colon X \to [0,1]$ fonksiyonuna A nın kararsızlık fonksiyonu, $\pi_A(x)$ değerine ise x noktasının kararsızlık derecesi denir.

$\pi_A(x)$ değeri ne kadar küçükse x elemanı hakkındaki bilgi göreceli olarak o kadar kesindir ve $\pi_A(x)$ değeri ne kadar büyükse x elemanı hakkındaki bilgi göreceli olarak o kadar belirsizdir. $\pi_A(x)$ değeri 0 a eşit olduğunda x elemanı hakkındaki bilgi kesindir. Bu durumda sezgisel bulanık küme bir bulanık küme olmaktadır. Yani bulanık kümelerde $\forall x \in \mathrm{X}$ için $\pi_A(x) = 0$ olur.

Sezgisel bulanık kümelerde üyelik derecelerinin geometrik yorumu şu şekilde gösterilebilir:



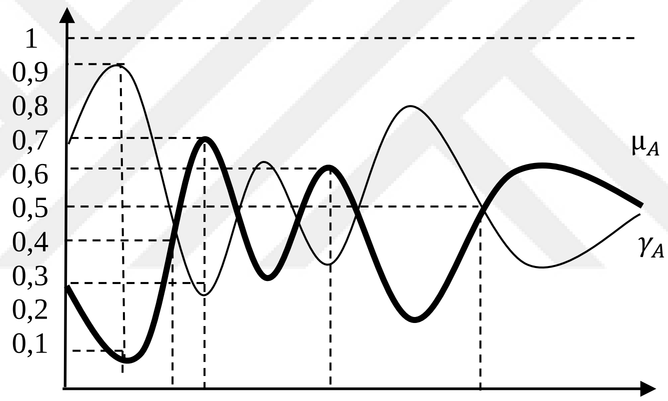
Şekil 2.1. Sezgisel bulanık kümelerin geometrik yorumu

Örneğin; Atanassov'un Johny ve Mary örneğini ele alalım. Johny ve Mary bir kutu çikolata alır ve bu kutunun içerisinde 10 adet çikolata vardır. Johny 7 çikolata, Mary de 2 çikolata yer. Çikolatalardan 1 i de yere düşer. Sonra Mary'nin bir arkadaşı gelir ve Mary ona çikolata ikram edemeyeceklerini, çünkü hepsini Johny'nin yediğini söyler.

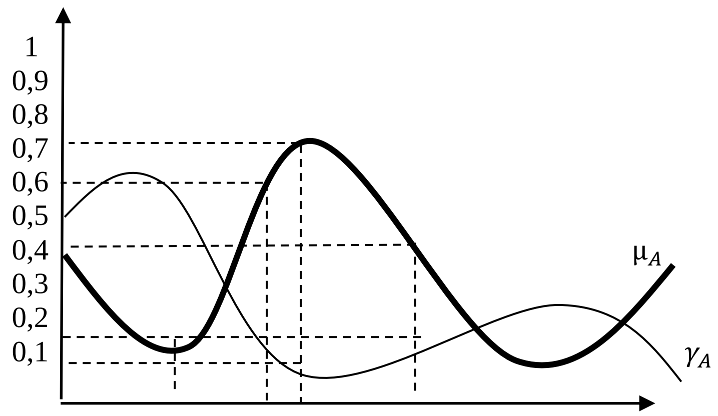
Klasik mantık açısından bakıldığında bu olayın doğruluk derecesi $\{0,1\}$ kümesine aittir. Buna göre, olayın gerçekliği 0 dır. Çünkü çikolataların hepsini Johny yememiş, Mary'de çikolata yemiştir.

Olayı bulanık küme mantığı ile değerlendirirsek, Johny 10 çikolatadan 7 tanesini yediği için Mary'nin ifadesinin doğruluk değeri 0,7 dir. Ancak Johny düşmüş şekeri alıp misafire ikram etmek için kutuya geri koyabilir. Bu durumda Mary'nin ifadesinin gerçeklik değeri korunmuş olup doğru olmama değeri ise 0.3 olur. Eğer çikolatayı misafir ya da Mary yemez ve Johny yerse doğruluk değeri 0.8 olarak değişir. Böylece Mary'nin sözünün doğruluk derecesi Johny'nin yapacağı eyleme bağlıdır. Bu nedenle sezgisel bulanık kümeler bize sorunun en doğru yanıtını verecektir. Johny'nin belirsizliğinden dolayı kararsızlık derecesi 0.1 olur.

Klasik bulanık kümeler yalnızca bir geometrik yoruma sahip iken sezgisel bulanık kümeler farklı geometrik yorumlara sahiptir. Sezgisel bulanık kümelerin en yaygın kabul gören geometrik yorumu aşağıdaki gibidir:

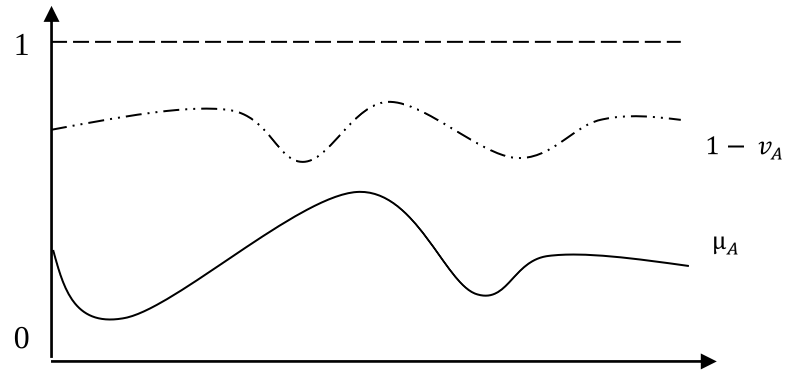


Şekil 2.2. Kararsızlık değeri her üye için 0 olan sezgisel bulanık kümenin (bulanık kümenin) geometrik gösterimi



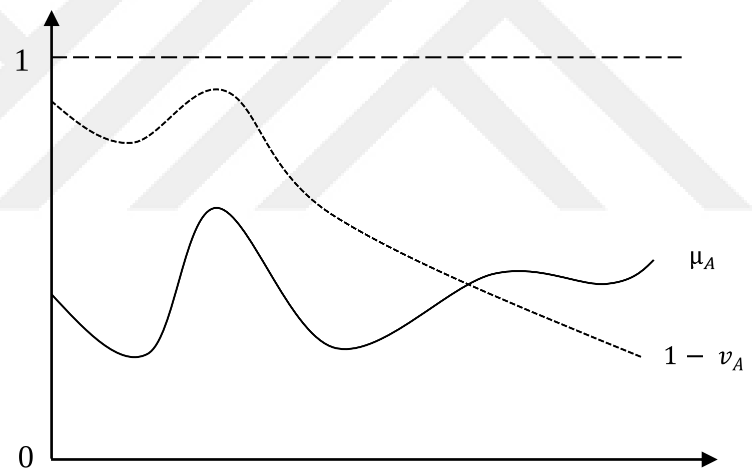
Şekil 2.3. Kararsızlık değeri her üye için farklı olan sezgisel bulanık kümenin geometrik gösterimi

Aşağıda sezgisel bulanık kümelerin farklı bir geometrik gösterimi verilmiştir.



Şekil 2.4 Sezgisel bulanık küme geometrik gösterimi

Diğer yandan aşağıdaki durum sezgisel bulanık kümeler için yanlıştır.



Şekil 2.5 Sezgisel bulanık küme olmayan geometrik gösterimi

Tanım 2.1.2: [1] X boştan farklı bir küme olsun.

$\mu_\emptyset : X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_\emptyset(x) = 0$ ve $\nu_\emptyset(x) = 1$ olarak tanımlanırsa boş küme,

$$0_\sim = \{\langle x, 0,1\rangle | x \in X\},$$

$\mu_X : X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_X(x) = 1$ ve $\nu_X(x) = 0$ olarak tanımlanırsa X kümesi

$$1_{\sim} = \{\langle x, 1,0\rangle | x \in X\}$$

şeklinde sezgisel bulanık küme olarak yazılabilir.

X deki bütün sezgisel bulanık kümelerin ailesi $SB(X)$ olarak gösterilir.

Tanım 2.1.3: [3] X boştan farklı bir küme olsun. $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle | x \in X\}$ ve $B = \{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x)\rangle | x \in X\}$ sezgisel bulanık kümeleri verilsin. Bu durumda,

i. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ve $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$ (Kapsama)
ii. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ (Eşitlik)
iii. $A^c = \{\langle x, \nu_A(x), \mu_A(x)\rangle | x \in X\}$ (Tümleyen)
iv. $A \wedge B = \{\langle x, min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, max\{\nu_A(x), \nu_B(x)\}\rangle | x \in X\}$(Kesişim)
v. $A \vee B = \{\langle x, max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, min\{\nu_A(x), \nu_B(x)\}\rangle | x \in X\}$(Birleşim)

dir.

Örnek 2.1.1: $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde A ve B sezgisel bulanık kümeleri

$$A = \{\langle a, 0.7, 0.3\rangle, \langle b, 0.8, 0.1\rangle, \langle c, 0.2, 0.8\rangle\}$$
$$B = \{\langle a, 0.5, 0.5\rangle, \langle b, 0.7, 0.1\rangle, \langle c, 0.2, 0.6\rangle\}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan,

$$A \vee B = \{\langle a, 0.7, 0.3\rangle, \langle b, 0.8, 0.1\rangle, \langle c, 0.2, 0.6\rangle\}$$

$$A \wedge B = \{\langle a, 0.5, 0.5\rangle, \langle b, 0.7, 0.1\rangle, \langle c, 0.2, 0.8\rangle\}$$

$$A^c = \{\langle a, 0.3, 0.7\rangle, \langle b, 0.1, 0.8\rangle, \langle c, 0.8, 0.2\rangle\}$$

Tanım 2.1.4: [3] X boştan farklı bir küme ve $\{A_i | i \in I\}$ ailesi sezgisel bulanık kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda, sezgisel bulanık kümelerin kesişimi ve birleşimi aşağıdaki gibi tanımlanır:

i. $\bigwedge A_i = \left\{\langle x, min\{\mu_{A_i}(x)\}, max\{\nu_{A_i}(x)\}\rangle \middle| x \in X\right\}$
ii. $\bigvee A_i = \left\{\langle x, max\{\mu_{A_i}(x)\}, min\{\nu_{A_i}(x)\}\rangle \middle| x \in X\right\}$

Sonuç 2.1.1: [1] X boştan farklı bir küme olmak üzere $A, B, C, D \in SB(X)$ olsun. Buna göre,

i. $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D \Rightarrow A \vee C \subseteq B \vee D$ ve $A \wedge C \subseteq B \wedge D$

ii. $A \subseteq B$ ve $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \wedge C$

iii. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C \Rightarrow A \vee B \subseteq C$

iv. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

v. $(A \vee B)^c = A^c \wedge B^c$, $(A \wedge B)^c = A^c \vee B^c$

vi. $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

vii. $(A^c)^c = A$

viii. $(0_\sim)^c = 1_\sim$

ix. $(1_\sim)^c = 0_\sim$.

Tanım 2.1.5: [3] X ve Y boştan farklı kümeler ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

i. $B = \{\langle y, \mu_B(y), \nu_B(y)\rangle | y \in Y\}$ kümesi Y de bir sezgisel bulanık küme olmak üzere B nin f altındaki ters görüntüsü

$$f^{-1}(B) = \{\langle x, f^{-1}(\mu_B)(x), f^{-1}(\nu_B)(x)\rangle |\ x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f^{-1}(\mu_B) = \mu_B \circ f$ dir.

ii. $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle | x \in X\}$ kümesi X de sezgisel bulanık küme olmak üzere A nın f altındaki görüntüsü

$$f(A) = \{\langle y, f(\mu_A)(y), 1 - f(1 - \nu_A)(y)\rangle |\ y \in Y\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$f(\mu_A)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & , \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

$$1 - f(1 - \nu_A)(y) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in f^{-1}(y)} \nu_A(x) & , \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 1 & , \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

dır.

Örnek 2.1.2: [8] $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $Y = \{y_1, y_2\}$ olmak üzere $f: X \to Y$ fonksiyonu, $f(x_1) = f(x_2) = y_1$, $f(x_3) = y_2$ şeklinde tanımlansın.

a) $A = \{\langle x,\ \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle | x \in X\} = \{\langle x_1, 0.4, 0.2\rangle, \langle x_2, 0.6, 0.3\rangle, \langle x_3, 0.7, 0.1\rangle\}$

sezgisel bulanık kümesinin f altında ki görüntüsü

$$f(A) = \{\langle y_1, 0.6, 0.2\rangle, \langle y_2, 0.7, 0.1\rangle |\ y \in Y\}$$

sezgisel bulanık kümesidir.

b) $B = \{\langle y,\ \mu_B(x), \nu_B(x)\rangle | y \in Y\} = \{\langle y_1, 0.6{,}0.2\rangle, \langle y_2, 0.7{,}0.1\rangle\}$

sezgisel bulanık kümesinin f altında ki ters görüntüsü

$$f^{-1}(B) = \{\langle x_1, 0.6, 0.2\rangle, \langle x_2, 0.6, 0.2\rangle, \langle x_3, 0.7, 0.1\rangle\}$$

sezgisel bulanık kümesidir.

Sonuç 2.1.2: [6] X ve Y boştan farklı kümeler ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall i \in I$ için $A, A_i \in SB(X)$ ve $B, B_i \in SB(Y)$ olmak üzere,

i. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

ii. $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

iii. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
[Eğer f birebir ise $A = f^{-1}(f(A))$ dır.]

iv. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$.
[Eğer f örten ise $f(f^{-1}(B)) = B$ dır.]

v. $f^{-1}(\vee B_i) = \vee f^{-1}(B_i)$

vi. $f^{-1}(\wedge B_i) = \wedge f^{-1}(B_i)$

vii. $f(\vee A_i) = \vee f(A_i)$.

viii. $f(\wedge A_i) \subseteq \wedge f(A_i)$.

[Eğer f birebir ise $f(\wedge A_i) = \wedge f(A_i)$ dır.]

ix. Eğer f örten ise $f(1_{\sim}) = 1_{\sim}$ dir.

x. $f(0_{\sim}) = 0_{\sim}$

xi. $f^{-1}(1_{\sim}) = 1_{\sim}$

xii. $f^{-1}(0_{\sim}) = 0_{\sim}$

xiii. Eğer f örten ise, $[f(A)]^c \subseteq f(A^c)$ dir.

xiv. $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$.

İspat: $A = \langle x, \mu_A, v_A \rangle$, $B = \langle y, \mu_B, v_B \rangle$, $A_i = \langle x, \mu_{A_i}, v_{A_i} \rangle$, $B_i = \langle y, \mu_{B_i}, v_{B_i} \rangle$ olsun.

i. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \mu_{A_1} \leq \mu_{A_2}$ ve $v_{A_1} \geq v_{A_2}$

$$\Rightarrow f(\mu_{A_1}) \leq f(\mu_{A_2}) \text{ ve } 1 - v_{A_1} \leq 1 - v_{A_2}$$

$$\Rightarrow f(\mu_{A_1}) \leq f(\mu_{A_2}) \text{ ve } f(1 - v_{A_1}) \leq f(1 - v_{A_2})$$

$$\Rightarrow f(\mu_{A_1}) \leq f(\mu_{A_2}) \text{ ve } 1 - f(1 - v_{A_1}) \geq 1 - f(1 - v_{A_2})$$

$$\Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2) \text{ dir.}$$

ii. $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \mu_{B_1} \leq \mu_{B_2}$ ve $v_{B_1} \geq v_{B_2}$

$$\Rightarrow f^{-1}(\mu_{B_1}) \leq f^{-1}(\mu_{B_2}) \text{ ve } 1 - v_{B_1} \leq 1 - v_{B_2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\mu_{B_1}) \leq f^{-1}(\mu_{B_2}) \text{ ve } f^{-1}(1 - v_{B_1}) \leq f^{-1}(1 - v_{B_2})$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\mu_{B_1}) \leq f^{-1}(\mu_{B_2}) \text{ ve } 1 - f^{-1}(1 - v_{B_1}) \geq 1 - f^{-1}(1 - v_{B_2})$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2) \text{ dir.}$$

iii. $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(\langle x, \mu_A, v_A \rangle))$

$$= f^{-1}(\langle y, f(\mu_A), 1 - f(1 - v_A) \rangle)$$

$$= \langle x, f^{-1}\big(f(\mu_A)\big), f^{-1}\big(1 - f(1 - v_{\mathrm{A}})\big)\rangle$$

dir. Ayrıca $f^{-1}\big(f(\mu_A)\big) \geq \mu_A$ ve

$$f^{-1}\big(1 - f(1 - v_{\mathrm{A}})\big) = 1 - f^{-1}\big(f(1 - v_{\mathrm{A}})\big) \leq 1 - (1 - v_{\mathrm{A}}) = v_{\mathrm{A}}$$

olduğundan $A = \langle x, \mu_A, v_{\mathrm{A}}\rangle \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$ elde edilir.

iv. $$f\big(f^{-1}(B)\big) = f\big(f^{-1}(\langle y, \mu_B, v_B\rangle)\big)$$

$$= f(\langle f^{-1}(y), f^{-1}(\mu_B), f^{-1}(v_B)\rangle)$$

$$= f(\langle x, f^{-1}(\mu_B), f^{-1}(v_B)\rangle)$$

$$= \langle y, f\big(f^{-1}(\mu_B)\big), 1 - f\big(1 - f^{-1}(v_B)\big)\rangle$$ dir.

Ayrıca $f\big(f^{-1}(\mu_B)\big) \leq \mu_B$ ve

$$1 - f\big(1 - f^{-1}(v_B)\big) = 1 - f\big(f^{-1}(1 - v_B)\big) \geq 1 - (1 - v_B) = v_B$$

olduğundan $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq \langle y, \mu_B, v_B\rangle = B$ elde edilir.

v. $$f^{-1}\big(\vee B_j\big) = f^{-1}\left(\langle y, \vee \mu_{B_j}, \wedge v_{B_j}\rangle\right)$$

$$= \langle x, f^{-1}\left(\vee \mu_{B_j}\right), f^{-1}\left(\wedge v_{B_j}\right)\rangle$$

$$= \langle x, \vee f^{-1}\left(\mu_{B_j}\right), \wedge f^{-1}\left(v_{B_j}\right)\rangle$$

$$= \langle x, \vee \mu_{f^{-1}(B_j)}, \wedge v_{f^{-1}(B_j)}\rangle$$

$$= \vee f^{-1}\big(B_j\big).$$

vi. $$f^{-1}\big(\wedge B_j\big) = f^{-1}\left(\langle y, \wedge \mu_{B_j}, \vee v_{B_j}\rangle\right)$$

$$= \langle x, f^{-1}\left(\wedge \mu_{B_j}\right), f^{-1}\left(\vee v_{B_j}\right)\rangle$$

$$= \langle x, \wedge f^{-1}\left(\mu_{B_j}\right), \vee f^{-1}\left(v_{B_j}\right)\rangle$$

$$= \langle x, \wedge \mu_{f^{-1}(B_j)}, \vee v_{f^{-1}(B_j)}\rangle$$

$$= \wedge f^{-1}(B_j).$$

vii. $f(\vee A_i) = f\left(\langle x, \vee \mu_{A_i}, \wedge v_{A_i}\rangle\right)$

$$= \langle y, f\left(\vee \mu_{A_i}\right), 1 - f\left(1 - \wedge v_{A_i}\right)\rangle$$

$$= \langle y, \vee f\left(\mu_{A_i}\right), \wedge 1 - f\left(1 - v_{A_i}\right)\rangle$$

$$= \cup \langle y, f\left(\mu_{A_i}\right), 1 - f\left(1 - v_{A_i}\right)\rangle$$

$$= \vee f(A_i).$$

$\Big[f\left(\vee \mu_{A_i}\right) = \vee f\left(\mu_{A_i}\right)$ ve $1 - f\left(1 - \wedge v_{A_i}\right) = 1 - f\left(\vee\left(1 - v_{A_i}\right)\right) = 1 - \vee f\left(1 - v_{A_i}\right) = \wedge\left(1 - f\left(1 - v_{A_i}\right)\right).\Big]$

viii. $f(\wedge A_i) = f\left(\langle x, \wedge \mu_{A_i}, \vee v_{A_i}\rangle\right)$

$$= \langle y, f\left(\wedge \mu_{A_i}\right), 1 - f\left(1 - \vee v_{A_i}\right)\rangle$$

$$\subseteq \langle y, \wedge f\left(\mu_{A_i}\right), \vee\left(1 - f\left(1 - v_{A_i}\right)\right)\rangle$$

$$= \wedge f(A_i).$$

$\Big[f\left(\wedge \mu_{A_i}\right) \leq \wedge f\left(\mu_{A_i}\right)$ ve $1 - f\left(1 - \vee v_{A_i}\right) = 1 - f\left(\wedge\left(1 - v_{A_i}\right)\right) \geq 1 - \wedge f\left(1 - v_{A_i}\right) = \vee\left(1 - f\left(1 - v_{A_i}\right)\right)\Big]$

ix. $f(1_\sim) = f(\langle x, 1, 0\rangle)$

$$= \langle f(x), f(1), f(0)\rangle$$

$$= \langle y, 1, 0\rangle = 1_\sim.$$

x. $f(0_\sim) = f\langle x, 0, 1\rangle$

$$= \langle f(x), f(0), f(1)\rangle$$

$$= \langle y, 0, 1\rangle = 0_\sim.$$

xi. $f^{-1}(1_\sim) = f^{-1}(\langle y, 1, 0\rangle)$

$$= \langle x, f^{-1}(1), f^{-1}(0)\rangle$$

$$= \langle x, 1, 0\rangle = 1_\sim.$$

xii. $f^{-1}(0_\sim) = f^{-1}(\langle y, 0, 1\rangle)$

$$= \langle x, f^{-1}(0), f^{-1}(1)\rangle$$

$$= \langle x, 0, 1\rangle = 0_\sim$$

xiii. $f(A^c) = f(\langle x, \mu_A, v_\mathrm{A}\rangle^c)$

$$= f(\langle x, v_\mathrm{A}, \mu_A\rangle) = \langle y, f(v_\mathrm{A}), 1 - f(1-\mu_A)\rangle$$

ve

$$[f(A)]^c = [f(\langle x, \mu_A, v_\mathrm{A}\rangle)]^c$$

$$= [y, f(\mu_A), 1 - f(1 - v_\mathrm{A})]^c$$

$$= \langle y, 1 - f(1 - v_\mathrm{A}), f(\mu_A)\rangle.$$

Gerekli olan sonucu f nin örten olmasından elde ederiz.

xiv. $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(\langle y, \mu_B, v_B\rangle^c)$

$$= f^{-1}(\langle y, v_B, \mu_B\rangle)$$

$$= \langle f^{-1}(y), f^{-1}(v_B), f^{-1}(\mu_B)\rangle$$

$$= \langle x, v_{f^{-1}(B)}, \mu_{f^{-1}(B)}\rangle$$

$$= [f^{-1}(B)]^c.$$

Tanım 2.1.6: $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \in SB(X)$ olsun. Eğer $f(x) = f(y) \Longrightarrow A(x) = A(y)$ (yani $\mu_A(x) = \mu_A(y)$ ve $v_A(x) = v_A(y)$) önermesi sağlanıyorsa A ya f −değişmez denir. A, f −değişmez ise $f^{-1}(f(A)) = A$ dır.

Tanım 2.1.7: *X* boştan farklı bir küme olsun. *X* de bir *A* sezgisel bulanık kümesinin desteği, *A* nın üye olma ve üye olmama derecesini sıfırdan büyük yapan noktalar kümesidir;

$$C = des(A) = \{x \in X |\ \mu_A(x) > 0\ ,\ \ \nu_A(x) \geq 0\}$$

dır.

Tanım 2.1.8: $X \neq \emptyset$ olsun. X de bir A sezgisel bulanık kümesi verilsin. A nın çekirdeği, *A* nın üye olma derecesini 1 ve üye olmama derecesini 0 yapan noktaların kümesidir;

$$çek(A) = \{x \in X |\ \mu_A(x) = 1\ ,\ \ \nu_A(x) = 0\}$$

dır.

Tanım 2.1.9: X boştan farklı bir küme olsun. X de bir A sezgisel bulanık kümesi verilsin. A nın α −kesimi αA ile gösterilir ve

$$\alpha A = \{x \in X|\ \mu_A(x) \geq \alpha\ , \nu_A(x) \geq 0\ ,\ \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1\}$$

şeklinde tanımlı kümedir.

Örnek 2.1.3: $X = \{1,2,3,4\}$ ve

$$A = \{\langle x,\ \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle | x \in X\} = \{\langle 1,0.7,0.2\rangle, \langle 2,0.8,0.2\rangle, \langle 3,0,1\rangle, \langle 4,1,0\rangle\}$$

olsun.

a) $C = des(A) = \{x \in X|\ \mu_A(x) > 0\ ,\ \ \nu_A(x) \geq 0\} = \{1,2,4\}$
b) $çek(A) = \{x \in X|\ \mu_A(x) = 1\ ,\ \ \nu_A(x) = 0\} = \{4\}$
c) α keyfi bir değer olup burada $\alpha = 0{,}2$ olarak alırsak, A nın α −kesiminin kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\alpha A = \{x \in X|\ \mu_A(x) \geq 0.2\ , \nu_A(x) \geq 0\ ,\ \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1\} = \{1,2,4\}.$$

Tanım 2.1.10: A, X de bir sezgisel bulanık küme ve $0 \leq t + s \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$X_A^{(t,s)} = \{x \in X | \mu_A(x) \geq t \text{ ve } \nu_A(x) \leq s\}$$

kümesi A nın bir (t, s) −seviye alt kümesidir.

2.2. Sezgisel Bulanık Kümelerden Bulanık Küme Elde Etme Operatörü

Bu bölümde Atanassov' un 1999 yılında tanımladığı ve incelediği sezgisel bulanık küme operatörlerin tanımını vereceğiz. Bu operatörlerden, sezgisel bulanık kümeyi, bulanık kümeye dönüştüren iki operatör aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.1: [1] X evrensel küme, $A \in SB(X)$ olsun.

i. $\square A = \{\langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle : x \in X\} = \{\langle x, \mu_A(x) \rangle : x \in X\}$

ii. $\lozenge A = \{\langle x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X\} = \{\langle x, 1 - \nu_A(x) \rangle : x \in X\}$

Örnek 2.2.1: $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde A ve B sezgisel bulanık kümeleri

$A = \{\langle a, 0.7, 0.3\rangle, \langle b, 0.8, 0.1\rangle, \langle c, 0.2, 0.8\rangle\}$
$B = \{\langle a, 0.5, 0.5\rangle, \langle b, 0.7, 0.1\rangle, \langle c, 0.2, 0.6\rangle\}$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$\square A = \{\langle a, 0.7, 0.3\rangle, \langle b, 0.8, 0.2\rangle, \langle c, 0.2, 0.8\rangle\}$

$\lozenge A = \{\langle a, 0.7, 0.3\rangle, \langle b, 0.9, 0.1\rangle, \langle c, 0.2, 0.8\rangle\}$

Not 2.2.1: X evrensel küme olmak üzere A bulanık küme ise $\square A$=A=$\lozenge A$ olur.

Tanım 2.2.2: [1] X bir küme, $A \in SB(X)$ olmak üzere $\exists x \in X$ için $\pi_A(x) > 0$ ise A kümesine öz sezgisel bulanık küme denir.

A kümesi öz sezgisel bulanık küme ise, $\square A \subset A \subset \lozenge A$ ve $\square A \neq A \neq \lozenge A$ dır.

Bu durum sezgisel bulanık kümelerin, bulanık kümelerin bir genellemesi olduğunu göstermektedir.

Teorem 2.2.1: X bir küme ve $A \in SB(X)$ olsun.

i. $\square A = (\lozenge A^c)^c$
ii. $\lozenge A = (\square A^c)^c$
iii. $\square(A \vee B) = \square A \vee \square B$
iv. $\square(A \wedge B) = \square A \wedge \square B$
v. $\lozenge(A \vee B) = \lozenge A \vee \lozenge B$
vi. $\lozenge(A \wedge B) = \lozenge A \wedge \lozenge B$
vii. $\square\square A = \square A$
viii. $\square \lozenge A = \lozenge A$
ix. $\lozenge \square A = \square A$

x. $\Diamond\Diamond A = \Diamond A$ dır.

İspat:

i. $\Box A = \Box\langle x,\ \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle = \langle x,\ \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle$

$= (\langle x, 1 - \mu_A(x),\ \mu_A(x)\rangle)^c$

$= (\langle x, \nu_A(x), 1 - \nu_A(x)\rangle)^c$

$= (\langle x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x)\rangle^c)^c$

$= ((\Diamond \langle x,\ \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle)^c)^c = (\Diamond A^c)^c.$

ii. $\Diamond A = \Diamond \langle x,\ \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle = \langle x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x)\rangle$

$= (\langle x, \nu_A(x), 1 - \nu_A(x)\rangle)^c$

$= (\langle x, 1 - \mu_A(x),\ \mu_A(x)\rangle)^c$

$= ((\langle x,\ \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle)^c)^c$

$= ((\Box\langle x,\ \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle)^c)^c = (\Box A^c)^c$

iii. $\Box(A \vee B) = \Box\{\langle x, max\{\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)\},\ min\{\nu_A(x), \nu_B(x)\}\rangle | x \in X\}$

$= \{\langle x, max\{\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)\}\rangle | x \in X\}$

$= \{\langle x,\ \mu_A(x)\rangle | x \in X\} \vee \{\langle x,\ \mu_B(x)\rangle | x \in X\}$

$= \Box A \vee \Box B$

iv. $\Box(A \wedge B) = \Box\{\langle x, min\{\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)\},\ max\{\nu_A(x), \nu_B(x)\}\rangle | x \in X\}$

$= \{\langle x, min\{\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)\}\rangle | x \in X\}$

$= \{\langle x,\ \mu_A(x)\rangle | x \in X\} \wedge \{\langle x,\ \mu_B(x)\rangle | x \in X\}$

$= \Box A \wedge \Box B$

v. $\Diamond (A \vee B) = \Diamond \{\langle x, max\{\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)\},\ min\{\nu_A(x), \nu_B(x)\}\rangle | x \in X\}$

$= \{\langle x, \quad max\{1 - \nu_A(x), 1 - \nu_B(x)\}\rangle | x \in X\}$

$= \{\langle x, 1 - \nu_A(x)\rangle | x \in X\} \vee \{\langle x, 1 - \nu_B(x)\rangle | x \in X\}$

$= \Diamond A \vee \Diamond B$

vi. $\Diamond (A \wedge B) = \Diamond \{\langle x, min\{\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)\},\ max\{\nu_A(x), \nu_B(x)\}\rangle | x \in X\}$

$= \{\langle x, \quad min\{1 - \nu_A(x), 1 - \nu_B(x)\}\rangle | x \in X\}$

$$= \{\langle x, 1-\nu_A(x)\rangle | x \in X\} \wedge \{\langle x, 1-\nu_B(x)\rangle | x \in X\}$$
$$= \lozenge A \wedge \lozenge B$$

vii. $\square\square A = \square\square\langle x,\ \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle$
$$= \square\langle x,\ \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle$$
$$= \langle x,\ \mu_A(x)\rangle = \square A$$

viii. $\square \lozenge A = \square \lozenge \langle x,\ \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle$
$$= \square\langle x, 1-\nu_A(x), \nu_A(x)\rangle$$
$$= \langle x,\ 1-\nu_A(x)\rangle = \lozenge A$$

ix. $\lozenge \square A = \lozenge \square\langle x,\ \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle$
$$= \lozenge \langle x,\ \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle$$
$$= \langle x,\ \mu_A(x)\rangle = \square A$$

x. $\lozenge\lozenge A = \lozenge\lozenge \langle x,\ \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle$
$$= \lozenge \langle x, 1-\nu_A(x), \nu_A(x)\rangle$$
$$= \langle x, 1-\nu_A(x)\rangle = \lozenge A$$

3. SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

3.1. Sezgisel Bulanık Noktalar

Tanım 3.1.1: [11] $t, s \in (0,1]$ ve $t + s \leq 1$ olsun. X in sezgisel bulanık noktası

$$x_{(t,s)}(y) = \begin{cases} \langle t, s \rangle \ , & y = x \ ise \\ \langle 0,1 \rangle \ , & y \neq x \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan X de bir sezgisel bulanık kümedir. Bu durumda x noktasına, $x_{(t,s)}$ in desteği, t ve s değerlerine ise $x_{(t,s)}$ in sırasıyla üye ve üye olmama dereceleri denir. $A \in SB(X)$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $t \leq \mu_A(x)$ ve $s \geq \nu_A(x)$ ise $x_{(t,s)}$ sezgisel bulanık noktası A ya aittir denir ve $x_{(t,s)} \in A$ yazılır.

$x_{(t,s)}$ sezgisel bulanık noktası, $x_{(t,s)} = \langle x_t, 1 - x_{1-s} \rangle$ şeklinde gösterilebilir.

Teorem 3.1.1: $A = \langle x, \mu_A, \nu_A \rangle$, X de bir sezgisel bulanık küme olsun. Bu durumda $x_{(t,s)} \in A$ olması için gerek ve yeter şart $x_t \in \mu_A$ ve $x_{1-s} \in 1 - \nu_A$ olmasıdır.

İspat: $x_{(t,s)} \in A \ \Leftrightarrow \ t \leq \mu_A(x)$ ve $s \geq \nu_A(x)$

$$\Leftrightarrow \ t \leq \mu_A(x) \ \text{ve} \ 1 - s \leq 1 - \nu_A(x)$$

$$\Leftrightarrow x_t \in \mu_A \ \text{ve} \ x_{1-s} \in 1 - \nu_A.$$

Teorem 3.1.2: $A = \langle x, \mu_A, \nu_A \rangle$ ve $B = \langle x, \mu_B, \nu_B \rangle$, X de sezgisel bulanık kümeler olsun. Bu durumda $A \subseteq B$ olması için gerek ve şart X de ki herhangi $x_{(t,s)}$ sezgisel bulanık noktası için $x_{(t,s)} \in A$ ve $x_{(t,s)} \in B$ olmasıdır.

İspat: $A \subseteq B$ ve $x_{(t,s)} \in A$ olsun. $t \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ve $s \geq \nu_A(x) \geq \nu_B(x)$ olur. Böylece $x_{(t,s)} \in B$ dir. Tersine, herhangi bir $x \in X$ için $t = \mu_A(x)$ ve $s = \nu_A(x)$ olsun. Bu durumda $x_{(t,s)} \in A$ dır. Hipotezden $x_{(t,s)} \in B$ olur. Böylece $\mu_A(x) = t \leq \mu_B(x)$ ve $\nu_A(x) = s \geq \nu_B(x)$ olup $A \subseteq B$ dir.

Teorem 3.1.3: $A = \langle x, \mu_A, \nu_A \rangle$, X de bir sezgisel bulanık küme olsun. Bu durumda,

$$A = \cup_{x_{(t,s)} \in A} x_{(t,s)}$$

dir.

İspat: $x_{(t,s)} = \langle x_t, 1 - x_{1-s} \rangle$ için,

$$\cup_{x_{(t,s)} \in A} x_{(t,s)} = \langle \sup_{x_t \in \mu_A} x_t \ , \inf_{x_{1-s} \in 1-\nu_A} 1 - x_{1-s} \rangle$$

dir. Açıktır ki $\sup_{x_t \in \mu_A} x_t = \mu_A$ dır. Diğer yandan $\sup_{x_{1-s} \in 1-\nu_A} x_{1-s} = 1 - \nu_A$ dır. Bundan dolayı,

$$\nu_A = 1 - \sup_{x_{1-s} \in 1-\nu_A} x_{1-s} = \inf_{x_{1-s} \in 1-\nu_A} 1 - x_{1-s}$$

dir. Böylece,

$$\cup_{x_{(t,s)} \in A} x_{(t,s)} = \langle x, \mu_A, \nu_A \rangle = A$$

olur.

3.2. Sezgisel Bulanık Topolojik Uzaylar ve Alt Uzaylar

Tanım 3.2.1: [17] X boş olmayan bir küme ve $T \subset SB(X)$ olsun.

i. $0_\sim, 1_\sim \in T$
ii. $\forall\, G_1, G_2 \in T$ için $G_1 \cap G_2 \in T$
iii. $\{G_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq T$ için $\cup\, G_\alpha \in T$

ise T ye X üzerinde bir sezgisel bulanık topoloji denir. (X, T) ikilisine ise sezgisel bulanık topolojik uzay denir. T nun elemanlarına sezgisel bulanık açık küme, sezgisel bulanık açık kümelerin tümleyenine de sezgisel bulanık kapalı küme denir.

Bir X kümesi üzerindeki tüm sezgisel bulanık topolojilerin kümesi $SBT(X)$ olarak gösterilir.

Tanım 3.2.2: [10] (X, T) bir sezgisel bulanık topolojik uzay ve $A \in SB(X)$ olsun. Buna göre

$$T_A = \{(U \cap A) \in SB(X) : U \in T\}$$

kümesine A üzerinde indirgenen(relatif) sezgisel bulanık topoloji denir. (A, T_A) ikilisine de (X, T) nin sezgisel bulanık alt uzayı denir.

Örnek 3.2.1: $X = \{1,2,3\}$ olsun ve $A = \{\langle 1, 0.3, 0.4\rangle, \langle 2, 0.4, 0.5\rangle\}$, X in sezgisel bulanık kümesi olsun. $T = \{0_\sim, 1_\sim, \{\langle 2, 0.4, 0.5\rangle\}, \{\langle 2, 0.4, 0.5\rangle, \langle 3, 0.4, 0.5\rangle\}\}$, X üzerinde bir sezgisel bulanık topolojidir. $\{\langle 2, 0.4, 0.5\rangle\}$ ve $\{\langle 2, 0.4, 0.5\rangle, \langle 3, 0.4, 0.5\rangle\}$ sezgisel bulanık açık küme iken $\{\langle 1, 0.3, 0.4\rangle\}$ sezgisel bulanık kapalı kümedir. A üzerinde indirgenmiş sezgisel bulanık topoloji $T_A = \{(U \cap A) \in SB(X) : U \in T\}$ şeklinde tanımlıdır. Bu durumda, $T_A = \{0_\sim, A, \{\langle 2, 0.4, 0.5\rangle\}\}$, A üzerinde indirgenmiş sezgisel bulanık topolojidir.

Tanım 3.2.3: (X, T_X) ve (Y, T_Y) sezgisel bulanık topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\forall\, V \in T_Y$ için $f^{-1}(V) \in T_X$ ise f ye sezgisel bulanık sürekli fonksiyon denir. Eğer $\forall\, U \in T_X$ için $f(U) \in T_Y$ ise f ye sezgisel bulanık açık fonksiyon denir.

Tanım 3.2.4: (A, T_A) ve (B, T_B) sırasıyla (X, T_X) ve (Y, T_Y) sezgisel bulanık topolojik uzayların alt uzayları ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

i. $f(A) \subset B$ ise $f, (A, T_A)$ dan (B, T_B) ye bir fonksiyondur denir ve $f: (A, T_A) \to (B, T_B)$ şeklinde gösterilir.
ii. $\forall\, V \in T_B$ için $f^{-1}(V) \cap A \in T_A$ ise $f: (A, T_A) \to (B, T_B)$ ye relatif bir sezgisel bulanık sürekli fonksiyon denir.
iii. $\forall\, U \in T_A$ için $f(U) \in T_B$ ise $f: (A, T_A) \to (B, T_B)$ ye relatif sezgisel bulanık açık fonksiyon denir.

Teorem 3.2.1: (X,T_X) ve (Y,T_Y) sezgisel bulanık topolojik uzaylar ve $A \subset X$ ve $B \subset Y$ olsun. Bu durumda $f: X \to Y$ sürekli fonksiyonu için $f(A) \subset B$ ise $f: (A,T_A) \to (B,T_B)$ bir relatif sezgisel bulanık sürekli fonksiyondur.

İspat: $V' \in T_B$ olsun. Bu durumda $V' = V \cap B$ olacak biçimde $V \in T_Y$ vardır. $f: X \to Y$ sezgisel bulanık sürekli ve $V \in T_Y$ olduğundan $f^{-1}(V) \in T_X$ dir. Diğer yandan, $f^{-1}(V') \cap A = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(B) \cap A$ dır. Sonuç 2.1.2 de ki (ii) ve (iii) den $f(A) \subset B$ ise $A \subset f^{-1}(B)$ dir. Böylece $f^{-1}(V') \cap A = f^{-1}(V) \cap A$ olup $f^{-1}(V') \cap A \in T_A$ dır. Sonuç olarak f relatif sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 3.2.2: $f: (X,T_X) \to (Y,T_Y)$ ve $g: (Y,T_Y) \to (Z,T_Z)$ sezgisel bulanık sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda $g \circ f: (X,T_X) \to (Z,T_Z)$ sezgisel bulanık sürekli fonksiyondur.

İspat: Herhangi bir $Z \in T_Z$ sezgisel bulanık açık kümesi verilsin. g fonksiyonu sezgisel bulanık sürekli olduğundan $g^{-1}(Z) \in T_Y$ ve f fonksiyonu sezgisel bulanık sürekli olduğundan,

$$f^{-1}\left(g^{-1}(Z)\right) = (g \circ f)^{-1}(Z) \in T_X$$

olur. Sonuç olarak $g \circ f$ bileşke fonksiyonu sezgisel bulanık sürekli fonksiyondur.

Teorem 3.2.3: (A,T_A), (B,T_B), (C,T_C) sırasıyla (X,T_X), (Y,T_Y), (Z,T_Z) sezgisel bulanık topolojik uzayların alt uzayları, $f: (A,T_A) \to (B,T_B)$ ve $g: (B,T_B) \to (C,T_C)$ relatif sezgisel bulanık sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda $g \circ f: (A,T_A) \to (C,T_C)$ relatif sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyondur.

İspat: $f: (A,T_A) \to (B,T_B)$ ve $g: (B,T_B) \to (C,T_C)$ fonksiyonları relatif sezgisel bulanık sürekli ve $W \in T_C$ olsun. g, relatif sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyon olduğundan $g^{-1}(W) \cap B \in T_B$ dir. Ayrıca f, relatif sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(W) \cap B) \cap A \in T_A$ dır. Diğer yandan,

$$f^{-1}(g^{-1}(W) \cap B) \cap A = f^{-1}\big(g^{-1}(W)\big) \cap f^{-1}(B) \cap A$$

$$= (g \circ f)^{-1}(W) \cap f^{-1}(B) \cap A$$

$$= (g \circ f)^{-1}(W) \cap A.$$

Böylece $(g \circ f)^{-1}(W) \cap A \in T_A$ dır. Sonuç olarak $g \circ f$ relatif sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 3.2.4: (A, T_A), (B, T_B), (C, T_C) sırasıyla (X, T_X), (Y, T_Y), (Z, T_Z) sezgisel bulanık topolojik uzayların alt uzayları, $f: (A, T_A) \to (B, T_B)$ ve $g: (B, T_B) \to (C, T_C)$ relatif sezgisel bulanık açık fonksiyonlar olsun. Bu durumda $g \circ f: (A, T_A) \to (C, T_C)$ relatif sezgisel bulanık açık bir fonksiyondur.

İspat: $f: (A, T_A) \to (B, T_B)$ ve $g: (B, T_B) \to (C, T_C)$ fonksiyonlarının relatif sezgisel bulanık açık ve $U \in T_A$ olsun. f relatif sezgisel bulanık açık bir fonksiyon olduğundan $f(U) \in T_B$ dir. Ayrıca g, relatif sezgisel bulanık açık bir fonksiyon olduğundan $g\big(f(U)\big) = (g \circ f)(U) \in T_C$ dir. Bundan dolayı $g \circ f$ fonksiyonu relatif sezgisel bulanık açıktır.

Tanım 3.2.5: (X, T) sezgisel bulanık topolojik uzay ve $\beta \subset T$ olsun. $\forall U \in T$ için $U = 0_{\sim}$ veya $U = \bigcup \beta'$ olacak biçimde $\beta' \subset \beta$ var ise β ya T için bir tabandır denir.

Örnek 3.2.2: (X, T) sezgisel bulanık topolojik uzay ve

$$\beta = \big\{\{\langle a, 0.3,0.4\rangle, \langle b, 0.4,0.5\rangle\}, \{\langle b, 0.4,0.5\rangle, \langle c, 0.7,0.1\rangle\}\big\}$$

ailesi verilsin. β ailesi, X üzerindeki herhangi bir topoloji için bir taban oluşturmaz.

Varsayalım ki β ailesi, X üzerindeki herhangi bir T topolojisi için taban olsun. $\beta \subset T$ olduğundan,

$$\{\langle a, 0.3,0.4\rangle, \langle b, 0.4,0.5\rangle\}, \{\langle b, 0.4,0.5\rangle, \langle c, 0.7,0.1\rangle\} \in T$$

bulunur. Tanım 3.2.1 (ii) den,

$$\{\langle a, 0.3, 0.4\rangle, \langle b, 0.4, 0.5\rangle\} \cap \{\langle b, 0.4, 0.5\rangle, \langle c, 0.7, 0.1\rangle\} = \langle b, 0.4, 0.5\rangle \in T$$

olur. Bu ise $\langle b, 0.4, 0.5\rangle$ kümesinin β ailesinin elemanlarının birleşimi olarak yazılmasıyla çelişir. Sonuç olarak β ailesi, X üzerindeki herhangi bir T topolojisi için bir taban oluşturmaz.

Tanım 3.2.6: (X, T) sezgisel bulanık topolojik uzay, $A \in SB(X)$ ve $\beta \subset T_A$ olsun. $\forall U \in T_A$ için $U = 0_{\sim}$ veya $U = \bigcup \beta'$ olacak biçimde $\beta' \subset \beta$ var ise β, T_A için bir tabandır denir.

(X, T) bir sezgisel bulanık topolojik uzay, β bir taban ve $A \in SB(X)$ olsun. Bu durumda $\beta_A = \{U \cap A : U \in \beta\}$ ailesinin, T_A nın bir tabanı olduğu açıktır.

Teorem 3.2.5: $f: (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ bir fonksiyon ve β, T_Y nin bir tabanı olsun. Buna göre f nin sezgisel bulanık sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall B \in \beta$ için $f^{-1}(B) \in T_X$ olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$ f fonksiyonu sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyon olsun. $\forall B \in \beta$ için $\beta \subset T_Y$ olduğundan, $B \in T_Y$ olur. Buna göre $f^{-1}(B) \in T_X$ dir.

$(\Longleftarrow)$ $V \in T_Y$ olsun. $\beta \subset T_Y$ olduğundan,

$$V = \bigcup\{B_i \subset Y \mid B_i \in i \in I\}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

olur. $i \in I$ ve $B_i \in \beta$ için $f^{-1}(B_i) \in T_X$ olduğundan $f^{-1}(V) \in T_X$ olup f fonksiyonu sezgisel bulanık süreklidir.

Teorem 3.2.6: [13] (A,T_A) ve (B,T_B) sırasıyla (X,T_X) ve (Y,T_Y) sezgisel bulanık topolojik uzayların alt uzayları ve β', T_B nin bir tabanı olsun. Buna göre $f:(A,T_A) \to (B,T_B)$ nin relatif sezgisel bulanık sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall B' \in \beta'$ için $f^{-1}(B') \cap A \in T_A$ olmasıdır.

Tanım 3.2.7: (X,T_1) ve (X,T_2) sezgisel bulanık topolojik uzaylar olmak üzere $i_X:(X,T_1) \to (X,T_2)$ birim fonksiyonu sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyon ise T_1, T_2 den daha incedir (ya da T_2, T_1 den daha kabadır) denir ve $T_2 \subset T_1$ yazılır.

Tanım 3.2.8: $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve (Y,T_Y) bir sezgisel bulanık topolojik uzay olsun. Bu durumda, T_Y nin f altındaki ters görüntüsü

$$T_{f^{-1}} = \{f^{-1}(U) \in SB(X): U \in T_Y\}$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece $f:\left(X,T_{f^{-1}}\right) \to (Y,T_Y)$ fonksiyonunu sezgisel bulanık sürekli kılan X üzerindeki en kaba sezgisel bulanık topoloji $T_{f^{-1}}$ olur.

Tanım 3.2.9: $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve (X,T_X) bir sezgisel bulanık topolojik uzay olsun. Bu durumda, T_X in f altındaki görüntüsü

$$T_f = \{U \in SB(Y): f^{-1}(U) \in T_X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece $f:(X,T_X) \to \left(Y,T_f\right)$ fonksiyonunu sezgisel bulanık sürekli kılan Y üzerindeki en ince sezgisel bulanık topoloji T_f olur.

Tanım 3.2.10: $\{(X_\alpha, Y_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ sezgisel bulanık topolojik uzayların bir ailesi, $X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ ve (X,T_X) bir sezgisel bulanık topolojik uzay olsun. $\forall\alpha \in J$ için $\pi_\alpha:(X,T) \to (X_\alpha, Y_\alpha)$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan X üzerindeki en kaba sezgisel bulanık topoloji T olsun. Bu durumda T ye X üzerinde sezgisel bulanık çarpım denir ve $T = \prod_{\alpha \in J} T_\alpha$ yazılır. (X, T) ye ise sezgisel bulanık çarpım uzayı denir.

Teorem 3.2.7: (X_1, T_1) , (X_2, T_2) sezgisel bulanık topolojik uzaylar olsun. Bu durumda $\forall U_1 \in T_1$ ve $\forall U_2 \in T_2$ için $B = \{U_1 \times U_2 | U_1 \in T_1, U_2 \in T_2\}$ailesi $X_1 \times X_2$ sezgisel bulanık çarpım uzayı için bir tabandır.

$j = 1, \dots, n$ olmak üzere $\{X_j\}$ boştan farklı kümelerin bir ailesi ve $A_j \in SB(X_j)$ olsun. Bu durumda $A = \prod_{j=1}^{n} A_j$ sezgisel bulanık kümesi $\forall (x_1, \dots, x_2) \in X$,

$$\mu_A(x) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(x_n) \quad \text{ve} \quad \nu_A(x) = \nu_{A_1}(x_1) \vee \dots \vee \nu_{A_n}(x_n)$$

fonksiyonları tarafından karakterize edilir.

Uyarı 3.2.1: Tanım 3.2.10 ve Teorem 3.2.7 e göre eğer X_j, sezgisel bulanık topoloji T_j ye sahip ise $\forall j = 1, \dots, n$ için $U_j \in T_j$ iken X üzerinde ki sezgisel bulanık çarpım topolojisi T, $\prod_{j=1}^{n} U_j$ şeklinde tanımlanan bir tabana sahiptir.

Teorem 3.2.8: A_1 ve A_2 sırasıyla (X_1, T_1) , (X_2, T_2) sezgisel bulanık topolojik uzayların alt uzayları olsun. $A = A_1 \times A_2$ ve $X = X_1 \times X_2$ olmak üzere, $\pi_1(A) \subset A_1$ ve $\pi_2(A) \subset A_2$ dir.

İspat: $x_1 \in X_1$ olsun.

$$\begin{aligned}
\mu_{\pi_1(A)}(x_1) = \pi_1(\mu_A)(x_1) &= \sup_{(z_1,z_2) \in \pi_1{}^{-1}(x_1)} \{\mu_A(z_1, z_2)\} \\
&= \sup_{(z_1,z_2) \in \pi_1{}^{-1}(x_1)} \{\mu_{A_1}(z_1) \wedge \mu_{A_2}(z_2)\} \\
&= \sup_{(z_1,z_2) \in \pi_1{}^{-1}(x_1)} \{\mu_A(z_1)\} \wedge \sup_{(z_1,z_2) \in \pi_1{}^{-1}(x_1)} \{\mu_A(z_2)\} \leq \mu_A(x_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{\pi_1(A)}(x_1) = \pi_1(\nu_A)(x_1) &= \inf_{(z_1,z_2) \in \pi_1{}^{-1}(x_1)} \{\nu_A(z_1, z_2)\} \\
&= \inf_{(z_1,z_2) \in \pi_1{}^{-1}(x_1)} \{\nu_{A_1}(z_1) \vee \nu_{A_2}(z_2)\} \\
&= \inf_{(z_1,z_2) \in \pi_1{}^{-1}(x_1)} \{\nu_A(z_1)\} \vee \inf_{(z_1,z_2) \in \pi_1{}^{-1}(x_1)} \{\nu_A(z_2)\} \geq \nu_A(x_1)
\end{aligned}$$

Böylece $\pi_1(A) \subset A_1$ ve $\pi_2(A) \subset A_2$ dir.

Teorem 3.2.9: (X_1, T_1), (X_2, T_2) sezgisel bulanık topolojik uzaylar, (X, T) sezgisel bulanık çarpım uzayı ve $A_1 \in SB(X_1)$, $A_2 \in SB(X_2)$ olmak üzere $A = (A_1 \times A_2)$ olsun. $\left(A_1, (T_1)_{A_1}\right)$ ve $\left(A_2, (T_2)_{A_2}\right)$ indirgenmiş sezgisel bulanık topolojik uzaylar ve $U_1 \in (T_1)_{A_1}$, $U_2 \in (T_2)_{A_2}$ olmak üzere,

$$\mathcal{B}' = \left\{U_1 \times U_2 \middle| U_1 \in (T_1)_{A_1}, U_2 \in (T_2)_{A_2}\right\}$$

ailesi A üzerinde indirgenmiş sezgisel bulanık topoloji T_A nın bir tabanıdır.

İspat:

$$\mathcal{B} = \{U_1' \times U_2' |\, U_1' \in T_1 ,\ U_2' \in T_2\}$$

ailesi, T için bir tabandır. Tanım 3.2.6 dan

$$\mathcal{B}_A = \{(U_1' \times U_2') \cap A | U_1' \in T_1 ,\ U_2' \in T_2\},$$

ailesi, T_A için bir tabandır. Diğer taraftan,

$$U_1 \in (T_1)_{A_1} \Longrightarrow U_1 = U_1' \cap A_1, \qquad U_1' \in T_1$$

ve

$$U_2 \in (T_2)_{A_2} \Longrightarrow U_2 = U_2' \cap A_2, \qquad U_2 \in T_2$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}(U_1' \times U_2') \cap A &= (U_1' \times U_2') \cap (A_1 \times A_2)\\ &= (U_1' \cap A_1) \times (U_2' \cap A_2)\\ &= U_1 \times U_2\end{aligned}$$

dır. Buna göre de $\mathcal{B}_A = \mathcal{B}'$ dür.

Teorem 3.2.10: (X_1, T_1) , (X_2, T_2) ve (Y, T_Y) sezgisel bulanık topolojik uzaylar, $(X = X_1 \times X_2, T)$ sezgisel bulanık çarpım uzayı ve $f: Y \to X$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f: (Y, T_Y) \to (X, T)$ fonksiyonunun sezgisel bulanık sürekli olması için gerek ve yeter şart $\pi_1 \circ f: (Y, T_Y) \to (X_1, T_1)$ ve $\pi_2 \circ f: (Y, T_Y) \to (X_2, T_2)$ fonksiyonlarının sezgisel bulanık sürekli olmasıdır.

$$\begin{tikzcd}
 & (X_1, T_1) & \\
(Y, T_Y) \arrow[ur, "\pi_1 \circ f"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_2 \circ f"'] & & (X, T) \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & (X_2, T_2) &
\end{tikzcd}$$

İspat:

$(\Longrightarrow) f:(Y,T_Y)\to(X,T)$ sezgisel bulanık sürekli ve $U_1\in T_1$ olsun. Bu durumda ${\pi_1}^{-1}(U_1)\in T$ olur. Hipotezden f sezgisel bulanık sürekli olduğundan $f^{-1}\left({\pi_1}^{-1}(U_1)\right)\in T_Y$ dir. Dolayısıyla $(\pi_1\circ f)^{-1}(U_1)\in T_Y$ olup $\pi_1\circ f$ süreklidir. $\pi_2\circ f$ nin de sürekli olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

$(\Longleftarrow)$ $\pi_1\circ f$ ve $\pi_2\circ f$ sürekli ve $U\in T$ olsun. $U={\pi_1}^{-1}(U_1)\cap{\pi_2}^{-1}(U_2)$ ve $U_1\in T_1$, $U_2\in T_2$ alalım. $\pi_1\circ f:(Y,T_Y)\to(X_1,T_1)$ sezgisel bulanık sürekli olduğundan $(\pi_1\circ f)^{-1}(U_1)\in T_Y$ dir. Böylece $f^{-1}\left({\pi_1}^{-1}(U_1)\right)\in T_Y$ ve ${\pi_1}^{-1}(U_1)\in T$ olduğundan f süreklidir.

Sonuç 3.2.1: $\left\{\left(X_\alpha,T_{X_\alpha}\right)\right\}_{\alpha\in J}$, $\left\{\left(Y_\alpha,T_{Y_\alpha}\right)\right\}_{\alpha\in J}$ sezgisel bulanık topolojik uzayların iki ailesi ve $X=\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ ve $Y=\prod_{\alpha\in J}Y_\alpha$ olmak üzere (X,T_X) ve (Y,T_Y) sezgisel bulanık çarpım uzayları olsun. $\forall\alpha\in J$ için $f_\alpha:X_\alpha\to Y_\alpha$ dönüşümlerinin çarpımı $f=\prod_{\alpha\in J}f_\alpha:(X,T_X)\to(Y,T_Y)$ nin sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $\forall\alpha\in J$ için $f_\alpha:\left(X_\alpha,T_{X_\alpha}\right)\to\left(Y_\alpha,T_{Y_\alpha}\right)$ nin sezgisel bulanık sürekli olmasıdır. Burada $\forall x\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ için $f(x)=\left(f_\alpha(\pi_\alpha)\right)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.11: (X_1,T_1) , (X_2,T_2) sezgisel bulanık topolojik uzaylar ve (X,T) sezgisel bulanık çarpım uzayı olsun. $A_1\in SB(X_1)$, $A_2\in SB(X_2)$ için $A=A_1\times A_2$, (Y,T_Y) sezgisel bulanık topolojik uzay ve $B\in SB(Y)$ olsun. Bu durumda $f:\left(B,T_{Y_B}\right)\to(A,T_A)$ nin relatif sezgisel bulanık sürekli olması için gerek ve yeter şart $\pi_1\circ f:\left(B,T_{Y_B}\right)\to\left(A_1,T_{1(A_1)}\right)$ ve $\pi_2\circ f:\left(B,T_{Y_B}\right)\to\left(A_2,T_{2(A_2)}\right)$ fonksiyonlarının relatif sezgisel bulanık sürekli olmasıdır.

İspat :

$(\Longrightarrow) f:\left(B,T_{Y_B}\right)\to(A,T_A)$ relatif sezgisel bulanık sürekli olsun. $\pi_1:(X,T)\to(X_1,T_1)$ ve $\pi_2:(X,T)\to(X_2,T_2)$ nin sezgisel bulanık sürekli olduğu açıktır. Ayrıca Teorem 3.2.8' den $\pi_1(A)\subset A_1$, $\pi_2(A)\subset A_2$ olur. Teorem 3.2.9'dan,

$$\pi_1 : (A, T_A) \to \left(A_1, (T_1)_{A_1}\right) \text{ ve } \pi_2 : (A, T_A) \to \left(A_2, (T_2)_{A_2}\right)$$

dönüşümleri relatif sezgisel bulanık süreklidir. Böylece

$$\pi_1 \circ f : \left(B, T_{Y_B}\right) \to \left(A_1, (T_1)_{A_1}\right) \text{ ve } \pi_2 \circ f : \left(B, T_{Y_B}\right) \to \left(A_2, (T_2)_{A_2}\right)$$

fonksiyonları da relatif sezgisel bulanık süreklidir.

($\Leftarrow$) $\pi_1 \circ f$ ve $\pi_2 \circ f$ relatif sezgisel bulanık sürekli ve $U = U_1 \times U_2$, $U_1 \in (T_1)_{A_1}$, $U_2 \in (T_2)_{A_2}$ olsun. Teorem 3.2.9 dan T_A için bir taban oluşturur. Diğer taraftan,

$$f^{-1}(U) \cap B = f^{-1}\left({\pi_1}^{-1}(U_1) \cap {\pi_2}^{-1}(U_2)\right) \cap B$$

$$= \left[f^{-1}\left({\pi_1}^{-1}(U_1)\right) \cap f^{-1}\left({\pi_2}^{-1}(U_2)\right)\right] \cap B \tag{1}$$

$$= [(\pi_1 \circ f)^{-1}(U_1) \cap (\pi_2 \circ f)^{-1}(U_2)] \cap B$$

dir. $\pi_1 \circ f$ ve $\pi_2 \circ f$ relatif sezgisel bulanık sürekli olduğundan, $U_1 \in (T_1)_{A_1}$ ve $U_2 \in (T_2)_{A_2}$ için, $(\pi_1 \circ f)^{-1}(U_1) \cap B \in T_{Y_B}$ ve $(\pi_2 \circ f)^{-1}(U_2) \cap B \in T_{Y_B}$ ise

$$[(\pi_1 \circ f)^{-1}(U_1) \cap (\pi_2 \circ f)^{-1}(U_2)] \cap B \in T_{Y_B}$$

olur. Böylece (1) den , $f^{-1}(U) \cap B \in T_{Y_B}$ elde edilir. Dolasıyla f relatif sezgisel bulanık süreklidir.

Sonuç 3.2.2: $\left\{\left(X_j, T_{X_j}\right)\right\}$, $\left\{\left(Y_j, T_{Y_j}\right)\right\}$ sezgisel bulanık topolojik uzayların iki ailesi ve $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ ve $Y = \prod_{\alpha \in J} Y_\alpha$ olmak üzere (X, T_X) ve (Y, T_Y) sezgisel bulanık çarpım uzayları olsun. $\forall\, j = 1, \dots, n$ için $A_j \in SB\left(X_j\right)$, $B_j \in SB\left(Y_j\right)$ olmak üzere $A = \prod_{j=1}^{n} A_j$, $B = \prod_{j=1}^{n} B_j$ sırasıyla X ve Y nin sezgisel bulanık çarpım uzayları olsun. Bu durumda eğer $\forall\, j = 1, \dots, n$ için $f_j : \left(A_j, \left(T_{X_j}\right)_{A_j}\right) \to \left(B_j, \left(T_{Y_j}\right)_{B_j}\right)$ relatif sezgisel bulanık sürekli ise $f=\prod_{j=1}^{n} f_j:\left(A,T_{X_A}\right)\to\left(B,T_{Y_B}\right)$ çarpım fonksiyonu relatif sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 3.2.12: $\left(X_1,T_{X_1}\right),\left(Y_1,T_{Y_1}\right),\left(X_2,T_{X_2}\right),\left(Y_2,T_{Y_2}\right)$ sezgisel bulanık topolojik uzaylar ve $(X=X_1\times X_2,T_X)$, $(Y=Y_1\times Y_2,T_Y)$ sezgisel bulanık çarpım uzayları olsun. Eğer $f_1:\left(X_1,T_{X_1}\right)\to\left(Y_1,T_{Y_1}\right)$ ve $f_2:\left(X_2,T_{X_2}\right)\to\left(Y_2,T_{Y_2}\right)$ sezgisel bulanık açık ise $f=f_1\times f_2$ çarpım fonksiyonu da sezgisel bulanık açıktır.

İspat: $\mathcal{B}=\left\{U_1\times U_2\in SB(X)\middle|U_1\in T_{X_1},U_2\in T_{X_2}\right\}$ ve $0_\sim\neq U\in T_X$ olsun. $\mathcal{B}$ ailesi T_X in bir tabanı olduğundan $U=\bigcup\mathcal{B}'$ olacak biçimde $\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}$ vardır. $\mathcal{B}'$ nün her bir elemanı $U_1\times U_2$ şeklinde yazılabildiğinden $\mathcal{B}'$ ailesini J tarafından indekslenen $\left\{U_{1,\alpha}\times U_{2,\alpha}\right\}_{\alpha\in J}$ olarak alabiliriz. Buna göre $U=\bigcup_{\alpha\in J}\left(U_{1,\alpha}\times U_{2,\alpha}\right)$ dır.

$y\in Y$, $f^{-1}(y)\neq\emptyset$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\mu_{f(U)}(y)=f(\mu_U)(y)=\sup_{z\in f^{-1}(y)}\mu_U(z)&=\sup_{z\in f^{-1}(y)}\mu_{\bigcup_{\alpha\in J}\left(U_{1,\alpha}\times U_{2,\alpha}\right)}(z)\\
&=\sup_{z\in f^{-1}(y)}\left\{\sup_{\alpha\in J}\mu_{\left(U_{1,\alpha}\times U_{2,\alpha}\right)}(z)\right\}\\
&=\sup_{\alpha\in J}\left\{\sup_{z_1\in f_1^{-1}(y_1)}\left\{\sup_{z_2\in f_2^{-1}(y_2)}\left[\mu_{U_{1,\alpha}}(z_1)\wedge\mu_{U_{2,\alpha}}(z_2)\right]\right\}\right\}\\
&=\sup_{\alpha\in J}\left\{\sup_{z_1\in f_1^{-1}(y)}\mu_{U_{1,\alpha}}(z_1)\wedge\sup_{z_1\in f_1^{-1}(y)}\mu_{U_{2,\alpha}}(z_2)\right\}\\
&=\sup_{\alpha\in J}\left\{\mu_{f_1\left(U_{1,\alpha}\right)}(y_1)\wedge\mu_{f_2\left(U_{2,\alpha}\right)}(y_2)\right\}=\sup_{\alpha\in J}\left\{\mu_{f_1\left(U_{1,\alpha}\right)\times f_2\left(U_{2,\alpha}\right)}(y)\right\}\\
&=\mu_{\bigcup_{\alpha\in J}\left(f_1\left(U_{1,\alpha}\right)\times f_2\left(U_{2,\alpha}\right)\right)}(y)
\end{aligned}$$

ve

$$v_{f(U)}(y)=f(v_U)(y)=\inf_{z\in f^{-1}(y)} v_U(z)=\inf_{z\in f^{-1}(y)} v_{\cup_{\alpha\in J}(U_{1,\alpha}\times U_{2,\alpha})}(z)$$
$$=\inf_{z\in f^{-1}(y)}\left\{\inf_{\alpha\in J} v_{(U_{1,\alpha}\times U_{2,\alpha})}(z)\right\}$$
$$=\inf_{\alpha\in J}\left\{\inf_{z_1\in f_1^{-1}(y_1)}\left\{\inf_{z_2\in f_2^{-1}(y_2)}\left[v_{U_{1,\alpha}}(z_1)\vee v_{U_{2,\alpha}}(z_2)\right]\right\}\right\}$$
$$=\inf_{\alpha\in J}\left\{\inf_{z_1\in f_1^{-1}(y)} v_{U_{1,\alpha}}(z_1)\vee \inf_{z_1\in f_1^{-1}(y)} v_{U_{2,\alpha}}(z_2)\right\}$$
$$=\inf_{\alpha\in J}\left\{v_{f_1(U_{1,\alpha})}(y_1)\vee v_{f_2(U_{2,\alpha})}(y_2)\right\}=\inf_{\alpha\in J}\left\{v_{f_1(U_{1,\alpha})\times f_2(U_{2,\alpha})}(y)\right\}$$
$$=v_{\cup_{\alpha\in J}\left(f_1(U_{1,\alpha})\times f_2(U_{2,\alpha})\right)}(y)$$

dir. Böylece $f(U)=\cup_{\alpha\in J}\left(f_1(U_{1,\alpha})\times f_2(U_{2,\alpha})\right)$ olur. f_1 ve f_2 sezgisel bulanık açık olduğundan $f_1(U_{1,\alpha})\in T_1$ ve $f_2(U_{2,\alpha})\in T_2$ dir. Buna göre $f_1(U_{1,\alpha})\times f_2(U_{2,\alpha})\in T_y$ dir. Dolayısıyla $\cup_{\alpha\in J}\left(f_1(U_{1,\alpha})\times f_2(U_{2,\alpha})\right)\in T_y$ olup f sezgisel bulanık açıktır.

Teorem 3.2.13: $(X_1,T_{X_1}),(Y_1,T_{Y_1}),(X_2,T_{X_2}),(Y_2,T_{Y_2})$ sezgisel bulanık topolojik uzaylar ve (X,T_X) , (Y,T_Y) sezgisel bulanık çarpım uzayları olsun. $A=A_1\times A_2$ ve $B=B_1\times B_2$ sırasıyla X ve Y de sezgisel bulanık çarpım uzayları olmak üzere $f_1: A_1\to B_1$ ve $f_2: A_2\to B_2$ relatif sezgisel bulanık açık ise $f=f_1\times f_2:(A,T_A)\to(B,T_B)$ çarpım fonksiyonu da relatif sezgisel bulanık açıktır.

İspat: $\mathcal{B}=\left\{U_1\times U_2\in SB(X)\middle|U_1\in T_{X_1},U_2\in T_{X_2}\right\}$ olsun. Teorem 3.2.9 dan $\mathcal{B}$ ailesi, T_A nın bir tabanıdır. $U\in T_A$ alalım. Bu durumda $\cup\mathcal{B}'=U$ olacak biçimde $\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}$ vardır. Böylece $\mathcal{B}'$ ailesini $\{U_{1,\alpha}\times U_{2,\alpha}\}_{\alpha\in J}$ olarak yazabiliriz. Buna göre $U=\cup_{\alpha\in J}(U_{1,\alpha}\times U_{2,\alpha})$ dır. Teorem 3.2.12 nin ispatında olduğu gibi $f(U)=\cup_{\alpha\in J}\left(f_1(U_{1,\alpha})\times f_2(U_{2,\alpha})\right)$ dır. f_1 ve f_2 relatif sezgisel bulanık açık olduğundan $f(U)\in T_B$ dir. Sonuç olarak f relatif sezgisel bulanık açıktır.

Lemma 3.2.1: (X_1,T_1) ve (X_2,T_2) sezgisel bulanık topolojik uzaylar olsun. Buna göre $\forall x_2\in X_2$ için $c(x_2)=a_0\in X_1$ şeklinde tanımlanan $c:(X_2,T_2)\to(X_1,T_1)$ sabit fonksiyonu sezgisel bulanık süreklidir.

İspat: $U \in T_1$ ve $x_2 \in X_2$ olsun. Buna göre

$$\mu_{c^{-1}(U)}(x_2) = c^{-1}(\mu_U)(x_2) = \mu_U c(x_2) = \mu_U(a_0)$$

dır. Benzer şekilde $v_{c^{-1}(U)}(x_2) = v_U(a_0)$ dır. $\mu_U(a_0) = \alpha$ ve $v_U(a_0) = \beta$ olsun. $C_{(\alpha,\beta)}$ yı düşünelim. $U \in SB(X_1)$ iken $\alpha + \beta \leq 1$ dir. Buna göre $C_{(\alpha,\beta)}, X_2$ de sezgisel bulanık açık kümedir. Diğer yandan $\mu_{c^{-1}(U)}(x_2) = \alpha = \mu_{C_{(\alpha,\beta)}}(x_2)$ ve $v_{c^{-1}(U)}(x_2) = \beta = v_{C_{(\alpha,\beta)}}(x_2)$ dir. Böylece $c^{-1}(U) = C_{(\alpha,\beta)}$ dır. Bu yüzden $c^{-1}(U), X_2$ de sezgisel bulanık açık kümedir. Bundan dolayı c sezgisel bulanık süreklidir.

*Teorem 3.2.14***:** (X_1, T_1) ve (X_2, T_2) sezgisel bulanık topolojik uzaylar ve (X, T) sezgisel bulanık çarpım uzayı olsun. $\forall a_2 \in X_1$ için $i(x_2) = (a_1, x_2)$ şeklinde tanımlanan $i: (X_2, T_2) \to (X, T)$ fonksiyonu $\forall\, x_2 \in X_2$ için sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyondur.

İspat: Lemma 3.2.1 den $\forall x_2 \in X_2$ için $i_1(x_2) = a_1$ şeklinde verilen $i_1: (X_2, T_2) \to (X_1, T_1)$ sabit fonksiyonu sezgisel bulanık süreklidir. Diğer yandan $i_2: (X_2, T_2) \to (X_2, T_2)$ birim fonksiyonu da sezgisel bulanık süreklidir. Böylece Teorem 3.2.10 dan i sezgisel bulanık süreklidir.

Teorem 3.2.15: (X_1, T_1) ve (X_2, T_2) sezgisel bulanık topolojik uzaylar ve (X, T) sezgisel bulanık çarpım uzayı olsun. $A_1 \in SB(X_1)$ ve $A_2 \in SB(X_2)$ olmak $A = A_1 \times A_2$, X de sezgisel bulanık çarpım uzayı olsun. $\forall x_2 \in X_2$ için $\mu_{A_1}(a_1) \geq \mu_{A_2}(x_2)$ ve $v_{A_1}(a_1) \leq v_{A_2}(x_2)$ eşitsizliğini sağlayan $a_1 \in X_1$ vardır. Buna göre $\forall x_2 \in X_2$ için $i(x_2) = (a_1, x_2)$ şeklinde tanımlanan $i: \left(A_2, (T_2)_{A_2}\right) \to (A, T_A)$ fonksiyonu relatif sezgisel bulanık süreklidir.

İspat: $(x_1, x_2) \in X$ olsun. Buna göre,

$$\mu_{i(A_2)}(x_1, x_2) = i\left(\mu_{A_2}\right)(x_1, x_2) = \begin{cases} \sup_{x_2' \in i^{-1}(x_1, x_2)} \mu_{A_2}(x_2'), & i^{-1}(x_1, x_2) \neq \emptyset \; ise \\ 0, & i^{-1}(x_1, x_2) = \emptyset \; ise, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mu_{A_2}(x_2), & x_1 = a_1 \ ise \\ 0, & x_1 \neq a_1 \ ise, \end{cases}$$

ve

$$v_{i(A_2)}(x_1, x_2) = i(v_{A_2})(x_1, x_2) = \begin{cases} \inf_{x_2' \in i^{-1}(x_1, x_2)} v_{A_2}(x_2'), & i^{-1}(x_1, x_2) \neq \emptyset \ ise \\ 0, & i^{-1}(x_1, x_2) = \emptyset \ ise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} v_{A_2}(x_2), & x_1 = a_1 \ ise \\ 0, & x_1 \neq a_1 \ ise. \end{cases}$$

Diğer yandan $\mu_A(x_1, x_2) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2)$ ve $v_A(x_1, x_2) = v_{A_1}(x_1) \vee v_{A_2}(x_2)$ dir. Hipotezden, $\mu_A(x_1, x_2) \geq \mu_{A_2}(x_2)$ ve $v_A(x_1, x_2) \leq v_{A_2}(x_2)$ olur. Böylece $\mu_A(x_1, x_2) \geq \mu_{i(A)}(x_1, x_2)$ ve $v_A(x_1, x_2) \leq v_{i(A)}(x_1, x_2)$ dir. Bu yüzden $i(A) \subset A$ dır. i nin relatif sezgisel bulanık sürekli olduğu Teorem 3.2.14 de kine benzer şekilde gösterilebilir.

4. SEZGİSEL BULANIK ALT GRUPLAR

Bu bölümde ilk olarak bulanık alt grupoid tanımlanmış ve bazı temel özellikleri verilmiştir. Devamında sezgisel bulanık alt gruplar tanımlanarak çeşitli özellikleri incelenmiştir.

4.1. Sezgisel Bulanık Grupoid

$\forall x, y \in G$ için $xy \in G$ ise $(G,\cdot)$ bir grupoiddir.

Tanım 4.1.1: $(G,\cdot)$ bir grupoid ve $A, B \in SB(G)$ olsun. Bu durumda A ve B nin sezgisel bulanık çarpımı $A \circ B$, $\forall x \in G$ için

$$\mu_{A\circ B}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{yz=x}\{\mu_A(y) \wedge \mu_B(z)\}, & yz = x \text{ ise} \\ 0 \quad , & yz \neq x \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$v_{A\circ B}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{yz=x}\{v_A(y) \vee v_B(z)\}, & yz = x \text{ ise} \\ 1 \quad , & yz \neq x \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1.1: $x_{(t,s)}$ ve $y_{(t',s')}$, $(G,\cdot)$ grupoidinde sezgisel bulanık noktalar ve $A, B \in SB(G)$ olsun. Bu durumda

i. $x_{(t,s)} \circ y_{(t',s')} = (xy)_{(t \wedge t', s \vee s')}$

ii. $A \circ B = \bigcup_{\substack{x_{(t,s)} \in A \\ y_{(t',s')} \in B}} \left(x_{(t,s)} \circ y_{(t',s')} \right)$

dir.

İspat:

i. $z \in G$ olsun. Bu durumda,

$$\mu_{x_{(t,s)} \circ y_{(t',s')}}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{x'y'=z} \left\{ \mu_{x_{(t,s)}}(x') \wedge \mu_{y_{(t',s')}}(y') \right\}, & x'y' = z \text{ ise} \\ 0 \quad , & x'y' \neq z \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t \wedge t' \ , & xy = z \text{ ise} \\ 0 \ , & xy \neq z \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\nu_{x_{(t,s)} \circ y_{(t',s')}}(z) = \begin{cases} \inf\limits_{x'y'=z} \left\{ \nu_{x_{(t,s)}}(x') \vee \nu_{y_{(t',s')}}(y') \right\}, & x'y' = z \text{ ise} \\ 1 \quad , & x'y' \neq z \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} s \vee s' \ , & xy = z \text{ ise} \\ 1 \ , & xy \neq z \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Böylece $x_{(t,s)} \circ y_{(t',s')} = (xy)_{(t \wedge t', s \vee s')}$ olur.

ii. $C = \bigcup_{\substack{x_{(t,s)} \in A, \\ y_{(t',s')} \in B}} \left(x_{(t,s)} \circ y_{(t',s')} \right)$, $c \in G$ ve $a, b \in G$ için $a.b = c$ olsun. Bu durumda,

$$\mu_{A\circ B}(c) = \sup_{a.b=c}\{\min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}\}$$
$$\geq \sup_{a.b=c} \sup_{\substack{x_{(t,s)}\in A,\\ y_{(t',s')}\in B}} \left\{\min\left\{\mu_{x_{(t,s)}}(a), \mu_{y_{(t',s')}}(b)\right\}\right\}$$
$$= \mu_C(c).$$

$a_{(\mu_A(a),\nu_A(a))} \in A$ ve $b_{(\mu_B(b),\nu_B(b))} \in B$ için,

$$\mu_C(c) = \sup_{x_{(t,s)}\in A, y_{(t',s')}\in B} \sup_{a.b=c} \left\{\min\left\{\mu_{x_{(t,s)}}(a), \mu_{y_{(t',s')}}(b)\right\}\right\}$$
$$= \sup_{a.b=c} \sup_{\substack{x_{(t,s)}\in A,\\ y_{(t',s')}\in B}} \left\{\min\left\{\mu_{x_{(t,s)}}(a), \mu_{y_{(t',s')}}(b)\right\}\right\}$$
$$\leq \sup_{a.b=c} \left\{\min\left\{\mu_{a_{(\mu_A(a),\nu_A(a))}}(a), \mu_{b_{(\mu_B(b),\nu_B(b))}}(b)\right\}\right\}$$
$$= \sup_{a.b=c}\{\min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}\} = \mu_{A\circ B}(c)$$

Bu durumda $\mu_{A\circ B}(c) = \mu_C(c)$. Benzer şekilde $\nu_{A\circ B}(c) = \nu_C$ olduğu gösterilebilir. Bundan dolayı,

$$A \circ B = \bigcup_{\substack{x_{(t,s)}\in A\\ y_{(t',s')}\in B}} \left(x_{(t,s)} \circ y_{(t',s')}\right).$$

A kümesi G grupoidinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $\forall x, y \in G$ için $x, y \in A$ ise A ya G nin bir alt grupoididir denir.

Tanım 4.1.2: G bir grupoid ve A, G nin boştan farklı bir sezgisel bulanık alt kümesi olsun. Eğer $A \circ A \subset A$ ise A ya G nin bir sezgisel bulanık alt grupoidi denir.

Tanım 4.1.2′ : $(G,\cdot)$bir grupoid ve A, G nin bir sezgisel bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda $x, y \in G$ için $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ ve $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$ ise A, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoidi olarak tanımlanır.

Teorem 4.1.2: [11] $(G,\cdot)$ bir grupoid ve A, G nin boştan farklı bir sezgisel bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i. A, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoididir.

ii. $x_{(t,s)}, y_{(t',s')} \in A$ için $x_{(t,s)} \circ y_{(t',s')} \in A$ dır, yani $(A,\circ)$ bir grupoiddir.

iii. $x, y \in X$ için $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ ve $v_A(xy) \leq v_A(x) \vee v_A(y)$ dir.

Teorem 4.1.3: [15] A, $(G,\cdot)$ grupoidinin bir sezgisel bulanık alt grupoidi olsun.

i. " $\cdot$ " işlemi G de birleşmeli ise " $\circ$ " işlemi de A da birleşmelidir, yani $x_{(t,s)}, y_{(t',s')}, z_{(t'',s'')} \in A$ için
$$\left(x_{(t,s)} \circ y_{(t',s')}\right) \circ z_{(t'',s'')} = x_{(t,s)} \circ \left(y_{(t',s')} \circ z_{(t'',s'')}\right).$$

ii. " $\cdot$ " işlemi G de değişmeli ise " $\circ$ " işlemi de A da değişmelidir, yani $x_{(t,s)}, y_{(t',s')} \in A$ için
$$x_{(t,s)} \circ y_{(t',s')} = y_{(t',s')} \circ x_{(t,s)}.$$

iii. " $\cdot$ " işlemi G de e birime sahip ise $\forall\, x_{(t,s)} \in A$ için
$$e_{(1,0)} \circ x_{(t,s)} = x_{(t,s)} = x_{(t,s)} \circ e_{(1,0)}.$$

4.2. Sezgisel Bulanık İdeal

Tanım 4.2.1: [3] G bir grupoid ve A, G de bir sezgisel bulanık küme olsun. Bu durumda A,

i. $x, y \in G$ için $A(xy) \geq A(y)$ yani $\mu_A(xy) \geq \mu_A(y)$ ve $v_A(xy) \leq v_A(y)$ ise G nin bir sezgisel bulanık sol ideali,

ii. $x, y \in G$ için $A(xy) \geq A(x)$ yani $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x)$ ve $v_A(xy) \leq v_A(x)$ ise G nin bir sezgisel bulanık sağ ideali,

iii. hem sol hem de sağ ideal ise A ya G nin bir sezgisel bulanık ideali

denir.

Açıktır ki A nın G de bir sezgisel bulanık ideal olması için gerek ve yeter şart $\forall\, x, y \in G$ için $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ ve $v_A(xy) \leq v_A(x) \vee v_A(y)$ olmasıdır. Diğer taraftan bir sezgisel bulanık ideal, G de bir sezgisel bulanık alt grupoiddir. A, G

nin herhangi bir sezgisel bulanık alt grupoidi ise $\forall\, x \in G$ için $\mu_A(x^n) \geq \mu_A(x)$ ve $\nu_A(x^n) \leq \nu_A(x)$ olur. $\left(x^n = \underbrace{x \circ x \ldots x}_{n\ tane}\right)$

Teorem 4.2.1: G bir grupoid ve $(t,s) \in I \times I$ ile $t + s \leq 1$ olsun. A, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoidi veya A, G nin bir sezgisel bulanık ideali ise $G_A^{(t,s)}$ bir alt grupoid veya G nin bir idealidir.

i. A, G nin bir sezgisel bulanık altgrupoidi ise $G_A^{(t,s)}$, G nin bir alt grupoididir.

ii. A, G nin bir sezgisel bulanık ideali ise $G_A^{(t,s)}$, G nin bir idealidir.

İspat:

$(\Longrightarrow)$ A, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoidi olduğunu varsayalım ve $x, y \in G_A^{(t,s)}$ olsun. Bu durumda,

$$\mu_A(x) \geq t\,, \nu_A(x) \leq s \text{ ve } \mu_A(y) \geq t\,, \nu_A(y) \leq s.$$

A, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoidi iken,

$$\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \text{ ve } \nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y).$$

Böylece $\mu_A(xy) \geq t$ ve $\nu_A(xy) \leq s$ dir. Bu yüzden, $xy \in G_A^{(t,s)}$ dir. Bundan dolayı $G_A^{(t,s)}$, G nin bir alt grupoididir.

$(\Longleftarrow)$ A, G nin bir sezgisel bulanık sol ideali olduğunu varsayalım ve $x \in G$ ve $y \in G_A^{(t,s)}$ olsun. Bu durumda $\mu_A(y) \geq t\,, \nu_A(y) \leq s$ dir. A, G nin bir sezgisel bulanık sol ideali iken $\mu_A(xy) \geq \mu_A(y)$ ve $\nu_A(xy) \leq \mu_A(y)$ dir. Böylece $\mu_A(xy) \geq t$ ve $\nu_A(xy) \leq s$ olur. Bu yüzden $xy \in G$ dir. Bundan dolayı $G_A^{(t,s)}$, G nin bir sol idealidir. Benzer şekilde $G_A^{(t,s)}$ nin G nin bir sağ ideali olduğu gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2: G bir grup ve $T \subset G$ olsun. O halde χ_T, T nin karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $A = (\chi_T,\ \chi_{T^c})$, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoidi veya bir sezgisel bulanık ideali olması için gerek ve yeter şart T kümesinin G nin bir alt grupoidi veya bir ideali olmasıdır.

İspat: $x, y \in G$ için,

$$\chi_T(xy) \geq \chi_T(x) \wedge \chi_T(y) \text{ ve } \chi_{T^c}(xy) \leq \chi_{T^c}(x) \vee \chi_{T^c}(y)$$

ise A, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoididir. $x, y \in G$ için $X_T(x) = X_T(y) = 1$ ise $X_T(xy) = 1$ dir. $x, y \in T$ için $xy \in T$ ise T, G nin bir alt grupoididir. Benzer şekilde $x, y \in G$ için,

$$\chi_T(xy) \geq \chi_T(y) \text{ ve } \chi_{T^c}(xy) \leq \ \chi_{T^c}(y)$$

ise A, G nin bir alt grupoididir.

$\forall\ x \in G$ ve $y \in T$ için $xy \in T$ ise T, G nin bir sol idealidir. Benzer şekilde kalanlar kolayca kontrol edilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3: $f: G \to H$ fonksiyonu bir grupoid homomorfizmi ve B, H nin bir sezgisel bulanık kümesi olsun.

i. B, H nin bir sezgisel bulanık alt grupoidi ise $f^{-1}(B)$, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoididir.
ii. B, H nin bir sezgisel bulanık ideali ise $f^{-1}(B)$, G nin bir sezgisel bulanık idealidir.

İspat: i. Tanım 2.1.5 ten,

$$f^{-1}(B) = \langle f^{-1}(\mu_B), f^{-1}(\nu_B)\rangle.$$

$x, y \in G$ olsun. Bu durumda,

$$\mu_{f^{-1}(B)}(xy) = f^{-1}(\mu_B)(xy) = \mu_B\big(f(xy)\big)$$

$$= \mu_B\big(f(x)f(y)\big) \quad (f \text{ bir grupoid homomorfizmidir.})$$

$$\geq \mu_B\big(f(x)\big) \wedge \mu_B\big(f(y)\big)$$

$$= f^{-1}(\mu_B)(x) \wedge f^{-1}(\mu_B)(y)$$

ve

$$v_{f^{-1}(B)}(xy) = f^{-1}(v_B)(xy) = v_B\big(f(xy)\big)$$

$$= v_B\big(f(x)f(y)\big) \quad (f \text{ bir grupoid homomorfizmidir.})$$

$$\leq v_B\big(f(x)\big) \vee v_B\big(f(y)\big)$$

$$= f^{-1}(v_B)(x) \vee f^{-1}(v_B)(y)$$

olur. Bundan dolayı $f^{-1}(B)$, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoididir.

ii. i. ye benzer şekilde gösterilir.

Tanım 4.2.2: $A \in SB(X)$ ve $T \subset G$ nin bir alt grupoidi olsun. Eğer $A(t_0) = \bigcup_{t \in T} A(t)$, yani

$$\mu_A(t_0) = \sup_{t \in T} \mu_A(t) \ \ ve \ v_A(t_0) = \inf_{t \in T} v_A(t)$$

olacak biçimde $t_0 \in T$ varsa, A ya sup özelliğine sahiptir denir.

Teorem 4.2.4: $f: G \to H$ fonksiyonu bir grupoid homomorfizmi ve A, G nin sup özelliğe sahip bir sezgisel bulanık kümesi olsun.

i. A, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoidi ise $f(A)$, H nin bir sezgisel bulanık alt grupoididir.

ii. A, G nin bir sezgisel bulanık ideali ise $f(A)$, H nin bir sezgisel bulanık idealidir.

İspat: i. $y, y' \in H$ olsun. Bu durumda aşağıdakilerden birisi gerçeklenir:

a) $f^{-1}(y) \neq \emptyset,\ f^{-1}(y') \neq \emptyset,$
b) $f^{-1}(y) \neq \emptyset,\ f^{-1}(y') = \emptyset,$
c) $f^{-1}(y) = \emptyset,\ f^{-1}(y') \neq \emptyset,$
d) $f^{-1}(y) = \emptyset,\ f^{-1}(y') = \emptyset,$

Burada sadece a) yı ispatlıyoruz. A sup özelliğe sahip olduğundan,

$$\mu_A(z) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \big(\mu_A(x), \nu_A(z)\big) = \inf_{x \in f^{-1}(y)} \nu_A(x)$$

ve

$$\mu_A(z') = \sup_{x' \in f^{-1}(y')} \big(\mu_A(x'), \nu_A(z')\big) = \inf_{x' \in f^{-1}(y')} \nu_A(x')$$

olacak içimde $z \in f^{-1}(y)$ ve $z' \in f^{-1}(y')$ vardır. Bu durumda,

$$\mu_{f(A)}(yy') = f(\mu_A)(yy') = \sup_{x \in f^{-1}(yy')} \mu_A(z) \geq \mu_A(zz') \geq \mu_A(z) \wedge \mu_A(z')$$

$$= \left(\sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)\right) \wedge \left(\sup_{x' \in f^{-1}(y)} \mu_A(x')\right) = f(\mu_A)(y) \wedge f(\mu_A)(y')$$

ve

$$\nu_{f(A)}(yy') = f(\nu_A)(yy') = \inf_{x \in f^{-1}(yy')} \nu_A(z) \leq \nu_A(zz') \leq \nu_A(z) \vee \nu_A(z')$$

$$= \left(\inf_{x \in f^{-1}(y)} \nu_A(x)\right) \vee \left(\inf_{x' \in f^{-1}(y)} \nu_A(x')\right) = f(\nu_A)(y) \vee f(\nu_A)(y')$$

ii. i ye benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.5: $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{A} = \{A \in SB(X) | A, f - \text{değişmez}\}$ olsun. Bu durumda f, $\mathcal{A}$ ve $SB(f(X))$ arasında 1-1 eşleme yapan bir fonksiyondur.

Sonuç 4.2.1: $f: G \rightarrow H$ bir fonksiyon ve

$$A = \{A, G \text{ nin sezgisel bulanık alt grupoidi} | A, f - \text{değişmez ve sup özelliğe sahip}\}$$

olsun. Bu durumda f, $\mathcal{A}$ ve $f(G)$ nin sezgisel bulanık alt grupoidi arasında 1-1 eşleme yapan bir fonksiyondur.

4.3. Sezgisel Bulanık Alt Gruplar

Bu bölümde G üzerinde sezgisel bulanık alt grubu tanımladıktan sonra bazı temel özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 4.3.1: G bir grup ve A, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoidi olsun. Bu durumda $\forall x \in G$ için $\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$ ve $v_A(x^{-1}) \leq v_A(x)$ ise A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubudur denir.

Teorem 4.3.1: G bir grup olsun ve A, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoidi olsun. Bu durumda,

i. μ_A, G nin bulanık bir alt grubu ise $\Box A = \langle \mu_A, 1 - \mu_A \rangle$, G nin bir sezgisel bulanık alt grubudur.
ii. A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu ise μ_A ve $1 - v_A$, G nin bir bulanık alt gruplarıdır.
iii. A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu ise $\Box A$ ve $\Diamond A$, G nin bir sezgisel bulanık alt grubudur.

İspat:

i. μ_A , G nin bir bulanık bir alt grubu olsun. Bu durumda $\forall x \in G$ için $\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$ dir. Dolayısıyla $1 - \mu_A(x^{-1}) \leq 1 - \mu_A(x)$ olup buradan

$\mu_{A^c}(x^{-1}) \leq \mu_{A^c}(x)$ dir. Böylece $A = \langle x, \mu_A, 1-\mu_A \rangle$, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu olur.

ii. $A = \langle x, \mu_A, v_A \rangle$, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu olsun. Bu durumda $\forall x \in G$ için ,

a) $\mu_A(x) \leq \mu_A(x^{-1})$ olduğundan μ_A, G nin bir bulanık alt grubudur.

b) $v_A(x) \geq v_A(x^{-1})$ ise,

$$1 - v_A(x) \leq 1 - v_A(x^{-1})$$
$$v_{A^c}(x) \leq v_{A^c}(x^{-1})$$

$v_{A^c}(x)$, G nin bir bulanık alt grubudur.

iii. $A = \langle x, \mu_A, v_A \rangle$, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu olsun. Bu durumda ii den μ_A, G nin bir bulanık alt grubudur. (i) den $\Box A = \langle x, \mu_A, 1-\mu_A \rangle$, G nin bir sezgisel bulanık alt grubudur.

Örnek 4.3.1: $(Z,+)$ toplamsal grubunu düşünelim. $0 \neq n \in Z$ için $A = (\mu_A, v_A): Z \to I \times I$ sezgisel bulanık kümesi

$$A(0) = 1_{\sim}$$

$$\mu_A(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \quad n\ tek\ sayı\ ise \\ \frac{2}{3} & ; \quad n\ çift\ sayı\ ise \end{cases}$$

$$v_A(n) = \begin{cases} \frac{1}{3} & ; \quad n\ tek\ sayı\ ise \\ \frac{1}{5} & ; \quad n\ çift\ sayı\ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda A, Z nin bir sezgisel bulanık alt grubu olur.

Teorem 4.3.2: G bir grup ve $T \subset G$ olsun. T nin karakteristik fonksiyonu χ_T olmak üzere, $A = (x, \chi_T, \chi_{T^c})$ nın G nin bir sezgisel alt grubu olması için gerek ve yeter şart T kümesinin G nin bir alt grubu olmasıdır.

İspat: A , G nin bir sezgisel bulanık alt grubu olsun. $x, y \in G$ için,

$$\chi_T(xy) \geq \chi_T(x) \wedge \chi_T(y) \text{ ve } \chi_{T^c}(xy) \leq \chi_{T^c}(x) \vee \chi_{T^c}(y)$$

dir. $x, y \in G$ için, $\chi_T(x) = \chi_T(y) = 1$ ise $\chi_T(xy) = 1$ dir. $x, y \in T$ için $xy \in T$ ise T, G nin bir alt grubudur.

Teorem 4.3.3: $\{A_i\}_{i\in J}$, G nin sezgisel bulanık bir alt gruplarının bir ailesi olsun. O halde $\wedge_{i\in J} A_i$, G nin sezgisel bulanık bir alt grubudur.

İspat: $A = \wedge_{i\in J} A_i$ ve $x, y \in G$ olsun. Buna göre $A = \left\{\inf_{i\in J} \mu_{A_i}, \sup_{i\in J} v_{A_i}\right\}$ dır.

$\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ dir. Böylece $v_A(xy) \leq v_A(x) \vee v_A(y)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$v_A(xy) = \sup_{i\in J} v_{A_i}(xy) \leq \sup_{i\in J} v_{A_i}\left[v_{A_i}(x) \vee v_{A_i}(y)\right]$$

$$= \sup_{i\in J} v_{A_i}(x) \vee \sup_{i\in J} v_{A_i}(y) = v_A(x) \vee v_A(y).$$

Bundan dolayı $\wedge_{i\in J} A_i$, G nin sezgisel bulanık bir alt grubudur.

Teorem 4.3.4: A, G grubunun bir sezgisel bulanık alt grubu olsun. Bu durumda $A \circ A = A$ dır.

İspat: G bir grup ve A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu olsun. $\forall\, x_{(t,s)} \in G$ için, Tanım 4.1.1 den

$$\mu_{A\circ A}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{xx=x}\{\mu_A(x) \wedge \mu_A(x)\}, & \forall (x,x) \in G \times G \text{ için } xx = x \text{ ise} \\ 0 \quad , & xx \neq x \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t \wedge t \ , & xx = x \text{ ise} \\ 0 \ , & xx \neq x \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$v_{A\circ A}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{xx=x}\{v_A(x) \vee v_A(x)\}, & \forall(x,x) \in G \times G \text{ için } xx = x \text{ ise} \\ 1 \quad , & xx \neq x \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} s \vee s \ , & xx = x \text{ ise} \\ 1 \quad , & xx \neq x \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Bundan dolayı $A \circ A = A$ dır.

Teorem 4.3.5: [19] A ve B bir G grubunun herhangi iki sezgisel bulanık alt grubu olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:

i. $A \circ B$, G nin sezgisel bulanık alt grubudur.
ii. $A \circ B = B \circ A$ dır.

Teorem 4.3.6: G birim elemanı e olan bir grup ve A , G nin bir sezgisel bulanık alt grubu olsun. Bu durumda, $\forall x \in G$ için

i. $\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x)$ ve $v_A(x^{-1}) = v_A(x)$
ii. $\mu_A(e) \geq \mu_A(x)$ ve $v_A(e) \leq v_A(x)$

dır.

İspat: i. $\forall x \in G$ için,

$$\mu_A(x) = \mu_A((x^{-1})^{-1}) \geq \mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$$

ve

$$v_A(x) = v_A((x^{-1})^{-1}) \leq v_A(x^{-1}) \leq v_A(x)$$

dir.

ii. $\forall x \in G$ için,

$$\mu_A(e) = \mu_A(xx^{-1}) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x)$$

ve

$$v_A(x^{-1}) = v_A(x) \text{ ve } v_A(e) \leq v_A(x)$$

dir.

Teorem 4.3.7: A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu ve e, G nin birim elemanı olsun. Bu durumda

$$G_A = \{x \in G | \mu_A(x) = \mu_A(e) \text{ ve } v_A(x) = v_A(e)\}$$

kümesi G nin bir alt grubudur.

İspat: $x, y \in G_A$ olsun. Bu durumda $\mu_A(x) = \mu_A(y) = \mu_A(e)$, $v_A(x) = v_A(y) = v_A(e)$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \mu_A(xy^{-1}) &\geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y^{-1}) \\ &= \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \quad \text{(Teorem 4.3.6 dan)} \\ &= \mu_A(e) \wedge \mu_A(e) = \mu_A(e) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} v_A(xy^{-1}) &\leq v_A(x) \vee v_A(y^{-1}) \\ &= v_A(x) \vee v_A(y) \quad \text{(Teorem 4.3.6 dan)} \\ &= v_A(e) \vee v_A(e) = v_A(e) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, $\mu_A(xy^{-1}) \leq \mu_A(e)$ ve $v_A(xy^{-1}) \geq v_A(e)$ dir. Böylece $\mu_A(xy^{-1}) = \mu_A(e)$ ve $v_A(xy^{-1}) = v_A(e)$ elde edilir. Dolayısıyla $xy^{-1} \in G_A$ olup G_A, G nin bir alt grubudur.

$(G,\cdot)$ bir grup olmak üzere $\forall x \in G$ için $p_\alpha(x) = xa$ ve $\lambda_\alpha(x) = ax$ şeklinde tanımlı $p_\alpha: G \to G$ fonksiyonlarına $\forall a \in G$ için G nin kendi içinde sağ ve sol dönüşümleri denir. Bu durumda $p_\alpha^{-1} = p_{\alpha^{-1}}$ ve $\lambda_\alpha^{-1} = \lambda_{\alpha^{-1}}$ olduğu açıktır.

Teorem 4.3.8: Eğer A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu ise $\forall x \in G_A$ için $p_\alpha(A) = \lambda_\alpha(A) = A$ dır.

İspat: $a \in G_A$ ve $x \in G$ olsun. Bu durumda

$$\mu_{p_\alpha(A)}(x) = p_\alpha(\mu_A)(x)$$

$$= \bigvee_{y \in p_\alpha^{-1}(x)} \mu_A(y) = \bigvee_{x = p_\alpha(y) = ya} \mu_A(y) = \bigvee_{y = xa^{-1}} \mu_A(y)$$

$$\geq \mu_A(xa^{-1}) = \mu_A(x) \wedge \mu_A(a^{-1}) = \mu_A(x) = \mu_A(xa^{-1}a)$$

$$\geq \mu_A(xa^{-1}) \wedge \mu_A(a) = \mu_A(xa^{-1}) \wedge \mu_A(e) = \mu_A(xa^{-1})$$

$$= \bigvee_{y = xa^{-1}} \mu_A(y) = \bigvee_{y \in p_\alpha^{-1}(x)} \mu_A(y) = \mu_{p_\alpha(A)}(x)$$

dir. Böylece $\mu_{p_\alpha(A)} = \mu_A$ olur. Diğer yandan,

$$v_{p_\alpha(A)}(x) = p_\alpha(v_A)(x)$$

$$= \bigwedge_{y \in p_\alpha^{-1}(x)} v_A(y) = \bigwedge_{x = p_\alpha(y) = ya} v_A(y) = \bigwedge_{y = xa^{-1}} v_A(y) = v_A(xa^{-1})$$

$$\leq v_A(x) \vee v_A(a^{-1}) = v_A(x) \vee v_A(e) = v_A(x) = v_A(xa^{-1}a)$$

$$\leq v_A(xa^{-1}) \vee v_A(a) = v_A(xa^{-1}) \vee v_A(e) = v_A(xa^{-1})$$

$$= \bigwedge_{y = xa^{-1}} v_A(y) = \bigwedge_{y \in p_\alpha^{-1}(x)} v_A(y) = v_{p_\alpha(A)}(x)$$

dir. Böylece $v_{p_\alpha(A)} = v_A$ olur. Bu yüzden $p_\alpha(A) = A$ eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $\lambda_\alpha(A) = A$ sağlanır. Bundan dolayı $p_\alpha(A) = \lambda_\alpha(A) = A$ olur.

Teorem 4.3.9: A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu olsun. $\mu_A(xy^{-1}) = \mu_A(e)$ ve $v_A(xy^{-1}) = v_A(e)$ ise $x, y \in G$ için $\mu_A(x) = \mu_A(y)$ ve $v_A(x) = v_A(y)$ dir.

İspat: $x, y \in G$ olsun. Bu durumda,

$$\mu_A(x) = \mu_A\big((xy^{-1})y\big) \geq \mu_A(xy^{-1}) \wedge \mu_A(y)$$

$$= \mu_A(e) \wedge \mu_A(y) = \mu_A(y).$$

Diğer taraftan, Teorem 4.3.6 dan

$$\mu_A(xy^{-1}) = \mu_A((yx^{-1})^{-1}) = \mu_A(yx^{-1})$$

olur. Dolayısıyla

$$\mu_A(y) = \mu_A\big((yx^{-1})x\big) \geq \mu_A(yx^{-1}) \wedge \mu_A(x) = \mu_A(xy^{-1}) \wedge \mu_A(x)$$

$$= \mu_A(e) \wedge \mu_A(x) = \mu_A(x).$$

Böylece $\mu_A(x) = \mu_A(y)$ elde edilir. Benzer şekilde $v_A(x) = v_A(y)$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.3.10: A nın G nin bir sezgisel bulanık alt grubu olabilmesi için gerek ve yeter şart $x, y \in G$ için $\mu_A(xy^{-1}) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ ve $v_A(xy^{-1}) \leq v_A(x) \vee v_A(y)$ olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$) A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu olsun. $x, y \in G$ için,

$$\mu_A(xy^{-1}) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y^{-1}) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$$

ve

$$v_A(xy^{-1}) \leq v_A(x) \vee v_A(y^{-1}) \leq v_A(x) \vee v_A(y)$$

dir.

$(\Leftarrow)$ $x, y \in A$ için, $\mu_A(xy^{-1}) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ ve $v_A(xy^{-1}) \leq v_A(x) \vee v_A(y)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mu_A(xy) = \mu_A(xyyy^{-1}) &\geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(yy^{-1}y^{-1})\\ &\geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(yy^{-1}) \wedge \mu_A(y)\\ &\geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \wedge \mu_A(y) \wedge \mu_A(y)\\ &= \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}v_A(xy) = v_A(xyyy^{-1}) &\leq v_A(x) \vee v_A(yy^{-1}y^{-1})\\ &\leq v_A(x) \vee v_A(yy^{-1}) \vee v_A(y)\\ &\leq v_A(x) \vee v_A(y) \vee v_A(y) \vee v_A(y)\\ &= v_A(x) \vee v_A(y)\end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.3.11: İki sezgisel bulanık öz alt grubun birleşimi G grubu olamaz.

İspat: A ve B bir G grubunun sezgisel bulanık özalt grupları olsun. $A \cup B = 1_\sim$, $A \neq 1_\sim$ ve $B \neq 1_\sim$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $A \cup B = \langle x, \mu_A \vee \mu_B, v_A \wedge v_B \rangle$ olup $\mu_A \vee \mu_B = 1$ ve $v_A \wedge v_B = 0$ olur. Dolayısıyla $\mu_A = 1$ veya $\mu_B = 1$ ve $v_A = 0$ veya $v_B = 0$. Bu ise kabulümüz ile çelişir.

Teorem 4.3.12: A bir sonlu G grubunun sezgisel bulanık bir alt grupoidi ise A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubudur.

İspat: $x \in G$ olsun. G sonlu olduğundan x, n sonlu mertebeye sahiptir. Bu durumda e, G nin birim elemanı olmak üzere $x^n = e$ dir. Böylece $x^{-1} = x^{n-1}$ olur. A, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoidi olduğundan,

$$\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x^{n-1}) = \mu_A(x^{n-2}x) \geq \mu_A(x)$$

ve

$$\nu_A(x^{-1}) = \nu_A(x^{n-1}) = \nu_A(x^{n-2}x) \leq \nu_A(x)$$

dir. Dolayısıyla A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubudur.

Teorem 4.3.13: A bir G grubunun sezgisel bulanık bir alt grubu ve $x \in G$ olsun. Bu durumda $\forall y \in G$ için $\mu_A(xy) = \mu_A(y)$ ve $\nu_A(xy) = \nu_A(y)$ olması için gerek ve yeter koşul $\mu_A(x) = \mu_A(e)$ ve $\nu_A(x) = \nu_A(e)$ olmasıdır.

İspat:

($\Longrightarrow$) $\forall y \in G$ için $\mu_A(xy) = \mu_A(y)$ ve $\nu_A(xy) = \nu_A(y)$ olsun. Bu durumda $\mu_A(x) = \mu_A(e)$ ve $\nu_A(x) = \nu_A(e)$ olduğu açıktır.

($\Longleftarrow$) $\mu_A(x) = \mu_A(e)$ ve $\nu_A(x) = \nu_A(e)$ olsun. Bu durumda Teorem 4.2.6 dan $\forall y \in G$ için $\mu_A(y) \leq \mu_A(x)$ ve $\nu_A(y) \leq \nu_A(x)$ dir. A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu olduğundan $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ ve $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$ dir. Böylece $\forall y \in G$ için $\mu_A(xy) \geq \mu_A(y)$ ve $\nu_A(xy) \leq \nu_A(y)$ olur. Diğer taraftan Teorem 4.2.6 dan,

$$\mu_A(y) = \mu_A(x^{-1}xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(xy)$$

ve

$$\nu_A(y) = \nu_A(x^{-1}xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(xy)$$

dir. $\forall y \in G$ için $\mu_A(x) \geq \mu_A(y)$ ve $v_A(x) \leq v_A(y)$ olduğundan $\mu_A(x) \wedge \mu_A(xy) = \mu_A(xy)$ ve $v_A(x) \vee v_A(xy) = v_A(xy)$ elde edilir. Böylece $\forall y \in G$ için $\mu_A(x) \geq \mu_A(xy)$ ve $v_A(x) \leq v_A(xy)$ olur. Sonuç olarak $\mu_A(xy) = \mu_A(y)$ ve $v_A(xy) = v_A(y)$ dir.

Teorem 4.3.14: $f: G \to H$ bir grup homomorfizmi, A ve B sırasıyla G ve H nin sezgisel bulanık alt grupları olsun.

i. Eğer A özalt gruba sahip ise bu durumda $f(A)$, H nin bir sezgisel bulanık alt grubudur.
ii. $f^{-1}(B)$, G nin bir sezgisel bulanık alt grubudur.

İspat:

i. Teorem 4.2.4 ten $f(A)$, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoididir. $\forall y \in f(G)$ için,

$$\mu_{f(A)}(y^{-1}) \geq \mu_{f(A)}(y) \text{ ve } v_{f(A)}(y^{-1}) \leq v_{f(A)}(y)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$y \in f(G)$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(y)$, G nin boştan farklı bir alt grubudur. A özalt gruba sahip olduğundan

$$\mu_A(x_0) = \sup_{t \in f^{-1}(y)} \mu_A(t) \text{ ve } v_A(x_0) = \inf_{t \in f^{-1}(y)} v_A(t)$$

olacak biçimde $x_0 \in f^{-1}(y)$ vardır. Böylece,

$$\mu_{f(A)}(y^{-1}) = f(\mu_A)(y^{-1}) = \sup_{t \in f^{-1}(y^{-1})} \mu_A(t) \geq \mu_A(x_0^{-1}) \geq \mu_A(x_0)$$
$$= \mu_{f(A)}(y)$$

ve

$$v_{f(A)}(y^{-1}) = f(v_A)(y^{-1}) = \inf_{t \in f^{-1}(y^{-1})} v_A(t) \leq v_A(x_0^{-1}) \leq v_A(x_0)$$
$$= v_{f(A)}(y).$$

dir. Dolayısıyla $f(A)$, G nin bir sezgisel bulanık alt grubudur.

ii. Teorem 4.2.3 ten $f^{-1}(B)$, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoididir. $\forall x \in G$ için

$$f^{-1}(B)(x^{-1}) \geq f^{-1}(B)(x)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$x \in G$ olsun. Bu durumda,

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x^{-1}) = f^{-1}(\mu_B)(x^{-1}) = \mu_B\big(f(x^{-1})\big)$$
$$= \mu_B\left(\big(f(x)\big)^{-1}\right) \geq \mu_B\big(f(x)\big) = \mu_{f^{-1}(B)}(x)$$

ve

$$v_{f^{-1}(B)}(x^{-1}) = f^{-1}(v_B)(x^{-1}) = v_B\big(f(x^{-1})\big)$$
$$= v_B\left(\big(f(x)\big)^{-1}\right) \leq v_B\big(f(x)\big) = v_{f^{-1}(B)}(x)$$

dir. Dolayısıyla $f^{-1}(B)$, G nin bir sezgisel bulanık alt grubudur.

Teorem 4.3.15: G_p**,** mertebesi p asalı olan bir devirli grup olsun. Bu durumda A nın G_p grubunun bir sezgisel bulanık alt grubu olması için gerek ve yeter şart boştan farklı $\forall x \in G_p$ için $\mu_A(x) = \mu_A(1) \leq \mu_A(0)$ ve $v_A(x) = v_A(1) \geq v_A(0)$ olmasıdır.

İspat:

($\Longrightarrow$) A, G_p nin sezgisel bulanık bir alt grubu ve $\forall\, 0 \neq x \in G_p$ olsun. Bu durumda $x, y \in G_p$ için

$$\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \text{ ve } v_A(xy) \leq v_A(x) \vee v_A(y)$$

dir. G_p**,** p asal mertebeye sahip devirli grup olduğundan $G_p = \{0,1,2,\dots,p-1\}$ dir. x , 1 in toplamı ve 1, x in toplamı iken $\mu_A(x) \geq \mu_A(1) \geq \mu_A(x)$ ve $v_A(x) \leq v_A(1) \leq v_A(x)$ dir. Böylece $\mu_A(x) = \mu_A(1)$ ve $v_A(x) = v_A(1)$ eşitliklerini elde ederiz. 0, G_p nin birim elemanı iken $\mu_A(x) \leq \mu_A(0)$ ve $v_A(x) \geq v_A(0)$ dır. Bu nedenle gerekli koşullar sağlanmış olur.

($\Longleftarrow$) Gerekli koşulların sağlandığını varsayalım ve $x, y \in G_p$ olsun. Bu durumda aşağıdaki dört duruma sahibiz:

1. $x \neq 0, y \neq 0$ ve $x = y$
2. $x \neq 0, y = 0$
3. $x = 0, y \neq 0$
4. $x \neq 0, y \neq 0$ ve $x \neq y$.

1.durumun sağlandığını varsayalım. Bu durumda hipotezden

$$\mu_A(x) = \mu_A(y) = \mu_A(1) \leq \mu_A(0) \text{ ve } v_A(x) = v_A(y) = v_A(1) \geq v_A(0)$$

olur. Bu yüzden,

$$\mu_A(x - y) = \mu_A(0) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \text{ ve } v_A(x - y) = v_A(0) \leq v_A(x) \vee v_A(y).$$

2.durumun sağlandığını varsayalım. $x - y \neq 0$ olduğundan hipotezden

$$\mu_A(x - y) = \mu_A(x) = \mu_A(1) \leq \mu_A(0) = \mu_A(y)$$

ve

$$v_A(x - y) = v_A(x) = v_A(1) \geq v_A(0) = v_A(y)$$

olur. Bu yüzden

$$\mu_A(x - y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \text{ ve } v_A(x - y) \leq v_A(x) \vee v_A(y).$$

2.durum, 3. duruma benzer şekilde gösterilir.

4.durumun sağlandığını varsayalım. $x - y \neq 0$ olduğundan hipotezden

$$\mu_A(x - y) = \mu_A(x) = \mu_A(y) = \mu_A(1) \leq \mu_A(0)$$

ve

$$v_A(x - y) = v_A(x) = v_A(y) = v_A(1) \geq v_A(0)$$

olur. Bu yüzden

$$\mu_A(x-y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \text{ ve } \nu_A(x-y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y).$$

Hepsinde $\mu_A(x-y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ ve $\nu_A(x-y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$ dir. Bundan dolayı Teorem 4.2.7 ten A, G_p nin sezgisel bulanık bir alt grubudur.

Teorem 4.3.16: A, bir G grubunun sezgisel bulanık bir alt grubu olsun. Bu durumda $\forall (t,s) \in I \times I$ için $t \leq \mu_A(e), s \geq \nu_A(e)$ olmak üzere $G_A^{(t,s)}$, G nin bir alt grubudur.

İspat: $G_A^{(t,s)}$ nın boştan farklı bir küme olduğu açıktır. $x, y \in G_A^{(t,s)}$ olsun. Bu durumda,

$$\mu_A(x) \geq t\,, \nu_A(x) \leq s \text{ ve } \mu_A(y) \geq t\,, \nu_A(y) \leq s$$

dir. A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubu olduğundan,

$$\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \geq t \text{ ve } \nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \leq s$$

olur. Bu yüzden $xy \in G_A^{(t,s)}$ dır. Diğer taraftan $\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x) \geq t$ ve $\nu_A(x^{-1}) \leq \nu_A(x) \leq s$ dir. Dolayısıyla $x^{-1} \in G_A^{(t,s)}$ dır. Böylece $G_A^{(t,s)}$, G nin bir alt grubudur.

Teorem 4.3.17: A, bir G grubunun sezgisel bulanık bir alt grubu olsun öyle ki $\forall$ $(t,s) \in I \times I$ ile $(t,s) \leq A(e)$ için $G_A^{(t,s)}$, G nin bir alt grubudur. Bu durumda A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubudur.

İspat: $x, y \in G$ için $\mu_A(x) = p_1$, $\nu_A(x) = q_1$ ve $\mu_A(y) = p_2$, $\nu_A(y) = q_2$ olsun. Bu durumda $x \in G_A^{(p_1,q_1)}$ ve $y \in G_A^{(p_2,q_2)}$ olduğu açıktır. $p_1 < p_2$ ve $q_1 > q_2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $G_A^{(p_2,q_2)} \subset G_A^{(p_1,q_1)}$ olur. Bundan dolayı $y \in G_A^{(p_1,q_1)}$ dır. $G_A^{(p_1,q_1)}$, G nin bir alt grubu olduğunda $xy \in G_A^{(p_1,q_1)}$ olur. Bu durumda $\mu_A(xy) \geq p_1$ ve $\nu_A(xy) \leq q_1$ olup $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ ve $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$ dır.

$\forall x \in G$ için $\mu_A(xy) = t$ ve $\nu_A(xy) = s$ olsun. Bu durumda $x \in G_A^{(t,s)}$ olur. $G_A^{(t,s)}$, G nin bir alt grubu olduğunda $x^{-1} \in G_A^{(t,s)}$ olur. Bu yüzden $\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$ ve $\nu_A(x^{-1}) \leq \nu_A(x)$ dir. Sonuç olarak A, G nin bir sezgisel bulanık alt grubudur.

4.4. Sezgisel Bulanık Normal Alt Gruplar ve Bölüm Alt Grupları

G bir grup ve A, G nin alt grubu olsun. Eğer $\forall x \in G$ için $xA = Ax$ oluyorsa A alt grubuna G nin normal alt grubu denir.

Tanım 4.4.1: A, bir G grubunun sezgisel bulanık bir alt grubu olsun. Bu durumda $x, y \in G$ için $\mu_A(xy) = \mu_A(yx)$ ve $\nu_A(xy) = \nu_A(yx)$ ise A ya G nin bir sezgisel bulanık normal alt grubudur denir.

Teorem 4.4.1: A, bir G grubunun sezgisel bulanık bir kümesi ve B, G nin bir sezgisel bulanık normal alt grubu olsun. Bu durumda $A \circ B = B \circ A$ dır.

Teorem 4.4.2: A, bir G grubunun sezgisel bulanık normal alt grubu olsun. B, G nin sezgisel bulanık alt grubu ise $B \circ A$, G nin bir sezgisel bulanık alt grupoididir.

İspat: Tanım 4.1.2 ve Teorem 4.3.1 ten $(A \circ B) \circ (B \circ A) \subset B \circ A$ dır. Bu yüzden $B \circ A$, G nin sezgisel bulanık alt grupoididir. Ayrıca Teorem 4.2.1 den $\forall x \in G$ için $\mu_{B \circ A}(x^{-1}) \geq \mu_{B \circ A}(x)$ dır. Bu yüzden $\nu_{B \circ A}(x^{-1}) \leq \nu_{B \circ A}(x)$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. $x \in G$ olsun. Buna göre,

$$\nu_{B \circ A}(x^{-1}) = \wedge_{yz = x^{-1}}[\nu_B(y) \vee \nu_A(z)]$$

$$= \wedge_{z^{-1}y^{-1} = x}[\nu_B((y^{-1})^{-1}) \vee \nu_A((z^{-1})^{-1})]$$

$$\leq \wedge_{z^{-1}y^{-1} = x}[\nu_B(y^{-1}) \vee \nu_A(z^{-1})]$$

$$= \nu_{A \circ B}(x) = \nu_{B \circ A}(x).$$

Bundan dolayı $B \circ A$, G nin sezgisel bulanık alt grupoididir.

Teorem 4.4.3: G bir grup, A ve B, G nin sezgisel bulanık normal alt grupları olsun. Bu durumda $A \circ B$, G nin sezgisel bulanık normal alt grubudur.

İspat: Teorem 4.2.5 ten $A \circ B$, G nin sezgisel bulanık alt grubudur. $a, b \in G$ olsun. Bu durumda $ab = xy$ olacak biçimde $x, y \in G$ vardır. Böylece $b = a^{-1}xy$ olup $ba = (a^{-1}xa)(a^{-1}ya)$ dır. A ve B, G nin sezgisel bulanık normal alt grupları olduğundan,

$$(A \circ B)(ab) = \langle \mu_{A\circ B}(ab), v_{A\circ B}(ab) \rangle$$

$$= \langle \vee_{ab=xy}[\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \ , \wedge_{ab=xy}[v_A(x) \vee v_B(y)] \rangle$$

$$= < \vee_{ba=(a^{-1}xa)(a^{-1}ya)}[\mu_A(a^{-1}xa) \wedge \mu_B(a^{-1}ya)],$$

$$\wedge_{ab=(a^{-1}xa)(a^{-1}ya)}[v_A(a^{-1}xa) \vee v_B(a^{-1}ya)] >$$

$$= \langle \mu_{A\circ B}(ba) \ , v_{A\circ B}(ba) \rangle$$

$$= (A \circ B \ )(ba)$$

dır. Böylece $A \circ B$, G nin sezgisel bulanık normal alt grubudur.

Teorem 4.4.4: A, G nin bir sezgisel bulanık normal alt G grubu ise G_A , G nin bir normal alt grubudur.

İspat: Teorem 4.2.7 den G_A , G nin bir alt grubudur. $x \in G_A$ ve $y \in G$ olsun. Buna göre,

$$\mu_A(yxy^{-1}) = \mu_A\big((yx)y^{-1}\big) = \mu_A\big(y^{-1}(yx)\big) = \mu_A(x) = \mu_A(e)$$

ve

$$v_A(yxy^{-1}) = v_A\big((yx)y^{-1}\big) = v_A\big(y^{-1}(yx)\big) = v_A(x) = v_A(e).$$

dir. Böylece $yxy^{-1} \in G_A$ olur. Bundan dolayı G_A , G nin normal bir alt grubudur.

Eğer A, G nin normal bir alt grubu ise $A = \langle x, \chi_A, \chi_{A^c} \rangle$ sezgisel bulanı kümesinin G nin bir sezgisel bulanık normal alt grubu olduğu ve $G_A = A$ eşitliğinin sağlandığı açıktır.

Tanım 4.4.2: A, G nin bir sezgisel bulanık bir normal alt grubu olsun. Bu durumda G/G_A bölüm grubu A ya göre X in sezgisel bulanık bölüm alt grubudur.

Teorem 4.4.5: $\varphi: G \to G/G_A$ olsun. A, G nin bir sezgisel bulanık normal alt grubu ve $B \in SB(G)$ ise $\varphi^{-1}\big(\varphi(B)\big) = G_A \circ B$ dir.

İspat: $x \in G$ olsun. Buna göre,

$$\mu_{\varphi^{-1}(\varphi(B))}(x) = \varphi^{-1}\big(\mu_{\varphi(B)}\big)(x) = \mu_{\varphi(B)}\big(\varphi(x)\big) = \varphi(\mu_B)\big(\varphi(x)\big)$$

$$= \vee_{\varphi(y)=\varphi(x)} \mu_B(y) = \vee_{xy^{-1}\in G_A} \mu_B(y)$$

ve

$$v_{\varphi^{-1}(\varphi(B))}(x) = \varphi^{-1}\big(v_{\varphi(B)}\big)(x) = v_{\varphi(B)}\big(\varphi(x)\big) = \varphi(v_B)\big(\varphi(x)\big)$$

$$= \wedge_{\varphi(y)=\varphi(x)} v_B(y) = \wedge_{xy^{-1}\in G_A} v_B(y).$$

dir. Diğer yandan,

$$\mu_{G_A\circ B}(x) = \vee_{zy=x}\big[\mu_{G_A}(z) \wedge \mu_B(y)\big] = \vee_{z=xy^{-1}\in G_A} \mu_B(y)$$

ve

$$v_{G_A\circ B}(x) = \wedge_{zy=x}\big[v_{G_A}(z) \vee v_B(y)\big] = \wedge_{z=xy^{-1}\in G_A} v_B(y).$$

olur. Böylece $\forall x \in G$ için $\mu_{\varphi^{-1}(\varphi(B))}(x) = \mu_{G_A\circ B}(x)$ ve $v_{\varphi^{-1}(\varphi(B))}(x) = v_{G_A\circ B}(x)$ dir. Bundan dolayı $\varphi^{-1}\big(\varphi(B)\big) = G_A \circ B$ dir.

5. SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK GRUPLAR

Bu bölümde ilk olarak sezgisel bulanık topolojik grup tanımlanacak ve bazı özellikleri incelenecektir. Daha sonra sezgisel bulanık topolojik gruplar arasında homomorfizm fonksiyonunun özellikleri araştırılacaktır. Son olarak sezgisel bulanık bölüm ve çarpım topolojik grupları tanımlanarak ilgili bazı teoremler verilecektir.

5.1. Sezgisel Bulanık Topolojik Gruplar ve Özellikleri

Teorem 5.1.1: G, X de bir sezgisel bulanık alt grup ve $\alpha: X \times X \to X$ ve $\beta: X \to X$ relatif fonksiyonlar olsun. Herhangi bir $x, y \in X$ için,

$$\alpha(x, y) = xy \text{ ve } \beta(x) = x^{-1}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $\alpha(G \times G) \subset G$ ve $\beta(G) \subset G$ dir.

İspat: $z \in X$ olsun. Buna göre,

$$\mu_{\alpha(G\times G)}(z) = \alpha(\mu_{G\times G})(z) = \sup_{(x,y)\in\alpha^{-1}(z)} \mu_{G\times G}(x,y) = \sup_{z=xy}[\mu_G(x) \wedge \mu_G(y)]$$

$$\leq \mu_G(xy) = \mu_G(z)$$

ve

$$v_{\alpha(G\times G)}(z) = \alpha(v_{G\times G})(z) = \inf_{(x,y)\in\alpha^{-1}(z)} v_{G\times G}(x,y) = \inf_{z=xy}[v_G(x) \vee v_G(y)]$$

$$\geq v_G(xy) = v_G(z).$$

Bundan dolayı $\alpha(G \times G) \subset G$ dir. Benzer şekilde $\beta(G) \subset G$ olduğu gösterilebilir.

G, X in bir sezgisel bulanık alt grubu ve (X, T) de sezgisel bulanık topolojik uzay olsun. Bu durumda Tanım 3.2.1 den, (G, T_G), (X, T) uzayında sezgisel bulanık açık uzay ve $(G, T_G) \times (G, T_G)$ uzayı da $(X, T) \times (X, T)$ de bir sezgisel bulanık açık uzaydır.

Tanım 5.1.1: (X, T) sezgisel bulanık topoloji ve G, X in bir sezgisel bulanık alt grubu olsun. (G, T_G), (X, T) üzerinde sezgisel bulanık açık uzay olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa G ye X üzerinde bir sezgisel bulanık topolojik grup denir.

i. $\alpha: (G, T_G) \times (G, T_G) \to (G, T_G)$, $\alpha(x, y) = xy$ fonksiyonu relatif sezgisel bulanık süreklidir.
ii. $\beta: (G, T_G) \to (G, T_G)$, $\beta(x) = x^{-1}$ fonksiyonu relatif sezgisel bulanık süreklidir.

Teorem 5.1.2: (X, T) bir sezgisel bulanık topolojik uzay ve G, X in bir sezgisel bulanık alt grubu olsun ve $\gamma: X \times X \to X$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ için $\gamma(x, y) = xy^{-1}$ şeklinde tanımlı olmak üzere G nin sezgisel bulanık topolojik grup olması için gerek ve yeter şart $\gamma: (G, T_G) \times (G, T_G) \to (G, T_G)$ fonksiyonunun relatif sezgisel bulanık sürekli olmasıdır.

İspat:

$(\Longrightarrow)$ G , X üzerinde sezgisel bulanık topolojik grup olsun. Tanım 5.1.2 den $\alpha: G \times G \to G$ ve $\beta: G \to G$ relatif sezgisel bulanık süreklidir. Ayrıca, $\gamma = \alpha \circ (1_X \times \beta)$ olduğu $\gamma(G \times G) \subset G$ den açıktır. Sonuç 3.1.2 den $1_X \times \beta$ relatif sezgisel bulanık süreklidir. O halde $\alpha \circ (1_X \times \beta)$ da relatif sezgisel bulanık süreklidir. Bundan dolayı γ da relatif sezgisel bulanık süreklidir.

$(\Longleftarrow)$ Teorem 4.3.6 dan $\forall x \in X$ için $\mu_G(e) \geq \mu_G(x)$ ve $v_G(e) \leq v_G(x)$ dir. Teorem 3.2.15 ten $\forall y \in X$ için $i(y) = (e, y)$ şeklinde tanımlı $i: G \to G \times G$ fonksiyonu relatif sezgisel bulanık süreklidir. Ayrıca $\beta = \gamma \circ i$ olduğundan β relatif sezgisel bulanık süreklidir. Böylece $1_X \times \beta$ da relatif sezgisel bulanık sürekli ve $\alpha = \gamma \circ (1_X \times \beta)$ olur. Dolayısıyla α da relatif sezgisel bulanık sürekli olup G, X üzerinde sezgisel bulanık topolojik gruptur.

*Tanım 5.1.2***:** [19] (A, T_A) ve (B, T_B) sırasıyla (X, T_X) ve (Y, T_Y) sezgisel bulanık topolojik uzaylarının alt uzayları ve $f: X \to Y$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun.

i. Eğer f, sezgisel bulanık sürekli ve sezgisel bulanık açık ise f ye sezgisel bulanık homeomorfizm denir.
ii. Eğer $f: (A, T_A) \to (B, T_B)$ relatif sezgisel bulanık sürekli, relatif sezgisel bulanık açık ve $f(A) = B$ ise f ye relatif sezgisel bulanık homeomorfizm denir.

G bir (X, T) sezgisel bulanık topolojik uzayının sezgisel bulanık alt grubu olsun. Genel olarak $\rho_\alpha, \lambda_\alpha, \alpha \in X$ dönüşümleri (G, T_G) nin kendi içine relatif sezgisel bulanık sürekli fonksiyonlar değildir. Ancak, aşağıdaki gibi özel bir durum vardır.

Teorem 5.1.3: X bir grup, (X, T) bir sezgisel bulanık topolojik uzay ve G, X de bir sezgisel bulanık topolojik grup olsun. $\forall \alpha \in X_G$ için $\rho_\alpha, \lambda_\alpha$ dönüşümleri (G, T_G) nin kendi içine relatif sezgisel bulanık homeomorfizmdirler.

İspat: Teorem 4.3.8 ten $\forall \alpha \in X_G$ için $\rho_\alpha(G) = \lambda_\alpha(G) = G$ dir. $\alpha \in X_G$ ve $i: G \to G \times G$ fonksiyonu $\forall y \in X$ için $i(y) = (\alpha, y)$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $\lambda_\alpha = \alpha \circ i$ dir. $\alpha \in G_e$ olduğundan $\mu_G(\alpha) = \mu_G(e)$ ve $v_G(\alpha) = v_G(e)$ dir. Böylece $\forall y \in X$ için $\mu_G(\alpha) \geq \mu_G(y)$ ve $v_G(\alpha) \leq v_G(y)$ dir. Teorem 3.2.15 den $i: (G, T_G) \to (G, T_G) \times (G, T_G)$ relatif sezgisel bulanık süreklidir. Hipotezden, α relatif sezgisel bulanık süreklidir. Bu yüzden λ_α relatif sezgisel bulanık sürekli olur. Ayrıca, $\lambda_\alpha^{-1} = \lambda_{\alpha^{-1}}$ olduğundan tersinin sürekliliği de sağlanır. ρ_α ve ρ_α^{-1} in relatif sezgisel bulanık sürekliliği benzer şekilde gösterilebilir.

5.2. Sezgisel Bulanık Homomorfizm

$f: X \to Y$ bir grup homomorfizmi, (Y, T_Y) sezgisel bulanık topolojik uzay ve G, Y de bir sezgisel bulanık topolojik grup olsun. Bu durumda T_Y nin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(G), X$ de bir sezgisel bulanık gruptur.

Teorem 5.2.1: $f: X \to Y$ bir grup homomorfizmi, (Y, T_Y) bir sezgisel bulanık topolojik uzay, T, T_Y nin f altındaki ters görüntüsü ve $(G, (T_Y)_G)$, Y de bir sezgisel bulanık topolojik grubu olsun. Buna göre G nin ters görüntüsü $f^{-1}(G)$, X de bir sezgisel bulanık topolojik gruptur.

İspat: $\gamma_X: X \times X \to X$ fonksiyonu $\forall x_1, x_2 \in X$ için $\gamma_X(x_1, x_2) = x_1 {x_2}^{-1}$ şeklinde tanımlansın. $\gamma_X: \left(f^{-1}(G), T_{f^{-1}(G)}\right) \times \left(f^{-1}(G), T_{f^{-1}(G)}\right) \to \left(f^{-1}(G), T_{f^{-1}(G)}\right)$ nin relatif sezgisel bulanık sürekli olduğunu gösterelim. T , T_Y nin f altındaki ters görüntüsü olduğundan $f: (X, T) \to (Y, T_Y)$ sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyondur. Diğer taraftan $f\left(f^{-1}(G)\right) \subset G$ dir. Teorem 3.2.1 den $f: \left(f^{-1}(G), T_{f^{-1}(G)}\right) \to (G, (T_Y)_G)$ relatif sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyondur.

$U \in T_{f^{-1}(G)}$ olsun. Bu durumda bir $f^{-1}(V) = U$ olacak biçimde bir $V \in (T_Y)_G$ vardır.$(x_1, x_2) \in X \times X$ olsun. Buna göre:

$$\mu_{(\gamma_x)^{-1}(U)}(x_1, x_2) = (\gamma_x)^{-1}(\mu_U)(x_1, x_2)$$

$$= \mu_U\big(\gamma_X(x_1, x_2)\big)$$

$$= \mu_U(x_1\, x_2^{-1})$$

$$= \mu_{f^{-1}(V)}(x_1\, x_2^{-1})$$

$$= f^{-1}(\mu_V)(x_1\, x_2^{-1})$$

$$= \mu_V\big(f(x_1\, x_2^{-1})\big)$$

$$= \mu_V\big(f(x_1) f(x_2^{-1})\big)$$

$$= \mu_V\left(f(x_1)\big(f(x_2)\big)^{-1}\right)$$

dir. Böylece $\mu_{(\gamma_x)^{-1}(U)}(x_1, x_2) = \mu_V\left(f(x_1)\big(f(x_2)\big)^{-1}\right)$ olur. Benzer şekilde, $\upsilon_{(\gamma_x)^{-1}(U)}(x_1, x_2) = \upsilon_V\left(f(x_1)\big(f(x_2)\big)^{-1}\right)$ dir. Hipotezden, $\forall y_1, y_2 \in Y$ için $\gamma_Y(y_1, y_2) = y_1 {y_2}^{-1}$ şeklinde tanımlanan $\gamma_Y : (G, T_G) \times (G, T_G) \to (G, T_G)$ fonksiyonu relatif sürekli bir fonksiyondur. Sonuç 3.2.1 den,

$$f \times f : \big(f^{-1}(G), T_{f^{-1}(G)}\big) \times \big(f^{-1}(G), T_{f^{-1}(G)}\big) \to (G, T_G)$$

çarpım fonksiyonu relatif sezgisel bulanık süreklidir. $(x_1, x_2) \in X \times X$ olsun. Buna göre:

$$\mu_V\left(f(x_1)\big(f(x_2)\big)^{-1}\right) = \mu_{(\gamma_y)^{-1}(V)}\big(f(x_1), f(x_2)\big)$$

$$= \mu_{(f\times f)^{-1}\left((\gamma_y)^{-1}(V)\right)}(x_1, x_2)$$

ve

$$v_V\left(f(x_1)\left(f(x_2)\right)^{-1}\right) = v_{(\gamma_y)^{-1}(V)}\left(f(x_1), f(\,x_2)\right)$$

$$= v_{(f\times f)^{-1}\left(\left(\gamma_y\right)^{-1}(V)\right)}(x_1, x_2)$$

dir. Buna göre,

$$(\gamma_x)^{-1}(U) \cap \left(f^{-1}(G) \times f^{-1}(G)\right) = (f \times f)^{-1}\left(\left(\gamma_y\right)^{-1}(V)\right) \cap \left(f^{-1}(G) \times f^{-1}(G)\right)$$

$$= [\gamma_Y \circ (f \times f)]^{-1}(V) \cap \left(f^{-1}(G) \times f^{-1}(G)\right)$$

dir. Bu yüzden $(\gamma_x)^{-1}(U) \cap \left(f^{-1}(G) \times f^{-1}(G)\right) \in T_{f^{-1}(G)} \times T_{f^{-1}(G)}$, yani $\gamma_X: \left(f^{-1}(G) \times T_{f^{-1}(G)}\right) \times \left(f^{-1}(G), T_{f^{-1}(G)}\right) \to \left(f^{-1}(G), T_{f^{-1}(G)}\right)$ relatif sezgisel bulanık süreklidir. Ayrıca, Teorem 4.2.13 (i) den $f^{-1}(G)$, X de bir sezgisel bulanık alt gruptur. Bu yüzden Teorem 5.1.2 den $f^{-1}(G)$ X de bir sezgisel bulanık topolojik gruptur.

Teorem 5.2.2: $f: X \to Y$ bir grup homomorfizmi (X, T_X)bir sezgisel bulanık topolojik uzay, T, T_X in f altındaki görüntüsü ve G, X de bir sezgisel bulanık topolojik grubu olsun. G, f $-$değişmez bir grup ise G nin görüntüsü $f(G)$, Y de bir sezgisel bulanık topolojik gruptur.

İspat: G, f-değişmez olsun. Tanım 2.1.6 ya göre $f(G)$, Y de bir sezgisel bulanık gruptur. $U \in T_X$ olsun. Buna göre, Sonuç 2.1.2 den $U \subset f^{-1}\left(f(U)\right)$ dur. Buna göre $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\tau} \subset T_X$ şartını sağlayan bir aile vardır. Bu yüzden $f^{-1}\left(f(U)\right) \in T_X$ dir. T, T_X in f altındaki görüntüsü olduğundan $f(U)$, T nin bir elemanıdır. Bu yüzden f sezgisel bulanık açıktır. $U \in (T_X)_G$ olsun. Bu durumda $U = U' \cap G$ olacak şekilde $U' \in T_X$ vardır. G, f-değişmez ise $f(U) = f(U') \cap f(G)$ dir. f, sezgisel bulanık açık ise $f(U') \in T$ dir. Böylece $f(U) \in\ T_{f(G)}$ olup $f: (G, (T_X)_G) \to \left(f(G), T_{f(G)}\right)$ relatif sezgisel bulanık açıktır. Teorem 3.2.13 ten çarpım fonksiyonu

$f \times f: (G, (T_X)_G) \times (G, (T_X)_G) \to \left(f(G), T_{f(G)}\right)$ relatif sezgisel bulanık açıktır. $V \in T_{f(G)}$ ve $(x_1, x_2) \in X \times X$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\mu_{[\gamma_Y \circ (f \times f)]^{-1}(V)}(x_1, x_2) &= [\gamma_Y \circ (f \times f)]^{-1}(\mu_V)(x_1, x_2) \\
&= \mu_V[\gamma_Y \circ (f \times f)](x_1, x_2) \\
&= \mu_V \gamma_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) \\
&= \mu_V\left(f(x_1)\big(f(x_2)\big)^{-1}\right) \\
&= \mu_V\big(f(x_1)f(x_2^{-1})\big) \quad (f\ bir\ homomorfizm) \\
&= \mu_V\big(f(x_1x_2^{-1})\big) \qquad (f\ bir\ homomorfizm) \\
&= \mu_V f\big(\gamma_X(x_1, x_2)\big) \\
&= \mu_V(f \circ \gamma_X)(x_1, x_2) \\
&= (f \circ \gamma_X)^{-1}(\mu_V)(x_1, x_2) \\
&= \mu_{(f \circ \gamma_X)^{-1}(V)}(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

dir. Burada $\gamma_X: X \times X \to X$ fonksiyonu $\forall (x_1, x_2) \in X \times X$ için $\gamma_X(x_1, x_2) = x_1 x_2^{-1}$ şeklinde tanımlıdır. Böylece $\mu_{[\gamma_Y \circ (f \times f)]^{-1}(V)} = \mu_{(f \circ \gamma_X)^{-1}(V)}$ yani $\mu_{(f \times f)^{-1}\left[(\gamma_y)^{-1}(V)\right]} = \mu_{(\gamma_x)^{-1}\left(f^{-1}(V)\right)}$ dir. Benzer şekilde, $v_{(f \times f)^{-1}\left[(\gamma_y)^{-1}(V)\right]} = v_{(\gamma_x)^{-1}\left(f^{-1}(V)\right)}$ olur. Bu yüzden

$$(f \times f)^{-1}\left[(\gamma_y)^{-1}(V)\right] = (\gamma_x)^{-1}\big(f^{-1}(V)\big)$$

dir. G , X de sezgisel bulanık topolojik grup olduğundan $\gamma_X: (G, (T_X)_G) \times (G, (T_X)_G) \to (G, (T_X)_G)$ fonksiyonu relatif sezgisel bulanık süreklidir. T_X in f altındaki görüntüsü T olduğundan $f: (G, (T_X)_G) \to (f(G), T_{f(G)})$ relatif sezgisel bulanık sürekli bir fonksiyondur. Böylece

$$f \times f: (G, (T_X)_G) \times (G, (T_X)_G) \to (f(G), T_{f(G)}) \times (f(G), T_{f(G)})$$

çarpım fonksiyonu da relatif sezgisel bulanık süreklidir. Dolayısıyla

$$(f \times f) \circ \gamma_Y: (G, (T_X)_G) \times (G, (T_X)_G) \to (f(G), T_{f(G)})$$

relatif sezgisel bulanık süreklidir. A, f $-$değişmez olduğundan,

$$(f \times f)^{-1}\left[(\gamma_y)^{-1}(V) \cap (f(G) \times f(G))\right] = (f \times f)^{-1}\left[(\gamma_y)^{-1}(V)\right] \cap (G \times G)$$

dir. Bu yüzden $(f \times f)^{-1}\left[(\gamma_y)^{-1}(V) \cap (f(G) \times f(G))\right] \in (T_X)_G \times (T_X)_G$ dir. $f \times f$, relatif sezgisel bulanık açık olduğundan

$$(f \times f)(f \times f)^{-1}\left[(\gamma_y)^{-1}(V) \cap (f(G) \times f(G))\right] \in T_{f(G)} \times T_{f(G)}$$

dir. Ayrıca,

$$(f \times f)(f \times f)^{-1}\left[(\gamma_y)^{-1}(V) \cap (f(G) \times f(G))\right] = (\gamma_y)^{-1}(V) \cap (f(G) \times f(G))$$

olduğundan $(\gamma_y)^{-1}(V) \cap (f(G) \times f(G)) \in T_{f(G)} \times T_{f(G)}$ dir. Buradan $f(G)$, Y de bir sezgisel bulanık topolojik gruptur.

5.3. Sezgisel Bulanık Bölüm ve Çarpım Topolojik Grupları

X bir grup ve (X, T) sezgisel bulanık topolojik uzay, G, X de bir sezgisel bulanık topolojik grup, N, X in bir normal alt grubu ve $\varphi: X \to X/N$ kanonik homomorfizm olsun.

Teorem 5.3.1: G, N de sabit ise $G, \varphi -$değişmezdir. Bu nedenle, Teorem 5.2.2 den $\varphi(G)$, X/N de bir sezgisel bulanık topolojik gruptur. Bu durumda $\varphi(G)$ sezgisel bulanık bölüm grubu olarak adlandırılır ve G/N şeklinde gösterilir.

İspat: G nin $\varphi -$ değişmez olduğunu ispatlayalım. $x_1, x_2 \in X$ için $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ olsun. Buna göre $x_1 N = x_2 N$ dir. Bu nedenle $x_1 n_1 = x_2 n_2$ olacak şekilde $n_1, n_2 \in N$ vardır. G, N de sabit olduğundan $\forall x \in N$ için $\mu_G(x) = \mu_G(e)$ ve $v_G(x) = v_G(e)$ dir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\mu_G(x_1) &= \mu_G(x_2 n_2 n_1^{-1}) \\
&\geq \mu_G(x_2) \wedge \mu_G(n_2 n_1^{-1}) \\
&= \mu_G(x_2) \wedge \mu_G(e) \ (n_2 n_1^{-1} \in N) \\
&= \mu_G(x_2)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
v_G(x_1) &= v_G(x_2 n_2 n_1^{-1}) \\
&\leq v_G(x_2) \vee v_G(n_2 n_1^{-1}) \\
&= v_G(x_2) \vee v_G(e) \ (n_2 n_1^{-1} \in N) \\
&= v_G(x_2)
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde $\mu_G(x_2) \geq \mu_G(x_1)$ ve $v_G(x_2) \leq v_G(x_1)$ dir. Böylece $v_G(x_1) = v_G(x_2)$ eşitliği sağlanır. Sonuç olarak $G, \varphi -$değişmezdir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 5.2.2 ve Teorem 5.3.1 sonucudur.

Sonuç 5.3.1: X bir grup, (X, T) bir sezgisel bulanık topolojik uzay G, X de bir sezgisel bulanık topolojik grup ve N, X in bir normal alt grubu olsun. Kanonik homomorfizm φ altında T nin görüntüsü T_φ olsun. Eğer $G,\ N$ üzerinde sabit ise sezgisel bulanık bölüm grubu G/N, X/N üzerinde bir sezgisel bulanık topolojik gruptur. Bu durumda T_φ, X/N de sezgisel bulanık bölüm topolojisi ve $G/N, X/N$ üzerinde bir sezgisel bulanık bölüm topolojik grubu olarak adlandırılır.

Teorem 5.3.2: $f: X \to Y$ sezgisel bulanık sürekli ve sezgisel bulanık açık grup epimorfizmi, T_X ve T_Y sırasıyla X ve Y de sezgisel bulanık topolojiler ve G, X de bir sezgisel bulanık topolojik grup olsun. Eğer G, f nin çekirdeği $f^{-1}(e)$ de sabit ise $X/_{f^{-1}(e)}$ bölüm grubunun, sezgisel bulanık bölüm topolojisi T olmak üzere,

i. $G/_{f^{-1}(e)}$ ve $f(G)$ sezgisel bulanık gruplar sırasıyla $X/_{f^{-1}(e)}$ ve Y de sezgisel bulanık topolojik gruplardır.
ii. $\forall a \in X$ için $k\big(af^{-1}(e)\big) = f(a)$ şeklinde tanımlı $k: X/_{f^{-1}(e)} \to Y,\ f(G)$ kanonik izomorfizmi $G/_{f^{-1}(e)}$ den $f(G)$ ye bir relatif sezgisel bulanık homeomorfizmidir.

İspat:

(i) Teorem 5.4.4 ten $G/_{f^{-1}(e)}$ nin $X/_{f^{-1}(e)}$ de bir sezgisel bulanık topolojik grup olduğu açıktır. $T_{f^{-1}}$, T_X in f altındaki görüntüsü ve $V \in T_{f^{-1}}$ olsun. Buna göre $f^{-1}(V) \in T_X$ dir. f örten ve sezgisel bulanık açık olduğundan $V = f\big(f^{-1}(V)\big) \in T_Y$ olur. Böylece $T_{f^{-1}} \subset T_Y$ dir. $V \in T_Y$ olsun. f sezgisel bulanık sürekli olduğundan $f^{-1}(V) \in T_X$ dir. Buna göre $V \in T_{f^{-1}}$, yani $T_Y \subset T_{f^{-1}}$ dir. Böylece $T_Y = T_{f^{-1}}$ olup Teorem 5.4.2 den $f(G)$, Y de sezgisel bulanık topolojik gruptur.

(ii) $\varphi: X \to X/f^{-1}(e)$ kanonik epimorfizm olsun. Bu durumda açıktır ki $k: X/f^{-1}(e) \to Y$ birebir-örten ve $f = k \circ \varphi$ dir. $V' \in (T_Y)_{f(G)}$ olsun. $f: (G, (T_X)_G) \to \big(f(G), (T_Y)_{f(G)}\big)$ relatif sezgisel bulanık sürekli olduğundan $f^{-1}(V') = \varphi^{-1}\big(k^{-1}(V')\big) \in (T_X)_G$ dir. $G,\ f^{-1}(e)$ de sabit ve X de sezgisel bulanık topolojik grup olduğundan Teorem 5.4.1 den $G/f^{-1}(e), X/f^{-1}(e)$ de bir sezgisel bulanık bölüm grubudur. $\varphi: (G, (T_X)_G) \to \left(G/f^{-1}(e), T_{G/f^{-1}(e)}\right)$ relatif sezgisel bulanık açık olduğundan $\varphi\left(f^{-1}(V')\right) \in T_{G/f^{-1}(e)}$ dir. Ayrıca $\varphi\left(f^{-1}(V')\right) = k^{-1}(V')$ olduğundan $k^{-1}(V') \in T_{G/f^{-1}(e)}$ olur. Bu yüzden $k: \left(G/f^{-1}(e), T_{G/f^{-1}(e)}\right) \to \left(f(G), (T_Y)_{f(G)}\right)$ relatif sezgisel bulanık süreklidir. $U \in T_{G/f^{-1}(e)}$ olsun. T_X in φ altındaki görüntüsü T olduğundan $\varphi^{-1}(U) \in (T_X)_G$ dir. Diğer yandan, $\varphi^{-1}(U) = f^{-1}\left(k(U)\right)$ dur. Böylece $f^{-1}\left(k(U)\right) \in (T_X)_G$ dir. $f: (G, (T_X)_G) \to \left(f(G), (T_Y)_{f(G)}\right)$ relatif sezgisel bulanık açık olduğundan $k(U) \in (T_Y)_{f(G)}$ dir. Bu yüzden k relatif sezgisel bulanık açıktır. Bu da ispatı tamamlar.

$j = 1,2, \dots, n$ olmak üzere $\{X_j\}$ grupların sonlu bir ailesi ve $X = \prod x_j$ çarpım grubu olsun. $\forall j = 1,2, \dots, n$ için T_j, X_j nin sezgisel bulanık topolojisi ve G_j, X_j de sezgisel bulanık topolojik grup olsun. $G = (\mu_G, \nu_G): X \times X \to I \times I$ fonksiyonunu $\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ için,

$$\mu_G(x) = \mu_{G_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{G_n}(x_n)$$

ve

$$\upsilon_G(x) = \upsilon_{G_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \upsilon_{G_n}(x_n)$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 5.3.3: $G = \prod_{j=1}^{n} G_j$ çarpımı X de bir sezgisel bulanık alt grup olsun. Bu gruba sezgisel bulanık çarpım grubu denir.

İspat: G nin X de bir sezgisel bulanık alt grup olduğunu ispatlayalım. $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ olsun. Buna göre,

$$\mu_G(xy^{-1}) = \mu_G(x_1 y_1^{-1}, \dots, x_n y_n^{-1})$$

$$= \mu_{G_1}(x_1 y_1^{-1}) \wedge \dots \wedge \mu_{G_n}(x_n y_n^{-1})$$

$$\geq [\mu_{G_1}(x_1) \wedge \mu_{G_1}(y_1)] \wedge \ldots \wedge [\mu_{G_n}(x_n) \wedge \mu_{G_n}(y_n)]$$

$$= [\mu_{G_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{G_n}(x_n)] \wedge [\mu_{G_1}(y_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{G_n}(y_n)]$$

$$= \mu_G(x) \wedge \mu_G(y)$$

ve

$$v_G(xy^{-1}) = v_G(x_1 y_1^{-1}, \ldots, x_n y_n^{-1})$$

$$= v_{G_1}(x_1 y_1^{-1}) \vee \ldots \vee v_{G_n}(x_n y_n^{-1})$$

$$\leq [v_{G_1}(x_1) \vee v_{G_1}(y_1)] \vee \ldots \vee [v_{G_n}(x_n) \vee v_{G_n}(y_n)]$$

$$= [v_{G_1}(x_1) \vee \ldots \vee v_{G_n}(x_n)] \vee [v_{G_1}(y_1) \vee \ldots \vee v_{G_n}(y_n)]$$

$$= v_G(x) \vee v_G(y)$$

dir. Bundan dolayı G, X de bir sezgisel bulanık gruptur.

Teorem 5.3.5: $j = 1,2, \ldots, n$ olmak üzere $\{X_j\}$, grupların sonlu bir ailesi ve $\forall j = 1,2, .., n$ için T_j, X_j nin sezgisel bulanık topolojisi ve G_j, X_j de sezgisel bulanık topolojik grup olsun. $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$ çarpım grubunun sezgisel bulanık çarpım topolojisi T olsun. Bu durumda sezgisel bulanık çarpım grubu $G = \prod_{j=1}^{n} G_j$, X de bir sezgisel bulanık topolojik gruptur. G ye sezgisel bulanık çarpım topolojik grubu denir.

İspat: $\gamma_1: X \times X \to (X_1 \times X_1) \times \ldots \times (X_n \times X_n)$ fonksiyonu $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ için,

$$\gamma_1(x, y) = \big((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\big)$$

şeklinde tanımlansın. $\forall j = 1,2, .., n$ için $\pi_j: (X_1 \times X_1) \times \ldots \times (X_n \times X_n) \to X_j \times X_j$ fonksiyonu $\forall\big((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\big) \in (X_1 \times X_1) \times \ldots \times (X_n \times X_n)$ için,

$$\pi_j\big((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\big) = (x_j, y_j)$$

şeklinde tanımlıdır. Buna göre $\forall j = 1,2,..,n$ için $\pi_j \circ \gamma_1 : X \times X \to X_j \times X_j$ nin sezgisel bulanık sürekli olduğu açıkça görülür. Bu yüzden γ_1 sezgisel bulanık süreklidir. Ayrıca,

$$\gamma_1(G \times G) \subset (G_1 \times G_1) \times \dots \times (G_n \times G_n)$$

dir. Dolayısıyla $\gamma_1 : (G \times G) \to (G_1 \times G_1) \times \dots \times (G_n \times G_n)$ relatif sezgisel bulanık süreklidir.

$\gamma_2 : (X_1 \times X_1) \times \dots \times (X_n \times X_n) \to X$ fonksiyonu

$\forall\big((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\big) \in (X_1 \times X_1) \times \dots \times (X_n \times X_n)$ için,

$$\gamma_2\big((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\big) = (x_1 y_1^{-1}, \dots, x_n y_n^{-1})$$

şeklinde tanımlı olsun. $\forall j = 1,2,..,n$ için $f_j : X_j \times X_j \to X_j$ fonksiyonu $\forall (x_j, y_j) \in X_j \times X_j$ için $f_j\Big(\big((x_j, y_j)\big)\Big) = x_j y_j^{-1}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. Bundan dolayı $\forall j = 1,2,..,n$ için $f_j : G_j \times G_j \to G_j$ relatif sezgisel bulanık süreklidir. Ayrıca, $\gamma_2 = \prod_{j=1}^{n} f_j$ dir. Bu yüzden $\gamma_2 : (G_1 \times G_1) \times \dots \times (G_n \times G_n) \to G$ relatif sezgisel bulanık süreklidir.

$\gamma : X \times X \to X$ fonksiyonu $\forall (x, y) \in X \times X$ için,

$$\gamma(x, y) = xy^{-1}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ olur. Bu yüzden γ sezgisel bulanık sürekli ve $\gamma : G \times G \to G$ relatif sezgisel bulanık süreklidir. Sonuç olarak G, X de bir sezgisel bulanık topolojik gruptur.

KAYNAKLAR

[1] Atanassov, K.(1986), Intuitionistic Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 20, 87-96.

[2] Az-Zo'bi, E.A., Marashdeh, M.F. and Uzbashy, R.F., (2014), The Fundamental Group of Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, *App. Math. Sciences*, 157, 7829-7843.

[3] Banerjee, B. and Basnet, D. K., (2003), Intuitionistic Fuzzy Subrings and Ideals, *J.Fuzzy Mathematics*, 11(1), 139-155.

[4] Biswas, R., (1989), Intuitionistic Fuzzy Subgroups, *Mathematical Forum*, 37-46.

[5] Chang, C.L., (1968), Fuzzy Topological Spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 24, 182-190.

[6] Çoker, D., (1997), An Introduction to Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 88, 81-89.

[7] Çoker, D. and Es, A.H., (1995), On Fuzzy Compactness in Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, *J. Fuzzy Math.*, 3, 899-909.

[8] Demiralp, S., (2008), Bazı Fuzzy Cebirsel Yapılar.

[9] Foster, D.H., (1979), Fuzzy Topological Groups, *J. Math. Anal. Appl*., 67, 549-564.

[10] Gürçay, H., Çoker, D. and Es, A.H., (1997), On Fuzzy Continuity in Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, *J. Fuzzy Math*., 5, 365-378.

[11] Hur, K., Jang, S.Y. and Kang, H.W., (2003), Intuitionistic Fuzzy Subgroupoids, *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, 3(1), 72-77.

[12] Hur, K., Kang,H.W. and Song, H.K., (2003), Intuitionistic Fuzzy Subgroups and Subrings, *Honam Math. J*., 25(1), 19-41.

[13] Hur, K., Jun, Y.B. and Ryou, J.H., (2004), Intuitionistic Fuzzy Topological Groups, *Honam Math. J*., 26, 163-192.

[14] Lee, S.J. and Lee, E.P., (2000), The Category of Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, *Bull. Korean Math. Soc*., 37(1), 63-76.

[15] Liu, W., (1982), Fuzzy Invariant Subgroups and Fuzzy İdeals, *Fuzzy Sets and Systems*, 8, 133-139.

[16] Ma, J.L. and Yu, C.H., (1984), Fuzzy Topological Groups, *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 289-299.

[17] Padmapriya, S., Uma, M.K. and Roja, E., (2014), A study on Intuitionistic Fuzzy Topological Groups, *Annals of Fuzzy Math. and Inform*., 7(6), 991-1004.

[18] Sharma, P.K., (2012), On the Direct Product of Fuzzy Intuitionistic Fuzzy Subgroups, *Int. Mat. Forum*, 7(11), 523-530.

[19] Yazar, Eda (2008), Fuzzy Topolojik Gruplar.

[20] Zadeh, L.A., (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gülnur HAÇAT
Doğum Yeri ve Yılı : Safranbolu / 1992
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ghacat@ogr.kastamonu.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise : Ankara Kızılcahamam Lisesi 2010
Lisans : Karabük Üniversitesi 2016

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Pervaneoğlu Ali Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi 2016
İş Yeri : Şehit Yavuz Ulutaş Çelikoğlu Ortaokulu 2017
İş Yeri : Şeyh Şabanı Veli Anadolu İmam Hatip Lisesi 2018

Yayınları

[1] Demiralp, S. and Haçat, G., (2018), On Fuzzy Sub-H-Groups, Proceedings of International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2018) Turk. J. Math. Comput. Sci. 10, 126–133.

[2] Demiralp, S. and Haçat, G., (2019), H-Group Structure on Intuitionistic Fuzzy Topological Space, Journal of Universal Mathematics Vol.2 No.1 pp.89-97.

[3] Demiralp, S. and Haçat, G., (2019), Deformation Retract of a Digital H-Space, Journal of Universal Mathematics Vol.2 No.1 pp.82-88.

[4] Haçat, G., (2019), On Fuzzy Retract of a Fuzzy Loop Space, International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT) – Volume 65 Issue 2, 73-82.