

**T.C.  
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KEYFİ EĞİMLİ ZAMANA GÖRE HARMONİK BİR KUVVETİN  
UYGULANDIĞI ÇOK KATMANLI PLAKA-ŞERİTİN DİNAMİK  
DAVRANIŞININ SONLU ELEMANLAR ANALİZİ**

**Numan Tuğrul ERTUĞRUL**

**Danışman  
Jüri Üyesi  
Jüri Üyesi**

**Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DAŞDEMİR  
Doç. Dr. Serkan ISLAK  
Dr. Öğr. Üyesi Metin ZEYVELİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**KASTAMONU – 2019**

## TEZ ONAYI

Numan Tuğrul ERTUĞRUL tarafından hazırlanan " Keyfi Eğimli Zamana Göre Harmonik Bir Kuvvetin Uygulandığı Çok Katmanlı Plaka-Şeritin Dinamik Davranışının Sonlu Elemanlar Analizi " adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve oy birliği ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DAŞDEMİR  
Kastamonu Üniversitesi



Jüri Üyesi Doç. Dr. Serkan ISLAK  
Kastamonu Üniversitesi



Jüri Üyesi Dr. Öğr. Üyesi Metin ZEYVELİ  
Karabük Üniversitesi



18/01/2019

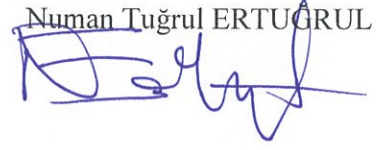
Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Hasbi YAPRAK



## TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.

Numan Tuğrul ERTUGRUL  


## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### KEYFİ EĞİMLİ ZAMANA GÖRE HARMONİK BİR KUVVETİN UYGULANDIĞI ÇOK KATMANLI PLAKA-ŞERİTİN DİNAMİK DAVRANIŞININ SONLU ELEMANLAR ANALİZİ

Numan Tuğrul ERTUĞRUL

Kastamonu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DAŞDEMİR

Bu tez çalışmasında, “Daşdemir, A. (2017): *Effect of initial stress on the dynamic response of a multi-layered plate-strip subjected to an arbitrary inclined time-harmonic force*, Int. J. of Applied Mechanics and Engineering, vol.22, No.3, pp.521-537” adlı makalede sunulan dinamik gerilme alan problemi detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Rijit zemin üzerinde duran keyfi eğimli zamana göre harmonik kuvvetin etkisi altındaki öngerilmeli çok katmanlı bir plaka şeridinin zorlanmış titreşim problemi için bir matematiksel model tanıtılmaktadır. Mevcut inceleme öngerilmeli cisimlerde üç boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalga yayılımı teorisi (ÖGODYÜT) uygulanarak parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılmıştır. Bu kapsamda düzlem zorlanma durumunda bir matematiksel modelleme sunuluyor. Katmanlar arasındaki ara yüzeyde tam bağlı temas etkileşiminin olduğu ve katman malzemelerinin doğrusal olarak elastik, homojen ve izotropik olduğu varsayılmaktadır. İlgili problem kapsamında hareketin kısmi diferansiyel denklemler sistemi Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) kullanılarak yaklaşık olarak çözülüyor. Ayrıca plaka şeridinin dinamik tepkisi üzerindeki öngerilme parametresinin etkisi sunuluyor.

**Anahtar Kelimeler:** Çok katmanlı plaka-şerit, sonlu elemanlar yöntemi, başlangıç gerilmesi, zamana göre harmonik kuvvet, frekans tepkisi, zorlanmış titreşim.

**2019, 50 sayfa**

**Bilim Kodu: 204**

## ABSTRACT

MSc. Thesis

### FINITE ELEMENT ANALYSIS FOR DYNAMICAL BEHAVIOR OF A MULTI-LAYERED PLATE-STRIP SUBJECTED TO AN ARBITRARY INCLINED TIME-HARMONIC FORCE

Numan Tuğrul ERTUĞRUL  
Kastamonu University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ahmet DAŞDEMİR

**Abstract:** In this thesis, a dynamical stress field problem presented in the paper titled “Daşdemir, A. (2017): Effect of initial stress on the dynamic response of a multi-layered plate-strip subjected to an arbitrary inclined time-harmonic force, Int. J. of Applied Mechanics and Engineering, vol.22, No.3, pp.521-537” is investigated in detailed.

A mathematical model for a forced vibration problem in a pre-stressed multi-layered plate-strip, which rests on a rigid foundation, subjected to an arbitrary inclined time-harmonic force is investigated in detailed. The investigation is carried out within the framework of the piecewise homogeneous body model with the use of the three-dimensional linearized theory of elastic waves in initially stressed bodies (TLTEWISB). In this scope, mathematical modelling is presented in plane strain state. It is assumed that there exists the complete contact interaction at the interface between the layers and the materials of the layer are linearly elastic, homogeneous and isotropic. The governing system of the partial differential equations of motion for the considered problem is solved approximately by employing the Finite Element Method (FEM). Further, the influence of the initial stress parameter on the dynamic response of the plate-strip is presented.

**Key Words:** Multi-layered plate-strip, finite element method, initial stress, time-harmonic force, frequency response, forced vibration.

**2019, 50 pages**

**Science Code: 204**

## TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DAŞDEMİR (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü)'e teşekkürlerimi borç bilirim.

Her zaman yanımda olan eşime ve oğluma gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Numan Tuğrul ERTUĞRUL  
Kastamonu, Ocak, 2019



## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
TABLolar DİZİNİ .....	x
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1. Temel Bilgiler ve Formüller.....	5
2.2. Sınır Değer Problemlerinin Zayıf Formülasyonu.....	8
2.3. Elastisite Teorisi .....	9
2.3.1. Gerilme .....	10
2.3.2. İndis ve Vektör Notasyonu .....	13
2.3.3. Gerilmeler ve Bunların Yer Değiştirmeler ile Olan İlişkisi.....	19
2.3.4. Rotasyon ve Kesme Zorlanması .....	22
2.3.5. Gerilim-Gerinim İlişkileri.....	25
2.3.6. Lamé Sabitleri.....	26
3. PROBLEM VE MATEMATİKSEL YAKLAŞIM .....	28
3.1. Problemin Oluşturulması.....	28
3.2. Çözüm Prosedürü .....	30
4. SAYISAL BULGULAR VE TARTIŞMALAR .....	35
KAYNAKLAR .....	47
ÖZGEÇMİŞ .....	50

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$a$	Plaka şeridinin uzunluğu
$a_i^{(k)}(b_i^{(k)})$	$k$ 'inci elemanın $i$ -inci düğümünün $Ox_1$ ( $Ox_2$ ) yönündeki yer değiştirmesi
$B(u^{(r)}, v^{(r)})$	Toplam enerji fonksiyonelinin bilineer kısmı
$c_1^{(r)}$	$r$ 'inci katman malzemesinde dalga genişleme hızı
$c_2^{(r)}$	$r$ 'inci katman malzemesinde enine dalga hızı
$D$	Cismin kapladığı alanı
$D^{(r)}$	$r$ 'inci katman malzemesinin kapladığı alan
$e_r$	$r$ 'inci katmanın Young modülü
$e^{(\bullet)}$	$r$ 'inci ve $r+1$ 'inci katmanların Young modüllerinin oranı
$F$	Kuvvet vektörü
$h$	Cismin yüksekliği
$J(u^{(r)})$	Toplam enerji fonksiyoneli
$K$	Katılık matrisi
$L_2^1$	Kareleri ve birinci dereceden kısmi diferansiyellerinin Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonların kümesi
$l(v^{(r)})$	Toplam enerji fonksiyonelinin doğrusal kısmı
$M$	Sonlu eleman üzerindeki düğüm sayısı
$M$	Kütle matrisi
$N_j(t, s)$	Şekil fonksiyonu
$p_0$	Noktasal kuvvetin sayısal değeri
$r$	Katman sayısı
SEY	Sonlu elemanlar yöntemi
TLTEWISB	Öngerilmeli cisimlerde üç boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalga teorisi
$\tilde{u}$	Bilinmeyen yer değiştirmelerin vektörü
$u_1(u_2)$	Yer değiştirme vektörünün $Ox_1$ ( $Ox_2$ ) yönünde bileşenleri
$\alpha$	Uygulanan kuvvetin açısı
$\delta_{ij}$	Kronecker sembolü
$\delta(\bullet)$	Dirac-delta fonksiyonu
$\varepsilon_{ij}$	Zorlanma tensörünün bileşenleri
$\eta^{(r)}$	$r$ 'inci katmandaki başlangıç gerilme parametresi
$\lambda, \mu$	Lame sabitleri
$\rho^{(r)}$	$r$ 'inci katmanın yoğunluğu
$\sigma_{ij}$	Gerilme tensörünün bileşenleri
$\sigma_{11}^{(r),0}$	Katmanlardaki başlangıç gerilmesi
$\omega$	Dış kuvvetin frekansı
$\Omega^{(r)}$	Boyutsuz frekans



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 2.1. Bölge ve sınır .....	7
Şekil 2.2. Gerilme bileşenleri için notasyon .....	11
Şekil 2.3. Kutupsal koordinatlardaki gerilme bileşenleri.....	12
Şekil 2.4. $x, y$ ve $x', y'$ koordinat sistemleri.....	14
Şekil 2.5. Kare giriş enkesiti .....	17
Şekil 2.6. Benzer yapılı, simetrik olmayan bileşenlere sahip destek yapısı.....	18
Şekil 2.7. Tavana asılı çubuk .....	19
Şekil 2.8. Çubuğun sonsuz küçük (infinitesimal) parçası.....	21
Şekil 2.9. Doğru parçasının segmenti .....	22
Şekil 2.10. $P$ noktasındaki doğruların rotasyonu.....	24
Şekil 3.1. Elastik çok katmanlı yapı ve katmanların yükseklik şeması .....	29
Şekil 4.1. Çeşitli yükseklik oranları için $x_1 / h$ 'a göre $\sigma_{22}h / p_0$ dağılımı. ....	36
Şekil 4.2. Durum I'de çeşitli yükseklik oranları için $\sigma_{22}h / p_0$ ve $\eta$ arasındaki bağımlılık .....	37
Şekil 4.3. Durum II'de çeşitli yükseklik oranları için $\sigma_{22}h / p_0$ ve $\eta$ arasındaki bağımlılık .....	39
Şekil 4.4. Durum I'de çeşitli $\eta$ değerleri için $\sigma_{22}h / p_0$ ve $\Omega$ arasındaki bağımlılık .....	42
Şekil 4.5. Durum II'de çeşitli $\eta$ değerleri için $\sigma_{22}h / p_0$ ve $\Omega$ arasındaki bağımlılık .....	44

## TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 4.1. Malzemelerin Mekanik Sabitleri .....	<b>Sayfa</b> 35
---	--------------------



## 1. GİRİŞ

Elastik katı malzemeler mekanik ve termal yükler gibi dış kuvvet uygulandığında şekil değişikliğine uğramakta ve uygulanan kuvvet kaldırıldığında ilk şekline geri dönmektedir. Cisimlerdeki şekil değişiklikleri gerilme ve yer değiştirme bileşenleri cinsinden ele alınmaktadır. Dalga yayılımları, sonlu şekil değiştirme teorileri veya sürtünme teorisi gibi uygulamalı bilimler ve mühendislik alanlarının hemen hemen hepsinde bu konuyla ilgili problemlere rastlamak mümkündür. Buna bağlı olarak, pek çok araştırmacı “katılarda şekil değişiklikleri” konusuna yoğun ilgi göstermektedir.

Günümüzde başlangıç gerilmeleriyle ilgili incelenmiş birçok problem bulunmaktadır. Örneğin, Zamanov üç boyutlu sürekli ortam mekaniğinin denklemlerini ve kavisli yapılara sahip dikdörtgen kompozit plakanın zorlanmış titreşimlerine dayanan bir problemi modellemek için süreklilik teorisini ve süreklilik mekaniğinin üç boyutlu denklemlerini kullanmıştır. Bu problemi çözmek için Yarı Analitik Sonlu Elemanlar Yöntemini kullanmıştır [13]. Akbarov ve Özaydın ÖGODYÜT'nin bir uygulaması olarak ön gerilmeli tabakalı ortamların zamana göre harmonik gerilme dağılımını incelemişlerdir [14]. Akbarov ve Özaydın üst yüzeyine zamana göre harmonik noktasal bir kuvvet uygulanan başlangıç gerilmesine sahip bir yarım uzayı göz önünde bulundurarak Lamb problemi olarak adlandırılan ara yüzeydeki normal ve kesme gerilmelerin değişimini incelemişlerdir [15]. Nayak vd. Reddy'nin yüksek mertebe teorisine dayanan kompozit sandviç plakaların serbest titreşim analizini incelemişlerdir [16]. Guz başlangıç gerilmeli katılarda yayılan 3 boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalgalar teorisinde elde edilen sonuçları derlemişlerdir [17]. Emiroğlu vd. zamanla harmonik olarak değişen normal bir nokta kuvvetine maruz kalan bir tabaka ile kaplanmış yarım uzay için Lamb probleminin çözümünü bulmak için yeni bir yaklaşım geliştirmişler [18]. Güler ve Akbarov önceden gerilmiş bir tabaka ile kaplı yarım düzlem katmanın serbest yüzeyine uygulanan periyodik bir dinamik (harmonik) çizgisel yükün etkisini incelemişlerdir [19]. Zhuk ve Guz öngerilmeli nano kompozitlerde elastik dalgaların yayılmasını incelemek için katı mekaniğin uygulanıp uygulanmadığını araştırmışlardır [20]. Zhuk ve Guz bazı nano kompozitlerde tabakaların kalınlık oranları olduğu, dalga hızlarının başlangıç

gerilimlerinden bağımsız olduğu ve başlangıç gerilimi olmayan kompozitlerdeki ilgili dalga hızlarına eşit olduğu sonuçlarına ulaştılar [21]. Akbarov dalga yayılımı ve dinamik zaman-harmonik gerilim durumu problemleri üzerine yapılan araştırmaları ayrı ayrı incelemiştir [22]. Akbarov ve Güler zamana göre harmonik olan açılı kuvvetin tesiri altındaki ön gerilmeli tabakayla kaplı bir yarım uzaydaki gerilme alan problemini incelemiştir [23]. Pandit vd. yumuşak sıkıştırılabilir çekirdekli sandviç plakaların burkulma analizi için kübik zikzak teorisini geliştirmişlerdir [24]. Çilli ve Öztürk çok katmanlı bileşik silindirlere burulma dalgalarının yayılması için bir analiz sunmuşlardır [25]. Kepeçler iki maddeli birleşik silindir malzemelerin ara yüzlerindeki ön gerilme olmayan durumlarda ortaya çıkan problemler üzerine bir çalışma yapmışlardır [26]. Zamanov ve Agasiyev sonlu başlangıç şekil değişiklikleri olan sıkıştırılabilir malzemelerden yapılmış üç katmanlı bir plakada Lamb dalgalarının yayılma problemlerini incelemiştir [27]. Wen-tao vd. içi boş silindir malzemelerin radyal yüzeylerine uygulanan ilk basınçların etkisini incelemiştir [31]. İpek çift tabakalı içi boş dairesel silindirdeki bükülme dalgalarının dağılımını araştırmıştır [32]. Daşdemir tam olmayan temas koşullarının sandviç plaka şeridin parçalı homojen cisim modeli kapsamında frekans tepkisi üzerindeki etkisine yönelik matematiksel bir model geliştirmiş ve bu sayede sonlu elemanlar yöntemi (SEY) uygulamak suretiyle sayısal bir çözüm üretmiştir [34].

Katmanlı elastik sistemler dinamiğinde doğrusal olmayan etkilerle ilgili problemler, birçok parametreye bağlı olarak önemli ölçüde değişiklik göstermektedir. Söz konusu parametrelerden ikisi şunlardır: (a) incelenen cismin frekans tepkisi, (b) dış dinamik kuvvet uygulanmadan önce cismin katmanlarında var olan sabit başlangıç gerilmeleri. (a) da bahsedilen parametre, sistemin dinamik davranışının en belirleyici özelliklerinden biridir. Örneğin cisme uygulanan kuvvet nedeniyle meydana gelen titreşimler bazı özel durumlarda incelenen sistemin dağılmasına ya da parçalanmasına yol açabilir. Uygulanan kuvvetin bu sayısal değerlerine rezonans değerleri denilmektedir. (b) parametresinde sözü edilen cismin katmanlarında meydana gelen başlangıç gerilmeleri teknolojik koşullara veya ortam sıcaklığına bağlı olarak meydana gelebilir. Burada, başlangıç gerilmeleri doğrusal olmayan etki gösterdiğinden, çok katmanlı bir cismin dinamik davranışı üzerine onun etkisi klasik doğrusal elastodinamik teorisinin çalışma prensiplerine göre incelenemez. Buna karşılık, Ön

Gerilmeli Ortamlarda Dalga Yayılımının Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Teorisi-ÖGODYÜT (Three Dimensional Linearized Theory of Elastic Waves in Initially Stressed Bodies-TLTEWISB) kapsamında araştırmalar yapmak mümkündür. Ancak bu incelemeler iki temel varsayıma dayanmaktadır. Bu varsayımlar şu şekilde özetlenebilir:

- (i) Uygulanan ön gerilme kuvveti tamamen homojen ve statik özelliktedir;
- (ii) Ön gerilmeli cisme uygulanan ilave dinamik kuvvetin büyüklüğü, başlangıç gerilme kuvvetinden önemli ölçüde daha küçüktür.

Günümüzde bu konu kapsamında yazılmış birçok kitap vardır. Daha detaylı bilgi için [2,3,5,6,8,12]'deki temel eserler incelenebilir. Bu çalışmalarda başlangıç gerilmelerinin çok katmanlı sisteme etkisi hakkında geniş kapsamlı bilgiler sunulmaktadır. Günümüzde yukarıda bahsedilen problem parametrelerinin etkisinin özel olarak incelendiği birçok çalışma vardır. Dahası bu alanda incelenebilecek birçok problem mevcuttur. Akbarov vd. rijit zemin üzerinde oturan sonlu uzunluklu ön gerilmeli iki katmanlı plakadaki zamana göre harmonik gerilme alan problemini incelemişlerdir [28]. Akbarov vd. rijit zemin üzerinde oturan sonlu uzunluklu ön gerilmeli tek katmanlı şerit plakanın frekans tepkisini incelemişlerdir [29]. Eröz keyfi eğime sahip olan zamana göre harmonik dış kuvvetin etkisi altında olan ve rijit zemin üzerine oturmuş sonlu uzunluklu ön gerilmeli şerit plakanın davranışı üzerine başlangıç gerilmesinin etkisini incelemiştir [30]. Daşdemir ve Eröz [33]'te yapılan çalışmada sadece başlangıç gerilmesi kuvvetini sadece germe durumu için incelemişler; fakat basınç durumu için incelememişlerdir. Bu eksikliği gidermek için [35]'te Daşdemir aynı problemi başlangıç gerilmesinin basınç kuvveti olarak uygulandığı varsayımı altında incelemiş ve [33]'te elde edilen sayısal sonuçlarla karşılaştırmalı bir analiz sunmuştur.

Biz bu tez çalışmasında [36]'da Daşdemir tarafından sunulan ve [28-30,33,35]'te incelenen problemlerin en genel hali olan problemin daha detaylı bir analizini sunacağız. Bu çalışmaya kadar incelenen problemleri genelleştirmek için [36]'da Daşdemir elastik malzemelerden oluşan, rijit zemin üzerinde duran ön gerilmeli çok

katmanlı plaka-şeridinde zamana göre harmonik bir dış kuvvetin uygulanması nedeniyle oluşan titreşim problemini inceleyeceğiz. Daşdemir tarafından incelenen problemin matematiksel modeli ÖGODYÜT'nin temel prensiplerine göre parçalı homojen cisim modeli kapsamında oluşturulacak ve sonlu elemanlar yöntemi (SEY) kullanılarak incelenen problemin yaklaşık çözümü elde edilecektir. Problemin içerisinde bulunan bazı özel parametrelerin göz önüne alınan cismin frekans tepkisi üzerine etkisi incelenecektir. Özellikle de cismin başlangıç gerilmesi (basma ya da çekme) kuvvetinin cismin rezonans değerlerine olan etkisi incelenecektir. Bu çalışmada cismi oluşturan katmanlar arasında ve cisim ile rijit zemin arasında tam bağlı olma koşulunun olduğu varsayılmaktadır.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bu çalışmayı kapsayan konularla alakalı bazı temel bilgiler verilecektir.

### 2.1. Temel Bilgiler ve Formüller

Matematik ile mühendislik bilimleri arasındaki ilişkiler matematik modelleme ve bunların çözüm teknikleri aracılığıyla kurulur. Bu modeller için temel olarak fiziksel olayların uyumluluğu önemlidir. İncelenen fiziksel olaylar genellikle diferansiyel denklemlerden oluşan sınır değer problemleri veya integral problemleridir.

Bahsedilen problemleri çözmek için mevcut literatürde birçok çözüm tekniği vardır. Çözüm tekniklerinin en önemlilerinden biri hiç kuşkusuz ki varyasyonel analizdir. Bu metod; giriş verileri üzerine konulan süreklilik ve diferansiyellenebilirlik koşulları açısından diğerleri ile karşılaştırıldığında, daha geniş ve uygulamalar açısından daha önemli problemler sınıfına hitap eder. Fiziksel olayları ifade eden matematiksel denklemleri klasik yöntemlerle çözmek mümkün olmayabilir. Böyle durumlarda, nümerik metotlar kullanılmaktadır. Bu yaklaşık çözüm metotları aranılan çözümün bulunmasında alternatif yöntemler sunar.

Yukarıda bahsedilen yöntemlere örnek olarak Ritz, Galerkin, En Küçük Kareler metodu, Kollokasyon veya Sonlu Elemanlar Yöntemi verilebilir. Diferansiyel denklemlerle alakalı matematik modellerin ayrık benzeşiklerinin oluşturulması ve elde edilen ayrık problemin dijital ortamda çözümlenmesi açısından en geniş ve evrensel yöntem, sonlu elemanlar yöntemi (SEY)'dir. Bu yöntemin klasik sonlu farklar yönteminden en temel farkı, bunun sınır değer problemini değil, varyasyonel problemi temel almasıdır. Sonlu Elemanlar Yöntemi (Finite Element Method) ilk kez 1956 yılında uçak gövdelerinin gerilme analizi için geliştirilmiş olup, daha sonraki on yıl içerisinde uygulamalı bilimler ve mühendislik problemlerinin çözümünde de kullanılmaya başlanmıştır. Daha sonraki yıllarda da bu metod ve bu metodun çözüm teknikleri hızlı bir şekilde geliştirilmiş ve günümüzde birçok mühendislik probleminin çözümü için kullanılan en kullanışlı metotlardan birisi haline gelmiştir. SEY varyasyonel hesaba dayanan yaklaşık çözüm bulma metodudur. SEY yaklaşık

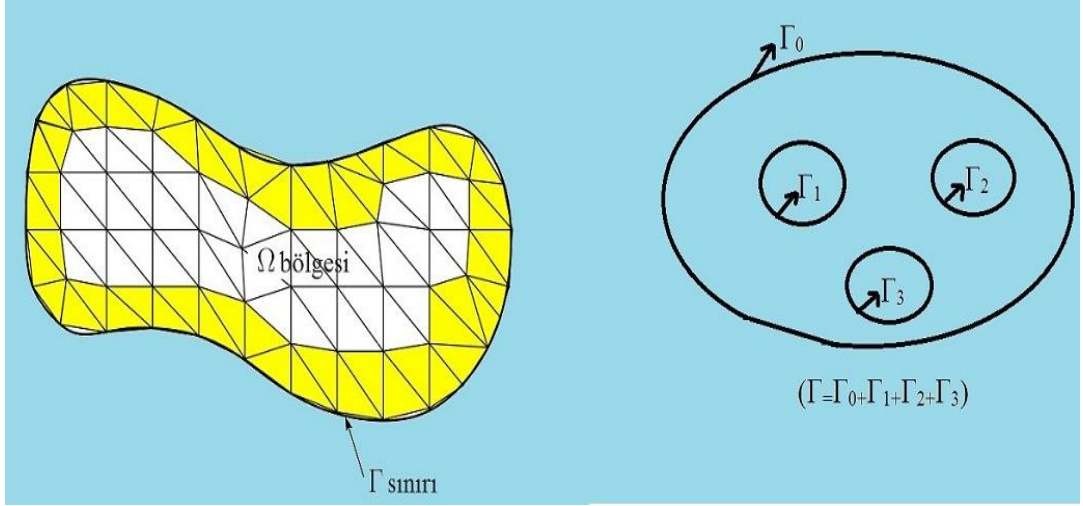
çözümlerin özel fonksiyonlar yardımıyla elde edilmesi için sistematik bir yöntem sağlar. Bu yönüyle varyasyonel metotlardaki en kullanışlı metot yaklaşık çözüm metodudur. SEY 1970'li yıllarda Farah ve arkadaşlarının yaptıkları araştırma ile başlamış, son 20 yıldır da implant, tedavi ve protez alanlarında da kullanılmıştır.

Sonlu elemanlar yöntemini diğer metotlara göre üstün kılan iki basit özellik vardır. Birincisi; sorunun karmaşık geometrik tanım bölgesini, basit alt bölgeler ile temsil edilmesini sağlamasıdır. İkincisi; sürekli herhangi fonksiyonun cebirsel polinomların lineer kombinasyonu biçiminde yazılabileceği gerçeği kullanılarak her bir sonlu eleman üzerinde yaklaşık çözüm fonksiyonunun elde edilmesidir. Böylece, sonlu elemanlar yöntemi varyasyonel metotların parçalı bir uygulaması olarak yorumlanabilir.

Sonlu elemanlar yöntemindeki temel mantık, karmaşık bir problemi basite indirgeyerek çözüme götürmektir. Bu yöntemde çözüm bölgesi, çok sayıda, basit, küçük, birbirine bağlı, sonlu eleman adı verilen alt bölgelere ayrılmaktadır. Bu alt bölgelerde sınırlar ortaktır. Kesişim yerleri sadece sınırdır. İç bölgelerin kesişimi ise boş kümedir. Alt bölgelerin birleşimi tüm bölgeyi verir. Kısacası birbirine çok sayıda düğüm noktalarıyla bağlanmış parçalara ayrılan problemin çözümü kolay bir şekilde yapılabilmektedir. [4,7,10,11]'de verilen temel kitaplar SEY ile ilgili kapsamlı bir inceleme sunmaktadır.

Çoğu analizin amacı belirli bir alan veya bölgede belirli bir diferansiyel denklem kümesini ve alan sınırında bazı sınır koşullarını sağlayan bağımlı değişkenler olarak adlandırılan bilinmeyen işlevleri belirlemektir. Bir etki bölgesi, uzaydaki noktaların bir toplamıdır ve özelliği  $P$ 'nin bölgenin bir noktası olması durumunda  $P$ 'ye yeterince yakın tüm noktalar bölgeye aittir. Bu tanımlama, bir alanın yalnızca içsel noktalardan oluştuğunu ifade eder. Bölgenin herhangi bir iki noktası, onun içinde kalacak şekilde bir çizgi ile birleştirilebiliyorsa, bu bölgeye dışbükey veya konveks denir. Herhangi bir bölgenin belirtilmesi için  $\Omega$  simgesi ve sınırını belirtmek için  $\Gamma$  simgesi kullanılır. Bu belirtilen simgeler Şekil 2.1'de görülebilir. Çok değişkenli bir fonksiyonun  $m$ . mertebe de içinde olmak üzere ilk  $m$  mertebeden kısmi türevleri varsa ve  $\Omega$  bölgesinde sürekli iseler bu çok değişkenli fonksiyona  $\Omega$  bölgesi üzerinde  $C^m$





Şekil 2.1. Bölge ve sınır

( $\Omega$ ) sınıfındadır denir. Böylelikle  $f$ , iki boyutta  $C^0$  sınıfında ise sadece  $f$  süreklidir. Bazı durumlarda  $\partial f / \partial x$  ve  $\partial f / \partial y$  kısmi türevleri olabilir ama sürekli olmayabilir.

Bir diferansiyel denklemde şayet bağımlı değişken ve onun bağımsız değişkenlere göre olası türevleri sınırda özel değerler alıyorsa bu tür denklemlere sınır değer problemi denir. Benzer durumda bağımlı değişken ve onun olası türevleri başlangıçta (örneğin  $t=0$  zamanında) ifade ediliyorsa bu tür problemlere de başlangıç değer problemi denir.

Kısmi integrasyon formülü sıklıkla diferansiyel denklemlerin integral formülasyonunda kullanılır. Bu formül bir boyutlu denklemler için kolaylıkla uygulanabilir. Fakat iki boyutlu durumda kısmi integrasyon formülü gradiyent, Stokes ve diverjans teoremleri vasıtasıyla uygulamaya koyulur.  $u$ ,  $v$  ve  $w$  fonksiyonları  $x$  koordinatına göre yeterince türevlenebilen fonksiyonlar olsun. O zaman kısmi integrasyon formülü diye adlandırılan aşağıdaki denklem bir boyutlu denklemler için ortaya çıkar [11]:

$$\int_a^b w \frac{dv}{dx} dx = - \int_a^b v dw + [vw]_a^b = - \int_a^b v dw + v(b)w(b) - v(a)w(a) \quad (2.1)$$

## 2.2. Sınır Değer Problemlerinin Zayıf Formülasyonu

Sınır değer problemlerinin integral formülasyonları için Ritz, Galerkin, en küçük kareler, kollokasyon veya ağırlıklı kalan metotları gibi varyasyonel yaklaşım metotları temel alınır. Sonlu elemanlar yöntemi, herhangi bir varyasyonel yöntemin eleman-bazlı bir uygulamasında gerekli olan yaklaşık fonksiyonlarını oluşturmak için kullanılan bir teknik olduğundan, ağırlıklı-integral formülasyonu ve diferansiyel denklemlerin zayıf formülasyonunu bilmek gereklidir. İlâveten, zayıf formülasyonlar, doğal olarak, sınır koşullarının doğal ve temel sınır koşullarına sınıflandırılmasını da kolaylaştırır, bu da yaklaşık fonksiyonlarının türevlenmesinde ve sonlu eleman modelinin düğüm serbestlik derecelerinin seçiminde çok önemli bir rol oynar. Birincil hedefimiz verilen diferansiyel denklemin zayıf formunu oluşturmak ve denklemlerle ilişkili sınır koşullarını sınıflandırmak olacaktır. Zayıf form, türevin bağımlı değişken ve ağırlık fonksiyonu arasında dağıtıldığı ve problemin doğal sınır koşullarını içerdiği diferansiyel denklemin ağırlıklı-integral bir ifadesidir.

Diferansiyel denklem problemi:

$$0 < x < L \text{ için } -\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{du}{dx}\right] = q(x) \quad (2.2)$$

Sınır koşullarına bağlı olarak  $u(x)$  çözümü için,

$$u(0) = u_0, \left(a \frac{du}{dx}\right) \Big|_{x=L} = Q_0 \quad (2.3)$$

Burada  $a$  ve  $q$ ,  $x$  koordinatının bilinen fonksiyonlarıdır,  $u_0$  ve  $Q_0$  bilinen değerlerdir ve  $L$  bir boyutlu alanın uzunluğudur. Alanın uzunluğu  $L$  ile birlikte  $a$  ve  $q$  fonksiyonları,  $u_0$  ve  $Q_0$  sabitleri problemin verisidir. Çözüm  $u$ , problemin bağımlı değişkenidir. Belirtilen değerler sıfırdan farklı olduğunda ( $u_0 \neq 0$  veya  $Q_0 \neq 0$ ), sınır koşullarının homojen olmadığı söylenir; belirtilen değerler sıfır olduğunda, sınır koşullarının homojen olduğu söylenir. Sınır koşulu  $(u(0) = u_0)$ 'ın homojen formu  $u(0) = 0$ 'dır ve sınır koşulu  $(a \frac{du}{dx}) \Big|_{x=L} = Q_0$ 'ın homojen formu  $(a \frac{du}{dx}) \Big|_{x=L} = 0$ 'dır. Denklemi somutlaştırırsak  $q$  ısı üretim terimini,  $u_0$  belirtilen

sıcaklıktır ve  $Q_0$  belirtilen ısıyı ifade eder. Diğer fiziksel problemler de aynı denklem ile tanımlanır, ancak değişkenler için farklı anlamları vardır. Şayet varsa, zayıf formun gelişmesinde, herhangi bir diferansiyel denklemin üç adımı vardır.

Birinci adımda diferansiyel denklemin tüm ifadeleri bir tarafa toplanır, elde edilen tüm denklemi  $w$  ile gösterilen ve ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılan bir fonksiyon ile çarpılır ve bir  $\Omega$  bölgesi üzerinde integrali alınır. Bu son ifadeyi, ağırlıklı-integral ya da ağırlıklı kalan olarak adlandıracağız.  $w$  ağırlık fonksiyonu sıfırdan farklı herhangi integrallenebilir bir fonksiyon olarak seçilebilir.

İkinci adımda belirlenmesi gereken  $u$  fonksiyonu yerine

$$u \approx U = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (2.4)$$

şeklinde  $U$  yaklaşık çözümünün var olduğu kabul edilir. Daha sonra integral ifadesinde yerine yazılır ve kısmi integrasyon formülü kullanılarak  $U$  fonksiyonunda ki türevlerin bir kısmı  $w$  ağırlık fonksiyonuna aktarılır. Bu sayede, bağımlı değişkenin daha zayıf (yani daha az) sürekliliğine ihtiyaç duyulur ve genellikle katsayılarda simetrik bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Zayıf formülasyonun üçüncü ve son adımı, söz konusu problemin mevcut sınır koşullarını kısmi integrasyondan sonra elde edilen ifadeye uygulanmasıdır [11].

### 2.3. Elastisite Teorisi

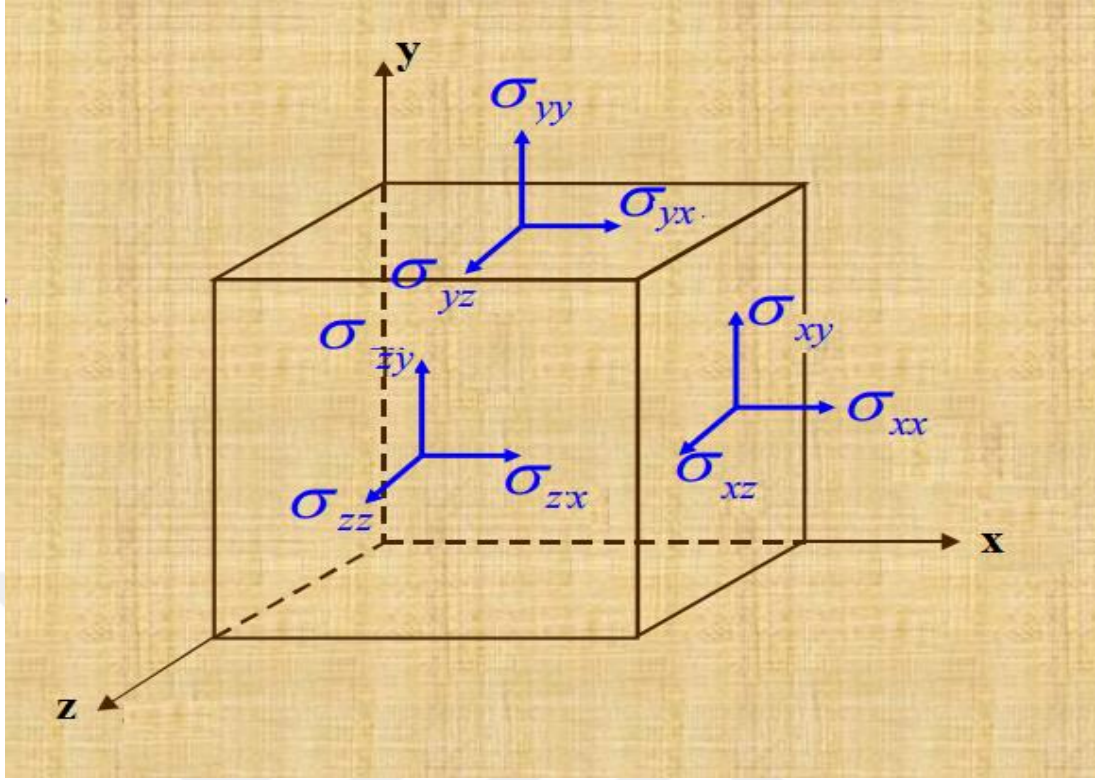
Elastisite konusu, uygulanan mekanik veya termal yüklerin bir sonucu olarak cisimdeki gerilmelerin ve yer değiştirme durumlarının belirlenmesi ile ilgilidir. Burada cismin yüklerin ya da kuvvetlerin kaldırılmasıyla orijinal haline geri döneceği unutulmamalıdır. Bu çalışmada, gerilmelerin ve yer değiştirmelerin uygulanan yükler ile doğrusal olarak orantılı olduğu ve yer değiştirmelerin cismin karakteristik uzunluk ölçülerine göre daha küçük olduğu doğrusal sonsuz esneklik durumu göz önüne alınacaktır. Bu kısıtlamalar, doğrusal süper pozisyonun kullanılabilmesini ve doğrusal olmayan problemler için mevcut olmayan dönüşüm teknikleri ve birçok seriler dizisi

oluşturabilmemizi sağlamaktadır. Pek çok mühendis ilk olarak, çoğu lisans mühendislik müfredatının önemli bir bileşeni olan Malzemeler Mekaniği olarak bilinen ders kapsamında bu tür problemlerle karşılaşmaktadır. Malzemeler Mekaniği, analizler sırasında şekil değiştirme süreciyle ilgili çeşitli makul ama doğrulanmamış varsayımlar olması bakımından Elastisiteden farklılık göstermektedir. Tipik bir örnek olarak, kesit düzlemlerinin ince bir kirişin eğilmesinde düzlemde kaldığı varsayımı gösterilebilir. Elastisite böyle varsayımlarda bulunmaz, ancak Newton'un hareket yasaları, Öklid geometrisi ve Hooke yasalarının ilk prensiplerinden faydalanarak doğrudan ve titiz bir şekilde çözüm geliştirmeye çalışır. Yaklaşımlar genellikle çözümün sonuna doğru sunulur; ancak bunlar, izin verilen deformasyon alanında yapay ve kesinlikle gereksiz kısıtlamalar getiren fiziksel yaklaşımlardan ziyade, hareket denklemlerinin çözümlerini elde etmek için kullanılan matematiksel yaklaşımlardır. Fakat her iki uygulayıcının diğerinden öğrenecekleri çok şey olduğu için, iki yaklaşım arasında bir ayırım yapmak çok yanlış olur. Öte yandan, Elastisitenin matematiksel karşılığı sonuçlara göre bize daha fazla güven verir, çünkü yaklaşık bir çözüme başvurmak zorunda kalsak bile, genellikle Malzemeler Mekaniğinde kullanılan fiziksel yaklaşımlar ile yapılması çok zor olan bazı şeylerin doğruluğunu tahmin edebiliriz [9].

### 2.3.1. Gerilme

Gerilme bileşenleri, tümüyle uygun yeterliliğe sahip  $\sigma$  sembolü ile gösterilecektir. İlk indis hareketin etki ettiği yüzeyin normal vektörünün yönünü ve ikinci indis ise gerilme bileşeninin yönünü ifade eder. Bu notasyon, kartezyen koordinat sistemi  $Oxyz$  için Şekil 2.2'de gösterilmiştir.

Bu gösterimin bir sonucu olarak normal (yani, çekme ve basma) gerilmelerin her ikisinin de aynı indislere (yani Şekil 2.2 de  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ) sahip olduğu ve gerilme sırasında pozitif olduğuna dikkat edilmelidir. Şekil 2.2' deki (yani  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zy}$ ,  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{xz}$ ) geriye kalan altı gerilme bileşeni, iki farklı indise sahiptir ve bunlar kesme gerilmeleridir. Malzemelerin Mekaniği ile ilgili kitaplarda normal gerilme için  $\sigma$  simgesi tercih edilirken, kesme gerilmesi için farklı bir sembol

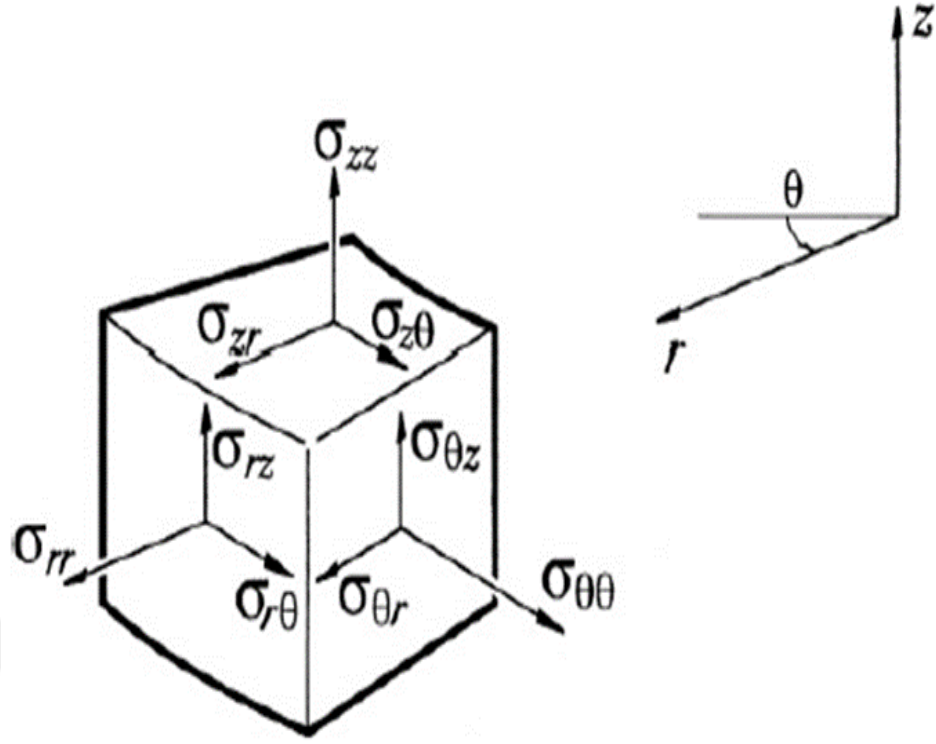


Şekil 2.2. Gerilme bileşenleri için notasyon

kullanır. Ancak indisler; normal gerilme bileşenlerinden kesme gerilme bileşenlerini ayırmamızı sağladığından, farklı bir sembol kullanmaya gerek yoktur. Bununla birlikte uygun indislere sahip tek bir sembolün kullanımının; birçok türetme içerisinde matris yöntemlerinin kullanılmasını sağlayacağını, ayrıca genel sonuçlar kapsamında notasyon içerisinde hatırı sayılır derecede bir tasarruf yansıtacağı hususuna ulaşırız. Şekil 2.2'deki bloğu etkileyen momentler dengesi şunu gerektirir:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \text{ ve } \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \quad (2.5)$$

Üç boyutlu problemlerde her yüzey üzerinde iki kesme gerilme bileşeni ve bir normal gerilme bileşeni mevcut olduğu unutulmamalıdır. Belirli bir düzlem üzerindeki iki kesme gerilmesinin yine düzlem üzerindeki iki boyutlu vektör ile birleştirilmesinin uygun olduğu birtakım durumlar vardır. Düzlem üzerinde elde edilen kesme gerilmesine bakmak buna örnek olarak gösterilebilmektedir. Bu durumun faydalı olabileceği bir başlangıç aşaması durumu olarak, enine kesme kuvvetinden dolayı kiriş enkesiti üzerinde kesme gerilmesinin dağılımını belirlemede yaşanan Malzemelerin



Şekil 2.3. Kutupsal koordinatlardaki gerilme bileşenleri

Mekanik Davranışları sorunu gösterilebilir. Bu durum dahilinde, düzlem üzerinde elde edilen kesme gerilmesinin; eşik noktaya göre normal olan bileşen için tamamlayıcı kesme gerilmesinin, kirişin çekme gücü olmayan bir yüzeyi etkilemesinden ve bu doğrultuda “sıfır” olarak alınması gerektiğinden, enkesit sınırındaki eşik noktaya teğet geçmesi gerektiğini fark ediyoruz. Tabi ki bu da ince duvarlı bir kesit içerisinde bulunan kesme gerilmesinin, duvar yönünü takip etmeye neden meyilli olduğunu göstermektedir. Bir düzlemin normali  $x$  yönünde olduğunda, bu düzleme  $x$  düzlemi diyeceğiz.  $x$  düzlemi üzerinde sadece ilk alt indisi  $x$  olan gerilme ögeleri mevcuttur. Bu kısımda; sınırların, koordinat eksenlerine paralel olduğu problemler içerisinde, sınır koşullarını doğru şekilde tanımlamak adına faydalı bir formalizm önermektedir. İlk olarak, katı cismin sınırlarını tanımlayan denklemleri tanımlarız, ardından her sınır üzerinde etkisi olarak üç çekiş bileşenini yazarız. Örnek olarak,  $0 < x < a$  ,  $0 < y < b$  ,  $0 < z < c$  eşitsizlikleri üzerinden tanımlanmış dikdörtgen şeklinde bir katı cisminin olduğunu varsayalım.  $y = b$  yüzeyinin *pozitif y-düzlemi* olduğu açıktır, uygun düşen çekme sınır koşullarının, şu gerilme bileşenlerini içereceği sonucuna varırız: “ $\sigma_{yx}$  ,  $\sigma_{yy}$  ,  $\sigma_{yz}$ ” – yani, ilk indis olarak “

$y$  ” barındıran üç bileşen. Bu işlem,  $y = b$  dahilinde çekme olmaması durumunda,  $\sigma_{xx}$  , bileşeninin sıfır olması gerektiğini düşünenlerin bu hataya düşmesini engeller. (Not: Bu hatanın yapılamayacak kadar bariz olduğunu düşünmeyin, problem geometrik açıdan ya da cebirsel olarak çok karmaşık olduğunda, dikkatinizin dağılması kolaylaşır).

Gerilme bileşenleri, diğer ortogonal koordinat sistemleri ile aynı şekilde tanımlanabilir. Örneğin, Şekil 2.3 içerisinde silindirik kutupsal koordinatlar sisteminin bileşenleri gösterilmektedir ( $r, \theta, z$ ).

(Bu;  $\theta = C$  denklemi üzerinden  $\theta$ -düzlemi tanımının, “ $\theta$ -yönüne normal düzlem” ile kıyaslandığında daha kolay olduğu durumdur. Ancak  $\theta$ -yönünün;  $r-z$  sabiti ile  $\theta$  ’ın artırılması durumunda parçanın hareket edeceği yön olduğunu unutmayalım) [9].

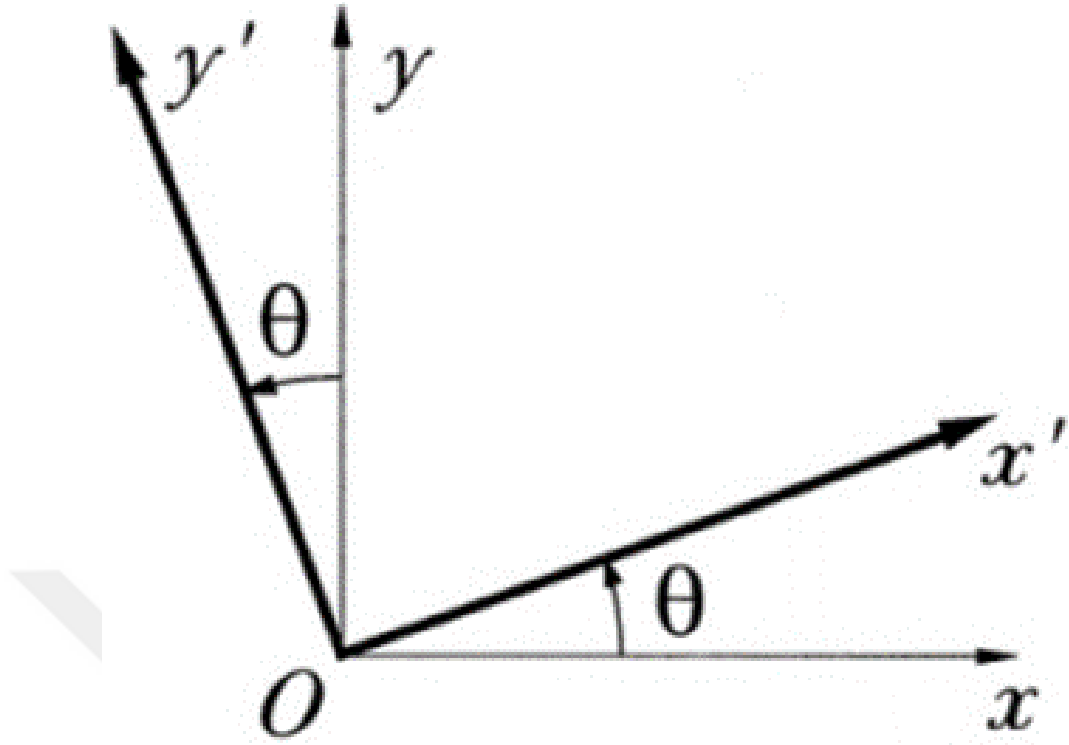
### 2.3.2. İndis ve Vektör Notasyonu

Birçok kaynakta kartezyen koordinat sistemi için  $x, y, z$  yerine  $x_1, x_2, x_3$  notasyonunu kullanır. Bu durumda gerilme bileşenleri  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  , vb. şeklinde yazılır ( $\sigma_{x_1x_1}, \sigma_{x_2x_2}$  kullanımı kesinlikle kullanışsız olacaktır). Bu notasyon, “toplama yöntemi” ile birleşik olarak özel bir avantaja sahiptir; genel sonuçların kısa ve düzgün bir şekilde kullanılmasını sağlar. Toplama yöntemi, aynı Latince kökenli indisinin iki kere kullanıldığı herhangi bir tabir içerisinde, bu indise muhtemel değerlerinin her birini vererek alınan terimlerin tamamını temsil eder.

Örneğin  $\sigma_{ii}$  , aşağıdaki şekillerde yorumlanır:

$$\sigma_{ii} \equiv \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (2.7)$$



Şekil 2.4.  $x , y$  ve  $x' , y'$  koordinat sistemleri

Diğer yandan bazı sonuçlar, vektör notasyonu içerisinde daha düzgün şekilde kullanılır, zira bunun için de pozisyon vektörünü aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$\mathbf{R} = ix + jy + kz \quad (2.8)$$

Burada sırasıyla;  $i , j , k$  birim vektörleri  $x , y , z$  yönlerindedir.

Vektörler; matematiksel anlamda sıralı sayı kümeleri ya da fiziki anlamda büyüklük ve yön üzerinden karakterize edilen miktarların matematiksel temsili olarak tanımlanabilir. Dönüşüm kuralları üzerinden bu kavramlar arasında bir bağlantı kurulmuştur. Farz edelim ki belirli bir iki boyutlu kartezyen koordinat sistemi  $(x , y)$  içerisinde  $u$  vektörü bileşenlerini  $(u_x , u_y)$  biliyoruz ve Şekil 1.3'te gösterildiği üzere saat yönünün tersi yönünde  $\theta$  açısına meyilli  $(x , y)$  yeni bir sistem  $(x' , y')$  içerisinde bileşenleri  $(u'_x , u'_y)$  belirlemek istiyoruz. Bunun için gerekli bileşenler:

$$u'_x = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \quad (2.9)$$



$$u'_y = u_y \cos \theta + u_x \sin \theta \quad (2.10)$$

Vektörü; (2.9)-(2.10) denklemleri gibi kurallar uyarınca diğer koordinat sistemlerine dönüşen belirli bir Kartezyen koordinat sistemi içerisindeki bileşenlerce tanımlanmış bir varlık olarak tanımlayabiliriz. Yani, dönüşüm (2.9)-(2.10) kurallarına bağlı hareket eden sıralı sayı kümeleridir. Büyüklük ve yön düşüncesi, (i)  $u'_y = 0$  ve (ii)  $u'_x > 0$  olacak şekilde her zaman  $\theta$ 'ı seçebileceğimiz hatırlayarak açıklığa kavuşturulabilir. Uygun düşen yön olarak  $x'$ , sonrasında ortaya çıkan vektörün yönü iken, bileşen  $u'_x$  ise bunun büyüklüğü olur.

(2.5) denkleminde, indis sırasının etkisiz olduğunu görmemize rağmen, şu anda gerilimler, ilgili iki koordinat yönünün muhtemel tüm kombinasyonları ile bağlantılı bileşenleri ve iki indisi barındırmaktadır. ( $\sigma_{ij}$  gerilim bileşenleri matrisinin her daim simetrik olduğunun bunu belirtmenin bir diğer yoludur). Gerilme bileşenleri; iki boyutlu durumda Mohr dairesi ile bağlantılı olan daha karmaşık dönüşüm kuralları gerekliliklerini karşılar. Yani;

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2.11)$$

$$\sigma_{x'y'} = \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta \quad (2.12)$$

$$\sigma_{y'y'} = \sigma_{yy} \cos^2 \theta + \sigma_{xx} \sin^2 \theta - 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2.13)$$

Vektörlerde olduğu gibi, (2.11)-(2.13) kapsamında belirtilen kurallara benzer doğrultuda, belirli bir Kartezyen koordinat sistemi içerisinde bileşenler matrisine sahip olan ve diğer benzer koordinat sistemlerine dönüşen matematiksel bir varlığı tanımlayabiliriz. Bu nicelikler “ikinci derece Kartezyen tensörleri” olarak adlandırılır. Mohr dairesinden bildiğimiz üzere,  $\theta$ 'ı her daim,  $\sigma_{x'y'} = 0$  gibi bir doğrultuda seçebiliriz ki bu durumda  $x'$ ,  $y'$  yönleri esas yöneltiler olarak,  $\sigma_{x'x'}$ ,  $\sigma_{y'y'}$  bileşenleri ise esas gerilmeler şeklinde alınabilir. Buna bağlı olarak, ikinci derece Kartezyen sensörünü karakterize etmenin bir diğer yolu da orthogonal esas yöneltiler veya uygun düşen esas değerler dizini üzerinden tanımlanmış nicelik kapsamında olur.

Vektörlerde olduğu gibi, sergilediği fiziki niceliklerden matematiksel özelliklerin soyutlanması adına pragmatik bir motivasyon olarak, birçok farklı fiziki niceliklerin doğal olarak ikinci derece kartezyen tensörleri şeklinde temsil edilmesidir. Gerilme ve zorlanmanın yanı sıra, genel anlamda karşımıza çıkan örneklerden bazıları şu şekildedir: kiriş enkesit alanının ikinci momentleri ( $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$ ,  $I_{yy}$ ) skalar fonksiyonunun ikinci kısmi türevleri ( $\partial^2 f / \partial^2 x^2$ ;  $\partial^2 f / \partial x \partial y$ ;  $\partial^2 f / \partial y^2$ ) ve doğrusal bir elastik sistem için  $F$  kuvvetinden dolayı  $u$  yer değişimini tanımlayan etki katsayı matrisi  $C_{ij}$ , yani:

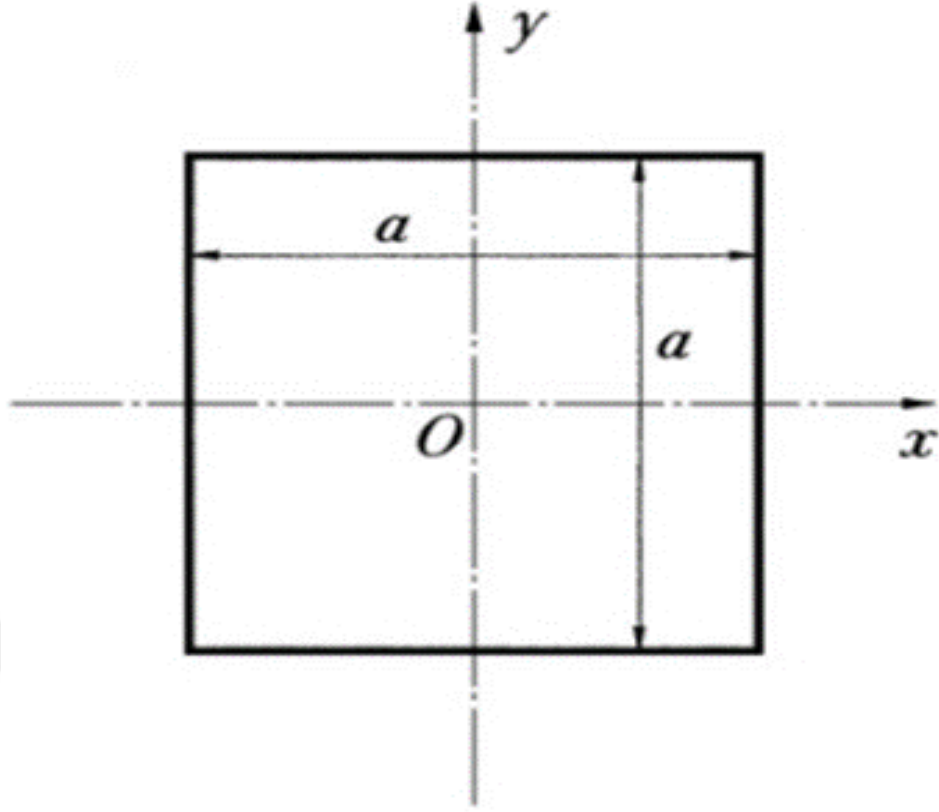
$$u_i = C_{ij} F_j \quad (2.14)$$

burada toplama yöntemi uygulanmıştır.

Bu niceliklerin her birinin (2.11 – 2.13) dönüşüm kurallarına uyduğunun kanıtlanması, oldukça açık bir şekilde yapılabilir. Örneğin, her iki kiriş enkesitinin; iki esas ikinci momentin sırasıyla enkesit için maksimum ve minimum değere sahip olduğu noktada, iki ortogonal esas bükülme eksenini barındırdığı kuralını doğrudan doğruya takip eder.

Mohr dairesinin belli bir noktaya kadar ayrı tutulması ise ilgili olabilecek özel bir tensördür. Gerilmeler kapsamında bu; hareketsiz bir sıvının kesme gerilmesini paylaşamamasından (sıvının; hız değişimini kesme gerilmesine bağladığına dair temel yasa) ve buna bağlı olarak da tüm  $\theta$  'lar için  $\sigma_{x'y'} = 0$  olmasından dolayı, hidrostatik gerilme durumuna uygun hale gelir. Bu koşulu karşılayan tek Mohr dairesi sıfır yarıçaplı olandır, bundan da direkt olarak tüm yönlerin, esas yönler olduğunu ve esas değerlerin tümünün eşit olduğunu anlıyoruz. Sıvı ile ilgili olarak, hareketsiz sıvı içerisindeki basıncın tüm yönlerde eşit olduğuna dair iyi bilinen sonuca varıyoruz.

Bu sonucu, tensörleri içeren diğer sistemler bağlamında ele almak yol gösterici bir yöntemdir. Örnek olarak, Şekil 2.5'te gösterilen kar enkesiti alanının ikinci momentlerini ele alalım. Simetrik açıdan  $O_x$ ,  $O_y$  'nin esas yönler olduğunu ve iki esas ikinci momentin de  $a^4 / 12$  'ye eşit olduğunu biliyoruz. Bunun takibinde ise, Mohr dairesinin sıfır-yarıçapa sahip olduğunu ve buna bağlı olarak da diğer eksenlerdeki

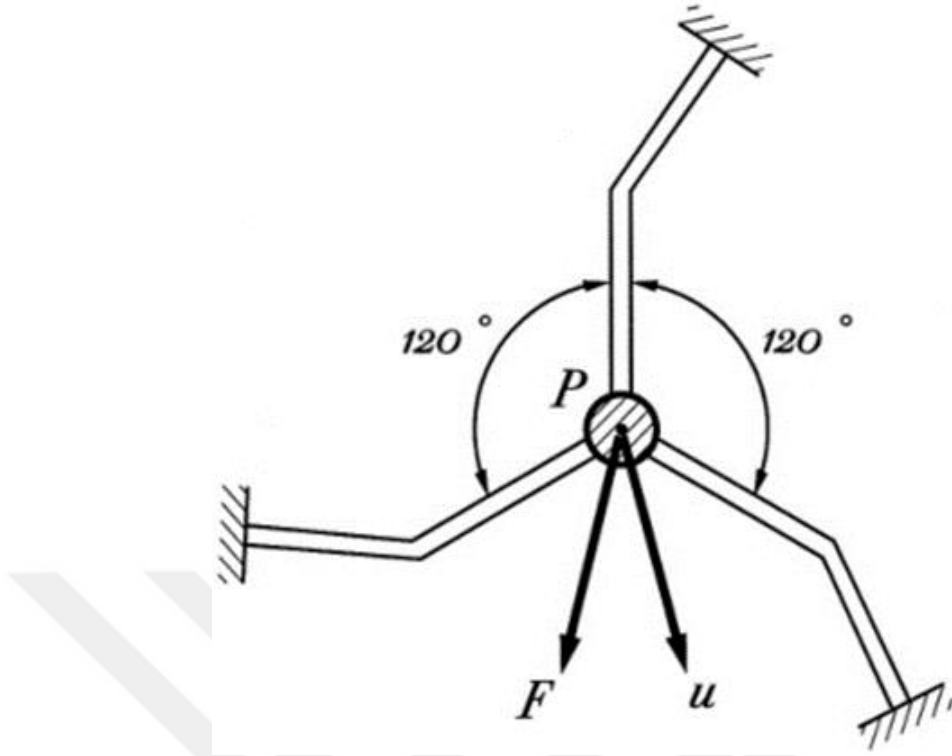


Şekil 2.5. Kare kiriş enkesiti

ikinci momentin  $a^4/12$  olması gerektiğini anlıyoruz. Yani, kesitin incelenmesi ile anlaşılamayan bir sonuç.

İkinci bir örnek vermek gerekirse, Şekil 2.6'da yapıların birbirine  $120^0$  açıyla eğimli olduğu,  $P$  noktasını rijit desteğe bağlayan üç adet aynı fakat keyfi yapılardan oluşan elastik bir sistem gösterilmektedir.

Yapıların her biri, denklem (2.14) içerisinde olduğu gibi etki fonksiyon matrisi şeklinde açıklanabilir elastik özelliklere sahiptir ve genel anlamda yer değişimi  $u$ , kuvvet  $F$  ile eş doğrusal değildir. Ancak, sistem için tüm etki fonksiyon matrisi, her biri birbirine  $120^0$  açıyla eğimli olan üç farklı koordinat sistemi içerisinde aynı özelliklere haizdir, çünkü  $120^0$  üzerinden ilgili yapının rotasyonu, sistem üzerinde herhangi bir değişikliğe yol açmaz.  $120^0$ 'lik rotasyon ardından birbirine eşit bileşenler sağlayan tek Mohr dairesi, sıfır yarıçapa sahip olan dairedir. Bu yüzden de, Şekil 2.6'daki destek sistemi için şu sonuçlara varabiliriz:



Şekil 2.6. Benzer yapılı, simetrik olmayan bileşenlere sahip destek yapısı

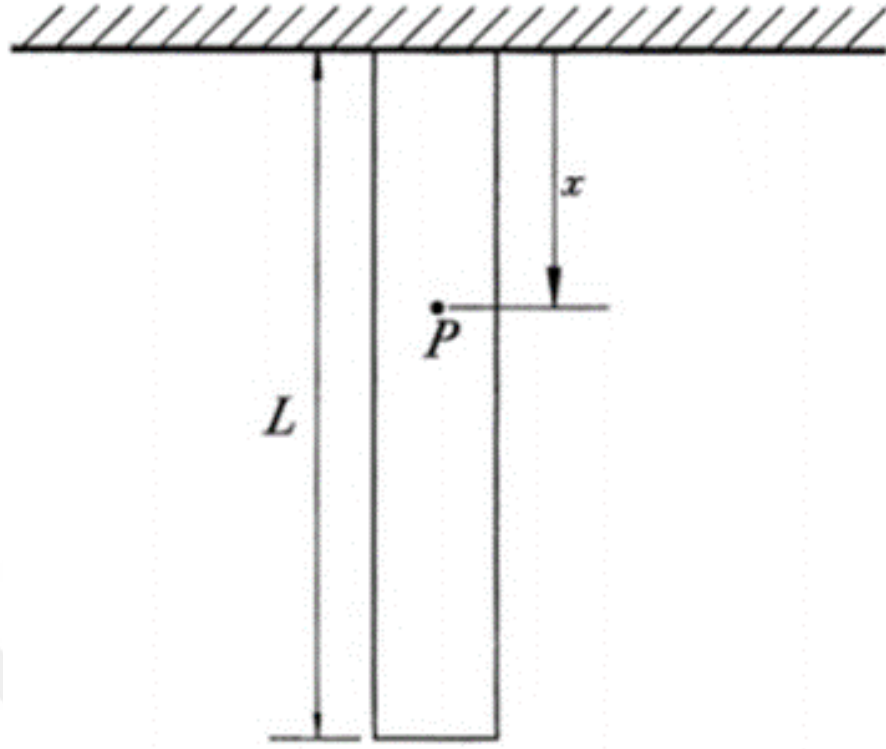
- (i)  $P$  yer değişimi her daim kuvvet  $F$  ile aynı yönde olur.
- (ii) Sistemin rijitliği veya uygunluğu her yönde aynıdır.

Bu iki örnek, ortak bir matematiksel yapı paylaşan farklı yapıdaki fiziki bir problemin, inceleme altında olan problem ile birlikte göz önünde bulundurulmasının, kimi zaman avantaj sağlanabileceğini göstermektedir.

$P$  parçasının yer değişimi,  $P$ 'nin son ve ilk pozisyon arasındaki farkı temsil eden  $u$  vektörüdür; yani, deformasyon sürecinde  $P$ 'nin kat ettiği mesafedir.  $u$  bileşenleri, uygun indisler ile belirtilir:  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ; bu da demek oluyor ki:

$$\mathbf{u} = iu_x + ju_y + ku_z \quad (2.15)$$

Bir cismin deformasyonu, her parçanın yer değişimini bulmamız durumunda eksiksiz bir şekilde tanımlanabilir. Ancak, deformasyon kapsamında dahil olmayan yer değişimlerin olduğu bir sınıf olduğunu unutmamalıyız (rijit cisim yer değişimleri). Tipik bir durum olarak, cismin tüm parçalarının aynı yer değiştirme sürecinden geçmesi



Şekil 2.7. Tavana asılı çubuk

gösterilebilir. Bu isim de tabii ki, rijit cisim yer değişiminin rijit cisim tarafından deneyimlenebilecek tek yer değişim sınıfı olmasından gelmektedir [9].

### 2.3.3. Gerilmeler ve Bunların Yer Değişirmeler ile Olan İlişkisi

Gerilme bileşenleri, genel olarak uygun indisler ile birlikte (örnek:  $e_{xx}$ ,  $e_{xy}$ )  $e$  sembolü kullanılarak belirtilmektedir. Gerilim durumunda olduğu gibi, kesme gerilmesinde de özel bir sembole ihtiyaç duyulmaz, ancak bazı çalışmalarda bu ifadeler  $\gamma$  ile 2 alt indis yardımıyla kullanılmaktadır. Bu tanımın en önemli avantajı ise, kartezyen koordinatlar cinsinden  $e$  zorlanma ifadelerinin temsil edilebilmesidir. Bunu, (2.11)-(2.13)'deki denklemlere benzer olarak zorlanma ögeleri için dönüşüm kurallarını oluşturarak göstereceğiz.

Zorlanma kavramı genel olarak cisimde meydana gelen genişlemenin orijinal uzunluğa olan oranı olarak tanımlanmakta olup, katılar mekaniğinin matematik işlemleri kapsamında kullanılmaktadır. Burada, unutulmamalıdır ki bu tanım

birçok mekanik probleminde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Ancak bu tanımdan tamamıyla farklı olan başka tanımlarda vardır.

Şekil 2.7’de,  $L$  ile gösterilen orijinal uzunluğa ve  $p$  ile gösterilen yoğunluğa sahip tavandan asılı bir çubuk gösterilmektedir. Kendi ağırlığının yükü altında uzunluğunun ne kadar arttığının bize sorulduğunu düşünelim.

Tavandan gelecek şekilde,  $x$  mesafesinde ve  $P$  noktasında  $\sigma_{xx}$  çekme gerilmesinin aşağıdaki şekilde olduğu kolaylıkla gösterilebilir:

$$\sigma_{xx} = pg(L - x) \quad (2.16)$$

Burada  $g$ , yer çekiminden dolayı ivmelenme olup, Hooke yasası uyarınca

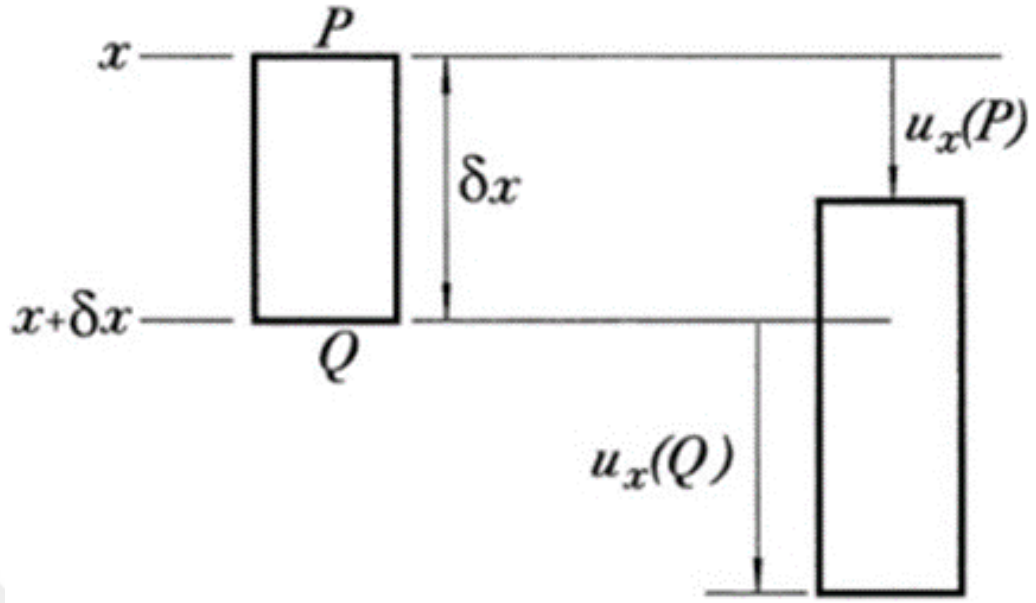
$$e_{xx} = \frac{pg(L - x)}{E} \quad (2.17)$$

yazılabilir. Hatırlanacağı üzere Hooke yasası “*Bir cismin herhangi bir noktasında altı gerilme ögesinin her biri bu noktadaki altı zorlanma ögesinin lineer bir fonksiyonudur*” şeklindedir. Ancak zorlanma, çubuğun uzunluğu boyunca sürekli olarak değişir. Bu yüzden zorlanmanın yüksek oranda sabit olacağı varsayımına hemen hemen sağlayan çubuğun çok küçük bir parçasını incelersek Malzemeler Mekaniğinin tanımını uygulayabiliriz.

$x$ ’e bağlı olan  $u_x$  aşağı yönde yer değişimi cinsinden deformasyon tanımlanır ve Şekil 2.8’de  $PQ$  olarak gösterilmiş olan  $x$  ve  $x + \delta x$  arasındaki çubuğun parçasını göz önüne alalım. Deformasyonun ardından  $PQ$ ,  $u_x(Q) - u_x(P)$  şeklinde genişletilmiştir; böylece “Malzemeler Mekaniği” çekme zorlanmasının lokal değeri şu şekildedir:

$$e_{xx} = \frac{u_x(Q) - u_x(P)}{\delta x} = \frac{u_x(x + \delta x) - u_x(x)}{\delta x} \quad (2.18)$$

$\delta x \rightarrow 0$  şeklinde limit göz önüne alınırsa, aşağıdaki tanıma ulaşırız:



Şekil 2.8. Çubuğun sonsuz küçük (infinitesimal) parçası

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.19)$$

Diğer normal zorlanma bileşenleri için üç boyutlu problemlerde ilgili tanımlar geliştirilebilir; örneğin:

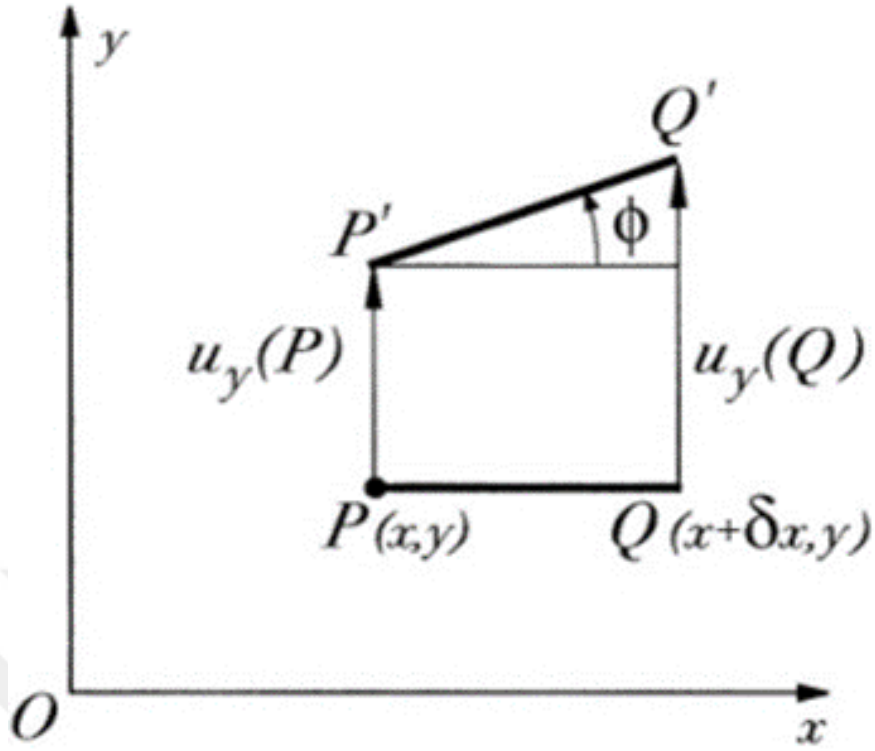
$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} ; e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir. Bu tanımları kullandığımızda Şekil 2.7'deki problemin ne kadar kolay bir hale dönüştüğünü görülebilir. Buna bağlı olarak da ardından şu sonuca ulaşabiliriz:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{pg(L-x)}{E} \quad (2.21)$$

(2.17)-(2.19)'da ki denklemlerden şu sonuca ulaşırız:

$$u_x = \frac{pg(2Lx - x^2)}{2E} + A \quad (2.22)$$



Şekil 2.9. Doğru parçasının segmenti

Burada  $A$  ; bize gerilme bilgilerini sunan keyfi bir integrasyon sabitidir. Aslında  $A$  , keyfi bir rijit-cisim yer değişimini temsil eder. Bu durumda, çubuğun üst kısmının rijit tavana takıldığı gerçeğini kullanmamız gerekir: yani çubuğun üst kısmında  $u_x(0) = 0$  varsayımı sağlanmaktadır. Böylece (2.22) denkleminde  $A = 0$  olur [9].

#### 2.3.4. Rotasyon ve Kesme Zorlanması

$e_{xx}$ 'de görülen iki alt  $x$  indisleri  $\partial u_x / \partial x$  tanımındakiyle aynı olduğunu göz önüne alınırsa,  $e_{xy}$  kesme zorlanması ve  $\partial u_x / \partial y$  ,  $\partial u_y / \partial x$  türevlerinden biri ya da her ikisi arasında bir bağlantı olması kaçınılmazdır. İlk adım olarak, bu türevlerin geometrik yorumlamasını yapalım.

Şekil 2.9 iki ucu  $y$  yönünde yer değiştirmiş,  $x$  eksenine boyunca uzanan  $\delta x$  uzunluğuna sahip  $PQ$  parça uzunluğunu göstermektedir. Açıkçası eğer  $u_y(Q) \neq u_y(P)$  ise,  $PQ$  uzunluğu bu yer değiştirmelere göre şekil değiştirecek ve değişim açısı küçük ise, bu değişim şu şekilde yazılır:



$$\phi = \frac{u_y(x + \delta x) - u_y(x)}{\delta x} \quad (2.23)$$

Burada pozitif yön saat yönünün tersinde olacak şekilde seçilmektedir.

$\delta_x \rightarrow 0$  olacak şekilde limit alınır, şu sonuca ulaşırız:

$$\phi = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.24)$$

Böylece  $\partial u_y / \partial x$ , şekil değişikliği boyunca  $y$  eksenine doğru  $x$  eksenine yönündeki yer değişiklikleri nedeniyle oluşan açıdır.

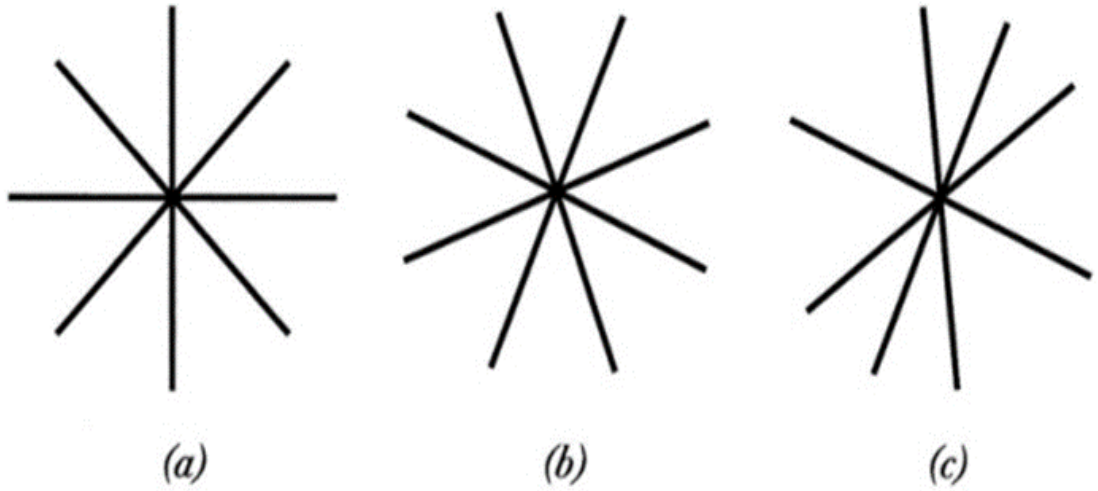
Eğer  $PQ$ , elastik bir katının yüzeyinde çizilen bir çizgi ise,  $\phi$  rotasyonunun oluşumu, katının şekil değiştirdiğini göstermesi gerekmez. Bu doğrunun döndürme işlemini, katı rijit cisim olarak döndürerek gerçekleştirebiliriz. Rijit bir cisim olarak cismi yer değiştirerek çizgiyi de yer değiştirebiliriz. Bu durumu daha fazla izleyebilmek için, Şekil 2.10(a)'da gösterildiği gibi  $P$  noktası boyunca farklı açılarda birçok çizgi çizilebileceğini düşünebiliriz.

Şayet  $P$  noktasının çevresi, yalnızca lokal rijit-cisim rotasyonuna maruz kalırsa, tüm doğrular aynı açı üzerinden dönecek ve şekil 2.10(b)'de gösterildiği şekilde açılar aynı kalmaya devam edecektir. Ancak, farklı açılar üzerinden farklı doğrular dönerse şekil 2.10(c)'de gösterildiği gibi, cismin deformasyona uğramış olması gerekir. Şekil 2.10(c) içerisindeki doğru rotasyonlarının bağımsız olmadığını ve birbirlerine olan bağımlılığının doğal olarak, kesme zorlanmasının tanımlanmasına yol açtığını da unutmamalıyız.

Şimdi  $x$ -yönünde çizilmiş bir doğru rotasyonu ve ilgili rijit-cisim rotasyonu arasındaki fark olarak  $e_{xy}$  kesme zorlanmasını tanımlayalım. Yani  $\omega_z$ 'yi

$$e_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlayalım ve benzer şekilde



Şekil 2.10.  $P$  noktasındaki doğruların rotasyonu: (a) Orijinal durum; (b) Rijit-cisim rotasyonu; (c) Rotasyon ve deformasyon

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \quad e_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (2.26)$$

tanımlanır. Bu şekilde tanımlanmış  $e_{xy}$  'nin Malzemeler Mekaniğinde ve elastisiteye dair birçok eski kaynakta kullanılan  $\gamma_{xy}$  niceliğinin yarısı olduğunu unutmayalım. Zorlanma-yer değiştirme bağıntıları kısaca aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.27)$$

(2.19)-(2.25) denklemlerinin notasyonu ile

$$\phi(PQ) = W_z + e_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (e_{yy} - e_{xx}) \sin \theta \cos \theta \quad (2.28)$$

ifadelerini yazabiliriz ve böylece

$$e_{x'y'} = \phi(PQ) - \omega_z \quad (2.29)$$

olur ki bizim tanımlarımız üzerinden

$$e_{x'y'} = e_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (e_{yy} - e_{xx}) \sin \theta \cos \theta \quad (2.30)$$

yazabiliriz. Tabi ki bu, zorlanma için koordinat dönüşüm bağıntılarından biridir. Benzer şekilde

$$e_{x'x'} = e_{xx} \cos^2 \theta + e_{yy} \sin^2 \theta + 2e_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2.31)$$

şeklinde yazılabilir. (2.30, 2.31) ile (2.11, 2.12) denklemleri kıyaslanırsa, bu tanımlar ile birlikte  $e_{ij}$  zorlanmasının, ikinci mertebeden kartezyen tensörü olduğunu söyleyebiliriz [9].

### 2.3.5. Gerilme-Zorlanma Bağıntıları

Temel sabitler olarak  $E$  Young modülü ve  $\nu$  Poisson oranını göz önüne alarak, izotropik ortam için doğrusal elastik gerilme-zorlanma bağıntılarının çeşitli formlarını inceleyelim. Bu kapsamda, deneysel olarak belirlenmiş aşağıdaki denklemleri göz önüne alalım:

$$e_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu\sigma_{zz}}{E} \quad (2.32)$$

$$e_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu\sigma_{xx}}{E} \quad (2.33)$$

$$e_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E} \quad (2.34)$$

O zaman  $e_{xy}$  ile  $\sigma_{xy}$  arasındaki bağıntılar ise, dönüşüm bağıntıları kullanılarak elde edilebilir.  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ile sıraladığımız üç adet temel yön olduğunu biliyoruz ve bunların

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \quad (2.35)$$

şeklinde yazılır. Burada simetriklik nedeniyle

$$e_{xy} = e_{yz} = e_{zx} = 0 \quad (2.36)$$

yazılabilir. Temel yönler ile sıralanmış koordinat sistemi kullanılırsa

$$e_{x'y'} = (e_{yy} - e_{xx}) \sin \theta \cos \theta \quad (2.37)$$

(2.30)-(2.36) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} e_{x'y'} &= \frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})(1+\nu) \sin \theta \cos \theta}{E} \\ &= \frac{(1+\nu)\sigma_{x'y'}}{E} \end{aligned} \quad (2.38)$$

(2.12) ve (2.32)-(2.33) denklemlerinden ise

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.39)$$

tanımlamasını yapabildiğimize göre, (2.38)'den denklemin alacağı form son olarak

$$e_{x'y'} = \frac{\sigma_{x'y'}}{2\mu} \quad (2.40)$$

Şeklindedir [9].

### 2.3.6. Lamé Sabitleri

Örneğin  $e_{xx}$  cinsinden  $\sigma_{xx}$  'yi ifade edebilmek için (2.32)-(2.34) denklemlerinin çözülmesi genel olarak istenebilir. Çözüm rutin olup,

$$\sigma_{xx} = \frac{E\nu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{Ee_{xx}}{(1+\nu)} \quad (2.41)$$

veya kısaca

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu e_{xx} \quad (2.42)$$

denklemlerine ulaşılır. Burada;

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)} \quad (2.43)$$

şeklindedir ve

$$e \equiv e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \equiv e_{ii} \equiv \text{div} \mathbf{u} \quad (2.44)$$

dalga genişleme hızı olarak bilinir.

(2.40)-(2.42)'deki gerilme-zorlanma denklemleri, aşağıdaki şekilde indis notasyonunda daha kısa şekilde yazılabilir:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{mm} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.45)$$

Burada  $\delta_{ij}$  ;  $i = j$  olduğunda 1 ,  $i \neq j$  olduğunda ise 0 olarak tanımlanan Kronecker deltasıdır.  $\lambda$  ve  $\mu$  sabitleri, Lamé sabitleri olarak bilinir. Young modülü ve Poisson oranı Lamé sabitleri cinsinden

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \quad (2.46)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.47)$$

şeklinde yazılabilir [9].

### 3. PROBLEM VE MATEMATİKSEL YAKLAŞIM

Bu bölümde, [36]'da “Daşdemir, A. (2017): Effect of initial stress on the dynamic response of a multi-layered plate-strip subjected to an arbitrary inclined time-harmonic force, Int. J. of Applied Mechanics and Engineering, vol.22, No.3, pp.521-537” adlı makalede Daşdemir tarafından incelenen problemin yapısı detaylı sunularak onun sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla kapsamlı çözüm prosedürü verilecektir. Not edelim ki bu çalışma boyunca problem niceliklerindeki tekrarlı indisler üzerinden onların muhtemel tüm değerleri üzerinden toplama işlemi yapılacaktır.

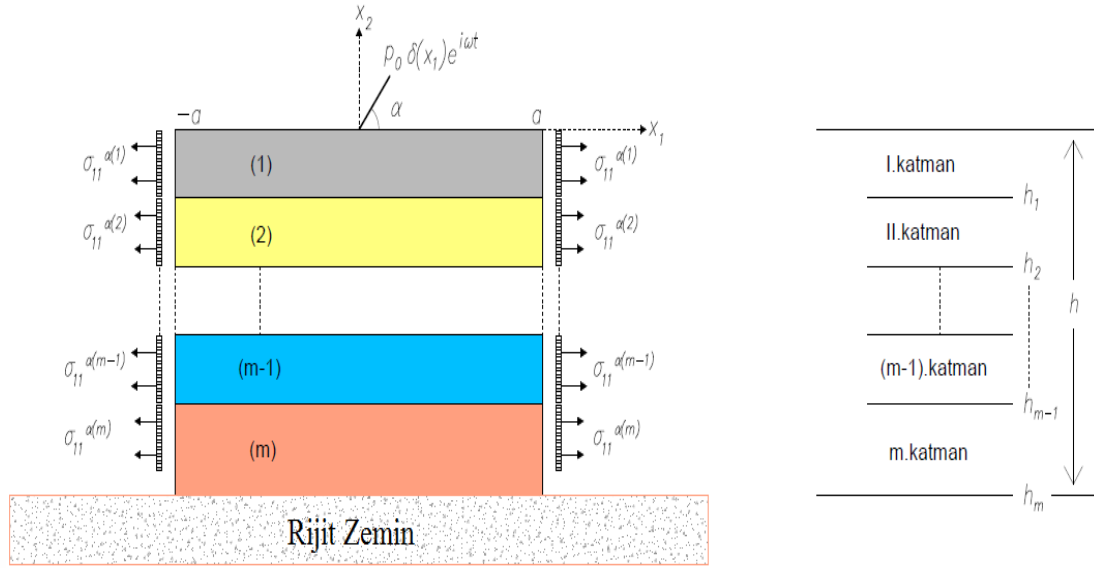
#### 3.1. Problemin Oluşturulması

Rijit zemin üzerinde duran  $2a$  uzunluğa ve  $h$  yüksekliğine sahip çok katmanlı öngerilmeli bir plaka şerit olduğunu düşünelim. Cismin katmanları doğrusal esnekliğe sahip, homojen ve izotropik malzemelerden oluşur. Her katmanın yüksekliği  $r = 1, 2, \dots, m$  olmak üzere  $h^{(r)}$  olarak gösterilir. Şekil 3.1'de görüldüğü üzere, keyfi eğime sahip zamana göre harmonik doğrusal bir yük, plaka şeridin üst yüzeyinin orta noktasına uygulanır.  $x_i$  ile gösterilen kartezyen koordinatlarının doğal haldeyken,  $x'_i$  ile gösterilen Lagrange koordinatları ile örtüştüğü varsayılır. Her bir katman bir diğeri ile birleştirilmeden önce, her bir katmanın; ayrı ayrı tek-eksenli özdeş ve homojen dağılmış normal dış kuvvete tabi tutulduğu unutulmamalıdır. Bu; germe ya da sıkıştırma kuvveti olabilir. Buna bağlı olarak her katman içerisinde başlangıç gerilmesi oluşur. Bu başlangıç gerilmeleri, aşağıdaki kapsamda doğrusal (lineer) elastisite teorisinin uygulanması ile belirlenir:

$$\sigma_{11}^{(r),0} = q^{(r)} \text{ ve } ij \neq 11 \text{ için } \sigma_{ij}^{(r),0} = 0 \quad (3.1)$$

Burada  $i, j = 1, 2$ ,  $\sigma_{11}^{(r),0}$  r'inci katmanda var olan tek başlangıç gerilmesidir. Plaka şeridinin ilgili katmanına bağlı değerler, “ $(r)$ ” üst indisi ile gösterilir. Ayrıca, başlangıç durumu ile ilgili değerler de “0” ilave üst indisi ile gösterilir. Şekil 3.1

uyarınca, göz önüne alınan plaka şerit,  $D = \bigcup_{r=1}^m D^{(r)}$  alanını içerir;



Şekil 3.1. Elastik çok katmanlı yapı ve katmanların yükseklik şeması

$$D^{(r)} = \left\{ (x_1, x_2) : -a \leq x_1 \leq a, h^{(r)} \leq x_2 \leq h^{(r-1)} \right\} \quad (3.2)$$

(3.2) denkleminde,  $h^{(r)} = -\sum_{l=1}^r h^{(l)}$  notasyonu kullanılmıştır.

Guz [2-3]'e göre, ÖGODYÜT'nin hareket denklemleri şu şekildedir:

$$\sigma_{ij,j}^{(r)} + \sigma_{11,i}^{(r),0} u_{i,11}^{(r)} = p^{(r)} \ddot{u}_i^r, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.3)$$

(3.3) denkleminde,  $\rho^{(r)}$ , doğal durumdaki r'inci malzemesinin kütle yoğunluğu;  $u_i^{(r)}$ , yer değiştirme tensörlerinin ilgili bileşenlerini;  $\sigma_{ij}^{(r)}$  ise, gerilme tensörünün ilgili bileşenleridir. Nicelikler üzerindeki noktalar, zamana göre türevi, virgülden sonra gelen alt-ındisler ise ilgili uzay koordinat ögesine göre türevi göstermektedir.

İzotropik sıkıştırılabilir malzeme için, dikkate alınacak mekanik ve geometrik ilişkiler aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\sigma_{ij}^{(r)} = \lambda^{(r)} \varepsilon_{\ell\ell}^{(r)} \delta_{ij} + 2\mu^{(r)} \varepsilon_{ij}^{(r)} \text{ ve } \varepsilon_{ij}^{(r)} = (u_{i,j}^{(r)} + u_{j,i}^{(r)}) / 2. \quad (3.4)$$

Burada  $\lambda^{(r)}$  ve  $\mu^{(r)}$  ifadeleri sırasıyla Lamé sabitleri,  $\delta_{ij}$ , Kronecker deltası;  $\varepsilon_{ij}^{(r)}$  ise, zorlanma tensörü bileşenleridir.

Yukarıdaki varsayımlara göre, aşağıdaki sınır-temas koşullarına ulaşılır:

$$\sigma_{21}^{(l)} \Big|_{x_2=0} = -p_0 \delta(x_1) e^{i\omega t} \cos \alpha, \quad \sigma_{22}^{(l)} \Big|_{x_2=0} = -p_0 \delta(x_1) e^{i\omega t} \sin \alpha, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{i2}^{(r+1)} \Big|_{x_2=h} = \sigma_{i2}^{(r)} \Big|_{x_2=h}, \quad u_i^{(r+1)} \Big|_{x_2=h} = u_i^{(r)} \Big|_{x_2=h} \quad (3.6)$$

$$\sigma_{11}^{(r,0)} u_{j,l}^r + \sigma_{ij}^{(r)} \Big|_{x_1=\pm a} = 0, \quad u_j^{(m)} \Big|_{x_2=-h} = 0 \quad (3.7)$$

Burada,  $\delta(\cdot)$  ifadesi Dirac-delta fonksiyonudur [36].

### 3.2. Çözüm Prosedürü

Dış doğrusal yük  $\omega$  frekansına bağlı olarak  $p_0 \delta(x_1) e^{i\omega t}$  şeklinde zamana göre harmonik olduğundan, problemin tüm bağlı değişkenleri şu şekilde yazılabilir:

$$\{u_i^{(r)}, \sigma_{ij}^{(r)}, \varepsilon_{ij}^{(r)}\}(x_1, x_2, t) = \{u_i^{(r)}, \sigma_{ij}^{(r)}, \varepsilon_{ij}^{(r)}\}(x_1, x_2) e^{i\omega t}. \quad (3.8)$$

Ek olarak, boyutsuz koordinat sistemini tanımlayalım:

$$\hat{x}_1 = \frac{x_1}{h} \quad \text{ve} \quad \hat{x}_2 = \frac{x_2}{h} \quad (3.9)$$

Böylece, üstte belirtilen denklem ve sınır-temas koşullarına (3.9)'daki koordinat dönüşümünün ardından, (3.8) denklemindeki dönüşüm uygulandığında, sırasıyla  $\partial^2 u_j^{(r)} / \partial t^2$  ve  $p_0 \delta(x_1) e^{i\omega t}$  terimleri ile  $-\omega^2 u_j^{(r)}$  ve  $p_0 \delta(x_1)$  ifadeleri değiştirilerek, aranan değerlerin daha sade olacak şekilde direkt olarak aynı denklemler elde edilir. Bunlar da açık bir şekilde aşağıdaki gibidir:

$$\hat{D}^r = \left\{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2) : -a/h \leq \hat{x}_1 \leq a/h, \quad h^{(r)}/h \leq \hat{x}_2 \leq h^{(r-1)}/h \right\} \quad (3.10)$$



$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(r)} + \sigma_0^{(r),0} \tilde{u}_{i,11}^{(r)} + p^{(r)} \omega^2 h^2 \tilde{u}_i^{(r)} = 0, \quad (3.11)$$

$$\tilde{\sigma}_{21}^{(l)} \Big|_{\hat{x}_2=0} = -p_0 \delta(h\hat{x}_1) \cos \alpha, \quad \tilde{\sigma}_{22}^{(l)} \Big|_{\hat{x}_2=0} = -p_0 \delta(h\hat{x}_1) \sin \alpha, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\sigma}_{i2}^{(r+1)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h} = \tilde{\sigma}_{i2}^{(r)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h}, \quad \tilde{u}_i^{(r+1)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h} = \tilde{u}_i^{(r)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h}, \quad (3.13)$$

$$\left( \sigma_{11}^{(r),0} \tilde{u}_{j,1}^{(m)} + \tilde{\sigma}_{1j}^{(r)} \right) \Big|_{\hat{x}_j=\pm a/h} = 0, \quad \tilde{u}_j^{(2)} \Big|_{\hat{x}_2=-l} = 0. \quad (3.14)$$

Bu denklemlerin açık hali şu şekildedir:

$$\hat{D}^r = \left\{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2) : -a/h \leq \hat{x}_1 \leq a/h, \quad h^{(\bar{r})}/h \leq \hat{x}_2 \leq h^{(\bar{r}-1)}/h \right\} \quad (3.15)$$

$$(\lambda^{(r)} + 2\mu^{(r)} + \sigma_{11}^{(r),0}) \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial x_1^2} + \mu^{(r)} \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial x_2^2} + (\lambda^{(r)} + \mu^{(r)}) \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial x_1 \partial x_2} = -p^{(r)} \omega^2 u_1^{(r)} \quad (3.16)$$

$$(\lambda^{(r)} + \sigma_{11}^{(r),0}) \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial x_1^2} + (\lambda^{(r)} + 2\mu^{(r)}) \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial x_2^2} + (\lambda^{(r)} + \mu^{(r)}) \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial x_1 \partial x_2} = -p^{(r)} \omega^2 u_2^{(r)} \quad (3.17)$$

$$\tilde{\sigma}_{21}^{(l)} \Big|_{\hat{x}_2=0} = -p_0 \delta(h\hat{x}_1) \cos \alpha, \quad \tilde{\sigma}_{22}^{(l)} \Big|_{\hat{x}_2=0} = -p_0 \delta(h\hat{x}_1) \sin \alpha, \quad (3.18)$$

$$\tilde{\sigma}_{12}^{(r+1)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h} = \tilde{\sigma}_{12}^{(r)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h}, \quad \tilde{u}_1^{(r+1)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h} = \tilde{u}_1^{(r)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h}, \quad (3.19)$$

$$\tilde{\sigma}_{22}^{(r+1)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h} = \tilde{\sigma}_{22}^{(r)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h}, \quad \tilde{u}_2^{(r+1)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h} = \tilde{u}_2^{(r)} \Big|_{\hat{x}_2=h^{(\bar{r})}/h}, \quad (3.20)$$

$$\left( \sigma_{11}^{(r),0} \tilde{u}_{1,1}^{(m)} + \tilde{\sigma}_{11}^{(r)} \right) \Big|_{\hat{x}_1=\pm a/h} = 0, \quad \left( \sigma_{11}^{(r),0} \tilde{u}_{2,1}^{(m)} + \tilde{\sigma}_{12}^{(r)} \right) \Big|_{\hat{x}_j=\pm a/h} = 0, \quad (3.21)$$

$$\tilde{u}_1^{(2)} \Big|_{\hat{x}_2=-l} = 0, \quad \tilde{u}_2^{(2)} \Big|_{\hat{x}_2=-l} = 0. \quad (3.22)$$

Sadeleştirmek adına, nicelikler üstündeki üst çizgiler, bundan sonra aksi durum belirtilene kadar göz ardı edilecektir.

Problemin geometrisi oldukça karışık olduğu için, problemin analitik çözümüne ulaşılammaktadır. Bu yüzden de problem, Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) üzerinden yaklaşık sonuç elde edilecek şekilde çözümlenir. Bilinen bu prosedür uyarınca,  $v_1 = v_1(x_1, x_2)$  ve  $v_2 = v_2(x_1, x_2)$  test fonksiyonları ile (3.11) içerisindeki hareket denklemlerinin çarpımı, taraf tarafa toplanması,  $D$  alanı üzerinde son denklemin integralinin alınması ve bazı matematiksel işlemlerin ardından,

$$\iint_D \left\{ \begin{aligned} & \left[ \left[ \left( \frac{c_1^{(r)}}{c_2^{(r)}} \right)^2 + \eta^{(r)} \right] u_{1,1}^{(r)} + \frac{\lambda^{(r)}}{\mu^{(r)}} u_{2,2}^{(r)} \right] v_{1,1}^{(r)} + [u_{1,2}^{(r)} + u_{2,1}^{(r)}] v_{1,2}^{(r)} \\ & + [u_{1,2}^{(r)} + (I + \eta^{(r)}) u_{2,1}^{(r)}] v_{2,1}^{(r)} \\ & + \left[ \frac{\lambda^{(r)}}{\mu^{(r)}} u_{1,1}^{(r)} + \left( \frac{c_1^{(r)}}{c_2^{(r)}} \right)^2 u_{2,2}^{(r)} \right] v_{2,2}^{(r)} - (\Omega^{(r)})^2 [u_1^{(r)} v_1^{(r)} + u_2^{(r)} v_2^{(r)}] \end{aligned} \right\} dA \quad (3.23)$$

$$= \int_{-a}^a -p_0 \frac{\delta(x_1)}{\mu^{(l)}} (v_1^{(l)} \cos \alpha + v_2^{(l)} \sin \alpha) \Big|_{x_2=0} dx_1$$

elde edilir. (3.23) denkleminde, aşağıdaki notasyonlar kullanılır:

$$c_1^{(r)} = \sqrt{\lambda^{(r)} + 2\mu^{(r)} / p^{(r)}}, \quad c_2^{(r)} = \sqrt{\mu^{(r)} / p^{(r)}}, \quad \Omega^r = \frac{\omega h}{c_2^r} \text{ ve } \eta^{(r)} = \sigma_{11}^{(r),0} / \mu^r \quad (3.24)$$

Burada  $c_1^{(r)}$ , dalga genişleme hızı;  $c_2^{(r)}$ , enine dalga hızı;  $\Omega^{(r)}$ , boyutsuz frekans ve  $\eta^{(r)}$  ise, başlangıç gerilme parametresidir.

(3.23) denkleminin sol ve sağ tarafındaki terimleri sırasıyla  $B(\mathbf{u}^{(r)}, \mathbf{v}^{(r)})$  ve  $l(\mathbf{v}^{(r)})$  ile göstererek, aşağıdaki denklemde sunulan  $J(\mathbf{u}^{(r)}) = B(\mathbf{u}^{(r)}, \mathbf{u}^{(r)}) / 2 - l(\mathbf{u}^{(r)})$  toplam potansiyel enerji fonksiyonu elde edilir:

$$J(\mathbf{u}^{(r)}) = \frac{I}{2} \iint_D \left\{ \left( \frac{c_1^{(r)}}{c_2^{(r)}} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial x_2} \right)^2 \right] + 2 \frac{\lambda^{(r)}}{\mu^{(r)}} \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial x_2} + \left[ \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial x_1} \right]^2 + \eta^{(r)} \left[ \left( \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial x_1} \right)^2 \right] - (\Omega^{(r)})^2 \left[ (u_1^{(r)})^2 + (u_2^{(r)})^2 \right] \right\} dA + \quad (3.25)$$

$$\int_{-a}^a p_0 \frac{\delta(x_1)}{\mu^{(l)}} (u_1^{(l)} \cos \alpha + u_2^{(l)} \sin \alpha) \Big|_{x_2=0} dx_1.$$

Değişimler hesabı (varyasyonlar hesabı) ilkesi üzerinden bilindiği üzere, (3.25)'de verilen  $J(\mathbf{u}^{(r)})$  toplam enerji fonksiyonunun birinci varyasyonunun sıfıra eşitlenmesi ile, (3.11)'deki hareket denklemleri ve buna uygun doğrultuda (3.12)-(3.14)'deki sınır-temas koşulları elde edilir. Bu yöntemle, (3.25) fonksiyonunun geçerliliği ispatlanmış olur.

Sanal iş ilkesi ve standart Rayleigh-Ritz yöntemi uyarınca,  $D$  alanı, bir takım alt-alanlara bölünür. Bu alt-alanların sayısının; sınır koşullarının oldukça yüksek doğruluk oranlarında karşılanması ve elde edilen sayısal sonuçların yeterince iyi bir şekilde yakınsak olması gibi gereklilikler üzerinden belirlendiği unutulmamalıdır. Burada, yer değiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$u_1^{(k)} = \sum_{i=1}^M a_i^{(k)} N_i(t, s) \quad \text{ve} \quad u_2^{(k)} = \sum_{i=1}^M b_i^{(k)} N_i(t, s). \quad (3.26)$$

Burada  $M$ ,  $k$ 'nci sonlu eleman üzerindeki düğüm sayısını;  $a_i$  ve  $b_i$ ; belirlenmesi gereken bilinmeyen katsayıları;  $N_j(t, s)$ ,  $k$ 'nci elemanı üzerindeki şekil fonksiyonunu;  $t$  ve  $s$  ise, karşılık gelen eleman ile bağlantılı yerel koordinat sistemi içerisinde bulunan yerel normalize koordinat bileşenlerini gösterir. Burada şekil fonksiyonlarının  $N_j(t, s) \in L_2^1$  olacak şekilde seçildiği unutulmamalıdır. Ayrıca  $L_2^1$  ifadesi kareleri ve birinci derece kısmi diferansiyeli denklemleri Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonların kümesini gösterir. Öte yandan  $N_j(t, s)$  şekil

fonksiyonlarının her biri,  $[-1,1] \times [-1,1]$  alanı üzerinden tanımlanırken, bunların detaylı listesi referans [10]'da bulunabilir.

(3.26)'da sunulan yaklaşık çözümleri, (3.25)'deki toplam enerji fonksiyonunda yerine yazılırsa aşağıdaki cebirsel eşitlikler sistemi elde edilir:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{F}, \quad (3.27)$$

Burada  $\mathbf{K}$  , katılık matrisini;  $\mathbf{M}$  , kütle matrisini;  $\tilde{\mathbf{u}}$  , düğüm noktalarında ki bilinmeyen yer değiştirmelerin sütun vektörünü;  $\mathbf{F}$  ise, kuvvet vektörünü göstermektedir.

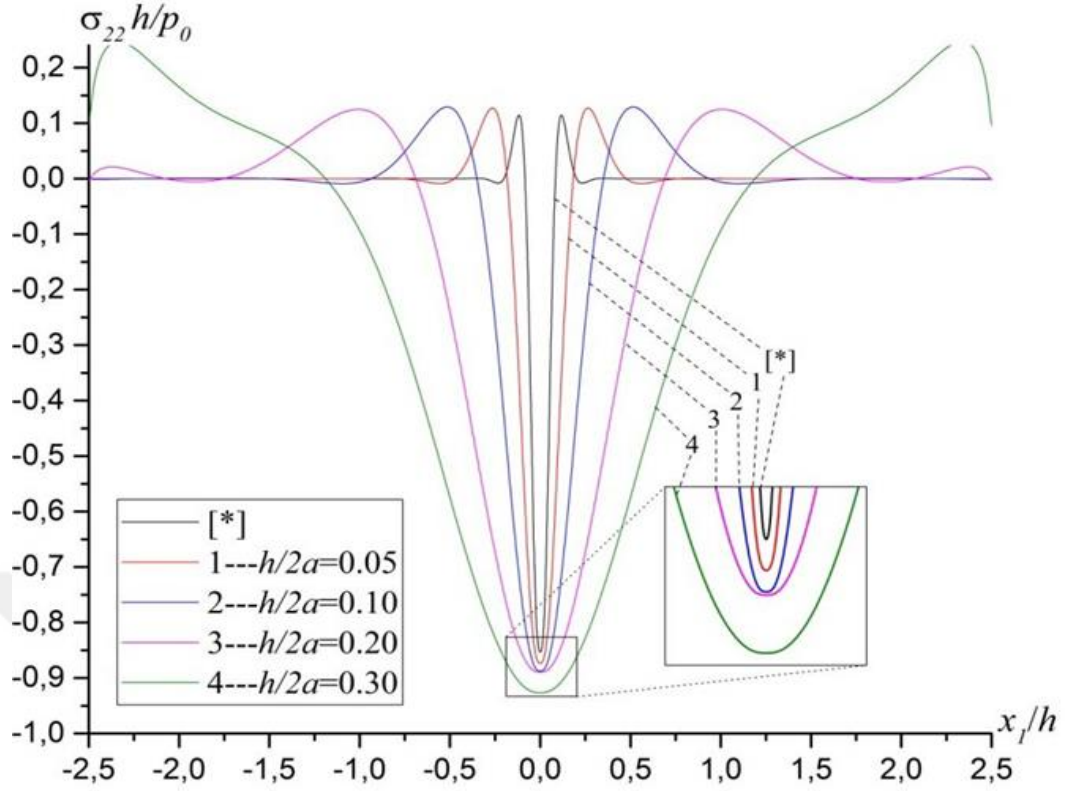
Metin boyutunu azaltabilmek adına, (3.27) denklemi içerisindeki matris ve vektörlerin açık halleri burada verilmemiştir. Denklemlerin açık hallerinin, uygun prosedürün adapte edilmesi vasıtasıyla, (3.25) denkleri üzerinden direkt olarak türetildiğini unutmayın [36].

#### 4. SAYISAL BULGULAR VE TARTIŞMALAR

İlgili cismin kapladığı alan,  $Ox_1$  -ekseni yönünde 200 eşit uzunluktaki parçaya ve  $Ox_2$  eksenini yönünde 25 eşit uzunluktaki parçaya bölünür. Bu durumda toplamda, 40902 DSD (NDOF: Düğüm Serbestlik Derecesi) elde edilir.  $e_r = e^{(l)} / e^{(r)}$  gösterimini tanımlayalım; burada  $e^{(l)}$ , ilgili katmanın Young modülünü gösterir. Tablo 4.1. de bazı malzemelerin mekanik sabitleri verilmiştir.

Tablo 4.1. *Malzemelerin Mekanik Sabitleri*

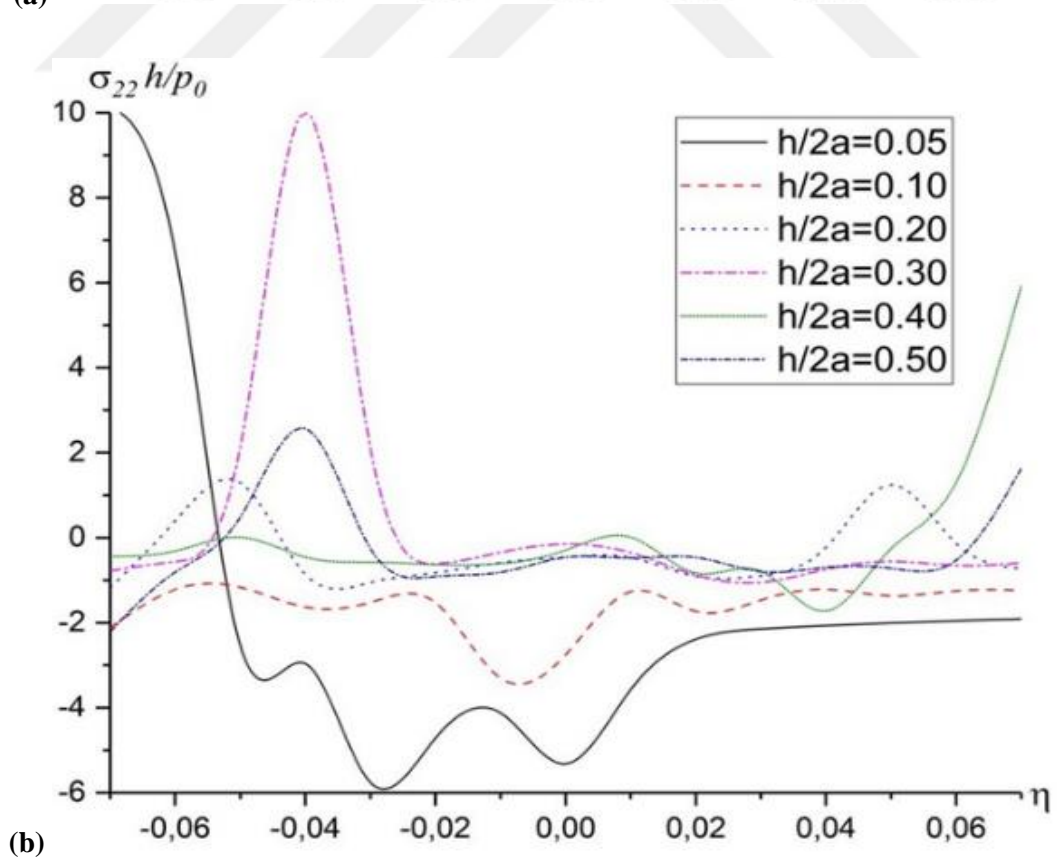
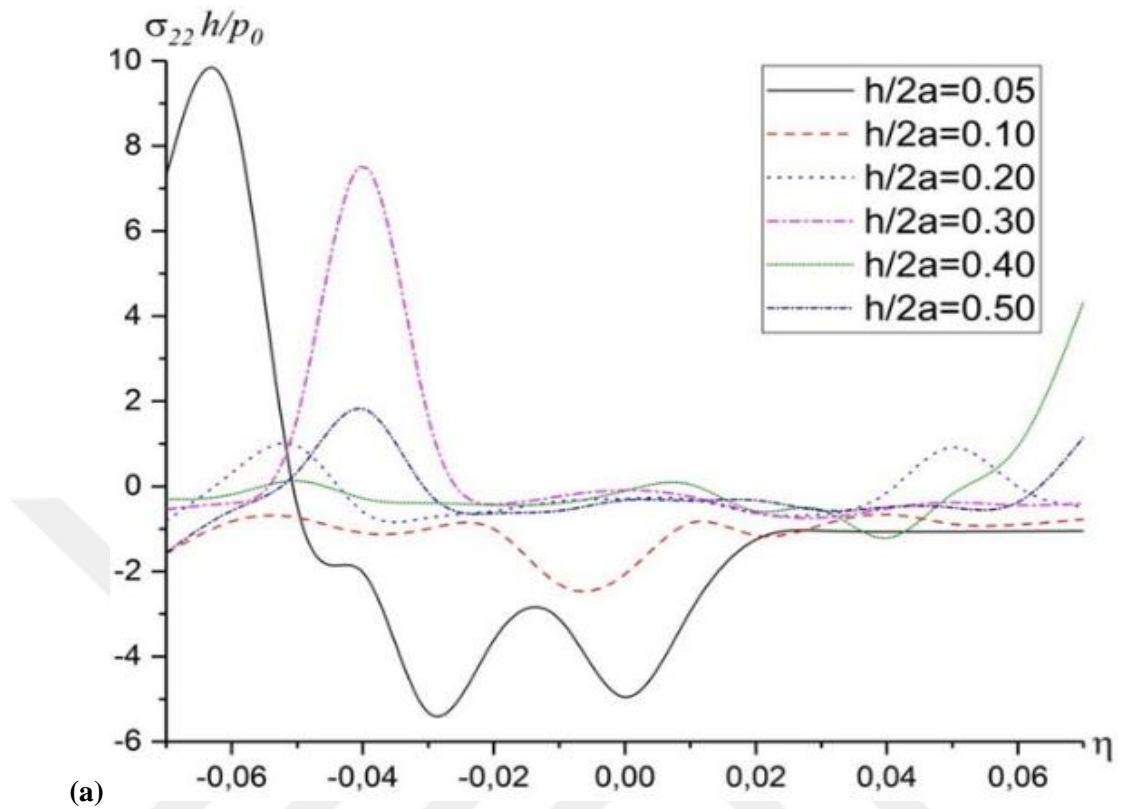
MALZEME ADI	ELASTİK MODÜLÜ	POİSSON ORANI	YOĞUNLUK
	(GPa)		(×1000 kg/m <sup>3</sup> )
Alüminyum (Aluminum-Al)	70	0,33	2,71
Altın (Gold-Au)	83	0,44	19,32
Çelik (Steel)	190-210	0,27-0,3	7,85
Kauçuk (Rubber-Rb)	$7,0 \times 10^{-4}$ - $4,0 \times 10^{-3}$	0,45-0,5	0,96-1,3
Magnezyum (Magnesium-Mg)	41	0,35	1,74
Nikel (Nickel-Ni)	210	0,31	8,89
Platin (Platinum-Pt)	145	0,38	21,4
Titanyum (Titanium-Ti)	110	0,33	4,54

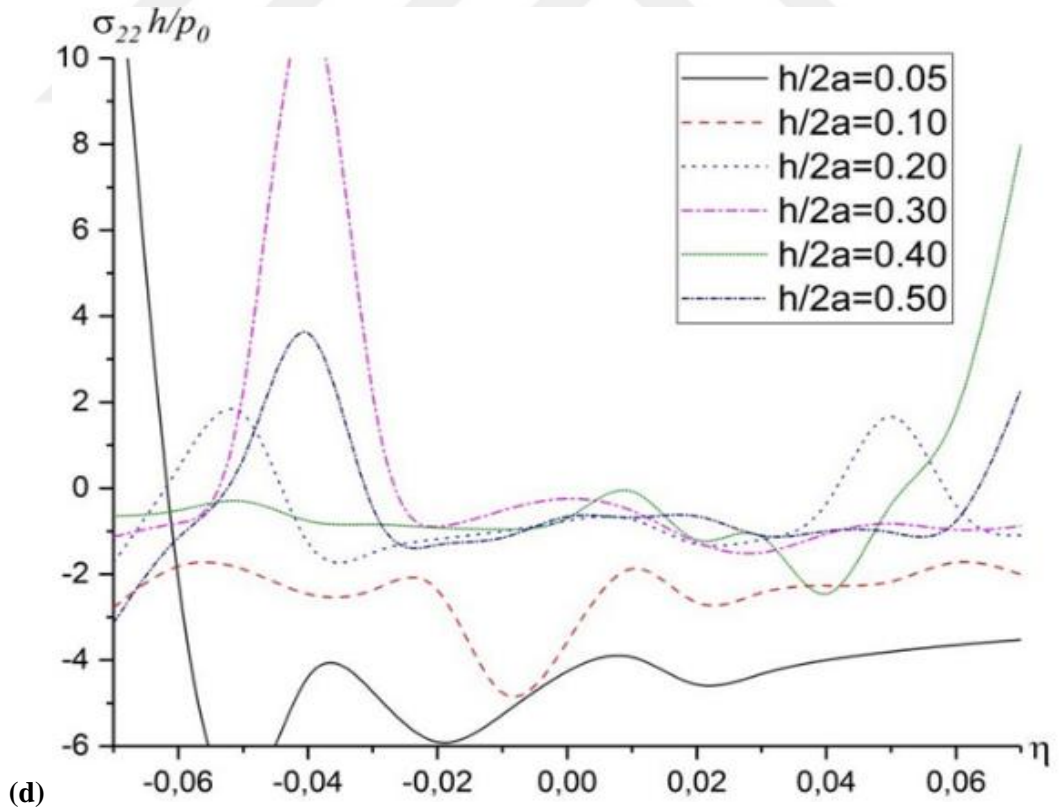
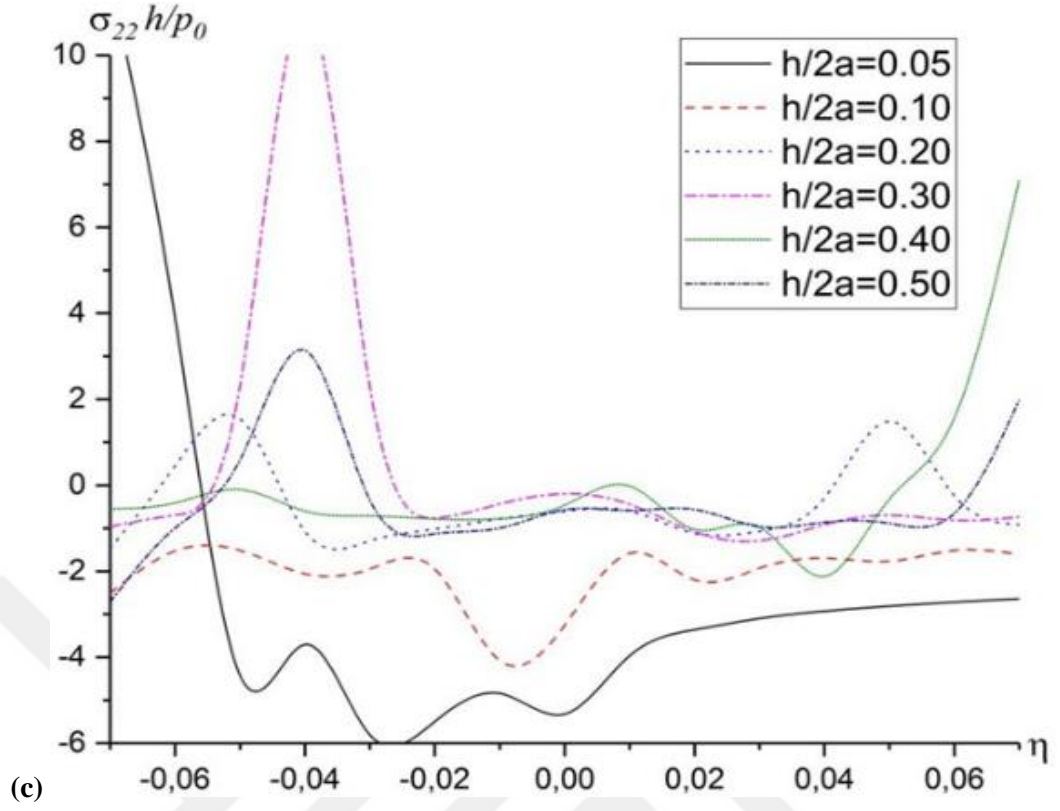


Şekil 4.1. Çeşitli yükseklik oranları için  $x_1/h$ 'a göre  $\sigma_{22}h/p_0$  dağılımı.

Mevcut matematiksel modelleme için geliştirilmiş algoritma ve programların güvenilirliğini ispatlamak adına,  $m=2$ ,  $h_1 = h_2 = h/2$ ,  $e_r = 1$ ,  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.33$ ,  $\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = 0$ ,  $\Omega = 0$  ve  $\alpha = \pi/2$  durumunu göz önüne alalım. Bu durumda incelenen problem [1]'de Fourier integral dönüşüm yöntemi ile incelenen sonsuz uzunluğa sahip plakadaki dinamik gerilme alan problemine benzemektedir.  $h/2a \rightarrow 0$  olduğu durumda bu çalışma kapsamında sunulmuş SEY (Sonlu Elemanlar Yöntemi) kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar, [1]'de Uflyand tarafından verilmiş olan sonuçlara yakınsamalıdır.

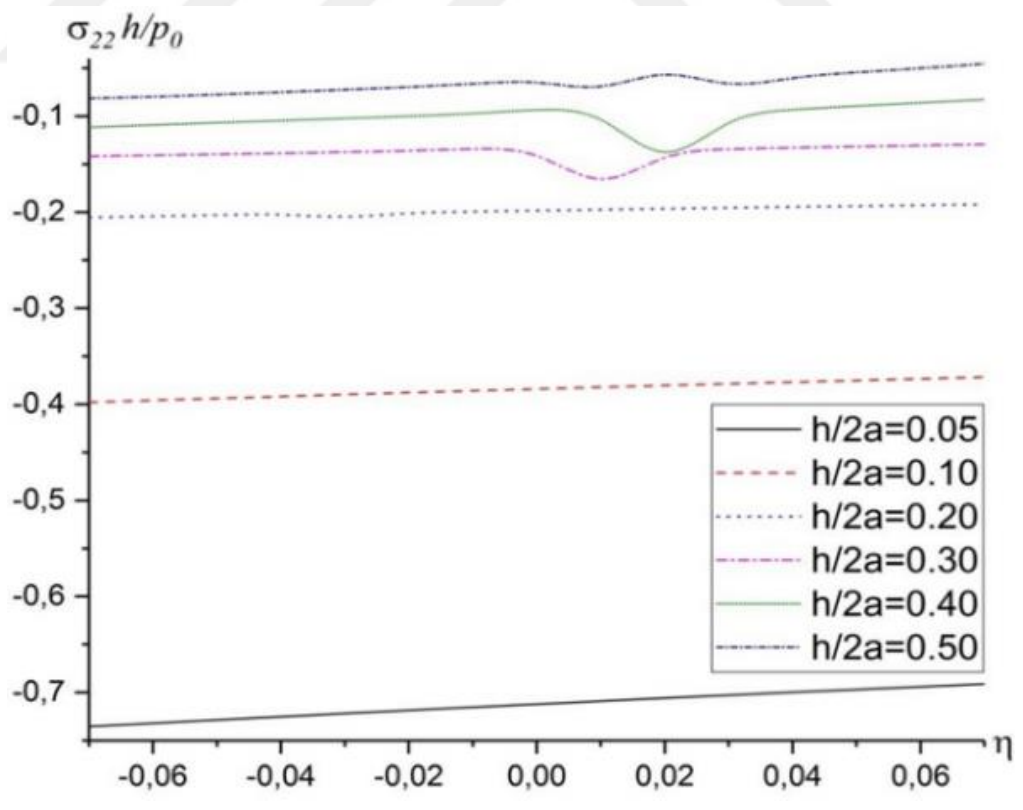
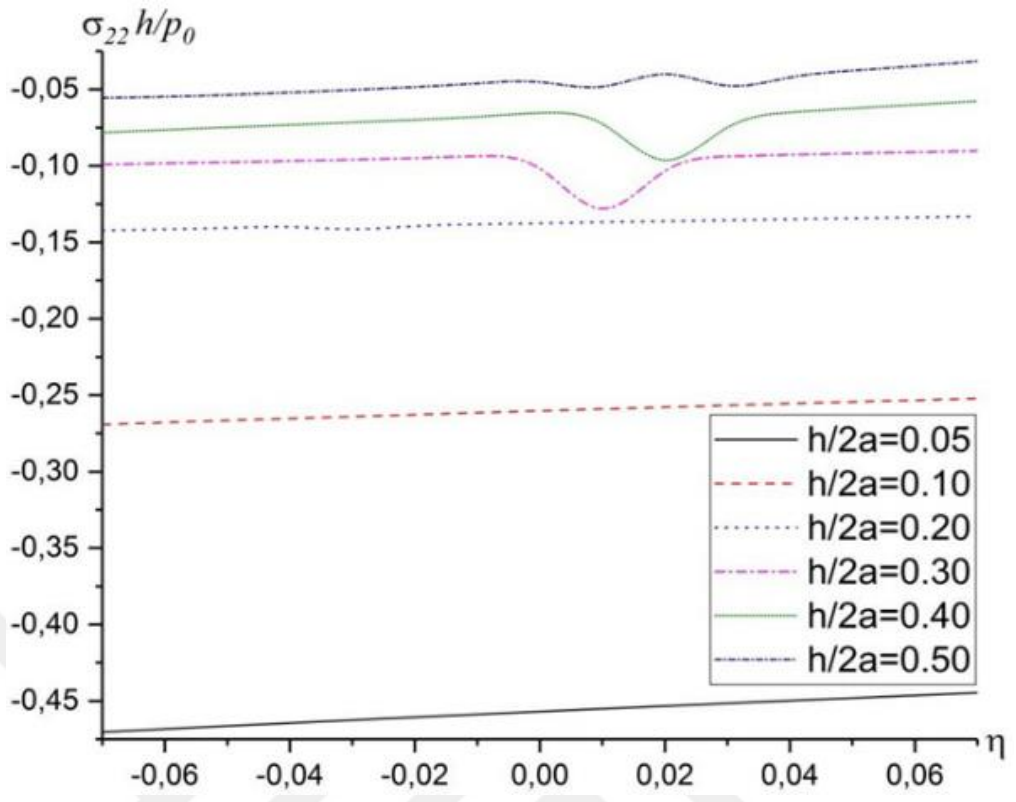
Bu tahmin; plaka şerit ile rijit zemin arasındaki yüzey üzerinde mevcut  $x_1/h$  'e göre  $\sigma_{22}h/p_0$  gerilmesinin dağılımını gösteren, Şekil 4.1.'de verilmiş grafiklerle açık bir şekilde gösterilmektedir. Şekil 4.1.'de yıldız ile işaretlenmiş olan grafik, Uflyand [1] tarafından verilmiş olan sayısal sonuçları göstermektedir. Böylece, bu çalışmada kullanılacak olan algoritma ve programların geçerliliği ve güvenilirliği ispatlanmış olur.

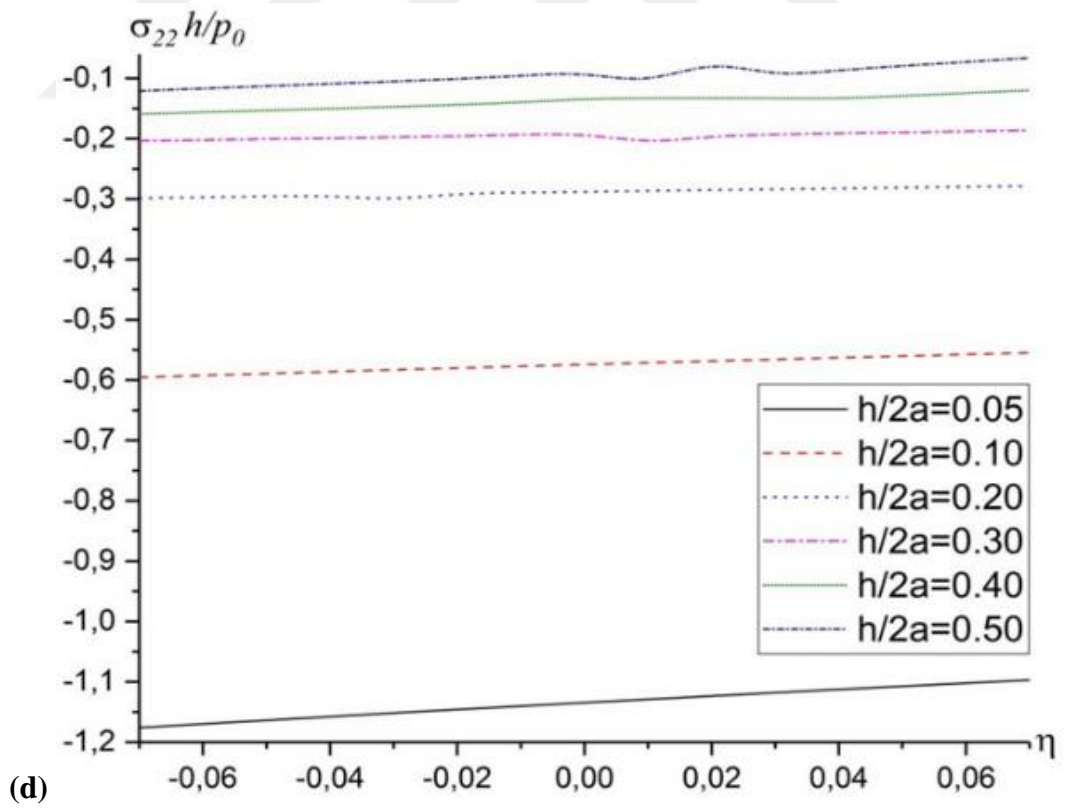
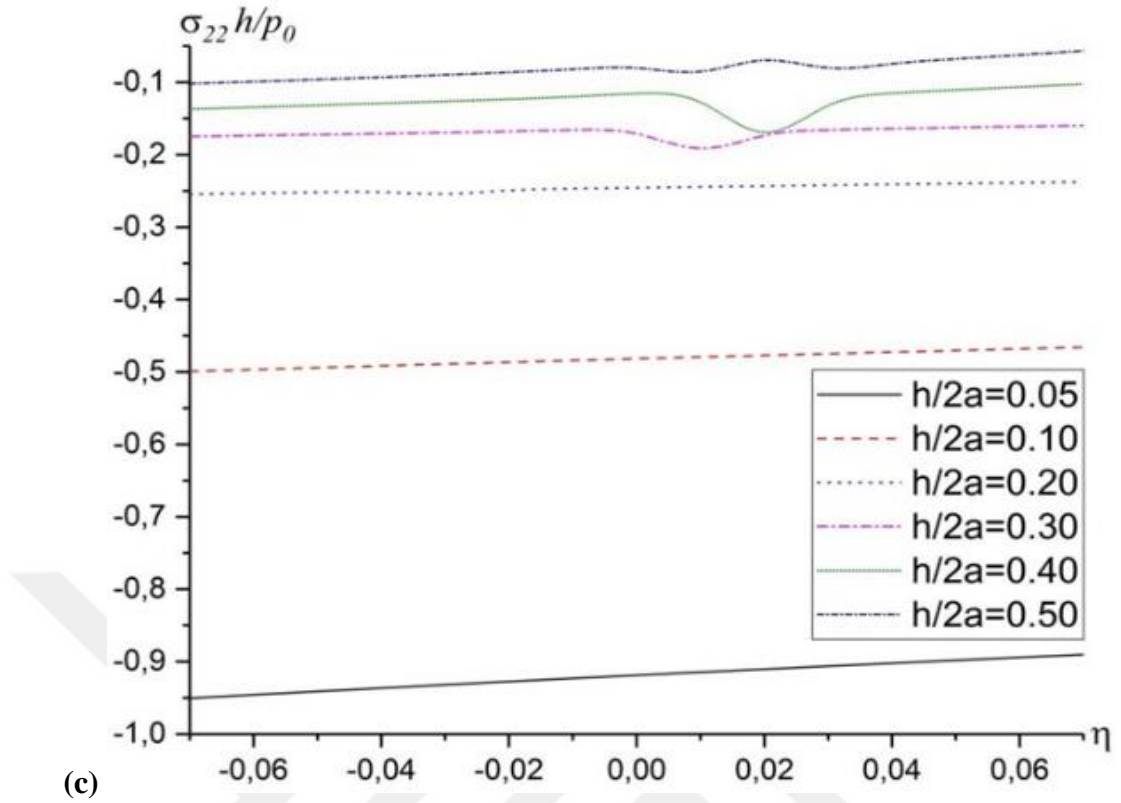




Şekil 4.2. Durum I'de çeşitli yükseklik oranları için  $\sigma_{22}h/p_0$  ve  $\eta$  arasındaki bağımlılık:  
**(a)**  $\alpha = \pi/6$ ; **(b)**  $\alpha = \pi/4$ ; **(c)**  $\alpha = \pi/3$ ; **(d)**  $\alpha = \pi/2$







Şekil 4.3. Durum II'de çeşitli yükseklik oranları için  $\sigma_{22}h/p_0$  ve  $\eta$  arasındaki bağımlılık: (a)  $\alpha = \pi/6$ ; (b)  $\alpha = \pi/4$ ; (c)  $\alpha = \pi/3$ ; (d)  $\alpha = \pi/2$

Somut örnekleri incelemek adına, kullanılacak malzemeler  $\nu^{(Al)} = 0.35$  ve  $\rho^{(Al)} = 2.7 \times 10^3 \text{ kg / m}^3$  özelliklerine sahip alüminyum (kısaca Al) ile  $\nu^{(St)} = 0.29$  ve  $\rho^{(Al)} = 7.86 \times 10^3 \text{ kg / m}^3$  özelliklerine sahip çelik (kısaca St) seçilmiştir.

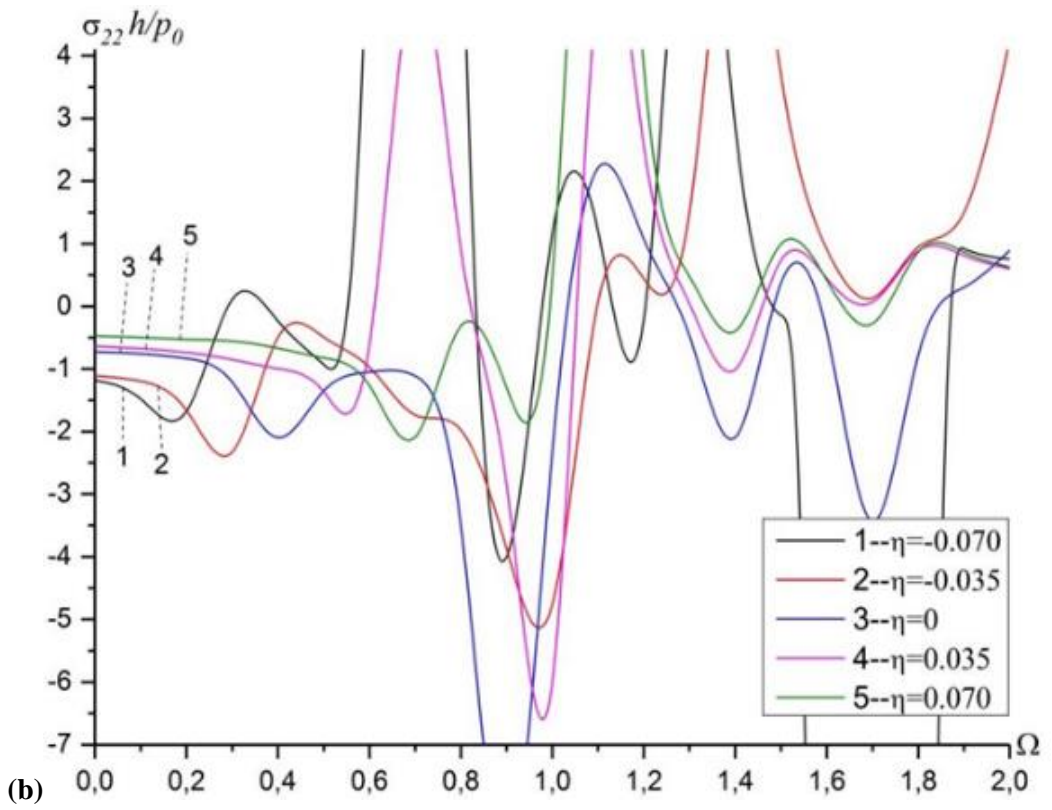
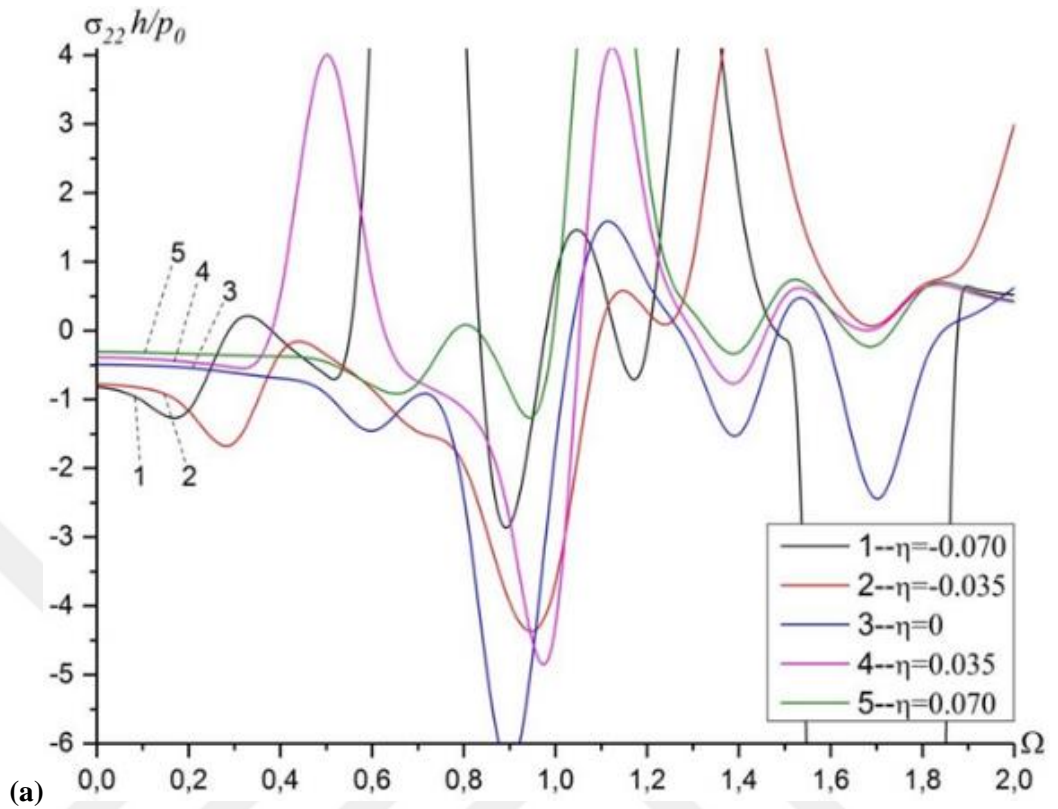
İlgili problem, oldukça geniş bir alanı kapsamaktadır. Ancak sayısal sonuçları sunabilmek için, şu durumları göz önüne alacağız:

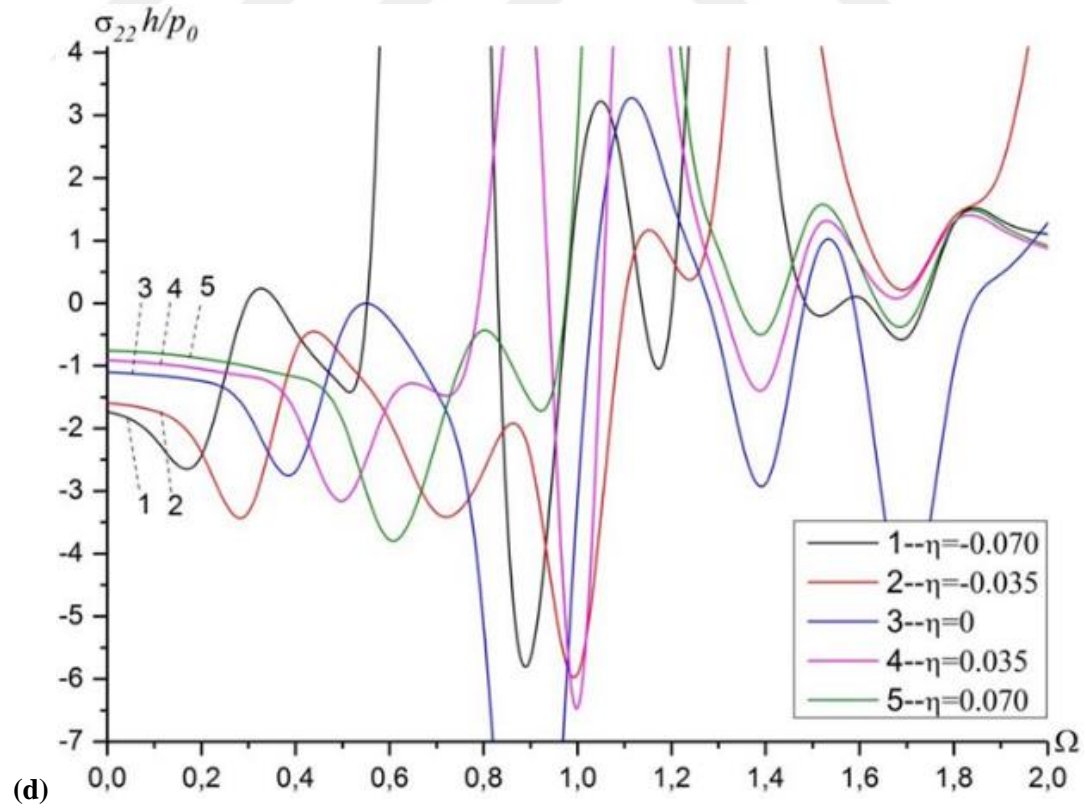
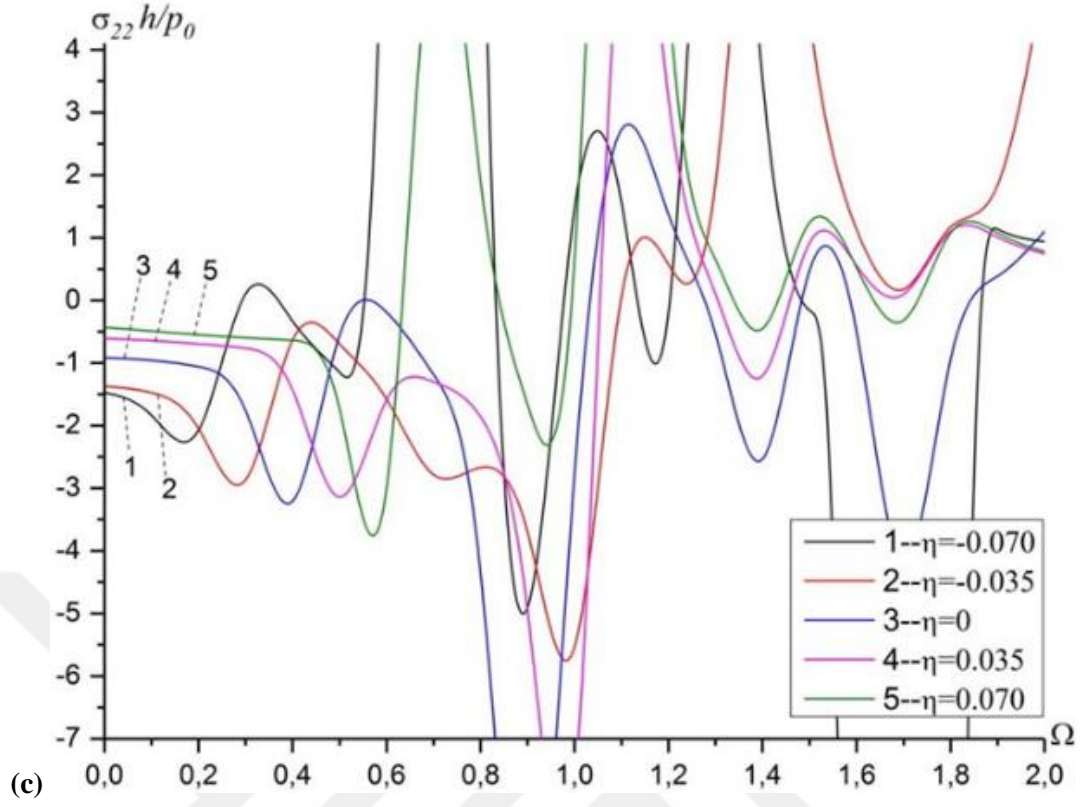
**Durum I:** Al+St+Al

**Durum II:** St+Al+St

İstenen diğer hususlar, bu çalışmada sunulan PC algoritması kullanılarak incelenebilir. Bu çalışma boyunca tüm sayısal sonuçlar, aksi belirtilene kadar,  $(-1,0)$  noktasında,  $h/2a = 0.2$ ,  $h_1 = h_2 = h_3$ ,  $\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta^{(3)} = \eta$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\eta = 0$  ve  $\alpha = \pi/2$  özel durumu göz önüne alınarak yapılacaktır.

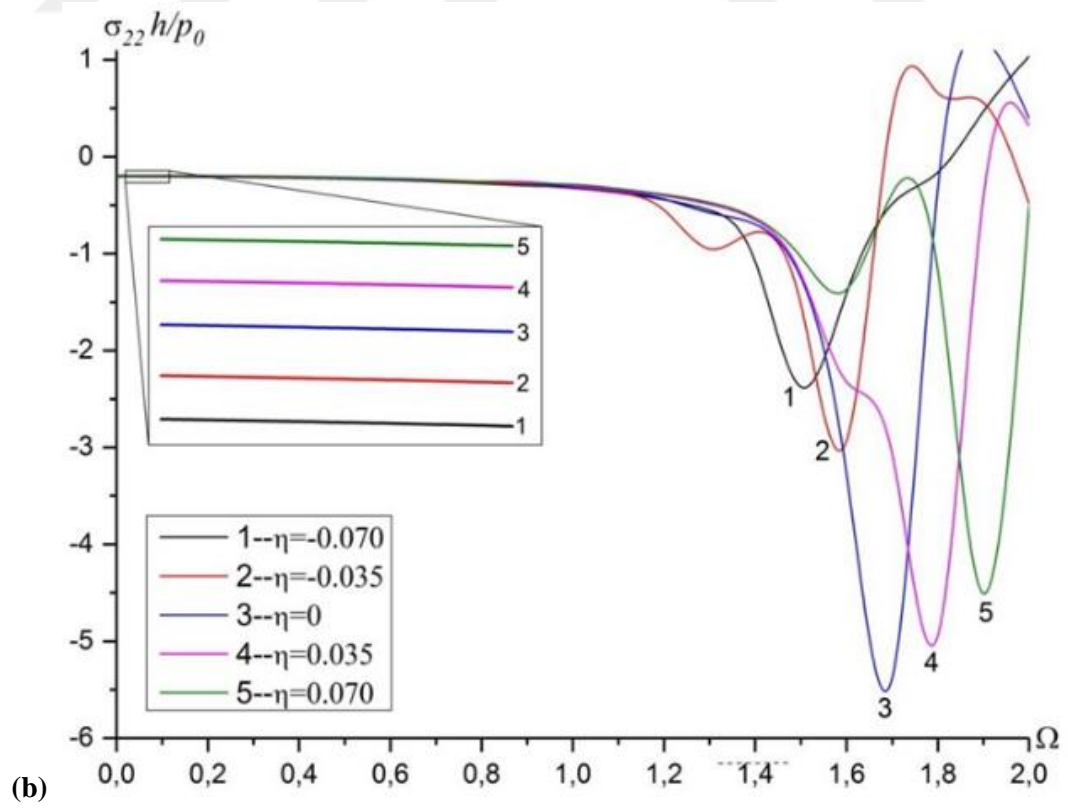
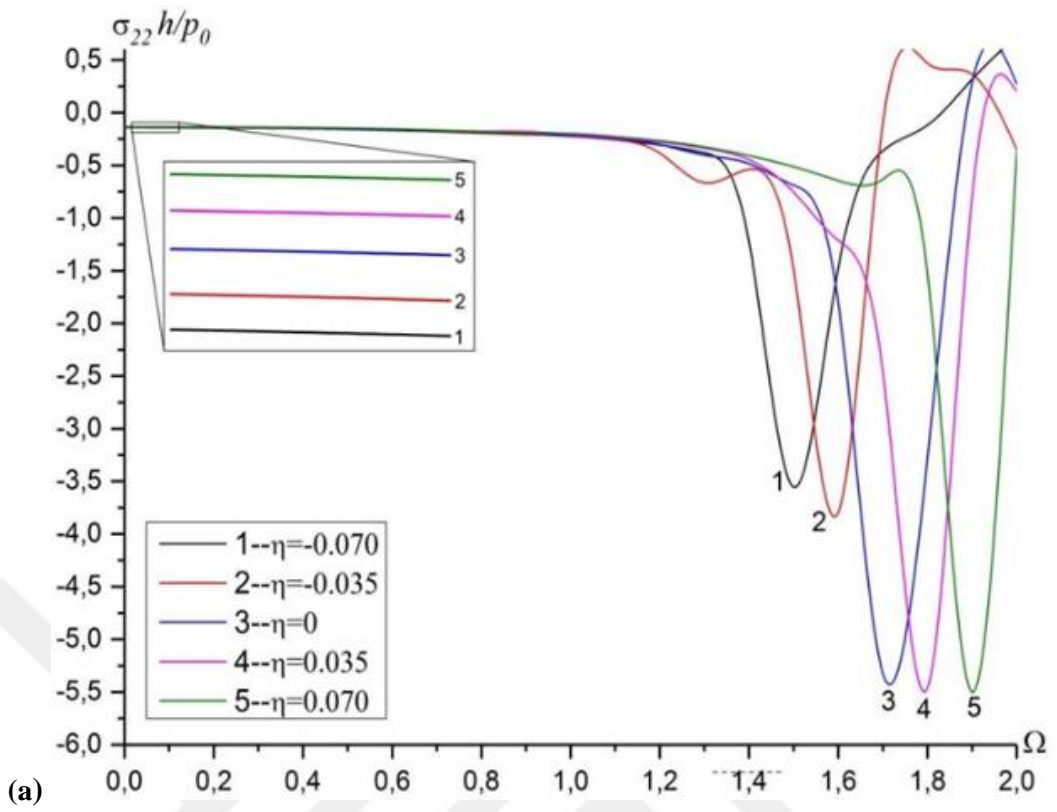
$\sigma_{22}h/p_0$  ve  $\eta$  arasındaki bağımlılıklar, Durum I için Şekil 4.2. ve Durum II için ise Şekil 4.3 içerisinde verilmiştir. Bununla birlikte, bu grafikler oluşturulurken;  $\alpha = \pi/6$  (Şekil 4.2.a. ve 4.3.a.),  $\alpha = \pi/4$  (Şekil 4.2.b. ve 4.3.b.),  $\alpha = \pi/3$  (Şekil 4.2.c. ve 4.3.c.) ve  $\alpha = \pi/2$  (Şekil 4.2.d. ve 4.3.d.) durumları dikkate alınmıştır.  $\sigma_{22}h/p_0$  normal gerilmesinin mutlak değerleri, başlangıç germe parametresi ve  $\alpha$  açısı ile azalırken başlangıç sıkıştırma parametresiyle artar. Ancak,  $h/2a$ 'nın azalması ile mutlak değerleri azalır. Durum II için verilmiş grafiklerin dağılımları, Durum I'de bulunanlara kıyasla daha tutarlıdır. Ayrıca Durum I için, katmanlar üzerinde başlangıç sıkıştırmasının uygulanması,  $\sigma_{22}h/p_0$  dağılımının salınım karakterinin daha hassas olmasına neden olur. Ancak başlangıç germe parametresi, sistemin tutarlılığını artırır. Şekil 4.2. ve 4.3. içerisindeki grafikler arasında yapılan karşılaştırmada görülebileceği üzere,  $\sigma_{22}h/p_0$  gerilmesi Durum II için doğrusal olarak başlangıç gerilme parametresine bağlıdır, ancak Durum I için doğrusal bir bağıllığı yoktur.

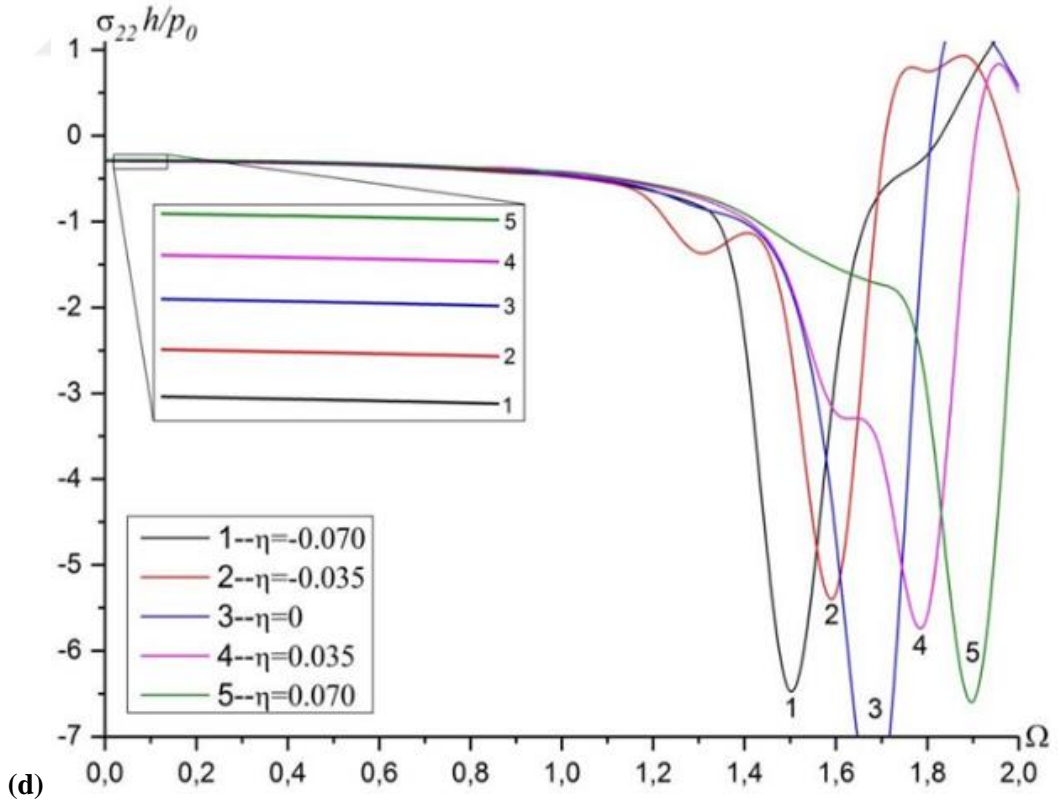
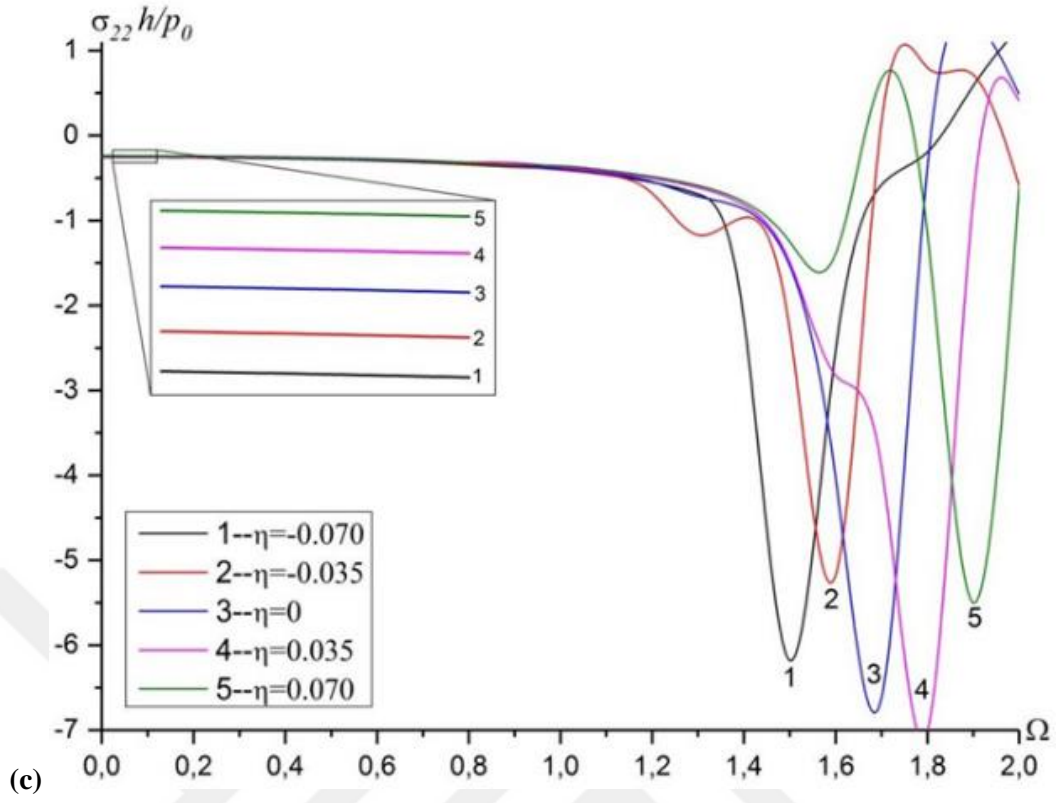




Şekil 4.4. Durum I'de çeşitli  $\eta$  değerleri için  $\sigma_{22}h / p_0$  ve  $\Omega$  arasındaki bağımlılık:

(a)  $\alpha = \pi/6$ ; (b)  $\alpha = \pi/4$ ; (c)  $\alpha = \pi/3$ ; (d)  $\alpha = \pi/2$





Şekil 4.5. Durum II'de çeşitli  $\eta$  değerleri için  $\sigma_{22}h / p_0$  ve  $\Omega$  arasındaki bağımlılık:

(a)  $\alpha = \pi / 6$ ; (b)  $\alpha = \pi / 4$ ; (c)  $\alpha = \pi / 3$ ; (d)  $\alpha = \pi / 2$

Bu sonuç, plakaların seçimi üzerinden açıklanır. Elde edilen sayısal sonuçlar,  $\sigma_{22}h/p_0$  normal gerilmesinin parametrik rezonansının,  $\eta$  başlangıç gerilme parametresinin bazı değerlerinde ortaya çıkmaktadır. Şekil 4.3.b.'de  $h/2a=0.3$  ve  $\eta=0.01$  durumu, örnek olarak gösterilebilir.  $\sigma_{22}h/p_0$  'ın yerel maksimum ve minimumlarının sayısı,  $h/2a$  ve  $\alpha$  azalmasıyla birlikte azalmaktadır.  $h/2a$  'nın değerlerindeki bir artış,  $\sigma_{22}h/p_0$  'ın dağılımına başlangıç germesinin etkisini azaltırken başlangıç sıkıştırmasının etkisinin artmasına neden olur.

Şekil 4.4. ve 4.5.'de; sırasıyla Durum I ve Durum II için  $\sigma_{22}h/p_0$  normal gerilmesinin frekans tepkisine  $\eta$  başlangıç gerilme parametresinin etkisi gösterilmektedir. Bu şekillerin;  $\alpha=\pi/6$  (Şekil 4.4.a. ve 4.5.a.),  $\alpha=\pi/4$  (Şekil 4.4.b. ve 4.5.b.) ile  $\alpha=\pi/3$  (Şekil 4.4.c. ve 4.5.c.) ve  $\alpha=\pi/2$  (Şekil 4.4.d. ve 4.5.d.) olduğu durumlar için çizildiğini unutmayınız.  $\sigma_{22}h/p_0$  mutlak değerleri,  $\Omega$  ile birlikte azalmaktadır. Grafiklerden de anlaşıldığı üzere,  $\sigma_{22}h/p_0$  'ın, bazı  $\Omega$  değerleri için maksimum ve minimum noktalara ulaştığı görülmektedir. Bu değerler; rezonans değerleri olarak adlandırılır ve  $\Omega^*$  ile gösterilir. Grafiklerde de görüldüğü gibi,  $\sigma_{22}h/p_0$  'ın rezonans değerleri, başlangıç germe parametresi ile azalırken başlangıç sıkıştırma parametresiyle artmaktadır. Grafiklerden vardığımız sonuç ise,  $\eta$  başlangıç gerilme parametresinin,  $\sigma_{22}h/p_0$  gerilmesinin frekans tepkisi üzerindeki etkisini, yalnızca nicel açıdan değil, aynı zamanda nitel anlamda da önemli bir seviyede olduğudur. Şekil 4.2. ve 4.3.'te görüldüğü gibi, ikinci durum için sistem, oldukça stabil bir hale gelir. Elde edilen sayısal sonuçlarda, rijit zemine yapılandırılmış katmanın, diğerlerine kıyasla daha sert olarak seçilmesi gerektiğini göstermektedir [36].



## KAYNAKLAR

- [1] Uflyand, Y.S. (1963): Integral Transformations in the Theory of Elasticity. Moscow-Leningrad: Nauka
- [2] Guz, A.N. (1986): Elastic Waves in a Body Initial Stresses, I. General Theory. - Kiev: Naukova Dumka (in Russian)
- [3] Guz, A.N. (1986): Elastic Waves in a Body Initial Stresses, II. Propagation Laws. Kiev: Naukova Dumka (in Russian)
- [4] Zienkiewicz, O.C., & Taylor, R.L. (1989): The Finite Element Method, Basic Formulation and Linear Problems, vol.1, 4th edn. McGraw-Hill, London
- [5] Guz, A.N. (1999): Elastic Waves in a Body Initial Stresses, I. General Theory. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- [6] Akbarov, S.D., & Guz, A.N. (2000): Mechanics of Curved Composites- Springer Netherlands
- [7] Hasanov, A.H. (2001): Varyasyonel Problemler Ve Sonlu Elemanlar Yöntemi- İstanbul Türkiye
- [8] Guz, A.N. (2004): Elastic Waves in a Body with Initial (Residual) Stresses. A.S.K, Kiev (in Russian)
- [9] Barber, J.R. (2004): Solid Mechanics And Its Applications Elasticity (Second Edition)-Waterloo, Ontario, Canada
- [10] Hutton, D. (2004): Fundamentals of Finite Element Analysis-New York: McGraw-Hills.
- [11] Reddy, J.N. (2005): An Introduction To The Finite Element Method (Third Edition)- McGraw-Hill, New York
- [12] Akbarov, S.D. (2015): Dynamics of Pre-Strained Bi-Material Elastic Systems- Springer International Publishing Switzerland
- [13] Zamanov, A.D. (2001): Stress distribution in a rigidly clamped composite plate with locally curved structures under forced vibration. - Internat. Appl. Mech., vol.37, No.9, pp.1189-1195.
- [14] Akbarov, S.D. & Özyaydin O. (2001a): The effect of initial stresses on harmonic fields with the stratified half plane-Eur. J. Mech. A/Solids, vol.20, pp.385-396.
- [15] Akbarov, S.D., & Özyaydin, O. (2001b): Lamb's problem for an initially stressed stratified half-plane. Int. Appl. Mech. vol.37(10), pp.1363–1367

- [16] Nayak, A.K., & Moy, S.S.J. & Shenoi, R.A. (2002): Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory. - Composites: Part B, vol.33, No.7, pp.505-519.
- [17] Guz, A.N. (2002): Elastic waves in a body with initial (residual) stresses. Int. Appl.Mech. vol.38(1), pp.23–59.
- [18] Emiroğlu, I., & Taşçı, F., & Akbarov, S.D. (2004): Lamb's problem for a half-space covered with a two axially prestretched layer. Mech. Compos. Mater. vol.40(3), pp.227–236.
- [19] Güler, C., & Akbarov, S.D. (2004): Dynamic (harmonic) interfacial stress field in a half-plane covered with a pre-stretched soft layer. Mech. Compos. Mater. vol.40(5), pp.379–387
- [20] Zhuk, Y.A. & Guz, I.A. (2006): Influence of prestress on the velocities of plane waves propagating normally to the layers of nanocomposites. -Int. Appl. Mech., vol.42, No.7, pp.729-743.
- [21] Zhuk, Y.A. & Guz, I.A. (2007): Features of propagation of plane waves along to the layers of an initially stressed nanocomposite material. - Int. Appl. Mech., vol.43, No.4, pp.3-26
- [22] Akbarov, S.D. (2007): Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses (review). Int. Appl. Mech. vol.43(12), pp.1305–1324
- [23] Akbarov, S.D., & Güler, C. (2007): On the stress field in a half-plane covered by the pre-stretched layer under the action of arbitrary linearly located time-harmonic forces. Appl. Math. Model. vol.31(11), pp.2375–2390
- [24] Pandit, M.K., & Singh, B.N. & Sheikh, A.H. (2008): Buckling of laminated sandwich plates with soft core based on an improved higher order zigzag theory. -Thin Wall Struct., vol.46, No.11, pp.1183-1191
- [25] Çilli, A. & Öztürk, A. (2010): Dispersion of torsional waves in initially stressed multi-layered circular cylinders. -Mech. Compos. Mater., vol.46, No.2, pp.227-236.
- [26] Kepçeler, T. (2010): Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder with an imperfect interface, Appl. Math. Model., vol.34, 4058–4073
- [27] Zamanov, A. D., & Agasiyev, E. R. (2011): Dispersion of Lamb waves in a three-layer plate made from compressible with finite deformations, Mech. Compos. Mater, vol.46, No. 6, pp.583–592

- [28] Akbarov, S.D., & Yıldız, A., & Eröz, M. (2011a): Forced vibration of the pre-stressed bi-layered plate-strip with finite length resting on a rigid foundation. *Appl. Math. Model.* vol.35, pp.250–256
- [29] Akbarov, S.D., & Yıldız, A., & Eröz, M. (2011b): FEM modelling of the time-harmonic dynamical stress field problem for a pre-stressed plate-strip resting on a rigid foundation. *Appl. Math. Model.* vol.35, pp.952–964
- [30] Eröz, M. (2012): The stress field problem for a pre-stressed plate-strip with finite length under the action of the arbitrary time-harmonic forces. *Appl. Math. Model.* vol.36, pp.5283–5292
- [31] Wen-tao, H., & Tang-dai, X., & Wei-yun, C. (2014): Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model. - *J. Cent. South Univ.*, vol.21, pp.753-760.
- [32] İpek, C. (2015): The dispersion of the flexural waves in a compound hollow cylinder under imperfect contact between layers, *Struct. Eng. Mech.*, vol.55, No. 2, pp.335–348
- [33] Daşdemir, A., & Eröz, M. (2015): Mathematical Modeling of Dynamical Stress Field Problem for a Pre-stressed Bi-layered Plate-Strip, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol.38, pp.733–760
- [34] Daşdemir, A. (2017a): Effect of imperfect bonding on the dynamic response of a pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and a piezoelectric core, *Acta Mech. Solid. Sinica*, vol.30, pp.658-667
- [35] Daşdemir, A. (2017b): Dynamic response of a pre-stressed bi-layered plate-strip subjected to an arbitrary inclined time-harmonic force, *Creat. Math. Inform.* vol.26, pp.255-262
- [36] Daşdemir, A. (2017c): Effect of initial stress on the dynamic response of a multi-layered plate-strip subjected to an arbitrary inclined time-harmonic force, *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*, vol.22, No.3, pp.521-537
- [37] Timoshenko, S.P. (2017): On the dispersion of Lamb waves in an elastic layer interacting with the ideal liquid half-space, No.1, pp.29-37

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Numan Tuğrul ERTUĞRUL  
Doğum Yeri ve Yılı : Konya / 13.12.1981  
Medeni Hali : Evli  
Yabancı Dili : Rusça- İngilizce  
E-posta : ntertugrul@kastamonu.edu.tr



### Eğitim Durumu

Lise : Erbil Kuru Lisesi (Y.D.A.)  
Lisans : Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi

### Mesleki Deneyim

İş Yeri : Cide Rıfat Ilgaz Meslek Yüksekokulu / Öğretim Görevlisi