T.C.
KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA VE BİR BİSKÜVİ İŞLETMESİNDE OPTİMUM ÜRÜN FORMÜLÜ OLUŞTURMA

Hazırlayan
Bayezid GÜLCAN

İşletme Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Prof. Dr. Osman ÇEVİK

KARAMAN – 2012

BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA VE BİR BİSKÜVİ İŞLETMESİNDE OPTİMUM ÜRÜN FORMÜLÜ OLUŞTURMA

Tezin Kabul Ediliş Tarihi: 03/08/2012

Jüri Üyeleri (Unvanı, Adı Soyadı)	İmzası
Başkan: Prof. Dr. Osman ÇEVİK	
Üye : Prof. Dr. Kemal ESENGÜN	
Üye : Doç. Dr. Nihat IŞIK	

Bu tez, Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Yönetim Kurulunun 13/07/2012 tarih ve 19/93 sayılı oturumunda belirlenen jüri tarafından kabul edilmiştir.

Enstitü Müdür V.: Prof. Dr. Kemal ESENGÜN

Mühür
İmza

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında değerli bilgileriyle yol gösteren ve tezin en güzel biçimde nihayete ermesini sağlayan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Osman Çevik'e, bulanık mantık konusunda değerli bilgilerini ve tezle ilgili zihin açıcı önerilerini esirgemeyen Selçuk Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Doç. Dr. Turan Paksoy hocam'a, ayrıca Kanada Western Ontario Üniversitesi Richard Ivey İşletme Okulu'nda tezimle ilgili çalışmalarımı yürüttüğüm üç ay süresince, problemi anlamam ve ön modeli kurmamda verdiği destekler için değerli hocam Sayın Dr. Mehmet A. Beğen'e,

Bunlarla birlikte, bu zaman dilimi içerisinde varlıklarını her daim hissettiğim ve bunun uzun seneler dahi sürmesini temenni ettiğim Annem ve Babam'a, tez çalışmam müddetince onlardan esirgemek zorunda kaldığım zamanlar için sevgili Eşim ve küçük Oğlum'a,

Tezim boyunca bana ayırdıkları zaman, gösterdikleri sabır ve verdikleri emek için teşekkür ederim.

Bayezid Gülcan
Karaman, 2012

ÖZET

Karar alma fonksiyonu, bir problemi çözmek veya yeni bir işe girişmek için bazı alternatifler arasından seçim yapmayı gerektirir. Bu kararlar genellikle güncel hayatın da özelliği itibariyle oldukça karmaşık ortamlarda geçekleşebilmektedir. Belirsizlikten veya kesin bilgiye sahip olamamaktan kaynaklanan bu karmaşık durumlara farklı çözüm yaklaşımları vardır. Matematik bilimindeki paradigma kaymalarından birisi de belirsizlik kavramı ve buna karşı çözüm yaklaşımları ile ilgilidir. 1965 yılında L. A. Zadeh tarafından, belirsizliği incelemek için kullanılan ve olasılık teorisinin ötesinde çoklu mantığa dayalı olan, bulanık küme teorisi geliştirilmiştir. Bu teorinin karar verme problemlerinde kullanıma ilişkin ilk çalışma 1970 yılında L. A. Zadeh ile beraber R. E. Bellman tarafından yapılmıştır. Bunlara dayalı olarak da bulanık doğrusal programlama ile ilgili ilk çalışma 1974 yılında H. J. Zimmermann tarafından sunulmuştur.

Bu çalışma; bisküvi, çikolata, kraker ve gofret grubu ürünlerin üretimini yapan bir işletmenin bisküvi üretim tesisinde karşılaştığı bir problemi konu almaktadır. İlgili problemin bulanık doğrusal programlama modeli kurulmuş ve modelin çözümü, Verdegay'ın parametrik programlama yaklaşımı ile gerçekleştirilmiştir. Çözüm sonucunda, işletmenin altı farklı ürün grup formülünde kullandığı hammadde maliyetlerini enazlamak için gidebileceği değişik ürün formülasyonları ve bunların sonucunda ortaya çıkan maliyet kazanımları ortaya konmuştur. 2011 yılı toplam üretim miktarlarına göre düşük(θ=0,3) tolerans düzeyinde gerçekleşebilecek kazanç $386.533 olurken, orta($\theta$=0,6) tolerans düzeyinde $776.533 ve yüksek($\theta$=0,9) tolerans düzeyinde ise $1.164.800 olmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Mantık, Bulanık Küme Teorisi, Bulanık Doğrusal Programlama, Üretim Planlama, Bisküvi Üretimi

ABSTRACT

Decision-making function, requires making selections among some alternatives in order to solve a problem or taking new actions. These decisions generally may occure in complicated circumstances in respect of characteristics of today's life. There have been different approachs to solve these complicated situations which arise from vagueness or not having the absolute information. One of the paradigm shifts in Mathematics is about the concept of vagueness and approachs to solve this. Fuzzy set theory which is beyond probablity theory and based on multi-valued logic is developed by L. A. Zadeh in 1965 to investigate the vagueness. The first paper which is about the use of this theory in decision-making problems is presented by L. A. Zadeh and R. E. Bellmann in 1970. Based on these, the first paper about fuzzy linear programming is presented by H. J. Zimmermann in 1974.

This study is about a problem experienced by a firm produces biscuits, chocolates, crackers and wafers products. The fuzzy linear programming model of the mentioned problem is established and the solution is made by Verdegay's parametric programming approach. To minimize the input costs, different product formulations among six product groups and respectively the cost benefits of them are stated in the solution. Based on 2011 total production amounts, the cost benefits of low(θ=0,3) tolerance level is $386.533 while the cost benefits of medium(θ=0,6) tolerance level is $776.533 and the high($\theta$=0,9) tolerance level is $1.164.800.

Key Words: Fuzzy Logic, Fuzzy Set Theory, Fuzzy Linear Programming, Production Planning, Biscuits Production

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .... **I**

ÖZET .... **II**

ABSTRACT .... **III**

İÇİNDEKİLER .... **IV**

TABLOLAR LİSTESİ .... **VIII**

ŞEKİLLER LİSTESİ .... **IX**

GİRİŞ **1**

BÖLÜM I

BULANIK KÜME TEORİSİ VE ÜYELİK FONSİYONLARI

1.1. Bulanık Küme Teorisi 5

1.1.1. Kesinlik, Belirsizlik(Müphemlik), Bulanıklık 5

1.1.2. Rastgelelik İle Bulanıklık Arasındaki Farklılıklar 7

1.1.3. Klasik Kümeler 9

1.1.4. Bulanık Kümeler 14

1.1.4.1. Bulanık Kümeler için Temel Küme İşlemleri 17

1.1.4.2. Bulanık Kümelerle İlgili Önemli Kavramlar 24

1.1.4.2.1. Eşitlik Kavramı 24

1.1.4.2.2. Kapsama Kavramı 24

1.1.4.2.3. Bulanık Kümelerde Üst Alma (Matematiksel Kuvvet) 25

1.1.4.2.4. Kardinalite (Bulanık Kümenin Büyüklüğü) 25

1.1.4.2.5. Kernel Kümesi 26

1.1.4.2.6. Normallik 26

1.1.4.2.7. Merkez Kavramı 27

1.1.4.2.8. α-Kesim(Seviye) Kümesi ... 27

1.1.4.2.9. Dışbükeylik ... 29

1.1.4.2.10. Bileşenlerine Ayırma Kuralı ve Betimleme Teoremi ... 30

1.1.4.2.11. Genişleme Kuralı ... 31

1.2. Üyelik Fonksiyonları ve İlgili Kavramlar ... 32

1.2.1. Üyelik Fonksiyonu ile İlgili Kavramlar ... 33

1.2.1.1. Öz (Core) ... 33

1.2.1.2. Destek (Support) ... 33

1.2.1.3. Sınırlar (Boundaries) ... 33

1.2.1.4. Yükseklik (Height) ... 34

1.2.1.5. Geçiş Noktası (Cross-over Point) ... 34

1.2.2. Üyelik Fonksiyonu Ataması ... 34

1.2.3. Üyelik Fonksiyonu Tipleri ... 37

1.2.3.1. Üçgen Üyelik Fonksiyonu ... 38

1.2.3.2. Yamuk Üyelik Fonksiyonu ... 38

1.2.3.3. İhtimal Yoğunluk Fonksiyonları ve Gaussal Üyelik Fonksiyonu ... 39

1.2.3.4. Genel Çan Eğrisi ... 41

1.2.3.5. Sigmoidal Üyelik Fonksiyon ... 41

1.2.3.6. S Şekilli Üyelik Fonksiyonu ... 42

1.3. Bulanık Sayılar ve İşlemler ... 43

1.3.1. Bulanık Sayı Tanımı ... 43

1.3.2. Üçgensel Bulanık Sayı ... 44

1.3.3. Yamuksal Bulanık Sayı ... 46

1.3.4. Gaussal Bulanık Sayı ... 47

1.3.5. Aralık Analizi ve α-Kesim Yöntemi 47

1.3.6. Bulanık Sayılarda Cebirsel İşlemler 48

BÖLÜM II

BULANIK MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA

2.1. Bulanık Ortamda Karar Verme 49

2.2. Önceki Çalışmalar 54

2.3. Matematiksel Programlamalarda Belirsizlik Açısından Farklar 60

2.4. Bulanık Doğrusal Programlama Modelleri ve Çözüm Yaklaşımları 61

2.4.1. Kısıtları ve Amaç Fonksiyonu Bulanık Olan Doğrusal Programlama 64

2.4.1.1. Zimmermann Yaklaşımı 65

2.4.1.2. Chanas Yaklaşımı 69

2.4.2. Kısıtları Bulanık Olan Doğrusal Programlama 72

2.4.2.1. Verdegay Yaklaşımı 72

2.4.2.2. Werners Yaklaşımı 74

2.4.3. Amaç Fonksiyonu Parametreleri Bulanık Olan Doğrusal Programlama 76

2.4.3.1. Verdegay Yaklaşımı 76

2.4.4. Sağ Taraf Sabitleri ve Teknoloji Katsayıları Bulanık Olan Doğrusal Programlama 78

2.4.4.1. Negoita ve Sularia Yaklaşımı 78

2.4.5. Bütün Katsayıları Bulanık Olan Doğrusal Programlama 79

2.4.5.1. Carllson ve Korhonen Yaklaşımı 79

BÖLÜM III

BİR BİSKÜVİ İŞLETMESİNDE BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İLE OPTİMUM MALİYETLİ ÜRÜN FORMÜLÜ OLUŞTURMA

3.1. Uygulamanın Amacı ve Önemi 83
3.2. Kullanılan Veriler ve Uygulamanın Çerçevesi 84
3.3. Uygulamaya Konu İşletme Hakkında Bilgi 84
3.3.1. İşletme Profili 84
3.3.2. Üretilen Ürünler ve Üretim Akış Semaları 85
3.3.2.1. Kremalı Bisküvi Üretim Akış Şeması 85
3.3.2.2. Sade Bisküvi Üretim Akış Şeması 87
3.3.3. Üretimde Kullanılan Hammadde Girdileri ve Birim Maliyetleri 88
3.3.4. Ürün Formülleri 89
3.3.4.1. Kremalı Bisküvi Formülü 89
3.3.4.2. Pötibör Bisküvi Formülü 92
3.4. Uygulama ile İlgili Klasik ve Bulanık Modellerin Kurulması 93
3.4.1. Problemin Tanımı 93
3.4.2. Klasik Modeller 94
3.4.3. Bulanık Modeller 101
3.4.4. Klasik ve Bulanık Doğrusal Programlama Modellerinin Çözümleri 109
SONUÇ VE ÖNERİLER 112
KAYNAKÇA 116
EKLER 125

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1: Klasik Küme İşlemlerinin Temel Özellikleri 12

Tablo 2: Bulanık Küme İşlemlerinin Temel Özellikleri 17

Tablo 3: Parametrik Bir Programlama Sonucu Olası Çözüm Değerleri 73

Tablo 4: Her μ Değerine Karşılık Gelen BDP Problemi için Optimal Değerler 82

Tablo 5: Üretimde Kullanılan Hammadde Fiyatları (2011 sonu itibariyle) 88

Tablo 6: Kremalı Bisküvi Ürünü Bileşen Oranları (%) 89

Tablo 7: K1 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%) 90

Tablo 8: K2 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%) 90

Tablo 9: K3 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%) 91

Tablo 10: K4 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%) 91

Tablo 11: P1 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%) 92

Tablo 12: P2 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%) 93

Tablo 13: Klasik Doğrusal Programlama Modelinin Çözüm Değerleri 110

Tablo 14: Bulanık Doğrusal Programlama Modelinin Çözüm Değerleri 111

Tablo 15: Normal ve Klasik Optimum Maliyetlerin Karşılaştırması ($/100kg) 113

Tablo 16: Optimum Değerler ile Olası Yıllık Kazanım Miktarları 113

Tablo 17: Düşük-Orta-Yüksek Tolerans Düzeylerindeki Kazanım Miktarları 114

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1: "İlk Yüz Sayma Sayıları" Evrensel Kümesinde Tanımlı A "İlk Beş Sayma Sayısı" Kümesinin Elemanlarının Karakteristik(Üyelik) Fonksiyonu 11

Şekil 2: "10 Civarındaki Reel Sayılar" Bulanık Kümesi İçin Önerilen Fonksiyonlar 16

Şekil 3: Klasik Küme ve Bulanık Kümelerin Venn Şeması ile Gösterimi 16

Şekil 4: İki Bulanık Kümenin Birleşimi 20

Şekil 5: İki Bulanık Kümenin Kesişimi 22

Şekil 6: Bir Bulanık Kümenin Tümleyeni 23

Şekil 7: α-Kesim Kümesinin Gösterimi 27

Şekil 8: Zayıf α-Kesim Kümesi 28

Şekil 9: Dışbükey Bir Bulanık Küme 30

Şekil 10: Bir Üyelik Fonksiyonunun Kısımlarının Gösterimi 34

Şekil 11: Üçgen Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi 38

Şekil 12: Yamuk Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi 39

Şekil 13: Gaussal Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi 40

Şekil 14: Çan Şekilli Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi 41

Şekil 15: Sigmoidal Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi 41

Şekil 16: S Şekilli Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi 42

Şekil 17: "Yaklaşık 5" Bulanık Sayısı 44

Şekil 18: Üçgensel Bulanık Sayı 45

Şekil 19: Yamuksal Bulanık Sayı 46

Şekil 20: Gaussal Bulanık Sayı 47

Şekil 21: Bulanık Hedef $\tilde{G}$, Kısıt $\tilde{C}$ ve Karar $\tilde{D}$ 52

Şekil 22: Bulanık Hedef Kümesi G̃, Bulanık Kısıt Kümesi C̃, Bulanık Karar Kümesi D̃ ve Optimum Karar x_{opt} 53

Şekil 23: $c^T x \gtrsim b_o$ Şeklindeki Bulanık Amacın Üyelik Fonksiyonu 67

Şekil 24: $-c^T x \lesssim -b_o$ Şeklindeki Bulanık Amacın Üyelik Fonksiyonu 68

Şekil 25: $(Ax)_i \lesssim b_i$ Şeklindeki Bulanık Kısıtlayıcının Üyelik Fonksiyonu 68

Şekil 26: Amaç Fonksiyonu için Üyelik Fonksiyonu 75

Şekil 27: Parametreye Ait Üstel Üyelik Fonksiyonu 81

Şekil 28: Kremalı Bisküvi Üretim Akış Şeması 86

Şekil 29: Pötibör Bisküvi Üretim Akış Şeması 87

Şekil 30: $(Ax)_i \cong b_i$ Şeklindeki Bulanık Kısıtlayıcıları Temsil Eden Üyelik Fonksiyonu 101

Şekil 31: K1 Modeli için b_1 Bulanık Kısıtının Üyelik Fonksiyonu ile Gösterimi 114

GİRİŞ

Yöneticiler sürekli olarak bir problemi çözmek veya yeni bir işe girişmek için bazı alternatifler arasından seçim yapmak durumunda kalmaktadırlar. İyi teşhis edilmiş ve detaylıca tanımlanmış problemleri çözmek ve hedeflere ulaşmak için alternatif faaliyet veya faaliyet toplulukları arasından, belirlenen kriterlere göre seçim yapılması ve en uygun olanının benimsenmesi karar verme eylemi olarak tanımlanmaktadır. Yöneticiler yönetme eyleminin gereği olarak karar verme süreçlerini devamlı olarak yaşamaktadırlar. Planlama, örgütleme, yürütme, denetim ve eşgüdüm sağlama gibi temel yönetim fonksiyonlarından her biri sürekli bir şekilde karar verme faaliyetleri ile yürümektedirler. Verilen kararlar mahiyetlerine göre basit olabileceği gibi oldukça karmaşık da olabilmektedir. Rekabetin küresel boyutlara taşındığı, karar kriterlerinin çok karmaşık bir hal aldığı yeni iş yapma ortamlarında karar verme fonksiyonu da profesyonelleşme ve bilimsel yöntemlerden yararlanmayı zorunlu kılmaktadır. Karmaşıklık genellikle belirsizlikten veya bilgi eksikliğinden kaynaklanır. Bu karmaşıklık içerisinde hızlı ve doğru karar vermenin yolu ise seçenekleri artıran ve belirsizlikleri azaltan bilimsel yöntemlerden geçmektedir.

Alternatif seçenekler arasından bir karara varılırken tecrübe ve bilgi birikimi gibi daha çok öznel olan nitel(kalitatif) süreçlerle birlikte sayısal tekniklerin kullanıldığı nicel(kantitatif) analiz süreçlerinden de faydalanılabilmektedir. Problemlerin oldukça karmaşık olduğu, yöneticilerin o türden bir karar ile ilk defa karşılaştığı, tecrübesinin ve bilgi birikiminin yetersiz kaldığı gibi durumlarda nicel analiz teknikleri kullanıcılarına büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

Nicel analiz süreçleri bilimsel süreçlerdir ve günümüzde bu tür yönetim tekniklerini kullanan işletmeler bu kararlara dayalı olarak aldıkları aksiyonlarda verimlilik ve kârlılıkları açısından farklılaşabilmektedirler. Nicel analizlerin başarısı kullanıcıların yöneylem araştırması yöntemlerine hâkimiyet derecesine bağlıdır. Ayrıca bilgi-işlem teknolojilerindeki gelişmeler yöneylem araştırmalarının başarı derecelerini ve kullanım alanlarını oldukça artırmaktadır.

Günümüzde problemlerin ortaya çıktığı ortamların karmaşıklıklarından ve belirsizliklerinden dolayı farklı görülmeleri ya da farklı algılanmaları durumları ise bulanıklık ile ifade edilebilir. Matematik bilimindeki paradigma değişimlerinden bir tanesi de bu belirsizlik kavramı ile ilgilidir. Bu paradigmal değişimin; belirsizlikten kaçıldığı ve bunun bilimdışı sayıldığı geleneksel bakış açısından, belirsizliğin de hayatın bir gerçeği olduğunu ve bilimsel yönden göz ardı edilmemesi gerektiğini, aksine faydalanılması gereken önemli bir durum olduğunu söyleyen alternatif bakış açısına doğru tedrici bir şekilde olduğu bilinmektedir (Klir & Yuan, 1995, s. 1).

Klasik yöntemler, gerçek hayatın basitleştirilerek ve farklı çevresel etkilerden yalıtılarak varsayımlarla kurulmuş modellemelerinde iyi sonuçlar verebilmektedir. Fakat bu yöntemler, gerçek hayatın daha karmaşık, çevre ile etkileşimli ve subjektif özellikler taşıması nedeniyle çok iyi sonuçlar verememektedir. Bilim ve teknolojideki gelişmeler, günümüzün karar verme ortamlarını oldukça karmaşık bir hale getirmiş ve karar süreçleri belirsiz ve incelenmesi zor bir özellik kazanmıştır.

Müphemliği(vagueness; belirsizlik) incelemek için kullanılan olasılık teorisi ve ilgili istatistiksel kavram ve yöntemler 1960’lı yıllarda tekrar gözden geçirilmiş ve eleştirilmiştir. Bu eleştiriler doğrultusunda olasılık teorisinin yerine kullanılabilecek farklı teoriler ve yöntemler geliştirmek için çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Daha çok olasılık teorisinin de dayandığı klasik ikili mantıkta belirsizliklere yer yoktur. Bir şey “var” ya da “yok” tur. Bilgi kesin sınırlar dâhilinde değerlendirilir. Bilim, klasik mantık temelli olarak 19. yüzyılda gerçek dünyayı basit ve kesin(precise) matematik modellere indirgeyerek problemlere çözüm aramıştır. Fakat bu yöntemler karmaşık, subjektif ve etkileşimli özelliklere sahip problemlerde çok başarılı olamayabilirler.

Yüzyılın ortalarına doğru yöneylem araştırmaları gerçek dünya karar alma problemlerine uygulanmaya başlanmış ve böylece bilim ve mühendislik alanında önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir. Fakat zaman geçtikçe bilimsel ve teknolojik gelişmelerin de etkisiyle iş yapma ve karar ortamları o kadar çok karmaşık bir hâl almıştır ki klasik yöneylem araştırması uygulamaları yetersiz kalmaya başlamıştır. 1960'larda, özellikle yapay zekâ uygulamaları gibi pratik problemleri modellemede olasılık teorisinin kullanımı gözden geçirilmiş, eleştirilmiş ve olasılık teorisinin yerine kullanılabilecek daha etkili yöntemler geliştirmek için çalışmalar yapılmıştır (Lai & Hwang, 1992, s. 1).

Aynı yıllarda(1965) Lütfi Aliasker Zade(*İng:*Lotfi A. Zadeh) tarafından bulanık küme teorisinin temelleri atılmıştır. Bulanık küme teorisi, gerçek dünyanın matematiksel olarak ifade edilmesini, böylece klasik matematiğin yarattığı ön kabullere dayalı kesin sınırların aşılarak belirsizliğin karar süreçlerinde yer almasını sağlamıştır. Bilim ve teknolojinin hemen hemen her alanında bulanık küme teorisinin yaygın kullanımı ile sıradan insanlar bile kendilerini, gündelik yaşamlarında bu teorinin kullanımı ile ortaya çıkan endüstriyel ürünlerle iç içe, "fuzzy" kelimesi ile başlayan elektronik eşyaları kullanırken bulmuşlardır. Pratikte bu kadar yaygın olan çalışmalar, endüstriyel sistemlerde de karar verme konusuna getirdiği yeni açılımlar ile klasik yöneylem araştırması çalışmalarının etki alanını genişletmiştir (Paksoy & Atak, 2003).

Bundan sonra bilimde ve yöneylem araştırması çalışmalarında, yapay zekâ ve uzman sistemlerde, denetim teorisinde ve birçok başka alanda bulanık küme teorisi uygulama alanı bulmuştur. Bulanık küme teorisi, yöneylem araştırmalarının doğrusal programlama, doğrusal olmayan programlama, dinamik programlama, çok amaçlı karar problemleri, stokastik programlama, kuyruk teorisi gibi alanlarında, bunun yanında veri madenciliğinde, regresyon modellerinde vs. uygulama fırsatları bulmuştur.

Bisküvi sektörü ile ilgili bilimsel kaynaklarda pek fazla çalışmaya rastlanılamaması nedeniyle, Karaman ilinde faaliyet gösteren ve ekonomik büyüklüğü yeterli olan bir bisküvi işletmesinde üretim uygulamasına yönelik bir araştırma yapılmaya çalışılmıştır.

Uygulamadaki bu boşluk ve klasik matematiksel programlama modellerinin bulanıklık içeren durumları incelemede yetersiz kalması nedeniyle yapılan bu çalışma giriş ve sonuç bölümleri dışında üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, bulanık yöntem ve matematik programlamalara temel teşkil eden bulanık küme teorisi, klasik küme teorisi ile karşılaştırılmalı olarak verilmektedir. Beraberinde bulanık küme teorisinin üzerine oturduğu kavram olan üyelik fonksiyonu, bu fonksiyonun belirlenmesi ve üyelik fonksiyonu çeşitleri aktarılmaya çalışılmaktadır. Bölüm içerisinde son olarak bulanık matematiksel modellemeye temel teşkil edecek olan bulanık matematik ilkeleri ve işlemler anlatılmaktadır. İkinci bölümde, uygulamada kullanılacak yöntem olan bulanık doğrusal programlama ve ilkeleri, bu yöntemin çeşitleri, bu yönteme dayalı literatüre girmiş farklı yaklaşım tarzları anlatılmaktadır. Son olarak üçüncü bölümde, uygulamaya dönük yapılan araştırma, ilgili işletmenin üretim sürecinin modellenmesi, veri toplama ve ilgili verilerle matematiksel modelin çözümü anlatılmaktadır. Sonuç itibariyle çalışmada, ilgili işletmenin, üretim bölümünde karşı karşıya kaldığı bir problem için bulanık doğrusal programlama yöntemi yardımıyla bir karara varması ve problemin en iyi sonuçla üstesinden gelmesi sağlanmaya çalışılmaktadır.

BÖLÜM I

BULANIK KÜME TEORİSİ VE ÜYELİK FONSİYONLARI

1.1. Bulanık Küme Teorisi

Bulanık teori(fuzzy theory), 20. yüzyılın ikinci yarısında ortaya çıkmıştır. Bu teori şu üç teoremin- klasik küme teorisindeki keskin sınırlar, her önermenin ya doğru ya da yanlış olduğunu söyleyen klasik mantık(Aristotelesçi-ikili mantık) ve klasik ölçme teorisindeki, özellikle de olasılık teorisindeki toplanırlık ilkesi- temel varsayımlarına bir alternatif olarak geliştirilmiştir. 1980'lerden itibaren bulanık teori, çeşitli etkenlerle yavaş yavaş ilerlemeye başlamıştır. Oysa bulanık teori ortaya çıktığı yüzyılın ortalarından 1980'lere kadar başta çoğunlukla şüphe, yetersizlik ve bazı yerlerde açıkça düşmanlıkla karşılanmıştır. Özellikle ABD'de bazı etkili bilim adamları ilk gelişme evrelerinde teoriye çok tepki göstermiştir. Buna karşılık tanınmış birçok uzak doğulu, özellikle Japon akademisyenler ve bazı araştırma kuruluşları(Uluslararası Bulanık Mühendislik Araştırmaları Laboratuarı-LIFE The Labaratory for International Fuzzy Engineering Research, Bulanık Mantık Sistemleri Enstitüsü-FLSI Fuzzy Logic Systems Institute gibi) bu teoriyi benimsemiş ve sonuç itibariyle birçok başarılı uygulama ve teoride gelişmeler gerçekleşmiştir. Böylece diğer ülkelerde teoriye ilgi daha da artmaya başlamıştır (Gençer, 1991, s. 239).

1.1.1. Kesinlik, Belirsizlik(Müphemlik), Bulanıklık

Bir kavramı anlatan, bir amacı aktaran veya bir sistemi tanıtan ifadelerdeki belirsizliğe veya kesin olmama haline *bulanıklık* denir. İnsanların zihinsel düzeydeki algılama farklılıkları, onların subjektif davranışları, ifade ve amaçlarındaki belirsizlikler, bulanıklık kavramı ile açıklanabilir (Özkan, 2003).

Modelleme ve hesaplamaların birçoğu kesin, açık ve deterministiktir. Kesin demek ile mantıksal işlemlerde daha çok-daha az yerine evet-hayır anlamı ifade edilmektedir. Geleneksel ikili mantıkta bir ifade doğru ya da yanlıştır ve bunların arasında başka bir şey olamaz. Bu mantık yaklaşımı ile küme teorisinde bir öğe, kümenin elemanıdır ya da değildir veya optimizasyon işlemlerinde çözüm ya uygundur(feasible) ya da değildir. Kesinlik, nihayetinde modelin yapısının ve parametrelerinin açıkça bilindiğini ve parametre değerleri veya ortaya çıkışları hakkında hiçbir şüpheye yer olmadığını gösterir (Zimmermann, 1991, s. 1).

Gerçekçi model veya modelleme dillerinde iki ana güçlük ortaya çıkar:

-Gerçek durumlar, genellikle kesin ve deterministik değildir ve tam olarak tanımlanamazlar.

-Gerçek bir sistemin tam olarak tanımlanması, bir insanın anında farkına varıp, algılayıp anlayabileceğinden çok daha detaylı veri gerektirir.

Geçmişte bazı düşünürler tarafından bu durumun farkına varılmıştır. Örneğin 1923'de filozof Bertrand Russel "Vagueness(Müphemlik)" adlı makalesinde yukarıdaki karmaşıklıklardan ilki için, geleneksel mantığın alışıldığı şekilde kesin yani tam doğru(precise) sembolleri kullandığını varsayar. Bu nedenle hayali bir semavi hayat haricinde dünyevi hayatta uygulanabilir olmadığını ifade eder (Russel, 1923).

Lotfi A. Zadeh ise 1973'te yukarıdaki ikinci duruma işaret etmekte ve bir sistemin karmaşıklığı arttıkça bizlerin sistemin davranışı hakkında kesin ve anlamlı ifadeler kurma kabiliyetimizin azalacağını ifade etmektedir (Zimmermann, 1991, s. 3).

1.1.2. Rastgelelik İle Bulanıklık Arasındaki Farklılıklar

Rastgelelik ve bulanıklık, belirsizliği farklı şekilde ele alırlar. Genel olarak rastgelelik, bir olayın meydana gelmesindeki belirsizliği açıklarken, bulanıklık bir olayın belirsizliğini açıklar (Ross ve ark., 2002, s. 90). Rastgelelik, olayın oluşundaki kesin olmayışlığı ifade eder. Bulanıklık ise olayın olup olmadığını değil, hangi dereceye kadar olduğunu ölçer. Bulanıklığın aksine rastgelelik, bilginin artmasıyla birlikte ortadan kalkar (Baykal & Beyan, 2004, s. 310-311).

Değişken değeri olarak bir dildeki kelimeleri alabilen değişkene *sözel(dilsel) değişken* denir (Zadeh, 1975, s. 199). Bulanıklık, karar vericinin doğasında vardır ve dilsel değişkenler bulanık oranlar kullanarak nitel özellikler üzerinde alternatif bir değerlendirme yapmaya çok elverişlidir. Gerçek dünya sorunları ne kadar yakından incelemeye alınırsa çözüm daha da bulanık hale gelecektir. Çünkü çok fazla olan bilgi kaynaklarının tümü aynı anda ve etkileşimli olarak kavranamaz ve bunlardan net sonuçlar çıkarılamaz (Şen, 2004, s. 8-10).

Gerçek dünya sistemleri ve problemleri birçok yönden kesin değildir ve belirsizliklerle doludur. Bilgi eksikliği nedeniyle bu sistem ve problemlerin gelecekteki durumları tam olarak bilinemezler. Bu belirsizlik tipi "stokastik"tir. Örneğin, "Kar yağma olasılığı %60'tır." ifadesi stokastik bir belirsizliktir. Stokastik belirsizlik, olasılık teorisi ve istatistik bilimleri tarafından uygun bir şekilde ele alınabilmektedir. Kolmogorov tipi olasılık, frekansa bağlı ve küme teorisi tabanlıdır. Koopman'ın olasılık yaklaşımı ise ifadelerin doğruluğu üzerine bina edilmiştir ve dolayısıyla mantık tabanlıdır. Her iki yaklaşımda da olaylar(küme elemanları) ya da ifadeler iyi tanımlanmış olarak varsayılırlar. Bu tip belirsizliğin ya da müphemliğin *stokastik belirsizlik* olarak ifade edilmesi gerekmektedir.

Bunun karşıtı olarak, olayların ve ifadelerin anlamsal manalarını ilgilendiren veya insanların kavramları değerlendirme ve sonuçlar çıkarmada kullandıkları sözcüklerin yol açtığı müphemlik tipi *bulanıklık* olarak ifade edilmiştir. Bulanıklık; mühendislik, tıp, meteroloji, üretim, pazarlama gibi hayatın birçok yerinde görülebilmektedir. Özellikle karar verme, anlamlandırma, öğrenme gibi birçok alanda ve insan düşünce, yargı ve değerlendirmelerinin önemli olduğu durumlarda sıkça rastlanmaktadır (Zimmermann, 1991, s. 3-4).

Özetle bulanık teori, dilsel terimlerden kaynaklanan belirsizliği ya da müphemliği modellemeyi mümkün kılan bir yöntemdir. Subjektif olan insan algı ve yorumlarını içeren sistemleri modellemek için kullanılır (Marler, Yang, & Rao, 2004).

Bulanık teori ortaya atılıncaya kadar belirsizlikle ilgili matematiksel işlemler, yukarıda da belirtildiği gibi olasılık teorisi ile modellenmiştir. Olasılık teorisindeki belirsizlik, olayın belli bir dağılıma bağlı olarak gerçekleşme ihtimali ile ilgilenir. Bu durum olasılık teorisinde rastgelelik kavramıyla açıklanmaktadır. Bulanık teorideki belirsizlik ise bir kümenin sınırlarının kesin olarak tanımlanamaması ile ilgilidir (Ross, Booker, & Parkinson, 2002, s. 90). Yani olasılık teorisi olayların gerçekleşip gerçekleşmeme dağılımı üzerine kurulu iken, bulanık teori olayların ne dereceye kadar gerçekleştiği ile ilgilenir. Olaylar gerçekleşme durumlarına ve üyelik derecelerine göre ilgili karar kümesinin elemanı haline gelmektedirler.

Bunların yanında günlük hayatta iletişim kurarken kullanılan konuşma dili müphemliklerle doludur. Kullanılan ifadeler tam olarak tanımlanmasa da birçoğunun kesin sınırları belirli olmadığı için bulanık bir kümeyi ifade etmektedir. Örneğin, “şişman adam”, “kış ayları” gibi ifadeler farklı kişilere algılamalarındaki farklılıklardan dolayı farklı şeyler ifade edebilir. Burada şişmanlığın ölçüsü nedir? Sadece kilo mudur? Kilo ise hangi kilolar şişman kategorisine girerken, hangileri zayıf kategorisine girer? Veya 1,60 cm. boyunda birisi için şişman olma durumu hangi kilo durumlarını kapsayan kümeyi karşılar? 1,90 cm. boyunda birisi için bu kümenin kesin sınırları nedir?

Anlaşıldığı üzere olasılık teorisinin en büyük engeli, algıya dayalı bilgiyi işleyememesidir. Çünkü olasılık teorisinde algıların anlamını gösterecek ve hesaplamaya katacak bir mekanizma mevcut değildir. Bu sebeple klasik teorilere göre yapılacak mantıksal çıkarımlar için ölçmeye dayalı bilgiler olan sayılara ihtiyaç duyulmaktadır. Buna karşılık bulanık teori, konuşma dili ile ifade edilen bilgileri mantıksal çıkarım için kullanmamıza yardımcı olmaktadır. Bulanık teoride, sayılarla yapılan hesaplama yerine kelimelerle yapılan hesaplamalar mümkündür. Kısaca, bulanık teori ile olaylar daha gerçekçi ve dilsel değişkenlerle açıklanabilir hale getirilebilir. Bulanık teorinin sağladığı bu açılımlar da, bulanık kümeler ve onlarla yapılabilen bulanık küme işlemleri vasıtasıyla olmaktadır (Baykal & Beyan, 2004, s. 310).

1.1.3. Klasik Kümeler

Klasik küme teorisi, iyi tanımlanmış nesnelerin bir arada ifade edilmesi ve birbirleri arasındaki belirli ilişkileri özetleyerek ve genelleştirerek ortaya koyan matematiksel bir hesaplamadır (Smithson & Verkuilen, 2006, s. 4).

Temel olarak bir küme A={1, 2, 3, 4, 5}, B={Ocak, Şubat, Mart} veya buna benzer nesneler listesidir. Fakat kümeler, genellikle aralarında bir kurala bağlı olarak o kümenin üyesi olup olmamayı belirleyen bir ilişki bulundurmaktadır. Mesela A kümesi “sayma sayıları kümesinin ilk beş üyesi” ve B kümesi “kış mevsimi ayları” gibi kurallarla belirlenmiş olabilir. Burada A kümesinin bağlı olduğu kural kesin ve herkesçe aynı anlaşılan bir kuralı belirtirken, B kümesi farklı algılamalara neden olabilen, kesin olmayan ve belirsizlik içeren bir kural belirtmektedir. Çünkü A kümesini tanımlayan kural herkesçe aynı anlamı ifade ederken, B kümesinin kuralı kuzey-güney yarım küreye göre, aynı yarım küredeki fakat farklı iklimsel bölgelere göre, aynı yarım küre ve iklimsel bölgede yaşayan farklı kişilere göre ve buna benzer nedenlerle farklı farklı algılanabilmektedir.

Kümeleri oluşturan nesnelere o *kümenin üyesi(elemanı, öğesi)* ve üzerinde çalışılan bütün kümeleri kapsayan kümeye de *evrensel küme* denilmektedir.

Klasik bir küme pek çok şekilde ifade edilebilir. Sonlu bir küme, genel olarak,

$U=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ve sonsuz küme genel olarak, $U=\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$şeklinde ifade edilir. Burada U, evrensel bir kümeyi, bu kümedeki a_i elemanı, kümenin üyesini ifade eder. Evrensel kümeler, klasik kümelerdir.

Burada A ve B olarak verilen kümelerin evrensel kümelerini A kümesi için U_A, ilk yüz sayma sayısı ve B kümesi için de U_B, yılın oniki ayı şeklinde düşünebiliriz.

Bir U evrensel kümesinde tanımlı olan bir A kümesini göstermek için üç temel yöntem vardır:

Listeleme yöntemi, bir kümenin elemanlarının sırayla listelendiği ve yukarıda A ve B kümelerini gösterirken kullanılan yöntemdir.

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

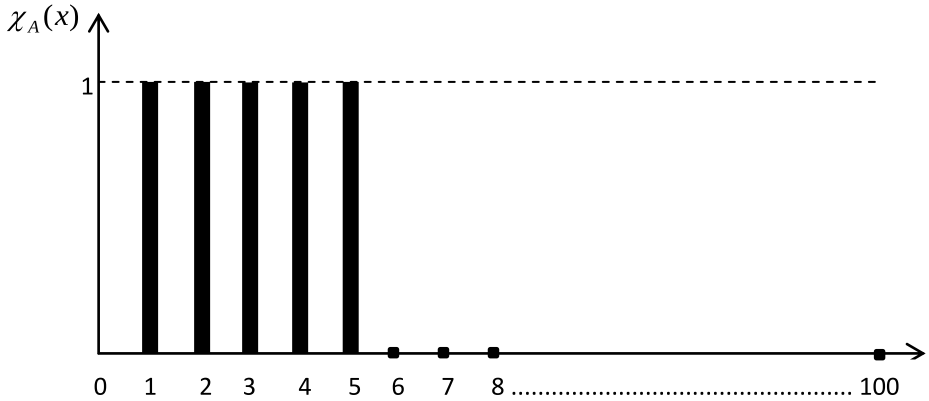
Kural yöntemi, kümenin üyelerini bir araya getiren ortak özelliğinin bir notasyon ile ifadesidir.

$A=\{x \mid 1\leq x\leq 5,\ x\in U_A)$

Karakteristik fonksiyon yöntemi, hangi elemanların kümenin üyesi olduğunu ve hangilerinin olmadığını belirtir. Örneğin, A kümesinin karakteristik fonksiyonu $\chi_A(x)$ ile gösterilirse bu fonksiyon A kümesinin elemanlarını, şayet A klasik bir küme ise, {0,1} değer aralığında eşleyen bir fonksiyondur (Klir & Yuan, 1995, s. 6). A klasik kümesi matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \text{A ise} \\ 0 & , x \notin \text{A ise} \end{cases}$$

$\chi_A(x) \rightarrow \{0,1\}$ olarak tanımlanan ve bu evrensel kümede tanımlı her x elemanından A kümesinin elemanı olanları $\chi_A(x)$ =1 ve yine A kümesinin elemanı olmayanları $\chi_A(x)$ =0 değerleri ile eşleyen $\chi_A(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 1: "İlk Yüz Sayma Sayıları" Evrensel Kümesinde Tanımlı A "İlk Beş Sayma Sayısı" Kümesinin Elemanlarının Karakteristik(Üyelik) Fonksiyonu

Burada tanım gereği $\chi_A(1) = \chi_A(2) = \chi_A(3) = \chi_A(4) = \chi_A(5) = 1$ olduğu için A kümesinin elemanı olan x'lerin aldığı üyelik derecesi 1 iken, üye olmayanların üyelik derecesi ise 0 ile gösterilmiştir.

Kümeler üzerinde dört genel işlem yapılabilmektedir. Bunlar birleşim($\cup$), kesişim($\cap$), tümleme(değilleme, $^{-}$) ve kapsama($\subseteq$)dır. Bu işlemleri ifade edebilmek için

A ve B kümelerinin aynı evrensel kümede tanımlı olduğu kabul edilsin. Bu iki küme üzerinde gösterilme notasyonları $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $A \subseteq B$ şeklindedir. Klasik kümelerin temel işlemleri aşağıda verilen tablodaki gibi özetlenebilir.

Tablo 1: Klasik Küme İşlemlerinin Temel Özellikleri

Çift Değilleme *(Involution)*	$\bar{\bar{A}} = A$
Değişme *(Commutativity)*	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Birleşme *(Associativity)*	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Dağılma *(Distributivity)*	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Yansıma *(Idempotence)*	$A \cup A = A$; $A \cap A = A$
Yutma *(Absorption)*	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$
Yutma *(U ve ∅ tarafından)*	$A \cup U = U$; $A \cap \varnothing = \varnothing$
Özdeşlik *(Identity)*	$A \cap U = A$; $A \cup \varnothing = A$
Çelişme Kuralı *(Law of Contradiction)*	$A \cap \bar{A} = \varnothing$
Orta Terimin Yokluğu Kuralı *(Law of Excluded Middle)*	$A \cup \bar{A} = U$
De Morgan Kuralı *(De Morgan's Law)*	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Kaynak: Klir, G. J. ve Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, New Jersey: Prentice Hall, s.8.

Kümelerin üyelik değerleri ya da dereceleri hakkında bilgi veren fonksiyon literatürde *karakteristik fonksiyon* yerine daha çok *üyelik fonksiyonu* terimi ile adlandırılmaktadır ve $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ simgesi ile gösterilmektedir.

Klasik kümelerdeki kesişim, birleşim, tümleme, kapsama işlemleri üyelik fonksiyonlarına dayanılarak birtakım işlemciler yardımıyla aşağıdaki gibi formüle edilebilirler (Özkan, 2003, s. 10-11).

Kesişim:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x)\times\mu_B(x) & \text{, } \textit{cebirsel çarpım} \\ \mathit{max}(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) \text{-} 1) & \text{, } \textit{sınırlı çarpım} \\ \dfrac{\mu_A(x)\times\mu_B(x)}{2-(\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_B(x)\times\mu_B(x))} & \text{, } \textit{Einstein çarpımı} \\ \mathit{min}(\mu_A(x), \mu_B(x)) & \text{, } \textit{minimum} \end{cases}$$

Birleşim:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x)+\mu_B(x) \text{-} \mu_A(x)\times\mu_B(x) & \text{, } \textit{cebirsel toplam} \\ \mathit{min}(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)) & \text{, } \textit{sınırlı toplam} \\ \dfrac{\mu_A(x)+\mu_B(x)}{1+(\mu_A(x)\times\mu_B(x))} & \text{, } \textit{Einstein toplamı} \\ \mathit{max}(\mu_A(x), \mu_B(x)) & \text{, } \textit{maksimum} \end{cases}$$

Tümleme:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Kapsama:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

1.1.4. Bulanık Kümeler

Bulanık küme, bir aralıkta sürekli üyelik değerleri ile derecelenmiş nesneler sınıfıdır denilebilir. Böyle bir küme, elemanları 0 ve 1 arasında ölçeklendirilmiş üyelik dereceleri ile karakterizedir (Zadeh, 1965). Bulanık küme kavramı, klasik küme kavramının genelleştirilmiş bir halidir. Bu nedenle bulanık küme kavramının tanımları, teoremleri ve ispatları bulanık olmayan kümeler için de geçerlidir (Tuş, 2006, s. 11).

Bulanık kümelerin üyelik fonksiyonu, U evrensel kümesine ait herhangi bir x elemanının Ã bulanık kümesine üyelik derecesini ifade eder ve $\mu_{\tilde{A}}(x)$ simgesi ile gösterilir. Üyelik fonksiyonu, negatif olmayan reel sayılar kümesinin sonlu bir alt kümesidir ve üyelik derecesi sıfır olan elemanlar genellikle küme listesinde gösterilmezler. Bulanık küme, kısmi üyeliğe izin vererek klasik kümeyi genelleştirir ve üyelik için reel sayılar kümesinde [0,1] kapalı aralığında herhangi bir değeri üyelik düzeyi için kabul eder. Bu şekilde kabul edilen $\mu_{\tilde{A}}(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır (Zimmermann, 1991, s. 12).

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \to [0,1]$$

Anlaşılacağı üzere $\mu_{\tilde{A}}(x)$ üyelik fonksiyonu 0 ve 1 arasında sürekli tanımlıdır ve bu aralıkta değerler alır. Alınan değerlerden 0, ilgili elemanın söz konusu bulanık kümeye üye olmadığını ve 1 ise tam üye olduğunu ifade ederken, aradaki değerler diğer elemanların üyeliğini derecelendirmektedir. Ã kümesi kural yöntemi ile ifade edilecek olursa,

$$\tilde{A} = (x, \mu_{\tilde{A}}(x)), \forall x \in U$$

olarak gösterilebilir. Burada $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$ çiftine *bulanık teklik* denir. Bulanık teklikler,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \big/ x$$

şeklinde de gösterilebilirler (Tsoukalas & Uhrig, 1997, s. 16).

Ã kümesi, U evrensel kümesinde bulanık bir kümeyi ifade eder ve elemanları kesikli olursa;

$$\forall x \in \mathrm{U} \text{ için } \tilde{\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i = \mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n$$

elemanları sürekli olursa;

$$\forall x \in \mathrm{U} \text{ için } \tilde{\mathrm{A}} = \int_{i} \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i$$

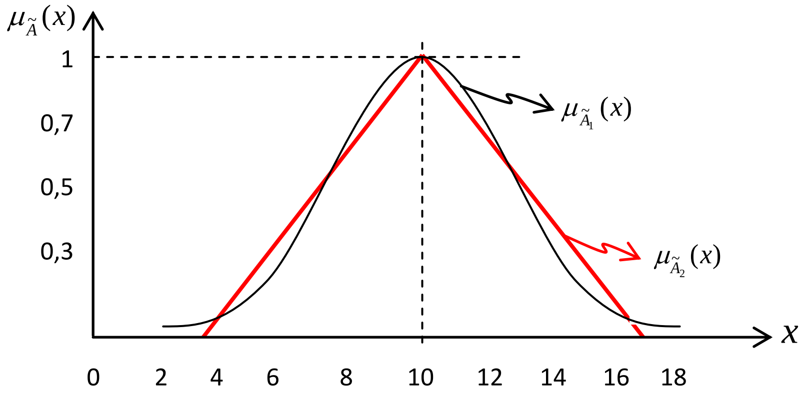
şeklinde ifade edilir. Buradaki $\sum$, $\int$, / ve + işaretleri cebirsel anlamda sırasıyla toplam sembolü, integral alma sembolü, bölme ve toplama işlemlerini göstermez. “$\sum$“ ve “$\int$“ işaretleri, sıralı ikililerin sırasıyla kesikli ve sürekli evrenlerde bir araya getirilmesini ifade eder. “/” işareti, matematiksel olarak $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$ sıralı ikilisini ifade etmek için kullanılan bir ayraçtır.

Bulanık kümeler, bulanıklık ifade eden ya da bulanık algılanan sözel değişkenler(ifadeler) ve bu değişkenlerin alacağı şıklara göre şekillenirler. Bu nedenle bulanık küme üyelik dereceleri, klasik kümeler için evrensel kümede tanımlı elemanların üyelik dereceleri gibi kesinlik belirten sadece {0,1} değerleri ile değil, süreklilik arz eden ve [0,1] aralığında üyelik dereceleri alan elemanlardan oluşmaktadır.

Örneğin, “10 civarındaki reel sayılar” ifadesinde sözel bir niteleyici olan “civarındaki” takısı ifadeyi bulanıklaştırmaktadır. Böyle bir ifadenin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(x)$’in şekli, aşağıdaki şekildeki gibi veya benzer simetrik üyelikleri akla getirir. Bu fonksiyonlar ilgili olayın karakterine, problemin özelliklerine veya kişisel yargı ve tecrübelere dayalı olarak değişebilir.

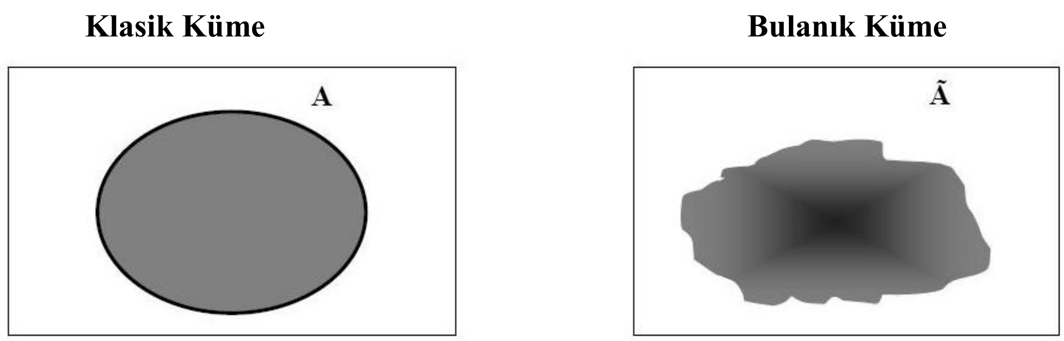
Öncelikle bulanık küme üzerinde düşünüldüğü zaman,

$\tilde{A}_1=\{(x,\ \mu_{\tilde{A}_1}(x)) \mid \forall x\in[2,18],\ \mu_{\tilde{A}_1}(x)=\frac{1}{1+(x-10)^2}\}$'a benzer olacak ve $\mu_{\tilde{A}_1}(x)$ da Şekil 2'dekine benzer bir fonksiyon olacaktır (Bojadziev & Bojadziev, 2007, s. 12). Fakat duruma göre bu ifade $\mu_{\tilde{A}_2}(x)$ gibi veya daha başka şekillere de sahip olabilmektedir.



Şekil 2: "10 Civarındaki Reel Sayılar" Bulanık Kümesi İçin Önerilen Fonksiyonlar

Klasik küme ve bulanık küme en temel küme gösterimlerinden olan Venn şeması ile görsel olarak Şekil 3'deki gibi ifade edilebilir (Yıldırım, 2008, s. 18).



Şekil 3: Klasik Küme ve Bulanık Kümelerin Venn Şeması ile Gösterimi

Şekillerden görüleceği üzere, klasik küme kesin sınırlara sahip iken, bulanık küme kesin olmayan ve bulanık sınırlara sahiptir. Merkezdeki yoğun alandan dışarı doğru az yoğunluğa geçiş $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$ üyelik derecesinden, $\mu_{\tilde{A}}(x)=0$ üyelik derecesine kademeli bir geçişi temsil eder. Fakat $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonlu klasik kümenin gösteriminden de anlaşılacağı üzere, eleman kesin sınırlar dâhilinde ise "1", bunun dışında ise "0" değerini almaktadır.

1.1.4.1. Bulanık Kümeler için Temel Küme İşlemleri

Üyelik fonksiyonları, bulanık kümeler ve bulanık küme ifadeleri için çok önemlidir. Öyle ki klasik kümelerdeki birleşim, kesişim ve tümleme gibi mantıksal işlemler bulanık kümelere bu üyelik fonksiyonları aracılığıyla uyarlanırlar (Zimmermann, 1991, s. 16-17).

Bulanık kümeler üzerinde birleşim, kesişim ve tümleme(değilleme) işlemlerinin birkaç temel özelliği vardır. Bu özellikler Tablo 2'deki gibi ifade edilebilir.

Tablo 2: Bulanık Küme İşlemlerinin Temel Özellikleri

Çift Değilleme *(Involution)*	$\mu_{\bar{\bar{\tilde{A}}}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)$
Değişme *(Commutativity)*	$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{B}\cup\tilde{A}}(x)$
	$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{B}\cap\tilde{A}}(x)$
Birleşme *(Associativity)*	$\mu_{(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cup\tilde{C}}(x)=\mu_{\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cup\tilde{C})}(x)$
	$\mu_{(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cap\tilde{C}}(x)=\mu_{\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cap\tilde{C})}(x)$
Dağılma *(Distributivity)*	$\mu_{\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cup\tilde{C})}(x)=\mu_{(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cup(\tilde{A}\cap\tilde{C})}(x)$
	$\mu_{\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})}(x)=\mu_{(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cap(\tilde{A}\cup\tilde{C})}(x)$
Yansıma *(Idempotence)*	$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)$ $\quad\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)$
Yutma *(Absorption)*	$\mu_{\tilde{A}\cup(\tilde{A}\cap\tilde{B})}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)$ $\quad\mu_{\tilde{A}\cap(\tilde{A}\cup\tilde{B})}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)$

Yutma *(U ve ∅ tarafından)*	$\mu_{\tilde{A}\cup U}(x) = \mu_U(x)$
	$\mu_{\tilde{A}\cap\phi}(x) = \mu_\phi(x)$
Özdeşlik *(Identity)*	$\mu_{\tilde{A}\cap U}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)$
	$\mu_{\tilde{A}\cup\phi}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)$
De Morgan Kuralı *(De Morgan's Law)*	$\mu_{\overline{\tilde{A}\cap\tilde{B}}}(x) = \mu_{\bar{\tilde{A}}\cup\bar{\tilde{B}}}(x)$
	$\mu_{\overline{\tilde{A}\cup\tilde{B}}}(x) = \mu_{\bar{\tilde{A}}\cap\bar{\tilde{B}}}(x)$

Kaynak: Özkan, 2003, s. 20

Yukarıdaki tablo incelendiğinde klasik küme işlemlerinden Orta Terimin Yokluğu Kuralı'nın ve Çelişme Kuralı'nın bulanık kümelerde geçerli olmadığı görülmektedir. Klasik kümelerde bir kümeye ait olan bir eleman diğer kümeye ait değilken, bulanık kümelerde bir kümeye kısmi olarak üye olan bir eleman diğer kümeye de kısmi üye olabilmektedir. Şayet evrensel kümeyi her elemanın 1 üyelik derecesi ile üye olduğu ve boş kümeyi de elemanlarının üyelik derecesinin 0 olduğunu kabul edersek söz konusu kurallar şu şekilde ifade edilebilmektedir (Özkan, 2003, s. 20-21).

$$\mu_{\tilde{A}\cap\bar{\tilde{A}}}(x) \neq \mu_\phi(x)$$
$$\mu_{\tilde{A}\cup\bar{\tilde{A}}}(x) \neq \mu_U(x)$$

Bulanık kümelerdeki kesişim, birleşim ve tümleme gibi işlemler birçok işlemci ile belirlenebilmektedir. Bu işlemleri gerçekleştirmek için genellikle *minimum*, *maksimum* ve *değilleme* işlemcileri kullanılır (Bellman & Zadeh, 1970, s. 6). Birçok işlemcinin olması durumu, teorik bir bakış açısının varlığı ve geleneksel mantıkta kullanılan küme işlemcilerinin bulanık küme haline doğru genişletilmesi ve farklı uygulamalara dayanan nedenlerle açıklanabilir (Wang, 1997, s. 29).

Birleşim İşlemi:

Ã ve B̃ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonlarını Ã∪B̃'nin üyelik fonksiyonuna dönüştüren eşleşmeleri s-eşleşmesi(s-norms ya da t-conorms) olarak adlandırılır. s-eşleşmeleri (Zimmermann, 1991, s. 31)

s: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

şeklinde tanımlanırlar ve

$s[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] = \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x)$

olarak ifade edilirler.

Önceki çalışmalarda, birleşim kümesini belirlemek için yaygın olarak cebirsel toplam, sınırlı toplam, drastik toplam, maksimum ve Einstein toplamı gibi parametrik olmayan s-eşleşmeleri ile Yager sınıfı, Hamacher sınıfı, Frank sınıfı, Dombi sınıfı ve Dubois-Prade sınıfı gibi parametrik s-eşleşmeleri kullanılmaktadır. Klasik kümelerde bu parametrik olan ve parametrik olmayan işlemler birbirlerine denk sonuçlar vermektedir (Li & Yen, 1995, s. 80). Bu çalışmada bu işlemcilerin hepsine değinilmeyecektir. Fakat bu işlemciler arasında

maksimum işlemcisi $\leq$ *s-eşleşmeleri* $\leq$ *drastik toplam işlemcisi*

şeklinde bir ilişki vardır (Dubois & Prade, 1980, s. 10). Burada, bu işlemcilerden alt sınırı teşkil eden maksimum işlemcisine değinilmiştir.

Ã ve B̃ bulanık kümelerinin bileşimi Ã∪B̃ ile gösterilir ve hem Ã hem de B̃ tarafından kapsanan en büyük bulanık küme olarak tanımlanır. Ã, B̃, C̃ $\subset$ U olmak üzere C̃=Ã∪B̃ için üyelik fonksiyonu,

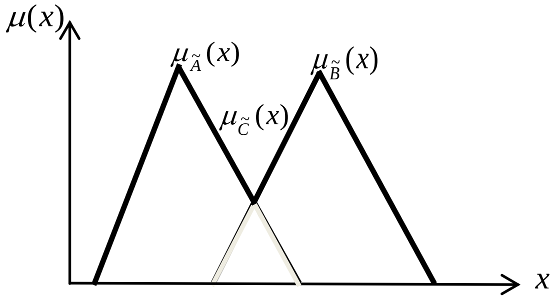
$\forall x \in \mathrm{U}$ için, $\mu_{\tilde{C}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$

ya da "$\vee$" sembolü ile daha basit olarak

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$$

şeklinde ifade edilebilir (Zadeh, 1965, s. 340).

Bulanık kümelerde birleşme işlemi şekil ile gösterilecek olursa, iki bulanık kümenin birleşiminin üyelik fonksiyonu, bireysel üyelik fonksiyonlarının maksimumu olarak siyah kalın çizgi ile gösterildiği şekilde tanımlanır (Nguyen & Walker, 1999, s. 7).



Şekil 4: İki Bulanık Kümenin Birleşimi

Kesişim İşlemi:

Ã ve B̃ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonlarını Ã∩B̃'nin üyelik fonksiyonuna dönüştüren eşleşmeleri t-eşleşmesi(t-norms) olarak adlandırılır. t-eşleşmeleri,

t: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

şeklinde tanımlanırlar ve

$$\mathrm{t}[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] = \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x)$$

olarak ifade edilirler (Zimmermann, 1991, s. 30).

Kesişim kümesini belirlemek için; cebirsel çarpım, sınırlı çarpım, drastik çarpım, minimum ve Einstein çarpımı gibi parametrik olmayan t-eşleşmeleri ile Yager sınıfı, Hamacher sınıfı, Frank sınıfı, Dombi sınıfı ve Dubois-Prade sınıfı gibi parametrik t eşleşmeleri kullanılmaktadır. Klasik kümelerde bu parametrik olan ve parametrik olmayan işlemler birbirlerine denk sonuçlar verir (Özkan, 2003, s. 22-23). Burada da bütün bu işlemcilere değinilmeyecektir. Fakat bu işlemciler arasında

drastik toplam işlemcisi $\leq$ *t-eşleşmeleri* $\leq$ *minimum işlemcisi*

şeklinde bir ilişki vardır (Dubois & Prade, 1980, s. 18). Burada daha pratik olması ve tüm bu bulanık kesişim işlemcilerinden en güçlü t-eşleşmesi olan ve bu eşleşmelerin üst sınırını oluşturan minimum işlemcisine değinilmiştir.

$\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C} \subset U$ olmak üzere, $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ ile gösterilen $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin kesişimi ve hem $\tilde{A}$ hem de $\tilde{B}$ tarafından kapsanan en büyük bulanık küme, $\tilde{C}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$'nin üyelik fonksiyonu,

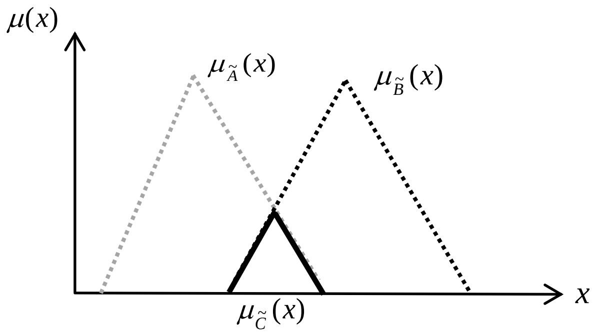
$$\forall x \in U \text{ için, } \mu_{\tilde{C}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

ya da "$\wedge$" sembolü ile daha basit olarak

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$$

şeklinde ifade edilebilir (Zadeh, 1965, s. 341).

Bulanık kümelerde kesişme işlemi şekil ile gösterilecek olursa iki bulanık kümenin kesişiminin üyelik fonksiyonu, bireysel üyelik fonksiyonlarının minimumu olarak siyah kalın çizgi ile gösterildiği şekilde tanımlanır (Nguyen & Walker, 1999, s. 7).



Şekil 5: İki Bulanık Kümenin Kesişimi

Tümleme İşlemi:

Tümleyen işlemi c-eşleşmesi ile adlandırılır ve

c: [0,1] × [0,1] →[0,1] şeklinde tanımlanırlar. $c[\mu_{\tilde{A}}(x)] = \mu_{\bar{\tilde{A}}}(x)$ ile gösterilir.

Literatürde yaygın olarak kullanılan tümleyenler; değilleme tümleyeni, Sugeno sınıfı tümleyen(λ-tümleyeni), Yager sınıfı tümleyeni(w-tümleyeni) şeklindedir (Özkan, 2003, s. 31-32).

En sık kullanılan değilleme tümleyenine göre,

$\forall x \in \mathrm{U}$ için, $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)$

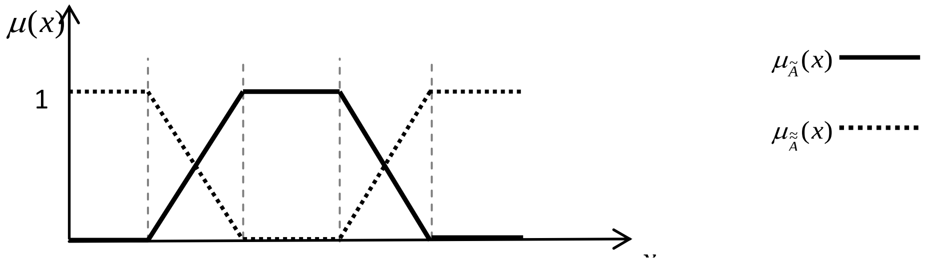
şartı yerine geliyorsa Ã ve B̃ kümeleri birbirlerinin tümleyenleridir.

U evrensel kümesine göre Ã bulanık kümesinin tümleyeni, $\bar{\tilde{A}}$ veya $\tilde{A}^C$ şeklinde gösterilebilir. Bu durumda $\forall x \in \mathrm{U}$ için,

$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$

olur (Zimmermann, 1991, s. 17).

Tümleyen, "değil" bağlacına karşılık gelir ve aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 6: Bir Bulanık Kümenin Tümleyeni

Yukarıdaki temel bulanık küme işlemlerine şu örnek verilebilir:

Ã ve B̃ birer bulanık küme olmak üzere Ã "5 civarındaki sayılar" ve B̃ "biraz toleransla 3'ten küçük sayma sayıları" olarak ele alınsın ve bu kümelerin üyelik dereceleri ile gösterilişi aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0.1	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.1
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	1	1	1	0.7	0.5	0.3	0.1	0	0

Bu durumda;

Ã∪B̃={1/1, 1/2, 1/3, 0.8/4, 1/5, 0.8/6, 0.6/7, 0.4/8, 0.1/9}

Ã∩B̃={0.1/1, 0.4/2, 0.6/3, 0.7/4, 0.5/5, 0.3/6, 0.1/7}

$\overline{\tilde{A}}$ ={0.9/1, 0.6/2, 0.4/3, 0.2/4, 0.2/6, 0.4/7, 0.6/8, 0.9/9}

şeklinde olacaktır.

Maksimum, minimum ve değilleme işlemcileri hesaplanması ve kodlanması kolay olduğu için karar vericilerin yöntemlerine daha uygun olur. Uygun işlemci seçilirken aşağıda belirtilen noktalara dikkat edilmesi gerekmektedir (Yılmaz, 1998, s. 21,22).

i. Varsayımları az işlemci daha iyi sonuçlar verebilir.

ii. Seçilecek işlemcinin gerçek hayat koşullarına uyup uymadığı gözlemlerle ispat edilmelidir.

iii. Bir işlemci ilgilenilen duruma uygun olmalıdır.

iv. Hesaplanması alternatifine göre basit olmalıdır.

v. Sonuç üyelik derecesinin değişim aralığı olabildiğince geniş olmalıdır.

vi. İşlemcinin olabildiğince düşük ölçü düzeyine uygun olması istenir.

1.1.4.2. Bulanık Kümelerle İlgili Önemli Kavramlar

1.1.4.2.1. Eşitlik Kavramı

Aynı U evrensel kümesinde tanımlı Ã ve B̃ gibi iki bulanık kümenin üyelik fonksiyonları, evrensel kümedeki elemanları için aynı üyelik derecesine sahipse bu iki bulanık küme birbirine eşittir. Bu eşitliğin ifadesi aşağıdaki gibidir (Bandemer & Gottwald, 1996, s. 9),

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x),\ \forall x \in U \leftrightarrow A \equiv B$$

Fakat bu iki kümenin üyelik fonksiyonları arasında (Özkan, 2003, s. 36),

$\mu_A(x) \neq \mu_{\tilde{B}}(x),\ \exists x \in U \leftrightarrow A \neq B$ ilişkisi varsa bu iki kümenin eşit olduğu söylenemez.

İki bulanık kümenin eşit olabilmesi için her iki kümenin elemanları ve üyelik dereceleri aynı olmalıdır (Zadeh, 1965, s. 340).

1.1.4.2.2. Kapsama Kavramı

Ã bulanık kümesi B̃ bulanık kümesi tarafından kapsanıyorsa ya da farklı bir ifade ile Ã, B̃’nin alt kümesi ise bu ifade matematiksel olarak;

Ã, B̃ $\subset$ U için

$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} = \{ \forall x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x) \}$

şeklinde gösterilebilir (Zadeh, 1965, s. 340).

1.1.4.2.3. Bulanık Kümelerde Üst Alma (Matematiksel Kuvvet)

Ã, herhangi bir bulanık küme ve *m* pozitif bir gerçel sayı olmak üzere $\tilde{A}^m$,

$\mu_{\tilde{A}^m}(x) = [\mu_{\tilde{A}}(x)]^m$ biçiminde tanımlanır (Zimmermann, 1991, s. 28).

1.1.4.2.4. Kardinalite (Bulanık Kümenin Büyüklüğü)

Bulanık kümelerde kardinalite veya küme büyüklüğü kavramları klasik kümelerden daha zengin ve problematiktir. Klasik kümelerde kardinalite kavramı kümenin eleman sayısını gösterir. Kardinalite kavramı, bulanıklıktan arındırma ve alt küme olma derecesi gibi diğer bazı özellik ve kuralları tanımlamak için gerekli olan bir kavramdır. Bu kavram, kümelerde normalaltı bulanık kümeler için bir normalizasyon faktörü olarak da kullanılır. Card(Ã) ile gösterilir (Özkan, 2003, s. 41).

Skaler kardinalite klasik küme kardinalitesinin genelleştirilmiş bir halidir ve kümenin bütün elemanlarının üyelik derecelerinin toplamı ile ifade edilir. Sonlu bir evrensel kümede tanımlı olan Ã bulanık kümesinin skaler kardinalitesi $|\tilde{A}|$ ile de gösterilir ve şu şekilde ifade edilir (Smithson & Verkuilen, 2006, s. 37-38),

$$|\tilde{A}| = \sum_{i=1}^{N} \mu_{\tilde{A}}(x_i), \ x_i \in U$$

Evrensel kümenin büyüklüğü eleman sayısına eşittir. Skaler kardinalitenin evrensel kümenin büyüklüğüne oranına *nisbî kardinalite* denir ve şu şekilde tanımlanabilir (Zimmermann, 1991, s. 16; Smithson & Verkuilen, 2006, s. 38),

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{N}$$

1.1.4.2.5. Kernel Kümesi

Kernel kümesi, Ã bulanık kümesine tamamen üye olan ya da Ã bulanık kümesinin üyelik derecesi 1 olan elemanların oluşturduğu, destek kümesi gibi bulanık olmayan, kesin bir kümedir ve aşağıdaki gibi ifade edilir (Özkan, 2003, s. 40),

$$\mathrm{Kernel}(\tilde{A}) = \{x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

1.1.4.2.6. Normallik

Eğer bulanık bir Ã kümesinde bulunan elemanlardan en az birinin üyelik derecesi 1 ise Ã bulanık kümesi normallik özelliğine sahiptir. Bu özellik matematiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilir (Ross, 2010, s. 92),

$$hgt(\tilde{A}) = sup[(\mu_{\tilde{A}}(x)] = 1 \qquad , \forall x \in U$$

"hgt" terimi yüksekliği ifade ederken(bkz. bölüm 1.2.1.4), "sup" terimi burada "en büyük(yüksek)" anlamında kullanılmıştır. Diğer taraftan bulanık Ã kümesinin yüksekliği 1'den küçük ise o bulanık kümeye *normalaltı(subnormal)* denir. Diğer bir ifadeyle, normalaltı bulanık kümelerde evrensel kümenin her elemanı, ilgili bulanık kümeye tam olarak üye değildir veya ilgili bulanık kümeye kısmen üyedir (Özkan, 2003, s. 39). Boş olmayan her normalaltı bulanık bir küme, üyelik derecelerinin her birini en büyük üyelik derecesine bölerek normalleştirilebilir (Bojadziev & Bojadsiev, 1995, s. 114).

$$\mathrm{norm}(\tilde{A}) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{\mathrm{hgt}(\tilde{A})} \qquad , \forall x \in U$$

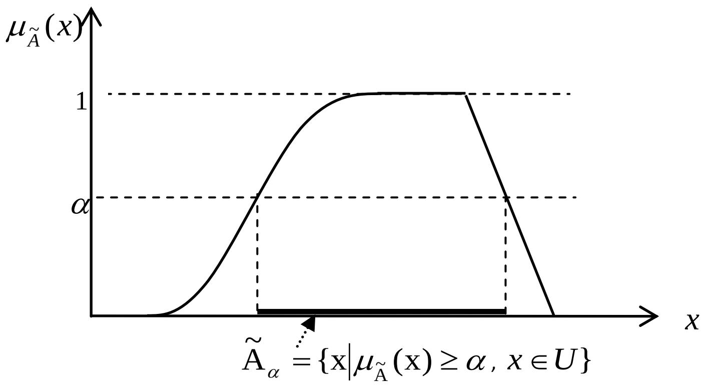
1.1.4.2.7. Merkez Kavramı

Bulanık bir Ã kümesine ait üyelik fonksiyonunun maksimum değeri sonlu bir sayı olduğunda, bu kümede yer alan üyelik derecelerinin ortalama değeri, bulanık küme Ã'nın merkezini verir. Ortalama değer negatif(veya pozitif) sonsuza eşitse, üyelik fonksiyonunun maksimum değerine ulaştığı noktalar arasından en büyük (veya en küçük) olan noktaya merkez denir (Özkan, 2003, s. 40).

1.1.4.2.8. α-Kesim(Seviye) Kümesi

Ã bulanık kümesinin üyelik dereceleri α'ya eşit veya daha büyük elemanlarından oluşan klasik kümeye *α-kesim kümesi* denir. Bir Ã bulanık kümesinin α-kesimi şu şekilde tanımlanabilir (Lai & Hwang, 1992, s. 21).

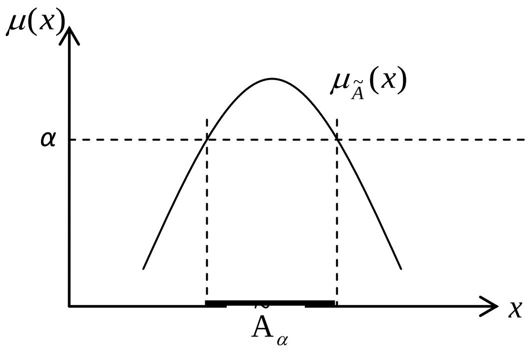
$$\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha,\ x \in U\}$$



Şekil 7: α-Kesim Kümesinin Gösterimi

Matematiksel gösterimdeki büyükeşit "≥" yerine büyük ">" kullanılırsa, yani kesit kümesi üyelik dereceleri α 'dan sadece büyük olan elemanlardan oluşturuluyorsa α kesitin bu çeşidine *güçlü α-kesim kümesi* denir ve $\tilde{A}_{\alpha+}$ ile gösterilir (Klir & Yuan, 1995, s. 19).

Bu durumda "≥" ile ifade edilen klasik kümeye *zayıf* α*-kesim* kümesi denebilir. Üyelik fonksiyonunun süreklilik özelliğine sahip olması durumunda zayıf α-kesimi ile kuvvetli α-kesimi arasında bir farklılık olmaz. Eğer üyelik fonksiyonu sürekliyse ve destek kümesi gerçel sayılardan oluşuyorsa dışbükey bulanık bir kümenin zayıf α-kesimi Şekil 8'deki gibi kapalı bir aralıktır (Terano, Asai, & Sugeno, 1992, s. 29-30).



Şekil 8: Zayıf α-Kesim Kümesi

α-kesimi, bir bulanık kümenin desteğinin genelleştirilmiş halidir ve $\alpha=0$ değeri için $\tilde{A}_\alpha=supp(\tilde{A})$ 'dir (Xu & Zhou, 2011, s. 9).

α değeri, $\alpha \in (0,1]$ koşuluyla tanımlanan 0 ve 1 arasındaki gerçel bir sayıyı gösterir ve $\mu(x)$ üyelik fonksiyonu için bir değerdir. Bir üyelik fonksiyonu, bir kısıt değeri ya da bir amaç değeri gibi, bir fonksiyon değerini, bir kümede bir üyelik derecesine işaretlerken; bir α-kesimi, üyelik derecesini, fonksiyon değerlerinin gerçek bir aralığına işaretler. Bu halde bir α-kesimi, ters bir üyelik fonksiyonudur denebilir (Marler, Yang, & Rao, 2004).

Her bir α düzeyi ile üyelik fonksiyonunun farklı bir dilimi belirlenir. α değeri arttıkça, α-kesimiyle oluşturulan geleneksel kümedeki eleman sayısı azalır. $\tilde{A}_\alpha$ kümesi, $\alpha=0$ iken evrensel kümeye, $\alpha=1$ iken Kernel kümesine denktir. Bu durum, sırasıyla $\tilde{A}_0=U$

ve $\tilde{A}_1$=Kernel(Ã) şeklinde ifade edilir. Bununla beraber α -kesim kümeleri aşağıda verilen özellikleri sağlar (Özkan, 2003, s. 42-43).

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cup \tilde{B}_\alpha$$
$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cap \tilde{B}_\alpha$$
$$(\overline{\tilde{A}})_\alpha \neq (\overline{\tilde{A}_\alpha}); \ \alpha \neq 0{,}5 \text{ durumunda}$$

α -kesim kümesi için, x elemanının $\tilde{A}_\alpha$ içindeki üyelik fonksiyonlarının alacağı değerler, matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir (Bodjanova, 2003, s. 239).

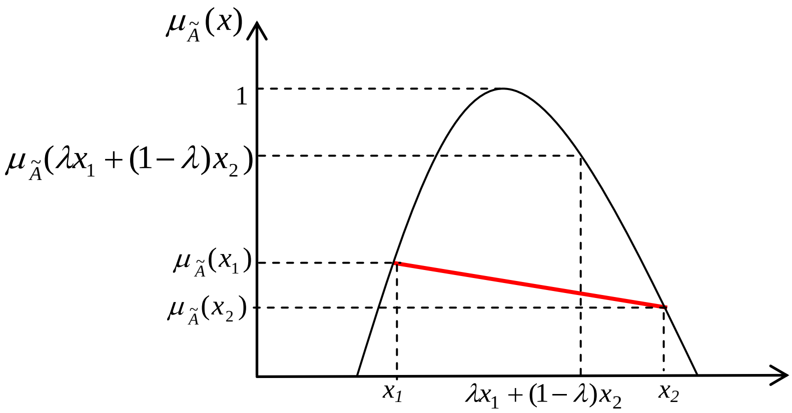
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , \ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \\ 0 & , \ \mu_{\tilde{A}}(x) < \alpha \end{cases}$$

1.1.4.2.9. Dışbükeylik

Dışbükeylik kavramı, klasik kümelerde taşıdığı özelliklerin birçoğunu koruyacak şekilde bulanık kümelere genişletilebilir. Bunun için, evrensel kümenin n-boyutlu öklitsel uzay R^n'de tanımlı olması gerekir. Bulanık kümelerde dışbükeylik kavramı, özellikle optimizasyon ile ilgili uygulamalarda oldukça faydalı olup α -kesimlerine veya üyelik fonksiyonlarına göre tanımlanabilir. Üyelik fonksiyonlarına göre dışbükeylik kavramı ise $x_1, x_2 \in U$ ve $\lambda \in [0,1]$ koşulları ile aşağıda verildiği gibi tanımlanabilir (Özkan, 2003, s. 44).

$$\mu_{\tilde{A}}[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2))$$

Eğer $\forall \lambda \in [0,1]$ olmak üzere bir Ã bulanık kümesinin her seviyedeki α kesitleri dışbükey ise Ã bulanık kümesi de dışbükeydir denir. Dual olarak Ã'nın tümleyeni $\tilde{A}^C$ dışbükey ise Ã içbükeydir. Bunun yanında Ã ve $\tilde{B}$ dışbükey ise $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ de dışbükeydir. Dual olarak da Ã ve B̃ içbükey ise Ã∪B̃ de içbükeydir. Yukarıda verilen dışbükeylik tanımı, Şekil 9'da gösterilmiştir (Xu & Zhou, 2011, s. 12).



Şekil 9: Dışbükey Bir Bulanık Küme

1.1.4.2.10. Bileşenlerine Ayırma Kuralı ve Betimleme Teoremi

Bulanık bir küme, bulanık olmayan α-kesim kümelerinin bir dizisi olarak kısımlara ayrıştırılabilir. Evrensel kümede tanımlı olan bulanık bir kümenin α-kesimlere göre açıklamasını sağlayan kurala *bileşenlere ayırma kuralı* denir. Bileşenlere ayırma kuralının matematiksel ifadesi şu şekildedir (Özkan, 2003, s. 45-46).

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \max_{\alpha \in (0,1)} \left[\min\left(\alpha, \mu_{\tilde{A}_\alpha}\right) \right] \qquad , \forall x \in U$$

Burada α-kesim kümesi A_α nın üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$\mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, eğer } x \in \tilde{A}_\alpha \text{ ise} \\ 0 & \text{, eğer } x \notin \tilde{A}_\alpha \text{ ise} \end{cases}$$

Betimleme teoremi, bulanık bir kümenin α-kesim kümelerine ayrıştırılması ve $\alpha \times \tilde{A}_\alpha$ kümelerinin birleşimi olarak gösterilmesini sağlayan bir yaklaşımdır. Bazı uygulamalarda üyelik fonksiyonu tam olarak bilinemez ve bu belirsizliği gidermek için betimleme teoremi, üyelik fonksiyonuna yaklaşma imkânı veren bir çözüm aracı sağlar. Ã bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ile ve α-kesim kümeleri de $\tilde{A}_{\alpha}$ ile gösterildiğinde, α değerini A_{α} kesim kümesi ile çarparak, bulanık bir küme olan $\alpha \times \tilde{A}_{\alpha}$ kümesi oluşturulur. $\alpha \times \tilde{A}_{\alpha}$ kümesinin,

$$\mu_{\alpha \times \tilde{A}_{\alpha}}(x) = \min\lfloor \alpha, \mu_{\tilde{A}_{\alpha}} \rfloor \qquad , \forall x \in U$$

üyelik fonksiyonu ile nitelenmesi halinde, A kümesi betimleme teoremine $\bigcup$ terimi birleşim işlemini göstermek üzere aşağıdaki gibi tanımlanır (Özkan, 2003, s. 47-48).

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \mu_{\alpha \times \tilde{A}_{\alpha}}(x)$$

1.1.4.2.11. Genişleme Kuralı

Genişleme kuralı, matematiksel teorilerin bulanık ortamlarda kullanılmasını sağlar ve bulanık bağıntı ve bulanık aritmetiğin temelini oluşturur. *x* ve *y* değişkenleri sırasıyla $x \in \tilde{A}$, $y \in \tilde{B}$ olacak şekilde Ã ve B̃ bulanık kümelerindeki elemanları göstersin. Ayrıca Ã ve B̃ kümelerinin sırasıyla U ve V evrenlerinde tanımlı olduğunu kabul edelim. Ã kümesinin,

$$\tilde{A} = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

şeklinde olduğu bir durumda, *x* ve *y* değişkenleri arasında *y=f(x)* şeklinde fonksiyonel bir ilişki varsa veya bu değişkenlerin tanımlı olduğu evrensel kümeler arasında $f{:}U \rightarrow V$ şeklinde bir eşleşme söz konusu ise, B kümesinin üyelik fonksiyonu genişleme kuralı ile aşağıdaki gibi bulunur (Özkan, 2003, s. 50-51):

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = f\left(\frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}\right) = \frac{\mu_A(x_1)}{f(x_1)} + \frac{\mu_A(x_2)}{f(x_2)} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{f(x_n)}$$

Burada $y=f(x)$ fonksiyonunun bire bir özellikte olması gerekir. Diğer bir ifadeyle, x değişkeninin alabileceği değerleri gösteren evrensel kümeden, y değişkeninin alabileceği değerleri gösteren evrensel kümeye doğru birebir nitelikte fonksiyonel bir eşleşme olmalıdır. Genişleme kuralı neticesinde bulanık küme ve fonksiyonel bir ilişki yine bulanık küme ile sonuçlanmaktadır (Tsoukalas & Uhrig, 1997, s. 30).

1.2. Üyelik Fonksiyonları ve İlgili Kavramlar

Klasik matematik, basitçe ikili karaktere sahipken bulanık küme teorisi; algısı, subjektifliği, tutumu, amaç ve kavrayışındaki müphemlikleri ile insan faktörünü içeren durumlarla ilgilidir. Bulanık küme teorisi, klasik küme teorisine müphemlik ve dilselliği dâhil etmesiyle beraber daha güçlü ve esnek bir hale gelmektedir. Bununla birlikte üyelik fonksiyonları bulanık küme teorisinde hayati öneme sahiptirler. Bulanık küme teorisi çok genel, esnek ve kurallı bir teoridir. Bu nedenle üyelik fonksiyonları ve işlemcilerin tek bir anlamsal yorumları yoktur. İçeriğe bağlı anlamsal yorum, farklı matematiksel yorum ve uygulamalara yol açabilir (Lai & Hwang, 1992, s. 30).

Hatırlanacağı üzere, üyelik fonksiyonları U evrensel kümesine ait *x* elemanlarının Ã bulanık kümesine ait olma derecelerinin değişimini gösteren fonksiyonlardır. Üyelik fonksiyonu bu bulanık kümenin sahip olduğu bilgileri açıklamaktadır. Bu nedenle bu fonksiyonlarla ilgili kavramları, fonksiyon tiplerini ve nasıl oluştuklarını açıklamak gerekmektedir.

1.2.1. Üyelik Fonksiyonu ile İlgili Kavramlar

Bir üyelik fonksiyonu ve şekli ile ilgili beş temel kavramdan bahsedilebilir. Bunlar; öz(çekirdek), destek, sınırlar, yükseklik ve geçiş noktalarıdır. En genel hali ile yamuk şeklindeki bir üyelik fonksiyonu ve kısımları Şekil 10'da gösterilmiştir.

1.2.1.1. Öz (Core)

Bulanık kümenin tam üyeliğe sahip elemanlarının oluşturduğu topluluğa üyelik fonksiyonunun *özü(çekirdeği)* denir. Yani öz, Ã bulanık kümesine üyeliği $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ olan evrensel kümedeki *x* elemanlarından oluşur (Ross, 2010, s. 90).

1.2.1.2. Destek (Support)

Ã bulanık kümesinin üyelik derecesi sıfırdan büyük olan elemanlarına Ã bulanık kümesinin *desteği* denir (Tuş, 2006, s. 17).

Bu desteğin oluşturduğu klasik kümeye ise *destek kümesi* denir (Özkan, 2003, s. 40). Bir Ã bulanık kümesinin desteği, *supp*(Ã), evrensel kümenin kesin(crisp) altkümesidir (Zimmermann, 1991, s. 14). Destek kümesi matematiksel olarak aşağıda verildiği gibi tanımlanır (Dubois & Prade, 1980, s. 10).

$$supp(\tilde{A}) = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0 \text{ ve } x \in U\}$$

1.2.1.3. Sınırlar (Boundaries)

Bir Ã bulanık kümesi için üyelik fonksiyonunun sınırları, sadece kısmen üyeliğe sahip olan elemanların oluşturduğu kesin bir kümedir. Diğer bir tanımla, sınır kümesi, evrensel küme U'da tanımlı Ã bulanık kümesine kısmen üye olan elemanların yer aldığı klasik bir kümedir. Matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Ross, 2010, s. 91).

$$sınır(\tilde{A}) = \{x \mid 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1 \text{ ve } x \in U\}$$

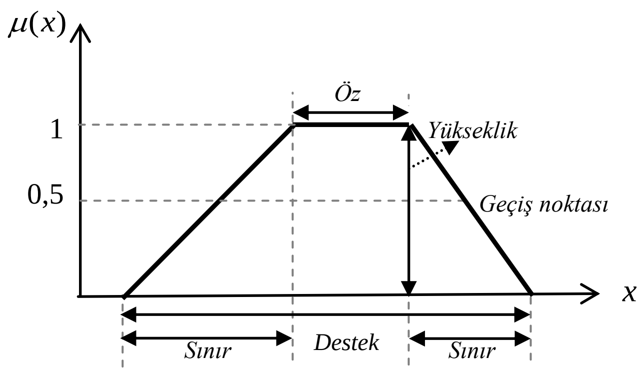
1.2.1.4. Yükseklik (Height)

Bulanık bir Ã kümesinin en büyük üyelik derecesi o kümenin yüksekliğini verir. Yükseklik, Ã bulanık kümesi tarafından verilen bilginin geçerliliği veya kredibilitesi şeklinde görülebilir. Yükseklik, matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir (Ross, 2010, s. 92).

$$hgt(\tilde{A}) = max[\mu_{\tilde{A}}(x)] \qquad , \forall x \in U$$

1.2.1.5. Geçiş Noktası (Cross-over Point)

Bir üyelik fonksiyonunun geçiş noktası, evrensel kümede tanımlı Ã kümesine $\mu_{\tilde{A}}(x)$ =0,5 üyelik derecesi ile üye olan elemanları ifade eder (Ross, 2010, s. 92).



Şekil 10: Bir Üyelik Fonksiyonunun Kısımlarının Gösterimi

1.2.2. Üyelik Fonksiyonu Ataması

Üyelik fonksiyonları, tercihe dayalı üyelik fonksiyonları ve olabilirlik(possibility) dağılımları olmak üzere iki ana gruba ayrılır. Tercihe dayalı üyelik fonksiyonu karar vericilerin isteklerinin ortaya çıkarılması ile teşkil edilirken, olabilirlik fonksiyonu ihtimal fonksiyonunun bir benzeşeni olarak olayların muhtemel meydana gelişlerinden teşkil edilir (Lai & Hwang, 1992, s. 34). Olabilirlik, öğeler arasında hiçbir ayrım gözetmeden her birinin eşit önemi varmış gibi sonuçların yazılmasıdır (Şen, 2004, s. 44).

Üyelik fonksiyonlarının doğru ve uygulama ile olabildiğince örtüşen bir şekilde belirlenmesi, bulanık küme teorisinde ve buna dayalı modellemelerde önemli hale gelmektedir. Bulanık bir kümeye ilişkin üyelik fonksiyonunun belirlenmesi, rastgele bir değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlenmesine benzetilebilir.

Bulanık kümelerde çalışılırken, üyelik fonksiyonu veya elemanlarının üyelik derecelerinin belirlenmesi süreçleri sezgisel olabileceği gibi bazı algoritmik ya da mantık temelli de olabilir. Üyelik fonksiyonlarının belirlenmesinde kullanılan yöntemler genel olarak; sezgi(intuition), çıkarım(inference), mertebeleme(rank ordering), yapay sinir ağları(neural networks), genetik algoritmalar(genetic algorithms) ve çıkarımcı muhakeme(inductive reasoning) gibi yaklaşımlardır (Ross, 2010, s. 175)

Sezgi, az ya da hiç temel bilgi gerektirmemektedir. Bu yöntem, kişilerin, olayları anlayışına ve bakış açılarına dayanmaktadır. Buna günlük hayatımızda dilsel olarak sıkça ifade ettiğimiz ‘sıcaklık’ değişkenini örnek verebiliriz. Sıcaklık kelimesi temel olarak ‘çok soğuk’, ‘soğuk’, ‘ılık’, ‘sıcak’ ve ‘çok sıcak gibi’ alt kümelere ayrılabilir. Aynı sıcaklık derecesine sahip bir yer hakkında beyan edilen fikirler kişiden kişiye değişebilmektedir. Dolayısıyla bu alt kümelerin ifade ettiği üyelik fonksiyonlarının konumları ve şekilleri farklılık arzedebilir. Örneğin, 20°C ısıdaki aynı odadaki kişilerden birisi buna ılık diyebilecekken, diğer bir kişi buna sıcak diyebilir. Bu durumda 20°C hem ılık hem de sıcak alt kümelerine farklı derecelerde üyedir yorumuna varabiliriz.

Çıkarım, üyelik fonksiyonu hakkında karar verirken mutlaka olay hakkında bazı temel bilgilere sahip olmak gerekmektedir. Burada tümdengelimsel muhakeme ile sahip olunan bilgiden çıkarım yapılmaktadır.

Mertebelendirme, bulanık bir değişken hakkında araştırma, anket, soruşturma veya seçimler yaparak üyelik derecelerinin ataması gerçekleştirilmektedir. Her durumda iki seçenek hakkında ve bu tercihlere verilen puanlandırma ile işlemler gerçekleştirilir (Şen, 2004, s. 48).

Yapay sinir ağları, insan beyninin özelliklerinden olan öğrenme yolu ile yeni bilgiler türetebilme, yeni bilgiler oluşturabilme ve keşfedebilme gibi yetenekleri sinir sisteminin çalışma yöntemini simüle ederek modelleyen ve herhangi bir yardım almadan otomatik olarak gerçekleştirmek amacı ile geliştirilen bilgisayar sistemleridir. Yapay sinir ağlarını daha geniş bir biçimde tanımlayacak olursak; insanlar tarafından gerçekleştirilmiş örnekleri(gerçek beyin fonksiyonlarının ürünü olan örnekleri) kullanarak olayları öğrenebilen, çevreden gelen olaylara karşı nasıl tepkiler üretileceğini önceden belirleyebilen bilgisayar sistemleridir (Yıldırım, 2008, s. 37).

Genetik algoritma, yönlendirilmiş rastgele araştırma algoritmalarının bir türüdür. Doğal seçme(natural selection) ile canlılarda bulunan genetik değişim ve gelişimin modellemelerde kullanılması amaçlanmaktadır. Algoritma diğer evrimsel algoritmalar gibi araştırma uzayında bulunan çözümlerin bazılarının oluşturduğu bir başlangıç popülasyonunu kullanmaktadır. Başlangıç popülasyonu her yeni kuşakta(generation) doğal seçim ve tekrar üreme(reproduction) işlemleri vasıtası ile art arda geliştirilir. Son kuşağın en kaliteli bireyi, problem için optimum çözüm olmaktadır. Bu çözüm her zaman optimum olmayabilir ama kesinlikle optimuma yakın bir çözümdür (Yıldırım, 2008, s. 37).

1.2.3. Üyelik Fonksiyonu Tipleri

Literatürde bazı kaynaklarda üyelik fonksiyon tipleri fonksiyon biçimleri şeklinde ele alınırken, bazı kaynaklarda da geometrik şekil benzerlikleri yönü ile ele alınmıştır.

Burada üyelik fonksiyonlarından daha çok şekil benzerlikleri yönüyle bahsedilecektir. Biçimlerine göre üyelik fonksiyonları ise literatürde kısaca şu dört gruba ayrılmıştır (Dombi, 1990, s. 2-6; Lai & Hwang, 1992, s. 31-34):

1. Deneysel karar vermeye dayalı üyelik fonksiyonları
    a. Zadeh'in tek model(unimodal) fonksiyonu
    b. Dimitru ve Luban'ın kuvvet fonksiyonları
    c. Sawarovski'nin sinüs fonksiyonu
2. Belirli bir probleme özgü güvenirliliğe dayalı üyelik fonksiyonu
    a. Zimmermann(1976)'ın doğrusal fonksiyonu
    b. Tanaka, Uejima ve Asai'nin simetrik üçgen fonksiyonu
    c. Hannan'ın parçalı doğrusal fonksiyonu
    d. Liberling'in hiperbolik fonksiyonu
    e. Sakawa ve Yumine'nin üstel ve ters hiperbolik fonksiyonu
    f. Dimitru ve Luban'ın fonksiyonu
    g. Dubois ve Prade'nin doğrusal rastgele(L-R) bulanık sayısı
3. Teorik isteğe dayalı üyelik fonksiyonları
    a. Civanlar ve Trussel'in fonksiyonları
    b. Sawarovski'nin fonksiyoları
4. Kişilere özgü kavramlar için model öneren üyelik fonksiyonları
    a. Hersh ve Caramazza'nın fonskiyonları
    b. Zimmermann ve Zysno'nun fonksiyonları
    c. Dombi'nin fonksiyonu

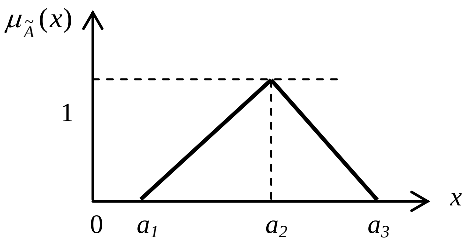
İlgili duruma ilişkin şekli yönden birçok farklı üyelik fonksiyonu çeşidi olmakla birlikte pratikte en yaygın kullanılanları; üçgen, yamuk ve Gaussal üyelik fonksiyonlarıdır.

Bunlarla birlikte nispeten daha nadir kullanılan sigmoidal, S tipi, Z tipi, π(pi) tipi üyelik fonksiyonları da vardır. Aşağıda sırasıyla bu fonksiyon tipleri incelenecektir.

1.2.3.1. Üçgen Üyelik Fonksiyonu

Üçgen üyelik fonksiyonları a_1, a_2 *ve* a_3 olmak üzere üç parametre ile tanımlanır. Şekil 11'de görüleceği gibi, a_2 fonksiyonun özünü oluştururken a_1 ve a_3 arasındaki değerler desteği oluşturur. Üçgen üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mu_{\tilde{A}}(x; a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 0 & , x<a_1 \text{ veya } x>a_3 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & , a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2} & , a_2 \leq x \leq a_3 \end{cases}$$

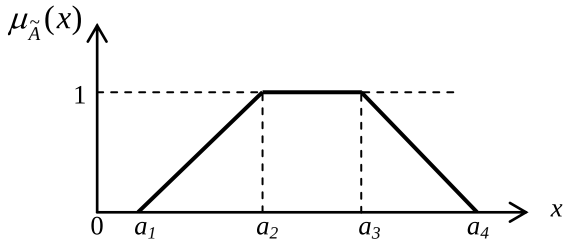


Şekil 11: Üçgen Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi

1.2.3.2. Yamuk Üyelik Fonksiyonu

Yamuk üyelik fonksiyonları a_1, a_2, a_3 ve a_4 olmak üzere dört parametre ile tanımlanır. Şekil 12'de görüleceği gibi a_2-a_3 aralığı fonksiyonun özünü oluştururken a_1-a_2 ve a_3-a_4 arasındaki değerler fonksiyonun desteğini oluşturur. Yamuk üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mu_{\tilde{A}}(x;a_1,a_2,a_3,a_4) = \begin{cases} 0 & , x<a_1 \text{ veya } x>a_4 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & , a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & , a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3} & , a_3 \leq x \leq a_4 \end{cases}$$



Şekil 12: Yamuk Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi

Üçgen ve yamuk bulanık üyelik fonksiyonlarının anlaşılır olmaları ve formüllerinin basit oluşu hesaplamalarında kolaylık sağlamakta ve dolayısıyla bulanık mantık uygulamalarında sıkça kullanılmaktadırlar.

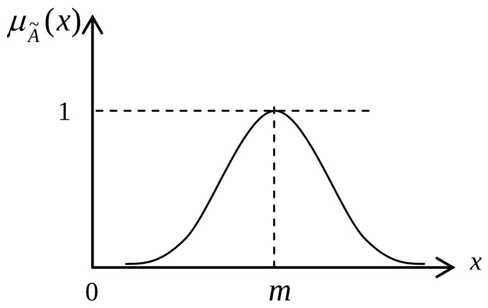
1.2.3.3. İhtimal Yoğunluk Fonksiyonları ve Gaussal Üyelik Fonksiyonu

İstatistik biliminde kullanılan ihtimal yoğunluk fonksiyonlarının tepe noktasının 1'e eşit olması söz konusu değildir ve bu fonksiyonun altındaki alanın 1'e eşit olması gereklidir. İhtimal yoğunluk fonksiyonları dışbükey olduğu için tepe noktası değerinin 1'e eşitlenmesi şartı ile üyelik fonksiyonu olarak da kullanılabilirler. Bu da normalizasyon formülünde bahsedildiği gibi tüm değerlerin tepe noktası değerine bölünmesi ile yerine getirilmiş olur. İhtimal yoğunluk fonksiyonları arasında üyelik fonksiyonu olarak en sık kullanılanı ise Gauss eğrisidir (Şen, 2009, s. 44).

Gaussal üyelik fonksiyonu, aşağıda verilen m ve σ parametreleri ile ifade edilebilir ve Şekil 13'deki gibi gösterilir (Şen, 2004, s. 55):

$$\mu_{\tilde{A}}(x;m,\sigma) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Aslında bilindiği üzere standart normal dağılımda yukarıdaki fonksiyonun katsayısı $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ dir. Fakat normal dağılımdan üyelik fonksiyonuna geçişte fonksiyonun maksimumunun $(m,1)$ olması gerektiği için $\sigma = 1/\sqrt{2\pi}$ olmalıdır.



Şekil 13: Gaussal Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi

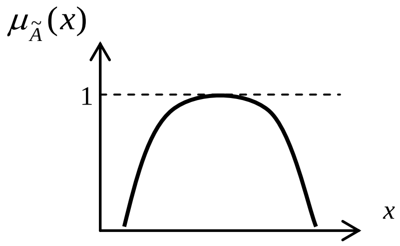
Bu fonksiyonda m, fonksiyona ait dağılımın merkezini ve σ merkez etrafında fonksiyonun dağılımını yani genişliğini ve şeklini belirler. σ küçüldükçe üyelik fonksiyonu daha sivri ve ince olurken, bu değer büyüdükçe üyelik fonksiyonu gittikçe yayvanlaşacaktır (Yen & Langari, 1999, s. 64).

İki parçalı Gauss üyelik fonksiyonu ise, Gauss eğrisinin iki eşit kısma ayrılarak arasına üyelik dereceleri 1 olan birden fazla elemanın(bir aralığın) gelmesi ile elde edilen bir fonksiyondur (Şen, 2004, s. 55).

1.2.3.4. Genel Çan Eğrisi

Bu üyelik fonksiyonu a_1, a_2, a_3 olarak üç parametre ile tanımlanır (Şen, 2004, s. 56).

$$\mu_{\tilde{A}}(x;\, a_1,\, a_2,\, a_3) = \frac{1}{1+\left|\dfrac{x-a_3}{a_1}\right|^{2a_2}}$$

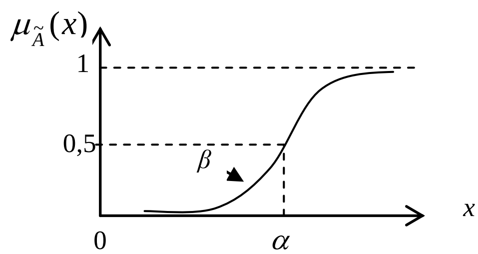


Şekil 14: Çan Şekilli Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi

1.2.3.5. Sigmoidal Üyelik Fonksiyon

Sigmoidal tip üyelik fonksiyonu β ve α olmak üzere iki parametre aşağıdaki fonksiyon ile tanımlanır ve Şekil 15'de gösterildiği gibidir (Dombi & Gera, 2005, s. 279).

$$\mu_{\tilde{A}}(x;\beta,\alpha) = \left(\frac{1}{1+e^{-\beta(x-\alpha)}}\right)$$



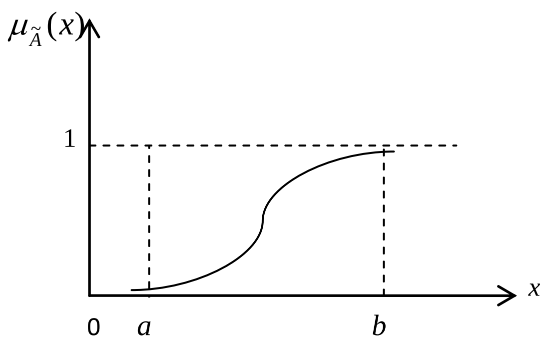
Şekil 15: Sigmoidal Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi

Burada β parametresi eğrinin eğimini gösterirken α parametresi 0,5 üyelik fonksiyon değeri ile fonksiyonun geçiş noktasını göstermektedir.

1.2.3.6. S Şekilli Üyelik Fonksiyonu

Bu üyelik fonksiyonu a ve b parametre ile tanımlanan düzgün bir üyelik fonksiyonudur. Bu fonksiyonun adı şeklinin S harfine benzemesinden gelmektedir (Bojadziev & Bojadsiev, 1995, s. 65).

$$\mu_{\tilde{A}}(x;a,b) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq a \\ 2[(x-a)/(b-a)]^2 & , \ a \leq x \leq [(a+b)/2] \\ 1-2[(x-b)/(b-a)]^2 & , \ [(a+b)/2] \leq x \leq b \\ 1 & , \ b \leq x \end{cases}$$



Şekil 16: S Şekilli Üyelik Fonksiyonunun Gösterimi

1.3. Bulanık Sayılar ve İşlemler

1.3.1. Bulanık Sayı Tanımı

Bulanık sayılar, bulanık kümelerin bir alt kümesidir ve bulanık kümelerdeki birleşim, kesişim, α-kesim ve genişleme kuralı gibi teorik işlemler bulanık sayılar için de geçerlidir (Özkan, 2003, s. 59)

Bulanık sayılar gerçel sayılar kümesi, tamsayılar kümesi veya doğal sayılar kümesinde tanımlıdır. Her bulanık sayı bulanık bir kümeyi ifade etmesine rağmen bunun tersi her zaman geçerli değildir (Pedrycz, 1989, s. 22). R'de tanımlı bir Ã bulanık kümesinin bir bulanık sayı olarak ele alınabilmesi için, asgari aşağıdaki üç şartı sağlaması gerekmektedir (Klir & Yuan, 1995, s. 97; Şen, 2004, s. 102):

i. Ã, normal bir bulanık küme olmalıdır,

ii. Ã, her üyelik derecesi kesiminde kapalı aralık olmalıdır,

iii. Ã'nın destek kümesi sınırlı olmalıdır.

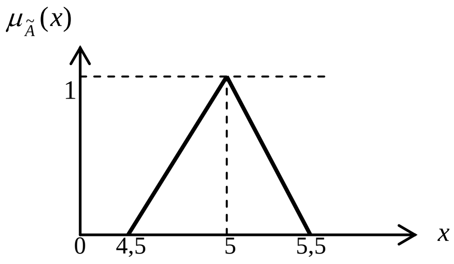
iv. Ã, dış bükey bir bulanık küme olmalıdır.

Bu şartlar veya özellikler bir araya getirilerek bulanık bir sayının tanımı aşağıdaki gibi verilebilir:

Normal ve dışbükey bir bulanık kümenin zayıf α-kesimi kapalı küme ise bu bulanık küme bir *bulanık sayı* olarak adlandırılır (Yenilmez, 2001, s. 21).

Kesin olmayan, tolerans ifade eden veya yaklaşık sayısal miktarların modellere dâhil edilmesinde bulanık sayılardan çokça faydalanılır. Bu yönde bulanık sayıların kullanım alanları arasında bulanık regresyon, bulanık programlama, bulanık kontrol ve bulanık karar verme öne çıkmaktadır.

Bulanık kümeler gibi bulanık sayılar da yaklaşıklığı ifade ederler ve bunun için bulanık sayıların da üyelik fonksiyonlarının normal ve dışbükey olması gereklidir. Örneğin, “yaklaşık 5”, diğer ifadelerle “aşağı yukarı 5”, “5 civarında”, “5’e yakın” gibi sayıların üyelik fonksiyonunun Şekil 17’deki gibi ifade edilebileceği açıktır.



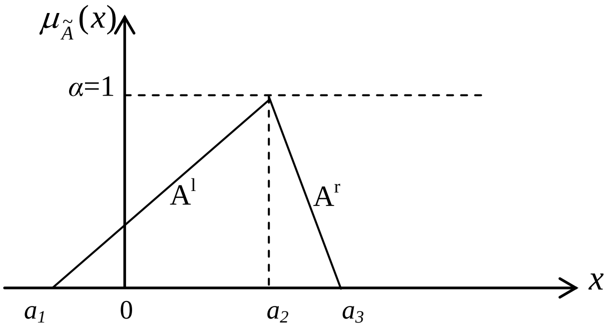
Şekil 17: “Yaklaşık 5” Bulanık Sayısı

Burada görüldüğü üzere “yaklaşık 5” bulanık sayısında 4,5 ve 5,5 sayıları 0 üyelik derecesine sahipken, 5 sayısı 1 üyelik derecesine sahiptir. Bunun yanında örneğin 5,3 sayısının “yaklaşık 5” sayısına ait olma üyelik derecesi de 0,4 civarındadır.

Bulanık kümeler üyelik fonksiyonlarıyla tanımlandıkları için bulanık sayılar da üyelik fonksiyonları ile tanımlanabilirler. Dolayısıyla üyelik fonksiyonu çeşidi kadar bulanık sayı çeşidi vardır denilebilir. Pratikte en sık karşılaşılan üçgensel, yamuksal ve Gaussal bulanık sayılar olmakla beraber en sık kullanım alanına sahip olanlar üçgensel ve yamuksal olanlardır.

1.3.2. Üçgensel Bulanık Sayı

Bulanık modellerle ifade edilebilen problemlerde üçgensel bulanık sayılar sık kullanılmaktadır. Üçgensel bulanık sayı (a_1, a_2, a_3) üçlüsüyle tanımlanabilir ve üyelik fonksiyonu da aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Chen, 2000, s. 3).



Şekil 18: Üçgensel Bulanık Sayı

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x; a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 0 & , x < a_1 \text{ ve } x > a_3 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & , a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & , a_2 \leq x \leq a_3 \end{cases}$$

biçimindedir.

Üçgensel bulanık sayıların bazı önemli cebirsel özellikleri şöyledir:

i. İki üçgensel bulanık sayının toplanması ya da çıkarılması işlemleri sonucunda yine üçgensel bulanık bir sayı elde edilir.

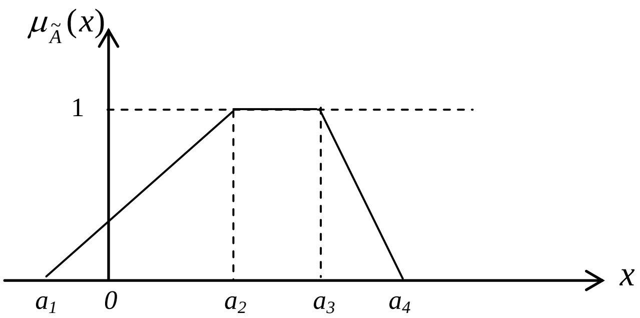
ii. Üçgensel bulanık sayıların çarpılması, bölünmesi ya da tersinin alınması işlemleri sonucunda her zaman üçgensel bulanık bir sayı elde edilmeyebilir.

iii. Üçgensel bulanık sayıların maksimum ya da minimum işlemleri sonucunda her zaman üçgensel bulanık bir sayı elde edilmeyebilir.

Üçgensel bulanık sayılar bulanık kontrolörler, yönetsel karar problemleri, işletme ve finans ve diğer sosyal bilimler gibi birçok alan uygulamalarında sıkça kullanılmaktadır. Üçgensel bulanık sayılar, A^l ve A^r gibi iki doğrusal segmentin (a_2,1) uç noktasında birleştiği; üyelik fonksiyonuna sahiptir. Bu durum, üçgensel bulanık sayıların grafiksel gösteriliş ve kendileriyle işlem yapılmasını kolaylaştıran bir unsurdur. Ayrıca, az bir bilgi temeline dayanarak kolaylıkla oluşturulabilirler (Bojadziev & Bojadsiev, 1995, s. 22-23).

1.3.3. Yamuksal Bulanık Sayı

Yamuksal bulanık sayılar, üçgensel bulanık sayıların özel bir tipidir. Yamuksal bulanık bir sayı (a_1, a_2, a_3, a_4) gibi dörtlüyle tanımlanabilir ve Şekil 19'da da görüldüğü gibi α=1 durumunda tek bir nokta değil, (a_2, a_3) aralığında tanımlı bir doğru söz konusudur. Yamuksal bulanık sayılar üçgensel bulanık sayılarla aynı cebirsel işlem özelliklerine sahiptir.



Şekil 19: Yamuksal Bulanık Sayı

Üyelik fonksiyonu ise,

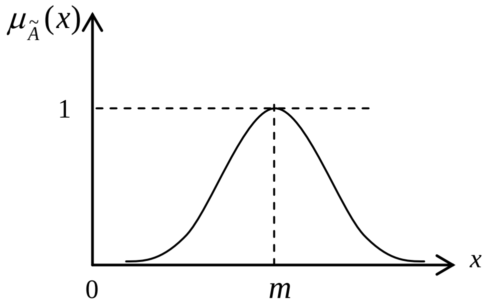
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & , x < a_1, x > a_4 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & , a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & , a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & , a_3 \le x \le a_4 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Kaufmann & Gupta, 1988, s. 26-32).

1.3.4. Gaussal Bulanık Sayı

Gaussal bir bulanık sayı, aşağıda verilen üyelik fonksiyonu ile m ve σ parametrelerine bağlı olarak ifade edilebilir (Kaya, 2007, s. 17-18).

$$\mu_{\tilde{A}}(x;m,\sigma) = e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



Şekil 20: Gaussal Bulanık Sayı

Burada σ söz konusu bulanık sayının dağılış şeklini m de dağılış merkezini gösterir. σ küçüldükçe üyelik fonksiyonu daha sivrilirken, büyüdükçe üyelik fonksiyonu gittikçe yayvanlaşacaktır.

1.3.5. Aralık Analizi ve α-Kesim Yöntemi

Bulanık sayılarla hesap yapmanın temeli aralık analizine dayanır. Aralık analizi, bulanık sayılar için bir tür tolerans veya güven aralığı olarak ele alınabilir. Örneğin bir işletmedeki mevcut bir probleme çözüm ararken toplanan veriler aralık ifade eden bulanık veriler olabilir. Mesela bir girdiye ait genel ortalama stok seviyesi aylık 50 ton yerine 40 ve 60 ton arasında değişiyor denebilir. Bu durumda kesinlik ifade eden 50 sayısı yerine [40,60] kapalı aralığı stok miktarını niteleyebilir. Eğer stok seviyesi x değişkeni ile temsil edilirse bu durumda söz konusu stok seviyesinin $x \in [40,60]$ olmak üzere $40 \leq x \leq 60$

anlamına geldiği açıktır. Burada 40 ve 60 sayıları sırasıyla x'in alt ve üst sınırını ifade eden kapalı aralığı oluşturmaktadır.

Bulanık sayıların gerçek sayı doğrusu üzerindeki bulanık olmayan aralıkları α-kesim yöntemi ile belirlenir. Bir bulanık A sayısının α-kesim aralığı, bulanık kümelerin α-kesim kümelerinden de hatırlanacağı üzere aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\ ,\ x \in U\} \text{ ve } \alpha \in (0,1]$$

Bir alt ve üst sınır ile belirlenen ve kesin ve kapalı bir aralığı gösteren bir Ã bulanık sayısının α-kesim aralığı aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\tilde{A}_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$$

1.3.6. Bulanık Sayılarda Cebirsel İşlemler

Bulanık sayıları içeren denklemler matematiksel programlama problemleri ve birçok başka alanın en önemli yapı taşlarıdır. İki bulanık sayının cebirsel işlemleri neticesinde yine bulanık bir sayı elde edilir. Ã ve $\tilde{A}_\alpha$ bulanık sayılarının α-kesimleri $\tilde{A}_\alpha=[a_1^\alpha,a_2^\alpha]$ ve $\tilde{B}_\alpha=[b_1^\alpha,b_2^\alpha]$ olarak belirlensin. Ã ve B̃ sayılarının α-kesimlerine sırasıyla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin uygulanması ile elde edilen bulanık sayıların α-kesimleri, aşağıda verildiği gibi ifade edilir (Lai & Hwang, 1992, s. 58-66).

$$\tilde{A}_\alpha+\tilde{B}_\alpha = (\tilde{A}+\tilde{B})_\alpha = [a_1^\alpha+b_1^\alpha, a_2^\alpha+b_2^\alpha]$$

$$\tilde{A}_\alpha-\tilde{B}_\alpha = (\tilde{A}-\tilde{B})_\alpha = [a_1^\alpha-b_2^\alpha, a_2^\alpha-b_1^\alpha]$$

$$\tilde{A}_\alpha\times\tilde{B}_\alpha = (\tilde{A}\times\tilde{B})_\alpha = [a_1^\alpha\times b_1^\alpha, a_2^\alpha\times b_2^\alpha]$$

$$\tilde{A}_\alpha\div\tilde{B}_\alpha = (\tilde{A}\div\tilde{B})_\alpha = [a_1^\alpha\div b_2^\alpha, a_2^\alpha\div b_1^\alpha]$$

BÖLÜM II

BULANIK MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA

Bulanık matematiksel programlama, yapısında bulanık ifadeler barındıran problemleri modellemede kullanılır. *Model*, gerçek hayata ait olguların veya sistemlerin bir takım sembollerle temsil edilmesidir. Başka bir ifade ile bir sistemin değişen koşullar altındaki davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında tahminlerde bulunmak amacı ile elemanları arasındaki ilişkileri bir takım kelimeler veya matematiksel terimlerle belirleyen ifadeler topluluğuna *model* denir (Tulunay, 1991, s. 3).

Bir sistemin bileşenlerinin simgelerle tanımlanıp, bunlar arasındaki ilişkilerin fonksiyonlarla gösterimine *matematiksel model*, sistemin yöneticisinin kontrolü altında olan ve karar değişkeni olarak adlandırılan değişkenlerin belirli sınırlamalar dâhilinde hangi değerleri alması gerektiğini belirlemek amacıyla kurulan matematiksel modellere de *karar modeli* denir. Sistemin davranışını etkilediği halde, karar vericinin kontrolü dışında değer alan bileşenlere *parametre* ve modelde karar değişkenleri ya da karar değişkenleriyle parametreler arasındaki zorunlu ve sınırlandırıcı ilişkilerin her birine de *kısıt* denir.

2.1. Bulanık Ortamda Karar Verme

Karar verme işlemi, bazı sınırlayıcı şartlar altında bir takım hedeflere ulaşmak için karşılaşılan problemleri çözme sürecidir. Bu süreç mümkün seçenekler arasından birisini seçme ile karakterizedir ve sürecin çıktısı olan karar, bir aksiyon ile sonuçlanmalıdır. Bu karar faaliyetleri; ekonomi alanında, yönetim biliminde, mühendislikte ve üretimde, sosyal ve siyasî alanlarda, biyoloji ve tıpta, askeri stratejilerde ve bunun gibi daha birçok alanda önemli role sahiptir. Fakat yukarıda da bahsedildiği gibi karar ortamları büyük oranda karmaşık, eksik ve kesin olmayan, öznel ve dilsel olan bilgilere dayalı olduğu için karar verme faaliyeti zorlaşmaktadır. Karar ortamlarının bu özellikleri sebebiyle karar verme süreci bulanık çevrelerde olmaktadır. Yani karar ortamlarının çoğu amaç ve kısıt fonksiyonlarının bazı katsayılarının tam olarak belirlenemediği, belirsiz olduğu bir ortamda yer alır. Bu koşullarda bulanık küme teorisi, bulanık hedef ve kısıtları modellemeye uygun bir durum oluşturmaktadır (Stanciulescu, 2003, s. 655).

Bir karar modeli, yapısal olarak uygun seçeneklerin neler olduğunu belirleyen kısıt fonksiyonları ve bu uygun seçenekler arasından en iyisinin hangisi olduğunu bulmak için işleme giren bir amaç fonksiyonundan oluşur. Yöneylem araştırmasının en gelişmiş ve yaygın uygulama alanını oluşturan doğrusal programlama(DP), doğrusal bağıntılardan oluşan karar modelleriyle ilgili bir kavramdır (Yenilmez, 2001, s. 25,26). Bulanık matematiksel programlama problemleri ise, alternatifler arası tercihlerin alternatifler kümesinde tanımlanan amaç fonksiyonu aracılığıyla ifade edildiği karar verme problemlerinin bir alt kümesini oluşturur (Ramik & Vlach, 2002, s. 335).

Zimmermann, 1976'da doğrusal programlamaya bulanık küme kavramını dâhil etmiştir ve üyelik fonksiyonlarının doğrusal olduğunu varsayarak bulanık hedef ve bulanık kısıtlı bir problemin standart doğrusal programlama teknikleriyle çözülebileceğini göstermiştir. (Sakawa, Nishizaki, & Katagiri, 2011, s. 14)

Bulanık amaç, evrensel küme U'nun bir alt kümesi olan $\tilde{G}$ bulanık kümesi ile ifade edilir. Burada " ˜ " simgesi bulanık öğeleri göstermek için kullanılır. Üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{G}}(x) \in [0,1]$ ile ifade edilirse, üyelik fonksiyonu derecesi 1 değerini aldığında ilgili amaca tamamen ulaşıldığı; 0 değerini aldığında ilgili amaca ulaşılmadığı ve 0 ile 1 arasında bir üyelik derecesi aldığında ilgili amaca kısmen ulaşıldığı düşünülür (Dai, 2003, s. 84). Diğer taraftan bulanık kısıtlayıcı, evrensel küme U'da yer alan $\tilde{C}$ bulanık kümesi ile gösterilir.

Üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{C}}(x)\in[0,1]$ ile gösterilirse, üyelik fonksiyonu derecesi 1 değerini aldığında ilgili kısıtlayıcının tamamen sağlandığı; 0 değerini aldığında ilgili kısıtlayıcının tamamen sağlanmadığı ve 0 ile 1 arasında bir üyelik derecesi aldığında ilgili kısıtlayıcının kısmen sağlandığı anlaşılır (Dai, 2003, s. 84). Bulanık amaçlar ve/veya bulanık kısıtlayıcılarla verilen bir kararın ise bulanık olması kaçınılmazdır. Bellman ve Zadeh'e göre bulanık bir karar, verilen amaçlar ve kısıtlayıcıların uzlaştırılmasıyla belirlenen bulanık bir küme olarak tanımlanır.

Bulanık karar kümesi, bulanık kısıtlayıcı ve bulanık amacın aynı anda karşılanma derecesini gösterir. Diğer bir deyişle, bulanık karar kümesi için temel kural, "$\tilde{G}$ amacına ulaşırken $\tilde{C}$ kısıtlayıcısını sağlamak" şeklindedir. Bu durumda bulanık bir karar belirlenen amaç ve kısıtlayıcıların bir kesişim kümesi olarak ele alınmalıdır (Özkan, 2002, s. 267). Bir x değerini A_{alt} alternatifler kümesinin bir elemanı olarak ele alalım. Burada A_{alt}, anlaşılacağı üzere aslında evrensel kümeyi ifade etmektedir. Burada bulanık karar kümesi $\tilde{D}$ ile ve üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{D}}(x)\in[0,1]$ ile ifade edilir.

Tanımı gereği $\tilde{D}$ kümesi $\tilde{G}$ ve $\tilde{C}$ kümelerinin kesişimidir (Şekil 21);

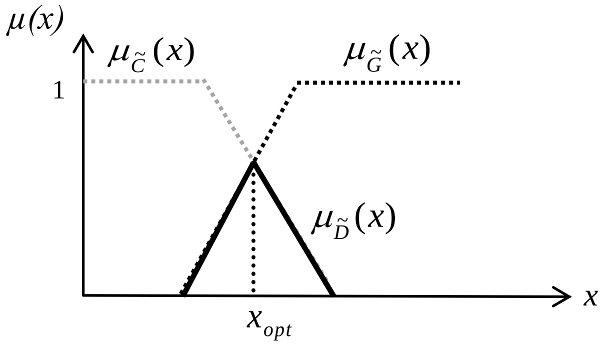
$\tilde{D}=\tilde{G}\cap\tilde{C}$ veya $\tilde{D}=\tilde{C}\cap\tilde{G}$ (değişim özelliği)

veya üyelik fonksiyonu ile;

$$\mu_{\tilde{D}}(x)=\min(\mu_{\tilde{G}}(x),\ \mu_{\tilde{C}}(x)) \qquad ,\ x\in \mathrm{A}_{\mathrm{alt}}$$

olarak ifade edilir.

Burada bulanık hedef ve kısıtları eşanlı olarak ele almak için kullanılan "ve" bağlacının sadece tek bir anlamı olmamasına rağmen pratikte genel olarak minimizasyon işlemcisi ile ifade edilir.



Şekil 21: Bulanık Hedef G̃, Kısıt C̃ ve Karar D̃

Fakat karar vericiler, bulanık kararlara ulaşmak yerine D̃'nin durulaştırılmasını(defuzzification) gerektirecek bulanık olmayan kesin sonuçlara ulaşmak isterler. Bu nedenle A_{alt} alternatifler kümesinden doğal olarak en yüksek üyelik derecesine ($\max\mu_{\tilde{D}}(x)$) sahip x_{opt} gibi bir değerin seçilmesi gerekecektir. Bu değer şu şekilde gösterilir,

$$x_{opt}=\{\, x \mid \max\mu_{\tilde{D}}(x)=\max\min(\mu_{\tilde{G}}(x),\ \mu_{\tilde{C}}(x))\}$$

Birden çok karar ve kısıtın, örneğin 3 karar ve 4 kısıtın, olduğu durumlarda karar kümesi;

$$\tilde{D}=\tilde{G}_1\cap\tilde{G}_2\cap\ldots\cap\tilde{G}_n\cap\tilde{C}_1\cap\tilde{C}_2\cap\ldots\cap\tilde{C}_n$$

üyelik fonksiyonları ile;

$$\mu_{\tilde{D}}(x)=\min(\mu_{\tilde{G}1}(x),\ \mu_{\tilde{G}2}(x),\ldots,\ \mu_{\tilde{G}n}(x),\ \mu_{\tilde{C}1}(x),\ \mu_{\tilde{C}2}(x),\ldots,\ \mu_{\tilde{C}n}(x))$$

olarak gösterilirken optimal karar ise,

$x_{opt}=\{\, x \mid \max\mu_{\tilde{D}}(x)\}$ şeklinde genellenebilir:

Burada x_{opt} olarak tek bir sayının bulunması için bu kümenin dışbükeylik tanımını karşılaması gerekmektedir.

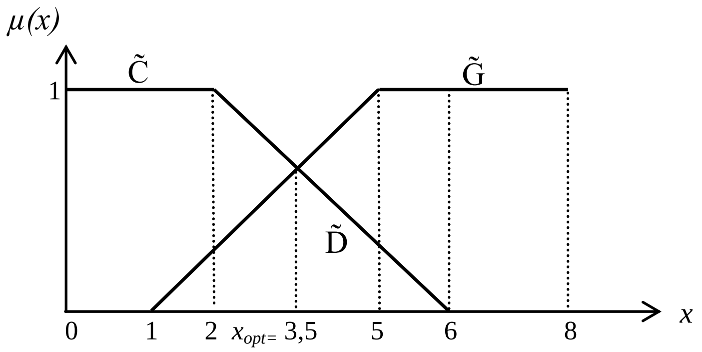
$$\mu_{\tilde{A}}[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geq\min(\mu_{\tilde{A}}(x_1),\mu_{\tilde{A}}(x_2)) \qquad ,\forall\lambda\in[0,1]$$

Yukarıdaki ilişkileri bir örnekle açıklamak mümkündür. Bir işletme hissedarlarına hisse başına iyi ve etkileyici bir kâr payı dağıtmak istemekte ama gelecek yıl için işçilerinin ücretlerinde de iyi bir artışa gideceği için dağıtacağı kâr paylarını olabildiğince yüksek ama söz konusu nedenle de ister istemez daha makul seviyede tutmak istemektedir. Burada bulanık $\tilde{G}$ hedefimizin "etkileyici kâr payı" olduğunu ve bulanık $\tilde{C}$ kısıtımızın da "makul kâr payı" olduğunu düşünelim. Alternatif kâr payları kümesi de $A_{alt}=\{x|\ 0<x\leq 8\}$ olsun. Bununla birlikte $\tilde{G}$ ve $\tilde{C}$ bulanık kümeleri için üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi verilmiş olsun (Bojadziev & Bojadsiev, 1995, s. 209-211).

$$\mu_{\tilde{G}}(x)=\begin{cases} 0 & ,\ 0<x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{4} & ,\ 1\leq x\leq 5 \\ 1 & ,\ 5\leq x\leq 8 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{C}}(x)=\begin{cases} 1 & ,\ 0<x\leq 2 \\ -\dfrac{x-6}{4} & ,\ 2\leq x\leq 6 \\ 0 & ,\ 6\leq x\leq 8 \end{cases}$$

Yukarıdaki üyelik fonksiyonlarını ve $\tilde{D}=\tilde{G}\cap\tilde{C}$ karar kümesini aşağıdaki gibi gösterebiliriz. Sonuç olarak da gerekli matematiksel işlemlerden sonra x_{opt}=3.5 bulunur.



Şekil 22: Bulanık Hedef Kümesi $\tilde{G}$, Bulanık Kısıt Kümesi $\tilde{C}$, Bulanık Karar Kümesi $\tilde{D}$ ve Optimum Karar x_{opt}

$\tilde{D}$ bulanık kararı, bulanık amaçların ve bulanık kısıtların kesişimi olarak tanımlanırken, tüm amaç ve kısıtların eşit öneme sahip oldukları varsayılmaktadır. Fakat amaç ve kısıtlardan bir kısmının diğerlerinden daha önemli olduğu durumlar söz konusu olabilir. Yani bulanık hedef ve kısıtlayıcıların önem dereceleri yani çözümü etkilemedeki ağırlıkları birbirinden farklı olabilmektedir. Bu şekildeki bulanık hedef ve kısıtlayıcıların birbirine bağlanması dışbükey olarak birbirine bağlanma durumunu ifade eder (Şeçme, 2005, s. 31,32).

$\mu_{\tilde{D}}(x)=w\mu_{\tilde{G}}(x)+(1-w)\mu_{\tilde{C}}(x)$

Burada $w\in[0,1]$ bir ağırlık katsayısıdır.

Bu çalışmada ele alınacak bulanık doğrusal programlama(BDP) problemlerindeki bulanık amaç ve bulanık kısıtların $\tilde{D}$ bulanık kararını oluşturmada eşit öneme sahip oldukları varsayılacaktır. Bu nedenle dışbükey kombinasyon konusuna girilmemiştir.

Özetle; BDP, klasik DP'nin genişletilerek bulanık mantık ile birleşimidir. BDP, DP yöntemi kullanılarak çözümlenebilen problemlere karar süreçlerinde görülen belirsizliklerin mevcudiyeti halinde kullanılan bir yöntemdir.

2.2. Önceki Çalışmalar

Bu tez çalışması, yöntem olarak bulanık küme teorisini temel alırken uygulama alanı olarak gıda işletmeleri özelinde bir bisküvi işletmesini ve bu işletmede karşılaşılan ve üretim planlama kapsamında bulanıklık barındıran bir ürün formülü değişikliği problemini ele almaktadır. Çalışmaya yön veren ve temel kaynak teşkil eden bazı çalışmalar aşağıda ifade edilmektedir.

Zadeh (1965), Information and Control adlı dergide yayınlanan "Fuzzy Sets" başlıklı makalesinde bulanık küme teorisinin temellerini oluşturmuştur. Çalışmada bulanık kümeyi evrensel kümede tanımlı, [0,1] sürekli aralığında değerler alan ve farklı derecelerle üye olan elemanları kapsayan küme olarak ifade etmiştir. Ayrıca bu çalışmada kapsama, birleşim, kesişim, tümleme, bağıntı, konvekslik gibi kavramları ve bunların özelliklerini bulanık kümelerde göstermiştir. Bunların yanında bulanık kümelerde cebirsel işlemleri de sunmuştur.

Bellman ve Zadeh (1970), Management Science dergisinde yayınlanan "Decision-Making in a Fuzzy Environment" adlı makalelerinde, bulanık ortamda karar verme sürecinin karar ortamlarının doğası itibariyle amaç ve/veya kısıtların bulanıklık barındırması anlamına geldiğini ifade etmişlerdir. Yani burada, amaç ve/veya kısıt kümelerinin sınırları kesin olarak tanımlanamayan alternatif kümeleri meydana getirdiği anlatılmıştır. Karar kümesi ise bu bulanık kümelerin kesişimi olarak ifade edilmiştir.

Zimmermann (1976), çalışmasında bulanık doğrusal programlama ile ilgili ilk yapılan çalışmalardan birini ortaya koymuştur. Burada amaç fonksiyonu ve kısıtları bulanık olan simetrik yapıda bir bulanık doğrusal programlama problemine çözüm önerilmiştir.

Negoita ve Sularia (1976), çalışmalarında sağ taraf sabitleri ve kısıt matrisinin katsayılarının bulanıklık içerdiği problemlere çözüm önermiştir. Çalışmada bulanık sayıların üçgensel yapı gösterdiği düşünülmüştür.

Wiedey ve Zimmermann (1978), çalışmalarında birden çok amacın olduğu durumlarda kullanılan hedef programlamanın optimum medya seçiminde çok işlevsel ve verimli olmadığını ifade etmişler ve birçok amaç kriterinin olduğu bu durumlara bulanık ve subjektif özellik taşıyan bulanık doğrusal programlama yaklaşımının daha uygun olduğunu belirtmişlerdir.

Verdegay (1982), çalışmasında bulanık doğrusal programlama modellerinin çözümünde parametrik programlama ve betimleme teoreminden faydalanmıştır. Çalışmada sadece sağ taraf sabitlerinin bulanık olduğu durumların modellerinin, parametrik programlama problemine eşdeğer olduğu ilk kez gösterilmiştir. Çözüm sonunda karar vericiye optimum çözümü kendisinin belirlemesi için farklı parametrelere dayalı sonuç tablosu sunulur. Daha sonra Verdegay (1984) başka bir çalışmasında bulanık doğrusal programlama problemlerinin çözümü için dual yaklaşımı tanımlamış ve bunun uygun koşullarda primal model ile aynı sonuçları verdiğini göstermiştir.

Chanas (1983), çalışmasında karar vericiden kısıtlarla ilgili erişim düzeyi ve tolerans miktarı elde edilirken, bilgi eksikliği nedeniyle, amaç fonksiyonuna dair bu bilgilerin elde edilemediği problemlere parametrik çözüme dayalı simetrik bir çözüm sunmuştur.

Tanaka ve Asai (1984), teknoloji matrisi ve amaç fonksiyonu katsayılarını ve sağ taraf sabitlerini bulanık sayılar olarak alıp, kısıtları bulanık fonksiyon olarak düşünmüşlerdir. Aynı yıl Tanaka ve Asai amaç fonksiyonuna bir tatmin düzeyi vererek onu da bir kısıt gibi düşünen bir yöntem önermiştir (Paksoy, 2002, s. 1).

Carllson ve Korhonen (1986), bütün katsayıları belirsiz olan doğrusal programlama yaklaşımına çözüm önerisinde bulunmuştur. Çalışmada bulanık olan parametreleri üstel üyelik fonksiyonları ile ifade ederek modele dâhil etmişler ve karar vericilere parametrik bir çözüm önermişlerdir.

Werners (1987), etkileşimli bir bulanık model üzerinde çalışmıştır. Amaç fonksiyonundaki bulanıklığı belirlemek için Orlovski'nin önerdiği bulanık karar kümesini temel almıştır.

Lai ve Hwang (1992), “Fuzzy Mathematical Programming” isimli kitaplarında bulanık küme teorisi, bulanık matematiksel programlama yaklaşımları, etkileşimli BDP problemleri ve olasılık programlamayı incelemişlerdir.

Zimmermann (1992), “Fuzzy Set Theory and its Applications” adlı eserinde bulanık kümeler, bulanık matematik, bulanık kümeler ve olasılık dağılımlarını karşılaştırmalı anlatmıştır. Bulanık küme uygulamaları bölümü altında uzman sistemlere ve bulanık kontrole, bulanık ortamda karar verme işlemine ve yöneylem araştırmalarında bulanık modellere değinmiştir.

Klir ve Yuan (1995), “Fuzzy Sets and Fuzzy Logic” adlı eserlerinde bulanık ve klasik kümeleri karşılaştırmış ve bulanık kümenin avantajlarını göstermiş, bulanık kümeler üzerinde küme ve aritmetik işlemlerden bahsetmiş ve bulanık bağıntıyı ele almıştır. Bunun yanında bulanık sistemler, bulanık veritabanları ve bulanık karar verme kavramlarını mühendislik uygulamaları eşliğinde vermiştir.

Wang (1997), çalışmalarında bulanık amaç ve/veya kaynak tipli bulanık doğrusal programlama problemlerine çözüm önerisi getirmiştir. Üretim planlama problemlerine uygun tek bir optimal çözüm yerine kabul edilebilir üyelik derecesiyle farklı çözümlerden oluşan çözüm ailesini ağırlıklı eğim(gradient) yönünde değişim gösteren bir genetik algoritmayla ortaya koymuştur. Sonrasında insan-bilgisayar etkileşimi ile, karar verici tarafından önerilen çözümün, bu aileden seçilmiş çözümlerin dışbükey kombinasyonu yardımı ile elde edileceği gösterilmiştir.

Inuiguchi ve Sakawa (1998), bulanık amaç fonksiyonu ile doğrusal programlama problemlerini yerleştirmede optimalliğin esnekliği ve güçlülüğünü(robust) ele almıştır

Buckley ve Feuring (2000) bütün katsayıları ve değişkenleri bulanık olan bulanık doğrusal programlama problemleri ile ilgili bir çalışma yapmıştır. Çalışmada, problemi çok amaçlı doğrusal programlama şekline dönüştürerek problemin baskın olmayan çözümlerinin kümesini incelemek için bulanık esnek programlamadan yararlanılmıştır

Güneş ve Yiğitbaşı (2001), çalışmalarında Türk vergi sisteminin mevcut tahsilat uygulamalarına yeni bir model sunmayı ve bu sayede vergilendirmede optimum tahsilata ulaşmayı amaçlamışlardır. Çalışmada Türkiye İstatistik Kurumu ve Maliye Bakanlığı'na ait süreli yayınlar ile internet arşivlerinden sağlanan verilerin kullanılmasıyla önce Türk vergi sistemine ait doğrusal programlama modeli kurulmuş, sonra da klasik doğrusal Programlama tekniğiyle gelirleri maksimum yapan model elde edilmiştir. Çalışmanın sonucunda bulanık model ile elde edilen gelirlerin klasik model sonuçlarına göre %12,71 daha fazla ve daha anlamlı olduğu görülmüştür.

Baykal ve Beyan (2004), çalışmalarında klasik ve sembolik mantıktan bahsettikten sonra bulanık mantığa giriş yapmış ve bulanık küme teorisini aktarmıştır. Sonrasında bulanık bağıntı, bulanık çizgeler, bulanık sayılar ve işlemler, bulanık fonksiyonlar, bulanık türev ve integral, bulanık geometri, bulanık kurallar ve çıkarım tekniklerinden bahsetmiştir.

Sicat ve ark. (2005), tarımsal arazilerin belirli ürünlere göre uygunluğunu sınıflandırmak için çiftçilerin verdiği bilgilere dayalı olarak ve bulanık mantığı kullanarak bir model geliştirmiştir. Bu bilgilere göre verimin artması için hasat zamanı, toprağın yapısı, rengi ve derinliği ve arazinin eğiminin önemli olduğu söylenmektedir. Çalışmada bu faktörlerin tarımsal arazileri sınıflandırmak için girdi değişkenleri olarak ele alındığı ve sonuçta oluşturulan modelin çok kullanışlı olduğu ifade edilmiştir.

Smithson ve Verkuilen (2006), "Fuzzy Set Theory: Applications in the Social Sciences" adlı eserlerinde kısaca bulanık küme teorisine değinmişler ve sonrasında sosyal bilimler alanında bulanık küme teorisi uygulamalarına yer vermişlerdir.

Ertuğrul ve Tuş (2007), çalışmalarında bulanık ortamlarda en iyi karara ulaşmak için Zimmermann, Werners, Chanas ve Verdegay'ın yaklaşımlarını kullanılarak ortaya konan etkileşimli bulanık doğrusal programlama yaklaşımını incelemeyi amaçlamışlardır. Burada, karar verici ile kurulan modelin karşılıklı etkileşiminin bir tekstil firmasında karşılaşılan probleme daha uygun çözümler sunduğu gösterilmiştir.

Öztürk ve ark. (2008), çalışmalarında işletmelerin pazara ulaşmalarında kullanılan nakliye firmalarından çeşitli karar kriterlerine göre en iyisinin seçimi için bulanık AHP ve bulanık TOPSIS yöntemlerini önermişlerdir. Çalışmanın uygulama bölümünde Denizli Makine İmalat Sanayinde faaliyet gösteren bir işletmenin nakliyecilerini seçme problemine bu iki yöntem ile çözüm aranmıştır.

Özdemir ve Seçme (2009), çalışmalarında tedarik zinciri ağ tasarımında bulanık ulaştırma modeli yaklaşımını ele almışlardır. Çalışmada maliyetlerin, taleplerin ve kapasitelerin bulanıklılığı kurulan modellere dâhil edilmiş ve çözümlere göre her bir modelde hangi arz merkezinden hangi talep merkezine ne kadar maliyetlerle taşıma olduğu tespit edilmiştir.

Şen (2009), çalışmasında belirsizlik kavramı ve belirsizlik incelemeleri açısından bulanık mantık kavramını anlatmış ve üyelik fonksiyonlarının bulanık kümeler için önemini ve üyelik fonksiyonu tiplerini göstermiştir. Bunlarla beraber çalışmada genel itibariyle bulanık küme ilişkileri, bulanık küme kural tabanı ve bulanık küme çıkarım sistemlerini anlatmış ve bazı uygulamalara yer vermiştir.

2.3. Matematiksel Programlamalarda Belirsizlik Açısından Farklar

Bir DP modelinin parametrelerinden herhangi birinde görülen belirsizliği inceleyen yöntemler; klasik yöntemler, stokastik programlama ve bulanık programlama şeklinde özetlenebilir.

Klasik yöntemler; duyarlılık analizi, gölge fiyatlar ve parametrik programlama yardımıyla yapılan optimizasyon sonrası incelemelerdir. Fakat bu yöntemlerden hiçbiri, parametrelerdeki belirsizliğin etkilerinin tam olarak incelenmesi için uygun değildir. Duyarlılık analizi, optimallik sınırları dâhilinde alternatifler üretmek için kullanılabilir. Gölge fiyatlar, kısıt vektörünün bir fonksiyonu olarak optimal çözümün ne kadar iyileştirilebileceğini gösterir. Parametrik programlama kullanılarak, kısıtlar ve amaç fonksiyonundaki tüm değişiklikleri incelemek mümkün olmakta, fakat bu yöntemlerden hiçbiri, parametrelerdeki tüm değişiklikleri bir arada ele almamaktadır.

Parametrelerdeki belirsizliği modele taşımak için bir diğer yöntem, olasılık teorisinden yararlanarak stokastik programlama kullanmaktır. *Stokastik programlama,* problemi tanımlayan parametrelerden bazılarının rastgele olduğu varsayımı sağlandığında kullanılabilir. Bununla birlikte stokastik programlamalar yapısal olarak karmaşık oldukları için pratikte çok kullanım alanına sahip değillerdir (Tuncel, 1997, s. 49).

Bulanık programlama, yönteminde ise problemlerin çözümünde, DP'nın aksine, parametrelerde kesin olmama varsayımının sağlanması gerekir. BDP, hem amaç fonksiyonu hem de kısıtlarda öznel ihtiyaçların olduğu problemlere DP'yı uygulamak için büyük bir esneklik getirmiştir (Zhang, 2003, s. 384). Bulanık programlama, bulanık kavramlarla karar verme durumlarında belirsizliği sunar (Sakawa & Kato, 2002, s. 125). Stokastik faktörün parametreleri güvenilir ve kesin değilse bulanık küme teorisinin kullanımı iyi bir seçimdir (Dai, 2003, s. 82).

BDP’de amaç, en yüksek üyelik derecesine sahip bulanık karar olarak tanımlanan optimal karara ulaşmaktır. Amaç fonksiyonunu eniyilemektense amaç fonksiyonunu belirli bir tatmin derecesi ile ele alan bir yaklaşımı benimsemenin gerçek problemleri incelemek için daha uygun bir yaklaşım olduğu düşünülebilir. Ayrıca DP’deki amaç fonksiyonu problemin formülasyon ve çözüm aşamasında gerekli iken BDP’de herhangi bir amaç fonksiyonunun olması gerekli değildir. Problemin formülasyonu aşamasında herhangi bir amaç fonksiyonu mevcut olsa bile, çözüm aşamasında bu fonksiyon bir kısıta dönüştürülür (Tuncel, 1997, s. 45-48).

Kısıt ihlallerine izin vermeyen DP’nin aksine BDP birçok farklı belirsizliğe ve toleransa önem dereceleri atayarak modelinde yer vermektedir. BDP, bunlar gibi birçok farklı belirsizliğe farklı çözüm yolları önermektedir (Zimmermann, 1991, s. 249). Bu yöntemlerin bir kısmına aşağıda kısaca değinilmiştir.

2.4. Bulanık Doğrusal Programlama Modelleri ve Çözüm Yaklaşımları

Klasik bir doğrusal programlama modeli matris notasyonu ile aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Amaç fonksiyonu:

$$\text{max/min } f(x)=c^T x$$

Kısıtlar:

$$Ax \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b$$

$$x \geq 0$$

Burada tüm A, b, ve c katsayıları kesin(crisp) olarak bilinen katsayılar, "$\leq$", "$\geq$" ve "=" simgeleri kesin ve herhangi bir ihlâle izin vermeyen eşitsizlikler(eşitlikler), son olarak da max(min) komutu katı bir ençoklayıcı(enazlayıcı)dır (Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Applications, 1991, s. 248). $c^T x$ terimi $\sum c_j x_j$ toplamını, $Ax \leq b$ ise $\sum a_{ij} x_j \leq b_i$ eşitsizliğini ifade eder ($i=1,2,\ldots m; j=1,2,\ldots n$).

DP modellerindeki kâr katsayıları(c^T), teknik katsayılar(A) ve kaynak sınırlarındaki(b) bulanıklık, amaç ve/veya kısıtlayıcı katsayılarının tam olarak bilinmediği ve modeldeki eşitsizlikler(eşitlikler) için net olmayan sınırların tanımlanabileceği durumlarda karşımıza çıkar. Bunlar bilgi eksikliği, bilgiye ulaşamama, durgun olmayan ve karmaşık ekonomik ortamlar veya yapısal durumlar nedeniyle ortaya çıkabilir. Aynı şekilde modeldeki her bir katsayı elemanı için "civarında", "aralığında", "kadar" gibi bulanık terimler söz konusu olabilir (Yılmaz, 1998, s. 27). Bulanık amaçtan kasıt, amaç fonksiyonu(max/min) ya da bu fonksiyondaki parametrelerin(c_j) bulanıklığıdır. Amaç fonksiyonunun eniyilenmesinden ziyade belirli bir tatmin derecesi yani istek seviyesi(aspiration level) sağlanmaya çalışılır. Örneğin "kâr marjını %10 civarında arttırmak" şeklinde bir hedef bulanık bir hedeftir. Bir ürünün satış fiyatının, dolayısıyla da bu üründen elde edilecek birim karın(c_j), rekabet, maliyet gibi faktörlerle kesin olarak ifade edilmesi gerçekçi bulunmayabilir. Benzer şekilde $Ax \leq b$ olarak ifade edilen kısıtlayıcı kümesinde "$\leq$" işareti ilgili kısıtlayıcıda belirli bir toleransı ifade edebilir. Örneğin, belirli bir ürüne olan talep miktarı(b_i) çoğu durumda tam olarak bilinmez. Ayrıca istihdam edilen işgücünden fazla mesai yapması istenebileceği gibi, işgücünün de greve gitmesi veya hastalık durumu gibi nedenlerle toplam işgücünde azalma söz konusu olabilir. Benzer olarak, istihdam edilen vasıfsız işgücünün belirli bir işte uzmanlaşması veya işgücündeki tutarsızlıklar(işin yavaşlatılması, vb.) nedeniyle işgücü kısıtlayıcısına ilişkin teknoloji katsayıları(a_{ij}) bulanıklık içerebilir. Bu örnekleri daha da çoğaltmak mümkündür. Dolayısıyla a_{ij}, b_i ve c_j katsayıları bulanık sayılarla veya bulanıklığı niteleyen tolerans aralıkları ile ifade edilebilir (Özkan, 2003, s. 162).

BDP modelleri ile DP modelleri arasındaki temel fark, modeldeki bulanık öğeleri göstermek için " ˜ " simgesinin kullanılması ve bulanıklığın bulunduğu kısımlar için [0,1] aralığında tanımlı bir üyelik fonksiyonunun atanmasıdır. Örneğin, "$\tilde{\leq}$" yaklaşık olarak daha küçük ya da eşit, "$\cong$" yaklaşık eşit, "$\tilde{\geq}$" yaklaşık olarak daha büyük ya da eşit vb. kesin olmayan anlamlar ifade etmektedir.

Genel olarak bir BDP modelinin tüm katsayılarının bulanık olduğu düşünülerek elde edilebilecek modelin en genel haliyle gösterimi aşağıdaki gibidir.

Amaç fonksiyonu:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \;\tilde{\leq}\; \tilde{b}_i \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

$$x \geq 0$$

BDP problemleri, bulanıklık kavramının ele alınış şekillerine göre birden çok sınıflandırmaya konu olmuştur. İlk sınıflandırma Zimmermann tarafından yapılmıştır. Zimmermann, BDP problemlerini simetrik modeller ve simetrik olmayan modeller olarak ikiye ayırmıştır. Zimmermann'a göre amaç ve kısıtların bulanık olması halinde simetrik bir model söz konusudur (Özkan, 2003, s. 162).

Bir DP probleminde bulanıklık üç şekilde olabilir (Verdegay, 1984, s. 132):

i. Amaç fonksiyonunun kesin olarak bilindiği, kısıtların bulanık olduğu durumlar

ii. Amaç fonksiyonunun bulanık olduğu, kısıtların kesin olarak bilindiği durumlar *iii.* Hem amacın hem de kısıtların bulanık olduğu durumlar

Aşağıda anlatılan farklı BDP modeli sınıflandırmaları ve çözüm yaklaşımları bu üç durumdan birisine uymaktadır. Bu çalışmada söz konusu sınıflandırmalar çözüm yaklaşımları eşliğinde verilmeye çalışılmıştır.

2.4.1. Kısıtları ve Amaç Fonksiyonu Bulanık Olan Doğrusal Programlama

Sağ taraf sabitleri ve amaç fonksiyonu bulanık olan DP problemlerinin matematiksel yapısı genel olarak aşağıdaki gibidir (Lai & Hwang, 1992, s. 95):

$$\begin{aligned} &\widetilde{\max}\, Z = c^T x \\ &Ax \le \tilde{b} \\ &x \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} &\widetilde{\max}\, Z = c^T x \\ &Ax \,\tilde{\le}\, b \\ &x \ge 0 \end{aligned}$$

Farklı bulanık kısıt gösterimine sahip bu modellerle ilgili olarak şayet her kısıt için maksimum tolerans miktarı(p_i) bilinirse kısıtlar, parametrik olarak $\theta \in [0,1]$ olmak üzere, her i için $(Ax)_i \le b_i + \theta p_i$ olarak yazılabilir. Eğer bu iki modelin üyelik fonksiyonları da aynı ise her iki model aynı olarak düşünebilir (Lai & Hwang, 1992, s. 79).

Bu problemler adından da anlaşılacağı üzere hem kısıtlar kümesinde hem de amaç fonksiyonunda bulanıklık içerirler. Bu tip BDP problemleri ile ilgili Zimmermann(1976) ve Chanas(1983) tarafından ortaya konan iki farklı yaklaşım söz konusudur. Fakat Chanas'ın yaklaşımında, karar vericinin amaç fonksiyonuna ilişkin bilgi(b_o,p_o) verebilmesine yardımcı olmak için model öncelikle parametrik bulanık kısıtlayıcılı DP problemi olarak çözülür.

2.4.1.1. Zimmermann Yaklaşımı

Zimmermann'a göre bulanık amaç fonksiyonu, karar vericiden sağlanan bulanık bir erişim düzeyi ile bulanık bir kısıtlayıcı olarak ifade edilebilir. Bu şekilde ortaya çıkan model simetrik bir modeldir (Wang, 1997, s. 61). Zimmermann, başlangıçta hem amacın hem de kısıtın bizzat karar verici tarafından bulanık olarak tanımlandığını belirtir. Bu durumda, bulanık karar kümesi belirlenirken bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcılar birbirlerinden farksız olarak ele alınır (Kaymak & Sousa, 2001). Zimmermann, karar vericinin ulaşmak istediği amaç fonksiyonunun değeri için bir *Z* istek seviyesinin, kurulabileceğini ve kısıtların her birinin bir bulanık küme olarak modellenebileceğini öne sürmüştür. (Zimmermann, 1991, s. 250).

Bu durumda Zimmermann(1976) tarafından önerilen ve *x*'i bulan model aşağıdaki gibidir (Lai & Hwang, 1992, s. 95).

$$
\begin{aligned}
&c^T x \,\tilde{\geq}\, b_0 \\
&(Ax)_i \,\tilde{\leq}\, b_i, \forall_i \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

Burada $\tilde{\leq}$ işareti, $\leq$ işaretinin bulanıklaştırılmış halidir. $\tilde{\leq}$ işareti, "*(Ax)*$_i$ kısıtlayıcısı b_i civarında veya daha az" anlamına gelirken, $\tilde{\geq}$ işareti de $\geq$ işaretinin bulanıklaştırılmış hali olup "c^Tx amacı b_0 civarında veya daha fazla" anlamına gelmektedir (Terano, Asai, & Sugeno, 1992, s. 128).

Bulanık amaç fonksiyonunun her iki tarafı da (-1) ile çarpılırsa, BDP problemi aşağıda verildiği gibi simetrik olarak ifade edilebilir (Özkan, 2003, s. 167).

$$
\begin{aligned}
&-c^T x \,\tilde{\leq}\, -b_0 \\
&(Ax)_i \,\tilde{\leq}\, b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

Burada B= $\begin{bmatrix} -c^T \\ A_i \end{bmatrix}$ ve d= $\begin{bmatrix} -b_0 \\ b_i \end{bmatrix}$ sütun vektörleri tanımlanırsa BDP problemi aşağıda verildiği gibi düzenlenebilir:

$$Bx \tilde{\leq} d$$
$$x \geq 0$$

Bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcılar, seçenekler kümesindeki bulanık kümeler olarak tanımlandığı için bunlara ilişkin üyelik fonksiyonlarının belirlenmesi gerekir.

Literatürde doğrusal programlamadaki bulanıklığı nitelemek üzere çok sayıda üyelik fonksiyonu kullanılmıştır. Bunlardan bazıları;

i. Doğrusal (Zimmermann, 1975; Werners, 1984),

ii. İçbükey üssel (Sakawa, 1983; Zimmermann, 1978)

iii. İçbükey parçalı doğrusal (Hannan, 1981),

iv. s-biçimli parçalı doğrusal (Hannan, 1981),

v. s-biçimli hiperbolik (Leberling, 1983),

vi. s-biçimli ters hiperbolik (Sakawa ve Yano, 1990) ,

vii. s-biçimli lojistik (Zimmermann ve Zysno, 1982),

viii. s-biçimli kübik (Schwab, 1983) fonksiyonlardır (Rommelfanger, 1996, s. 514).

Doğrusal üyelik fonksiyonları ile oluşturulan modeller diğerlerine göre daha pratik çözüme sahiptirler. Bu sebeple bu çalışmada görülen bulanık eşitsizliklerin(eşitliklerin) parçalı doğrusal üyelik fonksiyonları ile belirlendiği kabul edilmiştir.

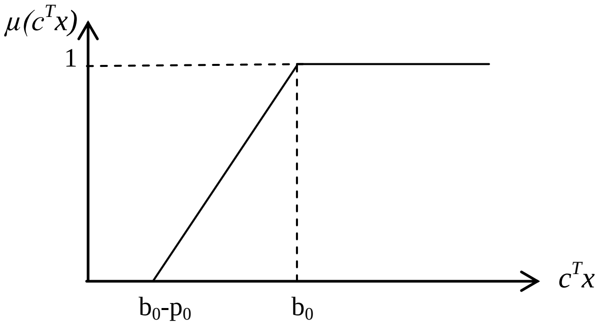
Burada üyelik dereceleri [d_i, d_i+p_i] aralığında 1’den 0’a doğru tekdüze(monotonik) azalmalı ve i’inci bulanık eşitsizlik tamamen doyuruluyorsa üyelik derecesi 1, hiç doyurulmuyorsa üyelik derecesi 0 olmalıdır. p_i ise i’inci bulanık eşitsizliğin sağ taraf sabiti(erişim düzeyi) için karar vericinin belirlediği maksimum toleranstır. Diğer bir ifadeyle, p_i'ler amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılardaki kabul edilebilir toleransları gösteren ve karar verici tarafından belirlenen sabitlerdir.

Bulanık amaç fonksiyonu ve bulanık kısıtlayıcıların parçalı doğrusal üyelik fonksiyonları sırasıyla ayrı ayrı ele alındığında aşağıda verildiği gibi tanımlanır (Lai & Hwang, 1992, s. 96):

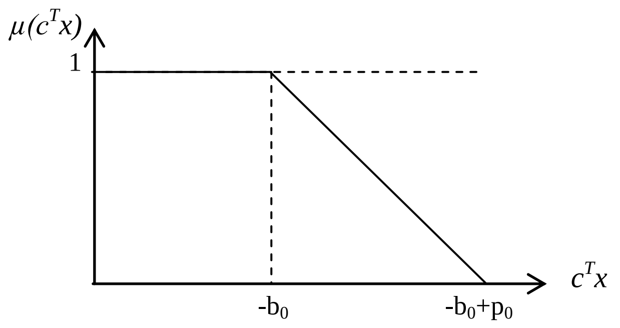
$$\mu(c^T x)=\begin{cases} 0 & , c^T x < b_0 - p_0 \\ 1-\dfrac{b_0 - c^T x}{p_0} & , b_0 - p_0 \le c^T x \le b_0 \\ 1 & , c^T x > b_0 \end{cases}$$

$$\mu(Ax)_i=\begin{cases} 0 & , (Ax)_i > bi+pi \\ 1-\dfrac{(Ax)_i - b_i}{p_i} & , b_i \le (Ax)_i \le b_i + p_i \\ 1 & , (Ax)_i < b_i \end{cases}$$

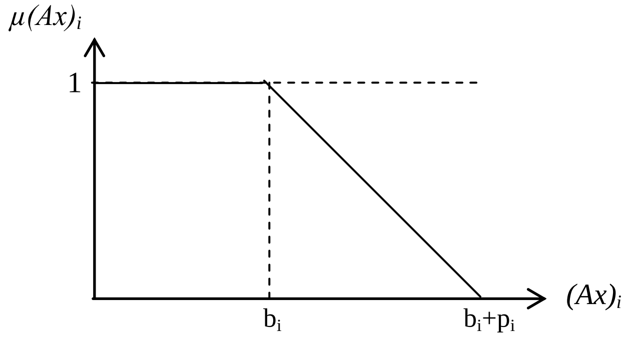
Bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonları Şekil 23, Şekil 24 ve Şekil 25'te gösterilmiştir. Bu şekillerde, bulanık amaç fonksiyonu ve bulanık kısıtlayıcılara ilişkin üyelik fonksiyonlarının sırasıyla tekdüze olarak artan veya tekdüze azalan fonksiyonlar olduğu görülmektedir (Seçme, 2005, s. 34,37).



Şekil 23: $c^T x \tilde{\geq} b_o$ Şeklindeki Bulanık Amacın Üyelik Fonksiyonu



Şekil 24: $-c^Tx \tilde{\leq} -b_o$ Şeklindeki Bulanık Amacın Üyelik Fonksiyonu



Şekil 25: $(Ax)_i \tilde{\leq} b_i$ Şeklindeki Bulanık Kısıtlayıcının Üyelik Fonksiyonu

Zimmermann, simetrik olan bu modelin optimal çözümünü bulmak için aşağıdaki max(min) işlemcisini kullanmıştır (Wiedey & Zimmermann, 1978, s. 1073)

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min[\mu(c^T x), \mu(Ax)_i]$$

$$\mu_{\tilde{D}}(x^*) = \max_{x \geq 0}\left(\min[(1 - \frac{b_0 - c^T x}{p_0}), (1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{p_i})] \right) \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

Bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcılar için tolerans betimlemesi kullanıldığı zaman, bir ençoklama kararı olan $\mu_{\tilde{D}}(x^*)$, max(min) işlemcisinin yanında model, klasik bir DP modeli haline dönüştürülerek de belirlenebilir. Bu durumda hem bulanık amacın hem de bulanık kısıtların ortak doyumunu sağlayacak en yüksek üyelik dereceli elemanının bulunması için ek bir $\lambda \in [0,1]$ değişkeni tanımlanır. λ 'nın klasik modele eklenmesi ile

$\mu_{\tilde{D}}(x^*)$'ı belirleme problemi klasik bir DP problemi olarak aşağıda verildiği gibi ifade edilir (Zhao, 1992, s. 57).

$$\begin{aligned}&\max \lambda\\&\mu(c^T x) \geq \lambda\\&\mu(Ax)_i \geq \lambda\\&\lambda \in [0,1]\end{aligned}$$

Bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonları yukarıdaki modelde yerine konduğu zaman aşağıda verilen DP modeline ulaşılır (Özkan, 2003, s. 171-172). Eğer modelde bulanık olmayan kısıtlayıcı mevcut ise $(Ex)_i \leq b_i$ şeklinde modele dâhil edilir.

$$\begin{aligned}&\max \lambda\\&c^T x \geq b_0 - (1-\lambda) p_0\\&(Ax)_i \leq b_i + (1-\lambda) p_i, \forall i\\&(Ex)_i \leq b_i \qquad \longrightarrow \text{Bulanık olmayan kısıtlayıcı durumu}\\&\lambda \in [0,1]\\&x \geq 0\end{aligned}$$

Zimmermann'ın yaklaşımında *c, A, b_0, p_0, b_i* ve *p_i*'lerin problemin çözümünden önce, karar verici tarafından verildiği kabul edilir. Yukarıda verilen DP probleminin klasik bir DP problemi olduğu açıktır.

2.4.1.2. Chanas Yaklaşımı

Chanas, Zimmermann'dan farklı olarak bulanık kısıtların belirlediği uygun çözüm alanı hakkındaki bilgi eksikliği yüzünden amaç fonksiyonu için bir erişim düzeyi(b_0) ve maksimum toleransın(p_0) karar verici tarafından başlangıçta belirlenemeyeceğini ifade etmiştir. Chanas(1983) yaklaşımında, karar vericinin b_0 ve p_0 değerlerini belirlemesine yardım edebilmek için öncelikle aşağıda verilen bulanık kısıtlayıcılı DP probleminin parametrik model olarak çözülmesi gerekir (Lai & Hwang, 1992, s. 104):

$$\max Z = c^T x$$
$$(Ax)_i \ \tilde{\leq}\ b_i, \forall i$$
$$x \geq 0$$

b_0 ve p_0'ı saptamak konusunda karar vericiye yardım etmek için Chanas, ilk olarak bu problemi çözer ve sonuçları karar vericiye iletir. Burada her b_i için p_i hoşgörü miktarı verilmiştir ve bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları azalan parçalı doğrusal bir üyelik fonksiyonu şeklindedir. Bulanık kısıtlayıcılara ilişkin üyelik fonksiyonlarının en azından λ düzeyine kadar sağlanması (yani $\mu_i(x) \geq \lambda$ olması) gerektiği için model,

$$\max Z = c^T x$$
$$(Ax)_i \leq b_i + (1-\lambda) p_i$$
$$\lambda \in [0,1]$$
$$x \geq 0$$

olarak ifade edilebilir. Buradan, kısıtlayıcılardaki tolerans derecesini gösteren θ parametresi, $\theta = 1-\lambda$ olarak tanımlandığı zaman model aşağıdaki gibi parametrik bir programlama modeline dönüşür,

$$\max Z = c^T x$$
$$(Ax)_i \leq b_i + \theta p_i$$
$$\theta \in [0,1]$$
$$x \geq 0$$

Bu durumda $\mu_i(x) \geq \lambda$, $\mu_i(x) \geq 1-\theta$ şeklinde düzenlenebilir. Chanas'a göre θ parametresinin her bir değeri için yukarıdaki modelin kabul edilebilir çözümlerini gösteren $x^*(\theta)$'da

$$\mu\left(Ax_i^*(\theta)\right) \geq 1-\theta$$

ifadesi doyurulmaya çalışılır. Burada, her sıfır olmayan temel çözüm koşulunu sağlayan en az bir kısıt mevcuttur. Her bir $x^*(\theta)$ değeri için, bazı kısıtlayıcıların (1-θ)'dan büyük olabileceği, en az bir adet kısıtın ise (1-θ)'ya eşit olduğu düşüncesinden hareketle, bulanık kısıtlayıcıların ortak doyum derecesi aşağıdaki gibi tanımlanır (Chanas S. , 1983, s. 245):

$$\mu\left(Ax^*(\theta)\right) = \min\left(\mu_i[Ax^*(\theta)]\right) = 1-\theta$$

Buradan, θ parametresinin her bir değeri için, bulanık kısıtlayıcıları 1-θ düzeyinde sağlayan bir çözüm belirlenir. Bu durumda, parametrik programlama probleminin $x^*(\theta)$ ve $Z^*(\theta)$ ile temsil edilen parametrik optimal çözüm değerleri, b_0 ve p_0 değerlerinin belirlenmesi için karar vericiye sunulur. Karar vericiden sağlanan bu değerlere göre $x^*(\theta)$'da sağlanan en iyi çözüm ile elde edilen amaç fonksiyonu için üyelik fonksiyonu aşağıda verildiği gibi tanımlanır:

$$\mu\left(c^T x^*(\theta)\right) = \begin{cases} 0 & , c^T x^*(\theta) < b_0 - p_0 \\ 1 - \dfrac{b_0 - c^T x^*(\theta)}{p_0} & , b_0 - p_0 \le c^T x^*(\theta) \le b_0 \\ 1 & , c^T x^*(\theta) > b_0 \end{cases}$$

Amaç fonksiyonunun parametrik üyelik fonksiyonu, θ parametresine göre parçalı doğrusal, sürekli ve içbükey bir fonksiyondur. Bulanık karar kümesinin belirlenmesi için bunlara ait üyelik fonksiyonlarının θ'ya bağlı en yüksek dereceli elemanı aşağıdaki gibi tanımlanacaktır. Chanas'a göre D̃ karar kümesinin en yüksek dereceli elemanı bir sonraki eşitliğin analitik olarak çözümü ile belirlenecektir (Chanas S. , 1983, s. 245) :

$$\mu_{\tilde{D}}\left(x^*(\theta)\right) = \max\min\left(\mu[cx^*(\theta)], \mu[Ax^*(\theta)]\right)$$

$$\mu\left(cx^*(\theta)\right) = \mu\left(Ax^*(\theta)\right)$$

2.4.2. Kısıtları Bulanık Olan Doğrusal Programlama

Sağ taraf sabitleri bulanık olan DP problemlerin matematiksel yapısı genel olarak aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
&\max Z = c^T x \\
&Ax \leq \tilde{b} \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

Sağ taraf sabitleri bulanık olan DP problemlerin çözümünde iki yaklaşım mevcuttur. Bunlardan Verdegay(1982) tarafından ortaya konulan çalışma sadece sağ taraf sabitlerinin bulanık olduğu asimetrik durumlara ilişkin iken bu yaklaşımdan hareketle Werners(1987) tarafından sağ taraf sabitleri nedeniyle amaç fonksiyonunun da bulanık olacağı ifade edilerek simetrik bir yaklaşım modeli ortaya konmuştur.

2.4.2.1. Verdegay Yaklaşımı

Verdegay bulanık kısıtlı doğrusal programlama modellerinin çözümünde betimleme teoremi ve parametrik programlamadan faydalanmıştır. Verdegay ayrıca parametrik programlamayı kullanarak primal ve dual problemleri tanımlamış ve uygun koşullar altında aynı çözümü verdiklerini göstermiştir (Wu, 2003, s. 61). Verdegay(1982), sağ taraf değerleri bulanık olan DP problemlerinin kesin parametrik programlama problemine eşdeğer olduğunu ilk olarak kanıtlayan kişidir (Lai & Hwang, 1992, s. 79).

Verdegay'a göre bulanık kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonları,

$$
\mu(Ax)_i = \begin{cases} 0 & ,(Ax)_i > b_i + p_i \\ 1 - \dfrac{(Ax)_i - b_i}{p_i} & ,b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 1 & ,(Ax)_i < b_i \end{cases}
$$

olarak tanımlandığı için model aşağıda verildiği gibi düzenlenebilir:

$$\max Z = c^T x$$
$$(Ax)_i \leq b_i + (1-\alpha)\, p_i$$
$$\alpha \in [0,1]$$
$$x \geq 0$$

Burada $\theta = 1-\alpha$ dönüşümü ile aşağıda verilen parametrik programlama problemine ulaşılır ve sonuç olarak θ parametresine bağlı parametrik çözüm elde edilir.

$$\max Z = c^T x$$
$$(Ax)_i \leq b_i + \theta p_i$$
$$\theta \in [0,1]$$
$$x \geq 0$$

Her farklı θ değeri için farklı bir optimal çözüm elde edilecektir. Dolayısıyla burada karar kümesi bulanık bir yapı arzeder. Fakat $\tilde{D}$ bulanık karar kümesinin en yüksek üyelik dereceli elemanının belirlenmesi amacı güdülmez (Öğütlü, 2002, s. 67). Tablo 3'deki gibi bir sonuçlar tablosu veri olarak karar vericiye sunulur. Normal şartlarda karar vericiden max(min) problemi için Z_{max}(Z_{min})'i seçmesi beklenir. Fakat karar verici, modelde yer almayan diğer etkenleri(tecrübeler, beklentiler, kısıtlarla ilgili model dışı durumlar, yorumlar, vs.) de göz önüne alarak uygulama için en uygun çözümünü seçmeye çalışır. Bu çözüm modelin sunduğu en iyi çözüm olmayabilir, fakat karar verici için en uygun çözüm olması beklenir.

Tablo 3: Parametrik Bir Programlama Sonucu Olası Çözüm Değerleri

		Kısıt Kullanım Miktarları			
θ	***Z*(θ)***	***b*₁**	***b*₂**	**...**	***b*ₘ**
0.0					
0.1					
0.2					
.					
.					
0.9					
1.0					

Kaynak: (Lai & Hwang, 1992, s. 84)

2.4.2.2. Werners Yaklaşımı

Werners'e göre bulanık kısıtlı DP modellerindeki kısıtlardaki bulanıklık, amaç fonksiyonunun da bulanık olmasını gerektiren bir durumdur. Burada bulanık olarak algılanan amaç fonksiyonuna ilişkin üyelik fonksiyonu, karar verici tarafından önceden belirlenemez. Werners, amaç fonksiyonuna ilişkin üyelik fonksiyonunu belirleyebilmek için Orlovski'nin önerdiği bulanık karar kümesini temel olarak almıştır. Orlovski, bulanık kısıtlayıcıların oluşturduğu bulanık çözüm uzayının her bir α-kesim kümesi için, amaç fonksiyonunun optimal değerlerini belirlemeyi ve bu optimal değerlerle eşit üyelik dereceli olan çözüm uzayının α-kesim kümesini bulanık karar kümesi olarak ele almayı önermiştir (Werners, 1987, s. 135).

Werners yaklaşımında aşağıda gösterildiği gibi başlangıçta c, A, b_i ve p_i verilmiş fakat bulanık amacın hedefi verilmemiştir.

$$\max Z = c^T x$$
$$(Ax)_i \tilde{\leq} b_i + \theta p_i \ , \ \forall i$$
$$\theta \in [0,1]$$
$$x \geq 0$$

Werners, burada amaç fonksiyonunun bulanıklığının bulunabilmesi için, Zimmermann algoritmasında olduğu gibi p_0 ve b_0 değerlerini karar vericiye sorarak üyelik fonksiyonu oluşturmak yerine karar vericinin bu değerleri veremeyeceğini düşünerek, Z^0(toleransın 0 olduğu) ve Z^1(toleransın tam olduğu) değerlerinin aşağıdaki gibi belirlenebileceğini ifade etmiştir.

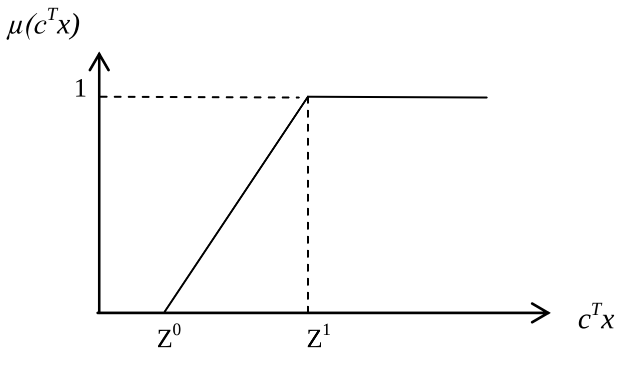
$$\begin{array}{lcl} \max Z^0 = c^T x & & \max Z^1 = c^T x \\ Ax \leq b & \text{ve} & Ax \leq b+p \\ x \geq 0 & & x \geq 0 \end{array}$$

Dolayısıyla Z^0 ve Z^1 değerlerini kullanarak amaç fonksiyonu için sürekli artan doğrusal bir üyelik fonksiyonu oluşturulabilir. Optimal çözüm, Z^0 ve Z^1 arasında bir değer alacağı için optimal çözümün değeri arttıkça memnuniyet de artacaktır (Lai & Hwang, 1992, s. 88).

Bu durumda amaç fonksiyonunun ve bulanık kısıtların üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\mu_0(c^T x) = \begin{cases} 1 & , \ c^T x > Z^1 \\ 1 - \dfrac{Z^1 - c^T x}{Z^1 - Z^0} & , \ Z^0 \le c^T x \le Z^1 \\ 0 & , \ c^T x < Z^0 \end{cases}$$

$$\mu(Ax_i) = \begin{cases} 1 & , \ (Ax)_i < b_i \\ 1 - \dfrac{(Ax)_i - b_i}{p_i} & , \ b_i \le (Ax)_i \le b_i + p_i \\ 0 & , \ (Ax)_i > b_i + p_i \end{cases}$$



Şekil 26: Amaç Fonksiyonu için Üyelik Fonksiyonu

Optimal karara ulaşmak için Bellman ve Zadeh tarafından önerilen min-işlemcisi kullanarak, $\mu_{\tilde{D}}$ üyelik fonksiyonu ile belirlenen D̃ bulanık karar kümesi elde edilebilir. Model aşağıdaki haliyle Zimmermann(1978) tarafından sunulan modele benzeyen simetrik bir modeldir. İki model arasındaki temel fark amaç fonksiyonuna ait üyelik fonksiyonundaki farklılıktır (Lai & Hwang, 1992, s. 88). Zimmermann'ın modelinde, amaç fonksiyonundaki bulanıklık karar verici tarafından belirlenirken; Werners'in yaklaşımında, modelin kısıtlarındaki bulanıklıktan dolayı amaç fonksiyonu da bulanık hali alır.

$\tilde{D}=\tilde{G}\cap\tilde{C}$

$\mu_{\tilde{D}} = \min(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m) = \lambda$

$\mu_{\tilde{D}}(x^*) = \max\ \lambda$

$$\begin{array}{lcl}
\max \lambda & & \max \lambda \\
\mu_0 \geq \lambda & & \lambda(Z^1 - Z^0) - c_j x_j \leq -Z^0 \\
\mu_i \geq \lambda \quad , \forall i & \text{veya} & \lambda p_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + p_i \\
\lambda \in [0,1] & & \lambda \in [0,1] \\
x \geq 0 & & x \geq 0
\end{array}$$

Görüldüğü üzere optimal karar olan x^*'in bulunabilmesi için max(min) işlemcisi kullanılmıştır. Model bu haliyle hem amaç hem de kısıtların birlikte doyumunu sağlayan en yüksek dereceli elemanı aradığı için simetrik bir model teşkil eder.

2.4.3. Amaç Fonksiyonu Parametreleri Bulanık Olan Doğrusal Programlama

2.4.3.1. Verdegay Yaklaşımı

Gerçek hayatta amaç fonksiyonuna ilişkin parametrelerin(kâr ya da maliyet katsayılarının) tam olarak kestirilemediği durumlarla sıkça karşılaşılır. Bu şekilde bir BDP modeli Verdegay(1984) tarafından ortaya atılmıştır. Bu problem genel olarak aşağıdaki gibi formüle edilir (Lai & Hwang, 1992, s. 119):

$$
\begin{aligned}
& \max \tilde{c}^{T} x \\
& (Ax)_i \leq bi \qquad , \forall_i \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Amaç fonksiyonu için yazılabilecek üyelik fonksiyonu $\mu(c)$ bütün parametreler göz önüne alındığında aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Verdegay, 1984, s. 134):

$$\mu(c) \geq \inf_j \mu_j(c_j)$$

Burada inf(infimum) terimi "en büyük alt sınır" anlamına gelmektedir. Verdegay modelin aşağıdaki gibi doğrusal programlama modeline eşit olacağını öne sürmüştür. $\mu(c) \geq \inf_j \mu_j(c_j)$ olduğu için en büyük alt sınır $1\text{-}\alpha$ 'dan büyük veya ona eşit olacaktır. Yani model içerisinde her bir katsayı parametresinin bulanıklılığı ayrı olarak değerlendirileceği için eşitlik modele aşağıdaki gibi girecektir:

$$
\begin{aligned}
& \max \ c_j x_j \\
& \mu_j(c_j) \geq 1-\alpha \\
& (Ax)_i \leq b_i , \forall_i \\
& \alpha \in [0,1] \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Amaç katsayılarının üyelik fonksiyonlarının sürekli ve tekdüze olması halinde üyelik fonksiyonlarının tersi μ_j^{-1} söz konusu olacaktır. Bu durum aşağıdaki gibi gösterilebilecektir:

$$
\begin{aligned}
&\max c_j x_j \\
&c_j \geq \mu_j^{-1}(1-\alpha), \forall_j \\
&(Ax)_i \leq b_i, \forall_i \\
&\alpha \in [0,1] \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

veya aynı anlama gelen aşağıdaki parametrik programlama şeklinde de ifade edilebilir:

$$
\begin{aligned}
&\max \sum \mu_j^{-1}(1-\alpha)x_j \\
&(Ax)_i \leq b_i, \forall_i \\
&\alpha \in [0,1] \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

Burada sonuç bulanıktır ve bulanık amaç kümesinin her (1-α) kesim seviyesi için optimal bir çözüm değeri söz konusudur. Bu nedenle karar verici değişen şartlar altında istediği kararı verecektir.

Verdegay, bu tür problemlerin dualinin alınarak, yani sağ taraf sabiti bulanık olan doğrusal programlama modeline dönüştürülerek, çözülebileceğini ileri sürmüştür. Bunun tam tersi olarak da sağ tarafı bulanık olan modelin duali alındığında ise bulanık amaç katsayılı modelin ortaya çıktığını belirlemiştir (Verdegay, 1984, s. 137).

2.4.4. Sağ Taraf Sabitleri ve Teknoloji Katsayıları Bulanık Olan Doğrusal Programlama

2.4.4.1. Negoita ve Sularia Yaklaşımı

Sağ taraf sabitleri ve teknoloji katsayıları bulanık olan doğrusal programlama modeli genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad c^T x \\
&\text{s.t.} \quad \tilde{A}x \leq \tilde{b} \qquad \text{ve} \qquad x \geq 0
\end{aligned}
$$

Burada bulanık olarak görülen bütün katsayıların üçgensel bulanık sayılar olduğu varsayılır ve ona göre işlem yapılır. Buna göre bulanık sayılar aşağıdaki gibi üçgensel sayılar olarak ifade edilir:

$\tilde{A} = \langle s_{ij}, l_{ij}, r_{ij} \rangle$
$\tilde{b} = \langle t_i, u_i, v_i \rangle$

Bulanık sayılar üzerindeki işlemler göz önüne alınarak yukarıdaki model şu şekilde ifade edilebilir (Klir & Yuan, 1995, s. 414):

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \le t_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} (s_{ij} - l_{ij}) x_i \le t_i - u_i \qquad (i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n)$$
$$\sum_{j=1}^{n} (s_{ij} + r_{ij}) x_j \le t_i + v_i$$
$$x \ge 0, (i, j \in N)$$

Bu modeldeki tüm sayılar gerçel sayılardır ve BDP problemi klasik DP problemine dönüştürülmüştür. Bu modelin çözülmesi ile modelin x^* optimal çözümü elde edilir. Bu yaklaşımın olumsuz tarafı kısıt kümesini bulanıklıktan kurtarırken kısıt sayısının üç katına çıkarılması ve modelin hacminin büyümesidir.

2.4.5. Bütün Katsayıları Bulanık Olan Doğrusal Programlama

2.4.5.1. Carllson ve Korhonen Yaklaşımı

Bazen doğrusal programlama problemindeki bütün katsayılar belirsizdir. Bu tür durumlarda BDP modelinin gösterimi şu şekildedir:

$$\begin{array}{ll} \max & \tilde{c}^T x \\ \text{s.t.} & (\tilde{A}x)_i \leq \tilde{b}_i, \forall_i \\ & x \geq 0 \end{array}$$

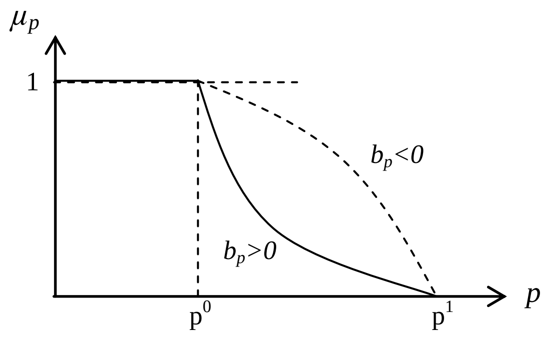
Eşitlik için Carllson ve Korhonen(1986), Chanas'ın yaklaşımının kısıt ihlâl dereceleri arasındaki ödünleşmeyi(trade-off) göz önüne almadığını düşünerek tam bir ödünleşme yaklaşımı ortaya koymuştur. Parametrelerde sürekli artan bir ilişki olduğunu öne sürmüşlerdir. c, A ve b parametreleri için mümkün aralık değerleri $[c^o, c^1]$, $[A_0, A^1]$ ve $[b^o, b^1]$ olarak tanımlıdır. Bu aralıklarda alt sınırlar çözümün uygulanabilir olduğu risksiz bölgeleri gösterirken, üst sınırlar ise gerçek üstü ve mümkün olmayan parametre değerlerini temsil etmektedir. Çözümün güvenilirliği üst sınırlara gidildikçe azalır (Lai & Hwang, 1992, s. 121). Bu durumda daha optimistik çözümlerle optimal çözüm sağlanırken çözümün uygulanabilirliği sorunu yaşanacaktır. Bu nedenle uygulanabilirliğin sağlanabilmesi için bulanık parametre değerlerine üyelik fonksiyonları atanmalıdır ve bu parametrelerin üyelik fonksiyonlarını tekdüze azalan olarak düşünmek akla yatkındır. Burada parametrelerin üyelik fonksiyonları; doğrusal, üstel, hiperbolik, ters hiperbolik, parçalı doğrusal gibi pek çok farklı şekilde olabilir. Carlsson ve Korhonen tarafından üstel ve parçalı doğrusal üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Üyelik fonksiyonları, ilgili parametre için μ_c, μ_A ve μ_b olarak ifade edilmiştir (Carlsson & Korhonen, 1986):

p modeldeki bir parametreyi göstermek üzere üstel üyelik fonksiyonu,

$$\mu_p = \begin{cases} 1 & , p \leq p^0 \\ \dfrac{1 - \exp\left(-b_p (p - p^1)/(p^0 - p^1)\right)}{1 - \exp\left(-b_p\right)} & , p^0 \leq p \leq p^1 \\ 0 & , p \geq p^1 \end{cases}$$

şeklinde formüle edilir.

b_p, sıfır olmamak kaydıyla karar verici tarafından belirlenen bir sabittir ve üyelik fonksiyonunun şeklini belirler. Bu üyelik fonksiyonunun gösterimi Şekil 27'deki gibidir.



Şekil 27: Parametreye Ait Üstel Üyelik Fonksiyonu

Üstel üyelik fonksiyonu durumunda p parametresi, gerekli logaritmik işlemler sonucunda aşağıdaki eşitlik yardımıyla çözülür:

$$p = p^1 - \frac{p^0 - p^1}{b_p}.\ln\left[1 - \left(1 - \exp(-b_p)\right)\mu_p\right]$$

Parametrelerdeki belirsizliğin üyelik fonksiyonları ile belirlenmesinden sonra bu üyelik fonksiyonları ile ulaşılacak optimal çözüm için μ=min(μ_c, μ_A, μ_b) eşitliğinin yazılması gereklidir. c, A ve b arasında tam bir ödünleşme sonucunda çözüm $\mu = \mu_c = \mu_A = \mu_b$'de gerçekleşir (Paksoy, 2002, s. 14-15).

Her p parametresi yerine yukarıdaki formüller uyarlanarak BDP modelinde alt ve üst sınır ikilileriyle ifade edilen bulanık parametreler μ cinsinden parametrik olarak gösterilir. Son haliyle model parametrik DP modeli halini alır. μ'ye [0,1] aralığında verilen her bir değer neticesinde optimal çözüm kümesi elde edilir ve değerler aşağıdaki tablodaki gibi gösterilebilir. Verdegay yaklaşımında olduğu gibi bu kümenin hangi çözümünün BDP probleminin çözümü olacağı karar verici tarafından belirlenecektir. μ'ler arasındaki farkın büyüklüğü veya başka bir ifade ile hassasiyetin derecesi karar vericiye sunulacak seçenek sayısını da belirlemekte bu da bir açıdan etkileşimli bir parametrik çözüm yaklaşımı anlamına gelmektedir.

Tablo 4: Her μ Değerine Karşılık Gelen BDP Problemi için Optimal Değerler

μ	Z^*	x^*_1	…	x^*_n	b_1	…	b_m
0.0							
0.1							
0.2							
.							
.							
0.9							
1.0							

BÖLÜM III

BİR BİSKÜVİ İŞLETMESİNDE BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İLE OPTİMUM MALİYETLİ ÜRÜN FORMÜLÜ OLUŞTURMA

Bu bölümde, Karaman'da faaliyet gösteren bir gıda işletmesinin ürün girdi maliyetleri ile ilgili çalışmaya yer verilmiştir. Bu noktada araştırmanın amacı ve hangi probleme çözüm sunduğu, çözümün hangi kısıtlar altında verildiği ve verilerin nasıl elde edildiğine değinilmiştir. Bu sebeplerle çalışmaya konu olan işletme ve üretim tesisi hakkında kısa ve öz bilgi verilmiştir. Bununla birlikte üretimi gerçekleştirilen ürün çeşitleri tanıtılmış ve ürünlerin üretim süreçleri hakkında akış şemaları eşliğinde bilgi verilmiştir. Ürünlerin birini diğerinden farklı kılan noktalar nedenleri ile birlikte ele alınmış ve belirli standart değerler altında ürün formülleri ilgililerin aktardığı ölçüde ifade edilmiştir. Son olarak da probleme dönük çözüm öneren klasik ve bulanık doğrusal programlama modeller kurulmuş ve çözüm sonuçları karşılaştırılmıştır.

3.1. Uygulamanın Amacı ve Önemi

Bu araştırmada, 6 temel farklı formül ile üretilen ürünlerde formül girdi değerlerinin sahip olduğu tolerans aralıklarını aşmamak kaydı ile kullanılan toplam hammadde maliyetini en aza indirgemek amaçlanmaktadır.

Bu ihtiyacın ortaya çıkmasındaki iki temel sebepten birisi hammadde depolarını daha etkin kullanmak iken diğer sebep yoğun rekabet ortamının sektörde maliyetleri aşağı çekme yönündeki baskısıdır.

3.2. Kullanılan Veriler ve Uygulamanın Çerçevesi

Çalışmada kullanılan veriler ilgili işletmenin üretim, kalite kontrol, satın alma ve muhasebe bölümlerinin yetkilileriyle yapılan görüşmeler neticesinde elde edilmiş verilerdir. Problemin çerçevesinin tespitinde ilgili üretim hatları ve bunların yerleşim düzeni ile ilgili veriler fabrika üretim müdüründen elde edilmiştir. Hammadde girdilerinin maliyetlerinde satın alma ve muhasebe bölümleri veri kaynağı olmuştur. Bunların yanında ilgili ürünlerin formül ve kalite standartları ile ilgili veriler kalite kontrol biriminden temin edilmiştir.

Modelin maliyet enazlaması şeklinde teşkili esnasında hammadde ve yarı mamul girdileri dışındaki üretime dâhil olan enerji, işgücü ve diğer girdiler göz ardı edilmiş ve model sadece hammadde girdisi ile tasarlanmıştır. Karar verici belirli veya yaklaşık bir maliyet istek seviyesi belirtmemiş, amacını "genel olarak kullanılan girdileri ve bunların maliyetlerini olabildiğince azaltmak" şeklinde ifade etmiştir.

3.3. Uygulamaya Konu İşletme Hakkında Bilgi

3.3.1. İşletme Profili

Faaliyet alanı gıda olan işletme; bisküvi, çikolata, kraker ve gofret grubu ürünleri üretmektedir. Yaklaşık 20 yıllık bir geçmişe sahip olup bütün üretim bölümlerinde yaklaşık 2.500 çalışan ve idari olarak da yaklaşık 110 çalışanı bulunmaktadır. Yıllık cirosunun yarıya yakınını ihraç pazarlarından elde eden işletmenin temel yurtdışı pazarları Ortadoğu ve Kuzey Afrika ülkeleri, Türkî Cumhuriyetler ve Balkan ülkeleridir. Bunun yanında ürünler Asya, Amerika ve Afrika'nın diğer bölümlerine de ihraç edilmektedir. Unlu ve çikolatalı mamuller olmak üzere iki ana birimde üretim yapılmaktadır. Unlu mamullerin üretildiği fabrikada kremalı bisküviler, sade bisküviler, kraker ve gofret çeşitleri üretilmektedir. Bu fabrika bisküvi, kraker ve gofret birimlerine ayrılmaktadır. İşletme bisküvi çeşitlerinde 2011 yılı itibariyle 50.000 ton civarında üretim hacmine ulaşmıştır.

Unlu mamuller fabrikasının toplam yerleşim alanı 120.000 m^2 ve bisküvi üretimine ayrılı kapalı alanı 60.000 m^2'dir. Bisküvi üretim tesisinde kremalı bisküvi ve sade bisküvi çeşitlerinin üretimi yapılmaktadır. İşletme kendi ürünleri dışında özel etiket(private label) olarak üretim yapmaktadır. Stratejik plan çerçevesinde bütün tesislerde otomasyon çalışmalarına başlanmıştır. Bisküvi tesislerinde ise son iki senedir otomasyon ile üretim yapılmaktadır.

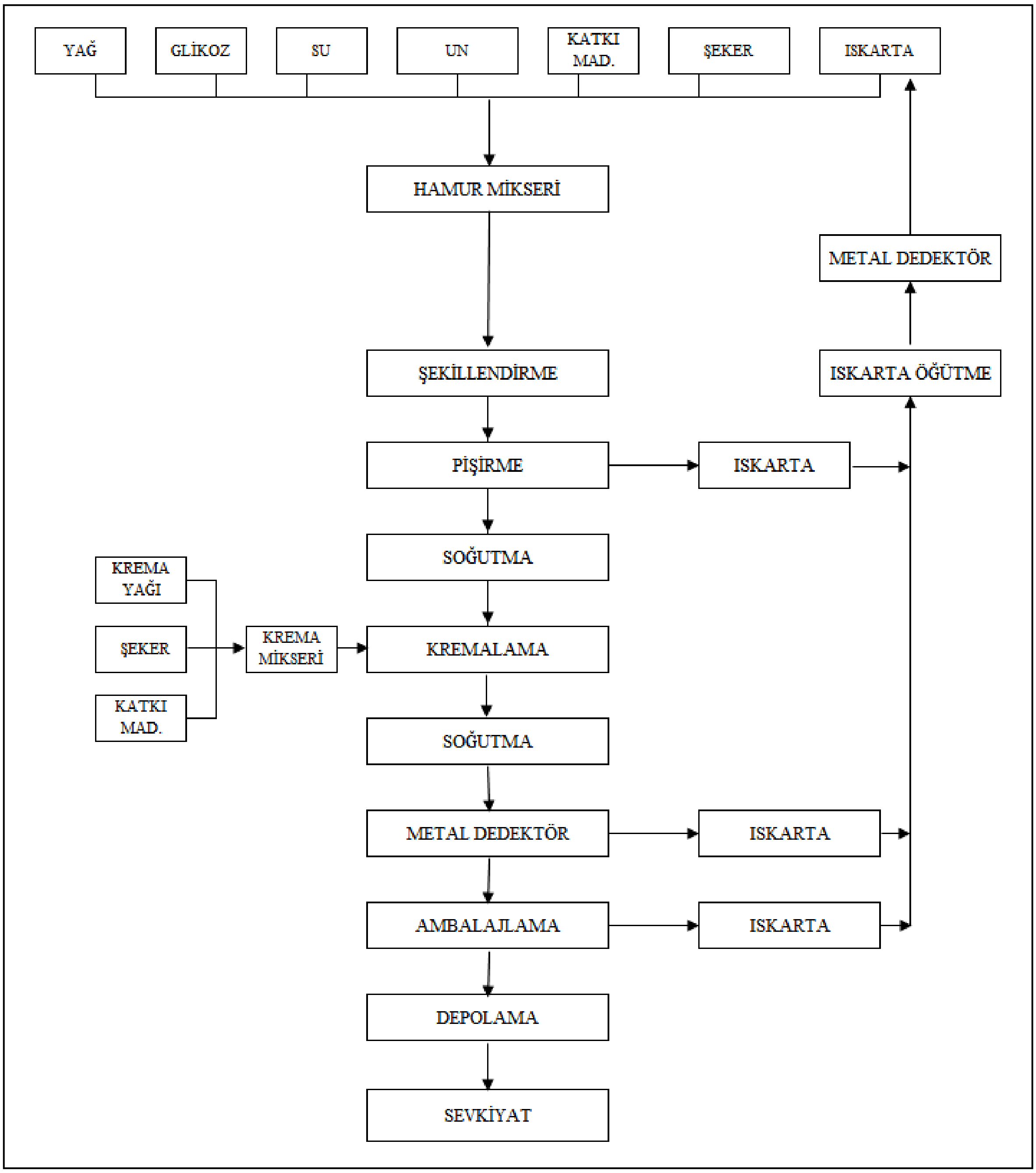
İşletme, "TSE EN ISO 9000 Kalite Yönetim Sistemi", "TSE EN ISO 22000 Gıda Güvenliği Yönetim Sistemi", "TSE EN ISO 14000 Çevre Yönetim Sistemi" ve "IFS-International Food Standart" kalite belgelerine sahiptir.

3.3.2. Üretilen Ürünler ve Üretim Akış Semaları

Bisküvi üretim bölümünde kremalı bisküviler ve sade bisküviler olmak üzere iki ana ürün grubu üretilmektedir. Bunun yanında üretilen ürünler A ve B sınıfı olarak iki formül altında üretilmektedir. İşletme pazara kendine ait üç farklı marka altında yaklaşık 180 çeşit ürün sunmaktadır. Bununla birlikte kapasitesinden arta kalan kısımlarını özel etiket ürün ile doldurma yolunu seçmektedir.

3.3.2.1. Kremalı Bisküvi Üretim Akış Şeması

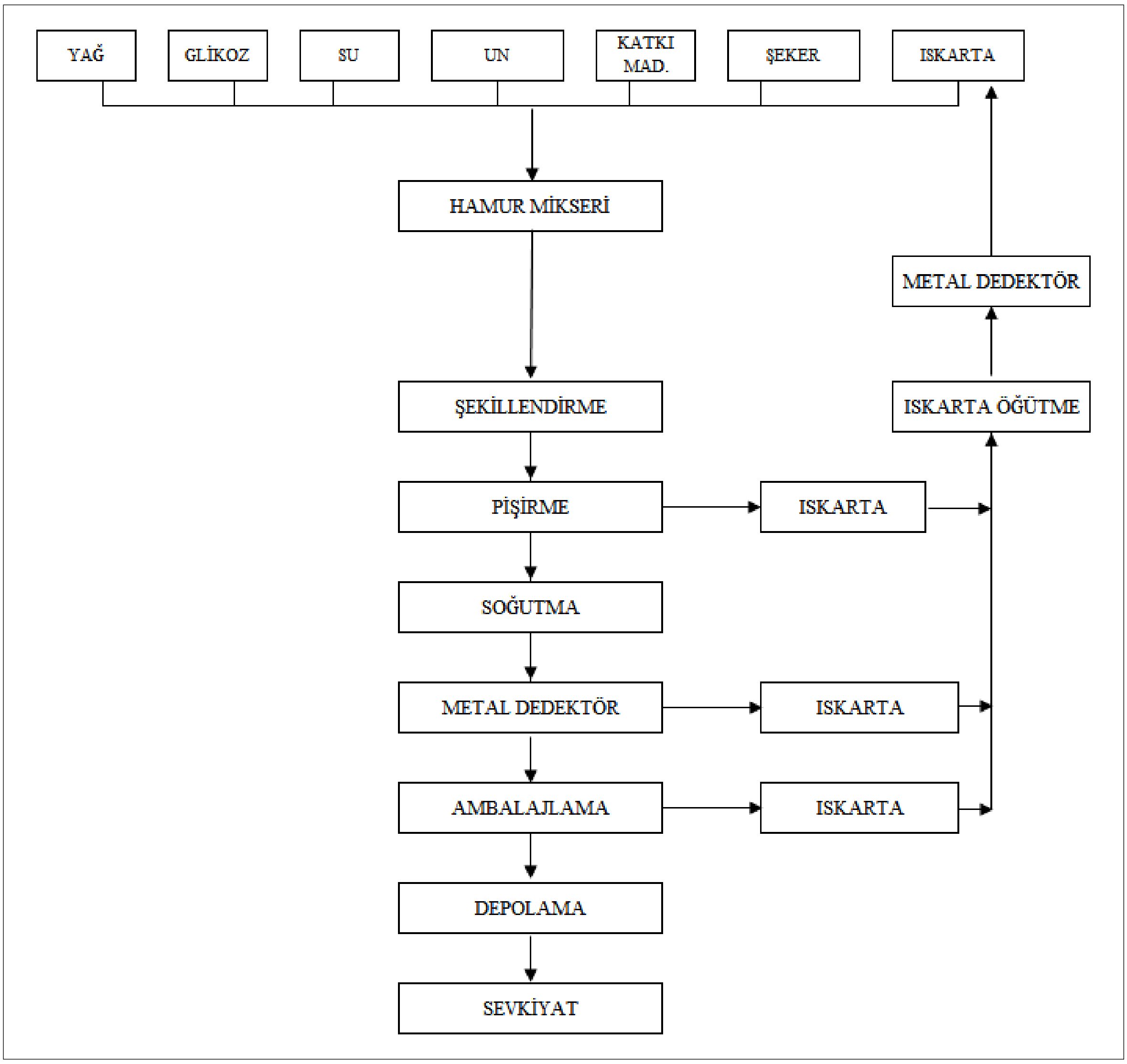
Kremalı bisküvi üretimi hamurhanede hazırlanan bir mikserlik(~500 kg.) hamurun hattın başındaki depozitöre dökülmesi ile başlar. Buradan silindir kalıplar tarafından gerekli şekle sokulan yaş hamur bantlar vasıtasıyla pişmek üzere fırın ünitesine girer. Bu hamur çeşitli uzunlukta olabilen fırınlarda pişer, istenilen rengi ve sertliği alır, nemini atar ve fırından bisküvi olarak çıkar. Sıradaki işlem her pişen iki bisküviden birisine kremalama ünitesinde krema sürülmesidir. Daha sonra kremalanan bisküviler paketlenmek üzere paketleme ünitesine geçer. Buradan nihai ürün olarak ambalajlanan ve kartonlanan ürünler nihai mamul deposuna gider. Süreçte metal dedektörler istenmeyen metal parçacıkları algılarlar. Bu işlemler aşağıda verilen Şekil 28'deki gibi özetlenebilir.



Şekil 28: Kremalı Bisküvi Üretim Akış Şeması

3.3.2.2. Sade Bisküvi Üretim Akış Şeması

Sade bisküvi grubuna giren pötibör bisküvinin üretim akışının kremalı bisküviden temel farklı, kremalama ünitesinin olmamasıdır. Yani belirli bir şekil verilmiş hamur piştikten sonra bant üzerinde paketleme ünitesine giderken ısısını verir ve paketlendikten sonra ilgili nihai mamul depoya taşınır. Üretim akış süreci Şekil 29'daki gibidir.



Şekil 29: Pötibör Bisküvi Üretim Akış Şeması

3.3.3. Üretimde Kullanılan Hammadde Girdileri ve Birim Maliyetleri

İşletmede, hem kremalı bisküvinin bisküvi bileşeninde hem de pötibör bisküvide kullanılan girdiler; bitkisel yağ, şeker, glikoz, süt, süttozu, peynir altı suyu tozu, vanilya aroması, bisküvi ve şurup ıskartası, su, soda, amonyak, tuz, sülfit, un, kabartıcı ve enzimdir. Bu girdilerden yağ, şeker, glikoz, su ve un temel girdileri oluştururken diğer girdiler minör girdi olarak tanımlanmaktadır.

İki ana bileşen ile formülize edilen kremalı bisküvinin krema bileşenin üretiminde kullanılan girdiler ise; krema yağı, lesitin, vanilya aroması, custered krema aroması, nişasta, şeker ve süt tozudur. Bunlardan şeker, krema yağı, nişasta ve süt tozu temel girdiler iken diğerleri minör girdi olarak tanımlanmaktadır.

Bu girdilerin 2011 yılı sene sonu itibariyle birim maliyetler Tablo 5'te gösterilmiştir.

Tablo 5: Üretimde Kullanılan Hammadde Fiyatları (2011 sonu itibariyle)

i	Hammadde Tanımı	Fiyat($/kg)
1	Bitkisel Yağ	1,90
2	Şeker	1,70
3	Glikoz	0,90
4	Süt	0,40
5	Süt Tozu	4,75
6	Peyniraltı Suyu Tozu	1,00
7	Vanilya Aroması	22,00
8	Bisküvi Iskartası	0,90
9	Şurup Iskartası	2,10
10	Su	0,20
11	Soda	0,45
12	Amonyak	0,45
13	Tuz	0,10
14	Sülfit	0,50
15	Un	0,40
16	Kabartıcı(SAPP)	1,90
17	Krema Yağı	1,85
18	Lesitin	1,60
19	Custered Krema Aroması	20,00
20	Mısır Nişastası	1,00
21	Enzim	11,00

3.3.4. Ürün Formülleri

Ürünler formüllerindeki girdi oranlarının farklılığına göre çeşitlendirilirler. Kremalı bisküviler; bisküvi formülü ve krema formülü olmak üzere bu iki ana bileşenlerin oranı olarak ifade edilmekte iken pötibör bisküviler sadece bisküvi formülü ile ifade edilmektedir. Dolayısıyla kremalı bisküviler bisküvi ve krema formüllerindeki değişiklik ile beraber bisküvi-krema oranındaki değişikliklerle de birbirinden farklılaştırılmaktadır. Pötibörler ise temel olarak iki farklı bisküvi formülü ile farklılaştırılmaktadır.

3.3.4.1. Kremalı Bisküvi Formülü

Kremalı bisküvi formülüne geçmeden evvel kremalı bisküvi çeşitlerinin krema-bisküvi bileşen oranları aşağıda Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6: Kremalı Bisküvi Ürünü Bileşen Oranları (%)

Grup Kodu	Formül Sınıfı	Krema Oranı(%)	Bisküvi Oranı(%)
K1	A	30	70
K2	A	25	75
K3	B	25	75
K4	B	20	80

Tablodan da anlaşılacağı üzere yüzde(%) bileşen oranlarına göre 4 farklı kremalı bisküvi ürün grubu vardır. K2 ve K3 kodlu ürünlerin krema-bisküvi bileşen oranı eşit olmasına rağmen farklı formüller altında üretildikleri için farklı üründürler ve dolayısıyla farklı ürün kodu alırlar. Bunlardan ilk iki ürün grubu A formülüne göre üretilirken diğer ikisi B formülüne göre üretilmektedir. İlgili ürün formülleri sırasıyla aşağıdaki tablolarda özetlenmiştir.

Tablo 7: K1 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%)

i	**Hammadde Girdi Tanımı**	**Oran(%)**	**Alt Sınır(%)**	**Üst Sınır(%)**
1	Bitkisel Yağ	9,857	9,844	9,870
2	Şeker	25,524	25,502	25,546
3	Glikoz	2,710	2,704	2,716
5	Süt Tozu	0,997	0,984	1,010
6	Peyniraltı Suyu Tozu	0,259	0,246	0,272
7	Vanilya Aroması	0,026	0,025	0,027
8	Bisküvi Iskartası	1,232	0,000	2,464
9	Şurup Iskartası	0,616	0,000	1,232
10	Su	4,066	3,696	4,436
11	Soda	0,142	0,140	0,144
12	Amonyak	0,148	0,136	0,160
13	Tuz	0,277	0,276	0,278
15	Un	43,119	43,107	43,131
16	Kabartıcı(SAPP)	0,142	0,140	0,144
17	Krema Yağı	9,762	9,753	9,771
18	Lesitin	0,025	0,024	0,026
19	Custered Krema Aroması	0,122	0,112	0,132
20	Mısır Nişastası	0,976	0,975	0,977
	Maliyet($/100 kg)	**112,53**		

Tablo 8: K2 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%)

i	**Hammadde Girdi Tanımı**	**Oran(%)**	**Alt Sınır(%)**	**Üst Sınır(%)**
1	Bitkisel Yağ	10,560	10,547	10,573
2	Şeker	23,001	22,980	23,022
3	Glikoz	2,904	2,897	2,911
5	Süt Tozu	0,866	0,852	0,880
6	Peyniraltı Suyu Tozu	0,277	0,264	0,290
7	Vanilya Aroması	0,026	0,024	0,028
8	Bisküvi Iskartası	1,320	0,000	2,640
9	Şurup Iskartası	0,660	0,000	1,320
10	Su	4,356	3,960	4,752
11	Soda	0,152	0,150	0,154
12	Amonyak	0,158	0,145	0,171
13	Tuz	0,297	0,296	0,298
15	Un	46,199	46,186	46,212
16	Kabartıcı(SAPP)	0,152	0,150	0,154
17	Krema Yağı	8,135	8,127	8,143
18	Lesitin	0,021	0,020	0,022
19	Custered Krema Aroması	0,102	0,094	0,110
20	Mısır Nişastası	0,814	0,813	0,815
	Maliyet($/100 kg)	**107,06**		

Tablo 9: K3 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%)

i	**Hammadde Girdi Tanımı**	**Oran(%)**	**Alt Sınır(%)**	**Üst Sınır(%)**
1	Bitkisel Yağ	7,576	7,560	7,592
2	Şeker	19,172	19,149	19,195
3	Glikoz	3,707	3,699	3,715
5	Süt Tozu	0,000	0,000	0,000
6	Peyniraltı Suyu Tozu	0,242	0,240	0,244
7	Vanilya Aroması	0,023	0,022	0,024
8	Bisküvi Iskartası	1,612	0,000	3,224
9	Şurup Iskartası	2,418	0,000	4,836
10	Su	2,901	2,418	3,384
11	Soda	0,242	0,240	0,244
12	Amonyak	0,322	0,241	0,403
13	Tuz	0,242	0,240	0,244
15	Un	48,356	48,340	48,372
16	Kabartıcı(SAPP)	0,113	0,111	0,115
17	Krema Yağı	7,223	7,215	7,231
18	Lesitin	0,043	0,042	0,044
19	Custered Krema Aroması	0,029	0,028	0,030
20	Mısır Nişastası	5,779	5,775	5,783
	Maliyet($/100 kg)	**97,81**		

Tablo 10: K4 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%)

i	**Hammadde Girdi Tanımı**	**Oran(%)**	**Alt Sınır(%)**	**Üst Sınır(%)**
1	Bitkisel Yağ	8,081	8,064	8,098
2	Şeker	17,272	17,249	17,295
3	Glikoz	3,954	3,945	3,963
5	Süt Tozu	0,000	0,000	0,000
6	Peyniraltı Suyu Tozu	0,258	0,256	0,260
7	Vanilya Aroması	0,023	0,022	0,024
8	Bisküvi Iskartası	1,719	0,000	3,438
9	Şurup Iskartası	2,579	0,000	5,158
10	Su	3,095	2,579	3,611
11	Soda	0,258	0,256	0,260
12	Amonyak	0,344	0,258	0,430
13	Tuz	0,258	0,256	0,260
15	Un	51,580	51,562	51,598
16	Kabartıcı(SAPP)	0,120	0,118	0,122
17	Krema Yağı	5,779	5,773	5,785
18	Lesitin	0,035	0,034	0,036
19	Custered Krema Aroması	0,023	0,022	0,024
20	Mısır Nişastası	4,623	4,620	4,626
	Maliyet($/100 kg)	**93,61**		

3.3.4.2. Pötibör Bisküvi Formülü

İşletme pötibör bisküvileri A ve B olmak üzere iki formül sınıfı altında üretmektedir. Bunların yanında işletme, kremalı bisküvi ürettiği işletmeye özel etiket altında pötibör bisküvi üretimi de yapmakta ve de özel etiketli ürünleri sadece B formülü ile üretmektedir. Pötibör bisküvinin formülünde krema bileşeni olmadığı için pötibör ailesi P1 ve P2 şeklinde iki ürün grup kodu ile gösterilebilir. Bunlardan birincisi A formülü ile üretilirken diğeri B formülüne göre üretilmektedir. Ürün formülleri aşağıdaki tablolarda özetlenmiştir.

Tablo 11: P1 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%)

i	**Hammadde Girdi Tanımı**	**Oran(%)**	**Alt Sınır(%)**	**Üst Sınır(%)**
1	Bitkisel Yağ	10,268	10,250	10,286
2	Şeker	13,752	13,733	13,771
3	Glikoz	3,484	3,466	3,502
4	Süt	2,200	2,198	2,202
6	Peyniraltı Suyu Tozu	0,220	0,211	0,229
7	Vanilya Aroması	0,018	0,017	0,019
8	Bisküvi Iskartası	1,834	0,000	3,668
9	Şurup Iskartası	1,834	0,000	3,668
10	Su	10,085	9,351	10,819
11	Soda	0,183	0,173	0,193
12	Amonyak	0,642	0,633	0,651
13	Tuz	0,275	0,273	0,277
14	Sülfit	0,028	0,026	0,030
15	Un	55,007	54,750	55,264
16	Kabartıcı(SAPP)	0,165	0,163	0,167
21	Enzim	0,007	0,006	0,008
	Maliyet($/100 kg)	**77,84**		

Tablo 12: P2 Kod Numaralı Ürün Grubu Formülü (%)

i	**Hammadde Girdi Tanımı**	**Oran(%)**	**Alt Sınır(%)**	**Üst Sınır(%)**
1	Bitkisel Yağ	8,659	8,639	8,679
2	Şeker	9,621	9,601	9,641
3	Glikoz	6,542	6,523	6,561
4	Süt	0,192	0,190	0,194
6	Peyniraltı Suyu Tozu	0,289	0,287	0,291
7	Vanilya Aroması	0,019	0,018	0,020
8	Bisküvi Iskartası	1,924	0,000	3,848
9	Şurup Iskartası	1,924	0,000	3,848
10	Su	11,352	10,583	12,121
11	Soda	0,269	0,267	0,271
12	Amonyak	0,962	0,960	0,964
13	Tuz	0,289	0,287	0,291
14	Sülfit	0,035	0,034	0,036
15	Un	57,723	57,684	57,762
16	Kabartıcı(SAPP)	0,192	0,191	0,193
21	Enzim	0,008	0,007	0,009
	Maliyet($/100 kg)	**71,66**		

3.4. Uygulama ile İlgili Klasik ve Bulanık Modellerin Kurulması

3.4.1. Problemin Tanımı

Çalışmaya konu olan problem, işletmenin kremalı bisküvi ve pötibör bisküvi üretimi esnasında formüllerde yapılabilecek değişikliklerle maliyetlerde yıl bazında ne kadar azaltma yapılabileceğini görmek ve bununla birlikte hammadde kullanım miktarını olabildiğince azaltmaktır. Burada dikkat edilmesi gereken husus, girdi kalemlerinin değişikliğe maruz kalacak oranlarının formüllerde verilen alt ve üst sınırlar aralıklarında kalması gerektiğidir. Zira bu aralıkların dışına çıkıldığında ürünün duyusal özellikleri değişmekte ve bu yeni bir ürün formülüne işaret etmektedir.

Dolayısıyla işletmenin kremalı bisküvi ile ilgili K1, K2, K3 ve K4 olmak üzere dört ve pötibör bisküvi ile ilgili P1 ve P2 olmak üzere iki ve toplamda altı farklı kodlu ürün grubu ve bunların farklı formülleri bulunmaktadır. Bu çalışmada ürün grup formülleri sırasıyla K1, K2, K3, K4, P1 ve P2 ile temsil edilmektedir. Her formül için ayrı ayrı klasik ve bulanık doğrusal programlama modelleri kurulmuştur. Çözümler ise sonraki bölümde ele alınmış ve bir sene boyunca toplamda hangi şartlar altında ve ne kadarlık bir maliyet azalışına gidilebileceği ortaya konulmuştur.

Bu altı formülün klasik ve bulanık doğrusal programlama modelleri aşağıdadır.

3.4.2. Klasik Modeller

Karar Değişkenleri:

Burada karar değişkenleri ilgili formüllerde kullanılan girdi kalemlerinin miktarıdır ve şu şekilde ifade edilebilir:

X_{ij}: j formülü ile üretilen 100 kg. üründeki i girdi miktarı

(i: 1, 2, 3, …. , 21; bkz. Tablo 5) (j: K1, K2, K3, K4, P1, P2)

Amaç Fonksiyonu:

Amaç girdi kalemlerinde sınırlar dâhilinde mümkün oynamaları yaparak maliyetleri enazlamaktır. Bu durumda amaç fonksiyonu şu şekildedir:

$$\min \sum_{i=1}^{21} c_i x_{ij} \qquad , \forall j \text{ için}$$

Burada c_i her bir i girdisinin birim fiyatıdır($/kg).

Kısıtlar:

İlk iki kısıt alt limit ve üst limit kısıtlarıdır.

$X_{ij} \leq U_{ij}$ $\qquad X_{ij} \geq L_{ij}$

Burada U_{ij} j formülündeki her i hammaddesinin üst limitini verirken L_{ij} ise alt limitini vermektedir.

Karar değişkenleri toplamını 100 kg. yapan kısıt şu şekildedir.

$$\sum_{i=1}^{21} x_{ij} = 100 \qquad , \forall j \text{ için}$$

Bu kısıtların yanında herhangi bir j formülüne girmeyen i girdisini ifade edecek kısıtlar şöyledir.

$X_{ij} = 0$

Ayrıca süreklilik ve negatif olmama durumlarını ifade eden kısıtlar ise,

$X_{ij} \geq 0$ dır.

Toplamda 6 farklı formül altında üretilen tüm bisküvi ürünler için kurulan modeller şu şekildedir.

Genel Amaç Fonksiyonu:

Tüm kremalı ve pötibör bisküvi çeşitleri için kurulacak DP modelleri için aşağıdaki amaç fonksiyonu ortak alınabilir. Çalışmanın amacı, hammadde girdi maliyetlerini enazlamaktır. Bu durumda amaç fonksiyonu şöyledir.

$$\begin{aligned} \min Z=&1{,}90X_1+1{,}70X_2+0{,}90X_3+0{,}40X_4+4{,}75X_5+1{,}00X_6+22{,}00X_7+0{,}90X_8+2{,}10X_9+\\ &0{,}20X_{10}+0{,}45X_{11}+0{,}45X_{12}+0{,}10X_{13}+0{,}50X_{14}+0{,}40X_{15}+1{,}90X_{16}+1{,}85X_{17}+\\ &1{,}60X_{18}+20{,}00X_{19}+1{,}00X_{20}+11{,}00X_{21} \end{aligned}$$

Kısıtlar:

i. K1 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)	*(Üst Limit Kısıtları)*
$X_1 \geq 9{,}844$	$X_1 \leq 9{,}870$
$X_2 \geq 25{,}502$	$X_2 \leq 25{,}546$
$X_3 \geq 2{,}704$	$X_3 \leq 2{,}716$
$X_5 \geq 0{,}984$	$X_5 \leq 1{,}010$
$X_6 \geq 0{,}246$	$X_6 \leq 0{,}272$
$X_7 \geq 0{,}025$	$X_7 \leq 0{,}027$
$X_8 \geq 0{,}000$	$X_8 \leq 2{,}464$

X_9	$\geq$	0,000	X_9	$\leq$	1,232
X_{10}	$\geq$	3,696	X_{10}	$\leq$	4,436
X_{11}	$\geq$	0,140	X_{11}	$\leq$	0,144
X_{12}	$\geq$	0,136	X_{12}	$\leq$	0,160
X_{13}	$\geq$	0,276	X_{13}	$\leq$	0,278
X_{15}	$\geq$	43,107	X_{15}	$\leq$	43,131
X_{16}	$\geq$	0,140	X_{16}	$\leq$	0,144
X_{17}	$\geq$	9,753	X_{17}	$\leq$	9,771
X_{18}	$\geq$	0,024	X_{18}	$\leq$	0,026
X_{19}	$\geq$	0,112	X_{19}	$\leq$	0,132
X_{20}	$\geq$	0,975	X_{20}	$\leq$	0,977

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}$

$+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_4=0$ $X_{14}=0$ $X_{21}=0$

(Negatif Olmama Şartı)

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$

ii. K2 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)			*(Üst Limit Kısıtları)*		
X_1	$\geq$	10,547	X_1	$\leq$	10,573
X_2	$\geq$	22,980	X_2	$\leq$	23,022
X_3	$\geq$	2,897	X_3	$\leq$	2,911
X_5	$\geq$	0,852	X_5	$\leq$	0,880
X_6	$\geq$	0,264	X_6	$\leq$	0,290
X_7	$\geq$	0,024	X_7	$\leq$	0,028
X_8	$\geq$	0,000	X_8	$\leq$	2,640
X_9	$\geq$	0,000	X_9	$\leq$	1,320

$X_{10} \geq 3,960$		$X_{10} \leq 4,752$	
$X_{11} \geq 0,150$		$X_{11} \leq 0,154$	
$X_{12} \geq 0,145$		$X_{12} \leq 0,171$	
$X_{13} \geq 0,296$		$X_{13} \leq 0,298$	
$X_{15} \geq 46,186$		$X_{15} \leq 46,212$	
$X_{16} \geq 0,150$		$X_{16} \leq 0,154$	
$X_{17} \geq 8,127$		$X_{17} \leq 8,143$	
$X_{18} \geq 0,020$		$X_{18} \leq 0,022$	
$X_{19} \geq 0,094$		$X_{19} \leq 0,110$	
$X_{20} \geq 0,813$		$X_{20} \leq 0,815$	

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}$

$+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_4=0$ $X_{14}=0$ $X_{21}=0$

(Negatif Olmama Şartı)

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$

iii. K3 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)	*(Üst Limit Kısıtları)*
$X_1 \geq 7,560$	$X_1 \leq 7,592$
$X_2 \geq 19,149$	$X_2 \leq 19,195$
$X_3 \geq 3,699$	$X_3 \leq 3,715$
$X_6 \geq 0,240$	$X_6 \leq 0,244$
$X_7 \geq 0,022$	$X_7 \leq 0,024$
$X_8 \geq 0,000$	$X_8 \leq 3,224$
$X_9 \geq 0,000$	$X_9 \leq 4,836$
$X_{10} \geq 2,418$	$X_{10} \leq 3,384$
$X_{11} \geq 0,240$	$X_{11} \leq 0,244$

$X_{12} \geq 0{,}241$	$X_{12} \leq 0{,}403$
$X_{13} \geq 0{,}240$	$X_{13} \leq 0{,}244$
$X_{15} \geq 48{,}340$	$X_{15} \leq 48{,}372$
$X_{16} \geq 0{,}111$	$X_{16} \leq 0{,}115$
$X_{17} \geq 7{,}215$	$X_{17} \leq 7{,}231$
$X_{18} \geq 0{,}042$	$X_{18} \leq 0{,}044$
$X_{19} \geq 0{,}028$	$X_{19} \leq 0{,}030$
$X_{20} \geq 5{,}775$	$X_{20} \leq 5{,}783$

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}$

$+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_4=0$ $\quad$ $X_5=0$ $\quad$ $X_{14}=0$ $\quad$ $X_{21}=0$

(Negatif Olmama Şartı)

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$

iv. K4 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)	*(Üst Limit Kısıtları)*
$X_1 \geq 8{,}064$	$X_1 \leq 8{,}098$
$X_2 \geq 17{,}249$	$X_2 \leq 17{,}295$
$X_3 \geq 3{,}945$	$X_3 \leq 3{,}963$
$X_6 \geq 0{,}256$	$X_6 \leq 0{,}260$
$X_7 \geq 0{,}022$	$X_7 \leq 0{,}024$
$X_8 \geq 0{,}000$	$X_8 \leq 3{,}438$
$X_9 \geq 0{,}000$	$X_9 \leq 5{,}158$
$X_{10} \geq 2{,}579$	$X_{10} \leq 3{,}611$
$X_{11} \geq 0{,}256$	$X_{11} \leq 0{,}260$
$X_{12} \geq 0{,}258$	$X_{12} \leq 0{,}430$
$X_{13} \geq 0{,}256$	$X_{13} \leq 0{,}260$

$X_{15} \geq 51,562$	$X_{15} \leq 51,598$
$X_{16} \geq 0,118$	$X_{16} \leq 0,122$
$X_{17} \geq 5,773$	$X_{17} \leq 5,785$
$X_{18} \geq 0,034$	$X_{18} \leq 0,036$
$X_{19} \geq 0,022$	$X_{19} \leq 0,024$
$X_{20} \geq 4,620$	$X_{20} \leq 4,626$

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_4=0$ $X_5=0$ $X_{14}=0$ $X_{21}=0$

(Negatif Olmama Şartı)

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$

v. P1 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)	*(Üst Limit Kısıtları)*
$X_1 \geq 10,250$	$X_1 \leq 10,286$
$X_2 \geq 13,733$	$X_2 \leq 13,771$
$X_3 \geq 3,466$	$X_3 \leq 3,502$
$X_4 \geq 2,198$	$X_4 \leq 2,202$
$X_6 \geq 0,211$	$X_6 \leq 0,229$
$X_7 \geq 0,017$	$X_7 \leq 0,019$
$X_8 \geq 0,000$	$X_8 \leq 3,668$
$X_9 \geq 0,000$	$X_9 \leq 3,668$
$X_{10} \geq 9,351$	$X_{10} \leq 10,819$
$X_{11} \geq 0,173$	$X_{11} \leq 0,193$
$X_{12} \geq 0,633$	$X_{12} \leq 0,651$
$X_{13} \geq 0,273$	$X_{13} \leq 0,277$
$X_{14} \geq 0,026$	$X_{14} \leq 0,030$
$X_{15} \geq 54,750$	$X_{15} \leq 55,264$

$X_{16} \geq 0{,}163$	$X_{16} \leq 0{,}167$
$X_{21} \geq 0{,}006$	$X_{21} \leq 0{,}008$

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}$
$+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_5=0$ $X_{17}=0$ $X_{18}=0$ $X_{19}=0$ $X_{20}=0$

(Negatif Olmama Şartı)

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$

vi. P2 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)	*(Üst Limit Kısıtları)*
$X_1 \geq 8{,}639$	$X_1 \leq 8{,}679$
$X_2 \geq 9{,}601$	$X_2 \leq 9{,}641$
$X_3 \geq 6{,}523$	$X_3 \leq 6{,}561$
$X_4 \geq 0{,}190$	$X_4 \leq 0{,}194$
$X_6 \geq 0{,}287$	$X_6 \leq 0{,}291$
$X_7 \geq 0{,}018$	$X_7 \leq 0{,}020$
$X_8 \geq 0{,}000$	$X_8 \leq 3{,}848$
$X_9 \geq 0{,}000$	$X_9 \leq 3{,}848$
$X_{10} \geq 10{,}583$	$X_{10} \leq 12{,}121$
$X_{11} \geq 0{,}267$	$X_{11} \leq 0{,}271$
$X_{12} \geq 0{,}960$	$X_{12} \leq 0{,}964$
$X_{13} \geq 0{,}287$	$X_{13} \leq 0{,}291$
$X_{14} \geq 0{,}034$	$X_{14} \leq 0{,}036$
$X_{15} \geq 57{,}684$	$X_{15} \leq 57{,}762$
$X_{16} \geq 0{,}191$	$X_{16} \leq 0{,}193$
$X_{21} \geq 0{,}007$	$X_{21} \leq 0{,}009$

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}$

$+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_5=0$ $X_{17}=0$ $X_{18}=0$ $X_{19}=0$ $X_{20}=0$

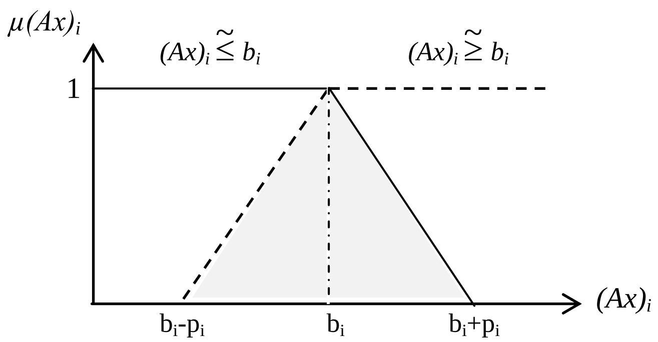
(Negatif Olmama Şartı)

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$

3.4.3. Bulanık Modeller

Modeli bulanık yapan ifade girdi değerlerimizin belirli tolerans aralıklarında, yani başka bir deyişle bu aralıkların orta değerleri civarında olmasıdır. Herhangi bir kısıtın sağ taraf sabitinin "b_i civarında" olarak ifade ediliyor olması ve b_i 'den uzaklığı ifade eden tolerans değerlerinin eşit olması hali daha önce de ifade edildiği gibi (bkz. Şekil 17) bulanıklık içeren bir ifade olup simetrik bir üçgen üyelik fonksiyonu ile temsil edilebilir.

Bununla beraber $(Ax)_i \cong b_i$ şeklinde ifade edilen bu durum $(Ax)_i \,\tilde{\leq}\, b_i$ ve $(Ax)_i \,\tilde{\geq}\, b_i$ olarak iki kısıt halinde yazılabilir. Bu iki kısıtın üyelik fonksiyonlarının kesişimi Şekil 30'daki gibi üçgen bir üyelik fonksiyonunu verir.



Şekil 30: $(Ax)_i \cong b_i$ Şeklindeki Bulanık Kısıtlayıcıları Temsil Eden Üyelik Fonksiyonu

Yani eksi tolerans değerinden(b_i-p_i) artı tolerans değerlerine(b_i+p_i) doğru önce tekdüze artan ve sonra azalan fonksiyonların birleşimi söz konusu olacaktır. Bu durumda üyelik fonksiyonu şu şekilde teşkil edilecektir:

$$\mu(Ax)_i = \begin{cases} 0 & , (Ax)_i < b_i - p_i \\ 1 - \dfrac{b_i - (Ax)_i}{p_i} & , b_i - p_i \leq (Ax)_i \leq b_i \\ 1 - \dfrac{(Ax)_i - b_i}{p_i} & , b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 0 & , (Ax)_i > b_i + p_i \end{cases}$$

Bu çalışmada her ne kadar otomasyon ile üretim yapılarak girdiler aralıkların normal(orta) değerleri yani b_i'ler oranında bisküvi formüllerine dâhil olsalar da, aynı ürünler belirli artı-eksi tolerans aralıklarında da üretilebilmektedir. Fakat şunu bilmek gerekir ki ideal kalitede üretim b_i seviyelerinde olmaktadır. Bununla birlikte ideal oranlara olabildiğince yakın ve kabul edilebilir herhangi bir α doyum seviyesinde ve normal değerden daha düşük maliyet ile ürün hazırlanıp hazırlanamayacağı araştırılabilir. Bu durumda her bir kısıtı ifade eden üyelik fonksiyonlarının en az tek bir α kadar doyum sağladığı kabulü ile söz konusu bulanık eşitlik kısıtları, bulanıklıktan kurtarılarak modele şu şekilde dâhil olur.

$$(Ax)_i \geq b_i - (1-\alpha)p_i$$
$$(Ax)_i \leq b_i + (1-\alpha)p_i$$

Bu bilgilerin ışığında çalışmanın, sadece kısıtların bulanık olduğu model yapısına uyduğu görülmektedir. Böyle bir problemi daha önce Verdegay(1982) tanımlamış ve $\theta = 1-\alpha$ dönüşümü ile parametrik programlama problemine dönüştürmüştür. Buna bağlı olarak da parametrik bir çözüm elde etmiştir. Fakat bu çalışmada bulanık kısıtlar "$\cong$" yapısında olduğu için model, Verdegay'ın önerdiği model yapısından (bkz. s. 72-73) farklılık arz etmekte ve kısıt sayısı iki katına çıkmaktadır. Bu durumda modelimiz şöyle olacaktır:

$$\begin{aligned}
&\max Z = c^T x \\
&(Ax)_i \geq b_i - \theta p_i \\
&(Ax)_i \leq b_i + \theta p_i \\
&\theta \in [0,1] \\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

Buna göre elimizdeki altı farklı formül için oluşturulan bulanık doğrusal programlama modelleri şu şekildedir:

Genel Amaç Fonksiyonu:

Burada amacımız bulanık değildir. Bu nedenle klasik modelimizdeki amaç fonksiyonumuz ile aynı ve her altı formül için geçerlidir.

$$\begin{aligned}
\min Z = {} & 1{,}90X_1+1{,}70X_2+0{,}90X_3+0{,}40X_4+4{,}75X_5+1{,}00X_6+22{,}00X_7+0{,}90X_8+2{,}10X_9+ \\
& 0{,}20X_{10}+0{,}45X_{11}+0{,}45X_{12}+0{,}10X_{13}+0{,}50X_{14}+0{,}40X_{15}+1{,}90X_{16}+1{,}85X_{17}+ \\
& 1{,}60X_{18}+20{,}00X_{19}+1{,}00X_{20}+11{,}00X_{21}
\end{aligned}$$

Kısıtlar:

i. K1 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)	*(Üst Limit Kısıtları)*
$X_1 \geq 9{,}857 - 0{,}013\theta$	$X_1 \leq 9{,}857 + 0{,}013\theta$
$X_2 \geq 25{,}524 - 0{,}022\theta$	$X_2 \leq 25{,}524 + 0{,}022\theta$
$X_3 \geq 2{,}710 - 0{,}006\theta$	$X_3 \leq 2{,}710 + 0{,}006\theta$
$X_5 \geq 0{,}997 - 0{,}013\theta$	$X_5 \leq 0{,}997 + 0{,}013\theta$

$X_6 \geq 0{,}259 - 0{,}013\theta$	$X_6 \leq 0{,}259 + 0{,}013\theta$
$X_7 \geq 0{,}026 - 0{,}001\theta$	$X_7 \leq 0{,}026 + 0{,}001\theta$
$X_8 \geq 1{,}232 - 1{,}232\theta$	$X_8 \leq 1{,}232 + 1{,}232\theta$
$X_9 \geq 0{,}616 - 0{,}616\theta$	$X_9 \leq 0{,}616 + 0{,}616\theta$
$X_{10} \geq 4{,}066 - 0{,}37\theta$	$X_{10} \leq 4{,}066 + 0{,}37\theta$
$X_{11} \geq 0{,}142 - 0{,}002\theta$	$X_{11} \leq 0{,}142 + 0{,}002\theta$
$X_{12} \geq 0{,}148 - 0{,}012\theta$	$X_{12} \leq 0{,}148 + 0{,}012\theta$
$X_{13} \geq 0{,}277 - 0{,}001\theta$	$X_{13} \leq 0{,}277 + 0{,}001\theta$
$X_{15} \geq 43{,}119 - 0{,}012\theta$	$X_{15} \leq 43{,}119 + 0{,}012\theta$
$X_{16} \geq 0{,}142 - 0{,}002\theta$	$X_{16} \leq 0{,}142 + 0{,}002\theta$
$X_{17} \geq 9{,}762 - 0{,}009\theta$	$X_{17} \leq 9{,}762 + 0{,}009\theta$
$X_{18} \geq 0{,}025 - 0{,}001\theta$	$X_{18} \leq 0{,}025 + 0{,}001\theta$
$X_{19} \geq 0{,}122 - 0{,}01\theta$	$X_{19} \leq 0{,}122 + 0{,}01\theta$
$X_{20} \geq 0{,}976 - 0{,}001\theta$	$X_{20} \leq 0{,}976 + 0{,}001\theta$

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_4=0$ $X_{14}=0$ $X_{21}=0$

(Negatif Olmama Şartı)

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$

ve $\theta \geq 0$
$\theta \leq 1$

ii. K2 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)	*(Üst Limit Kısıtları)*
$X_1 \geq 10{,}560 - 0{,}013\theta$	$X_1 \leq 10{,}560 + 0{,}013\theta$
$X_2 \geq 23{,}001 - 0{,}021\theta$	$X_2 \leq 23{,}001 + 0{,}021\theta$
$X_3 \geq 2{,}904 - 0{,}007\theta$	$X_3 \leq 2{,}904 + 0{,}007\theta$

$X_5 \geq 0,866 - 0,014\theta$	$X_5 \leq 0,866 + 0,014\theta$
$X_6 \geq 0,277 - 0,013\theta$	$X_6 \leq 0,277 + 0,013\theta$
$X_7 \geq 0,026 - 0,002\theta$	$X_7 \leq 0,026 + 0,002\theta$
$X_8 \geq 1,320 - 1,32\theta$	$X_8 \leq 1,320 + 1,32\theta$
$X_9 \geq 0,660 - 0,66\theta$	$X_9 \leq 0,660 + 0,66\theta$
$X_{10} \geq 4,356 - 0,396\theta$	$X_{10} \leq 4,356 + 0,396\theta$
$X_{11} \geq 0,152 - 0,002\theta$	$X_{11} \leq 0,152 + 0,002\theta$
$X_{12} \geq 0,158 - 0,013\theta$	$X_{12} \leq 0,158 + 0,013\theta$
$X_{13} \geq 0,297 - 0,001\theta$	$X_{13} \leq 0,297 + 0,001\theta$
$X_{15} \geq 46,199 - 0,013\theta$	$X_{15} \leq 46,199 + 0,013\theta$
$X_{16} \geq 0,152 - 0,002\theta$	$X_{16} \leq 0,152 + 0,002\theta$
$X_{17} \geq 8,135 - 0,008\theta$	$X_{17} \leq 8,135 + 0,008\theta$
$X_{18} \geq 0,021 - 0,001\theta$	$X_{18} \leq 0,021 + 0,001\theta$
$X_{19} \geq 0,102 - 0,008\theta$	$X_{19} \leq 0,102 + 0,008\theta$
$X_{20} \geq 0,814 - 0,001\theta$	$X_{20} \leq 0,814 + 0,001\theta$

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}$

$+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_4=0$ $X_{14}=0$ $X_{21}=0$

(Negatif Olmama Şartı)

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$

ve $\theta \geq 0$

$\theta \leq 1$

iii. K3 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)	*(Üst Limit Kısıtları)*
$X_1 \geq 7,576 - 0,016\theta$	$X_1 \leq 7,576 + 0,016\theta$
$X_2 \geq 19,172 - 0,023\theta$	$X_2 \leq 19,172 + 0,023\theta$

$X_3 \geq 3,707 - 0,008\theta$	$X_3 \leq 3,707 + 0,008\theta$
$X_6 \geq 0,242 - 0,002\theta$	$X_6 \leq 0,242 + 0,002\theta$
$X_7 \geq 0,023 - 0,001\theta$	$X_7 \leq 0,023 + 0,001\theta$
$X_8 \geq 1,612 - 1,612\theta$	$X_8 \leq 1,612 + 1,612\theta$
$X_9 \geq 2,418 - 2,418\theta$	$X_9 \leq 2,418 + 2,418\theta$
$X_{10} \geq 2,901 - 0,483\theta$	$X_{10} \leq 2,901 + 0,483\theta$
$X_{11} \geq 0,242 - 0,002\theta$	$X_{11} \leq 0,242 + 0,002\theta$
$X_{12} \geq 0,322 - 0,081\theta$	$X_{12} \leq 0,322 + 0,081\theta$
$X_{13} \geq 0,242 - 0,002\theta$	$X_{13} \leq 0,242 + 0,002\theta$
$X_{15} \geq 48,356 - 0,016\theta$	$X_{15} \leq 48,356 + 0,016\theta$
$X_{16} \geq 0,113 - 0,002\theta$	$X_{16} \leq 0,113 + 0,002\theta$
$X_{17} \geq 7,223 - 0,008\theta$	$X_{17} \leq 7,223 + 0,008\theta$
$X_{18} \geq 0,043 - 0,001\theta$	$X_{18} \leq 0,043 + 0,001\theta$
$X_{19} \geq 0,029 - 0,001\theta$	$X_{19} \leq 0,029 + 0,001\theta$
$X_{20} \geq 5,779 - 0,004\theta$	$X_{20} \leq 5,779 + 0,004\theta$

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}$$
$$+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_4=0$ $\quad X_5=0$ $\quad X_{14}=0$ $\quad X_{21}=0$

(Negatif Olmama Şartı)

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$$

ve $\quad \theta \geq 0$, $\quad \theta \leq 1$

iv. K4 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)	*(Üst Limit Kısıtları)*
$X_1 \geq 8,081 - 0,017\theta$	$X_1 \leq 8,081 + 0,017\theta$
$X_2 \geq 17,272 - 0,023\theta$	$X_2 \leq 17,272 + 0,023\theta$

$X_3 \geq 3{,}954 - 0{,}009\theta$	$X_3 \leq 3{,}954 + 0{,}009\theta$
$X_6 \geq 0{,}258 - 0{,}002\theta$	$X_6 \leq 0{,}258 + 0{,}002\theta$
$X_7 \geq 0{,}023 - 0{,}001\theta$	$X_7 \leq 0{,}023 + 0{,}001\theta$
$X_8 \geq 1{,}719 - 1{,}719\theta$	$X_8 \leq 1{,}719 + 1{,}719\theta$
$X_9 \geq 2{,}579 - 2{,}579\theta$	$X_9 \leq 2{,}579 + 2{,}579\theta$
$X_{10} \geq 3{,}095 - 0{,}516\theta$	$X_{10} \leq 3{,}095 + 0{,}516\theta$
$X_{11} \geq 0{,}258 - 0{,}002\theta$	$X_{11} \leq 0{,}258 + 0{,}002\theta$
$X_{12} \geq 0{,}344 - 0{,}086\theta$	$X_{12} \leq 0{,}344 + 0{,}086\theta$
$X_{13} \geq 0{,}258 - 0{,}002\theta$	$X_{13} \leq 0{,}258 + 0{,}002\theta$
$X_{15} \geq 51{,}580 - 0{,}018\theta$	$X_{15} \leq 51{,}580 + 0{,}018\theta$
$X_{16} \geq 0{,}120 - 0{,}002\theta$	$X_{16} \leq 0{,}120 + 0{,}002\theta$
$X_{17} \geq 5{,}779 - 0{,}006\theta$	$X_{17} \leq 5{,}779 + 0{,}006\theta$
$X_{18} \geq 0{,}035 - 0{,}001\theta$	$X_{18} \leq 0{,}035 + 0{,}001\theta$
$X_{19} \geq 0{,}023 - 0{,}001\theta$	$X_{19} \leq 0{,}023 + 0{,}001\theta$
$X_{20} \geq 4{,}623 - 0{,}003\theta$	$X_{20} \leq 4{,}623 + 0{,}003\theta$

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}$

$+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_4=0$ $X_5=0$ $X_{14}=0$ $X_{21}=0$

(Negatif Olmama Şartı)

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$

ve $\theta \geq 0$
$\theta \leq 1$

v. P1 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)	*(Üst Limit Kısıtları)*
$X_1 \geq 10{,}268 - 0{,}018\theta$	$X_1 \leq 10{,}268 + 0{,}018\theta$
$X_2 \geq 13{,}752 - 0{,}019\theta$	$X_2 \leq 13{,}752 + 0{,}019\theta$

$X_3 \geq 3{,}484 - 0{,}018\theta$	$X_3 \leq 3{,}484 + 0{,}018\theta$
$X_4 \geq 2{,}200 - 0{,}002\theta$	$X_4 \leq 2{,}200 + 0{,}002\theta$
$X_6 \geq 0{,}220 - 0{,}009\theta$	$X_6 \leq 0{,}220 + 0{,}009\theta$
$X_7 \geq 0{,}018 - 0{,}001\theta$	$X_7 \leq 0{,}018 + 0{,}001\theta$
$X_8 \geq 1{,}834 - 1{,}834\theta$	$X_8 \leq 1{,}834 + 1{,}834\theta$
$X_9 \geq 1{,}834 - 1{,}834\theta$	$X_9 \leq 1{,}834 + 1{,}834\theta$
$X_{10} \geq 10{,}085 - 0{,}734\theta$	$X_{10} \leq 10{,}085 + 0{,}734\theta$
$X_{11} \geq 0{,}183 - 0{,}01\theta$	$X_{11} \leq 0{,}183 + 0{,}01\theta$
$X_{12} \geq 0{,}642 - 0{,}009\theta$	$X_{12} \leq 0{,}642 + 0{,}009\theta$
$X_{13} \geq 0{,}275 - 0{,}002\theta$	$X_{13} \leq 0{,}275 + 0{,}002\theta$
$X_{14} \geq 0{,}028 - 0{,}002\theta$	$X_{14} \leq 0{,}028 + 0{,}002\theta$
$X_{15} \geq 55{,}007 - 0{,}257\theta$	$X_{15} \leq 55{,}007 + 0{,}257\theta$
$X_{16} \geq 0{,}165 - 0{,}002\theta$	$X_{16} \leq 0{,}165 + 0{,}002\theta$
$X_{21} \geq 0{,}007 - 0{,}001\theta$	$X_{21} \leq 0{,}007 + 0{,}001\theta$

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}$

$+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_5=0$ $X_{17}=0$ $X_{18}=0$ $X_{19}=0$ $X_{20}=0$

(Negatif Olmama Şartı)

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$

ve $\theta \geq 0$
$\theta \leq 1$

vi. P2 Ürün Grubu için Kısıtlar

(Alt Limit Kısıtları)	*(Üst Limit Kısıtları)*
$X_1 \geq 8{,}659 - 0{,}02\theta$	$X_1 \leq 8{,}659 + 0{,}02\theta$
$X_2 \geq 9{,}621 - 0{,}02\theta$	$X_2 \leq 9{,}621 + 0{,}02\theta$
$X_3 \geq 6{,}542 - 0{,}019\theta$	$X_3 \leq 6{,}542 + 0{,}019\theta$

$X_4 \geq 0{,}192 - 0{,}002\theta$	$X_4 \leq 0{,}192 + 0{,}002\theta$
$X_6 \geq 0{,}289 - 0{,}002\theta$	$X_6 \leq 0{,}289 + 0{,}002\theta$
$X_7 \geq 0{,}019 - 0{,}001\theta$	$X_7 \leq 0{,}019 + 0{,}001\theta$
$X_8 \geq 1{,}924 - 1{,}924\theta$	$X_8 \leq 1{,}924 + 1{,}924\theta$
$X_9 \geq 1{,}924 - 1{,}924\theta$	$X_9 \leq 1{,}924 + 1{,}924\theta$
$X_{10} \geq 11{,}352 - 0{,}769\theta$	$X_{10} \leq 11{,}352 + 0{,}769\theta$
$X_{11} \geq 0{,}269 - 0{,}002\theta$	$X_{11} \leq 0{,}269 + 0{,}002\theta$
$X_{12} \geq 0{,}962 - 0{,}002\theta$	$X_{12} \leq 0{,}962 + 0{,}002\theta$
$X_{13} \geq 0{,}289 - 0{,}002\theta$	$X_{13} \leq 0{,}289 + 0{,}002\theta$
$X_{14} \geq 0{,}035 - 0{,}001\theta$	$X_{14} \leq 0{,}035 + 0{,}001\theta$
$X_{15} \geq 57{,}723 - 0{,}039\theta$	$X_{15} \leq 57{,}723 + 0{,}039\theta$
$X_{16} \geq 0{,}192 - 0{,}001\theta$	$X_{16} \leq 0{,}192 + 0{,}001\theta$
$X_{21} \geq 0{,}008 - 0{,}001\theta$	$X_{21} \leq 0{,}008 + 0{,}001\theta$

(Formülün 100 kg. İçin Olma Durumu)

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+X_{17}+X_{18}$

$+X_{19}+X_{20}+X_{21}=100$

(Formüle Dâhil Olmama Durumu)

$X_5=0$ $X_{17}=0$ $X_{18}=0$ $X_{19}=0$ $X_{20}=0$

(Negatif Olmama Şartı)

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21} \geq 0$

ve $\theta \geq 0$, $\theta \leq 1$

3.4.4. Klasik ve Bulanık Doğrusal Programlama Modellerinin Çözümleri

Uygulamaya konu olan, maliyetler açısından ürün formülü iyileştirme problemine ait klasik ve bulanık modeller WinQSB paket programı yardımıyla çözülmüştür. Klasik modeller, K1 ve K2 için 26, K3 ve K4 için 34, P1 ve P2 için 28 iterasyon sonucu çözülürken; bulanık modeller, K1 ve K2 için 31, K3 için 46, K4 için 48, P1 için 35 ve P2 için 44 iterasyon sonucu çözülmüştür. Elde edilen çözüm değerleri Tablo 13 ve Tablo 14'te verilmiştir. Ayrıca modellerin detaylı çözüm sonuçları Ek 1 ve Ek 2'de belirtilmiştir.

Tablo 13: Klasik Doğrusal Programlama Modelinin Çözüm Değerleri

Çözüm Değerleri		**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**P1**	**P2**
X_1	Bitkisel Yağ	9,844	10,547	7,592	8,098	10,250	8,639
X_2	Şeker	25,502	22,980	19,195	17,295	13,733	9,601
X_3	Glikoz	2,704	2,897	3,715	3,963	3,466	6,523
X_4	Süt	0,000	0,000	0,000	0,000	2,202	0,194
X_5	Süt Tozu	0,984	0,852	0,000	0,000	0,000	0,000
X_6	Peyniraltı Suyu Tozu	0,246	0,264	0,244	0,260	0,211	0,287
X_7	Vanilya Aroması	0,025	0,024	0,022	0,022	0,017	0,018
X_8	Bisküvi Iskartası	1,542	1,645	3,224	3,438	2,718	3,095
X_9	Şurup Iskartası	0,000	0,000	0,160	0,174	0,000	0,000
X_{10}	Su	4,436	4,752	3,384	3,611	10,819	12,121
X_{11}	Soda	0,144	0,154	0,244	0,260	0,193	0,271
X_{12}	Amonyak	0,160	0,171	0,403	0,430	0,651	0,964
X_{13}	Tuz	0,278	0,298	0,244	0,260	0,277	0,291
X_{14}	Sülfit	0,000	0,000	0,000	0,000	0,030	0,036
X_{15}	Un	43,131	46,212	48,372	51,598	55,264	57,762
X_{16}	Kabartıcı(SAPP)	0,140	0,150	0,115	0,122	0,163	0,191
X_{17}	Krema Yağı	9,753	8,127	7,231	5,785	0,000	0,000
X_{18}	Lesitin	0,024	0,020	0,044	0,036	0,000	0,000
X_{19}	Custered Krema Aroması	0,112	0,094	0,028	0,022	0,000	0,000
X_{20}	Mısır Nişastası	0,975	0,813	5,783	4,626	0,000	0,000
X_{21}	Enzim	0,000	0,000	0,000	0,000	0,006	0,007
Z	*En az Maliyet*($/100kg)	111,22	105,69	94,72	90,31	74,92	68,72

Klasik modellerin çözüm değerleri incelendiğinde amaç fonksiyonu değerleri, 100 kg'a eşdeğer grup formülleri için K1 $111,22 K2 $105,69 K3 $94,72 K4 $90,31 P1 $74,92 ve P2 $68,72'dir. Bunlarla beraber optimum karar değişkeni sonuçlarına bakıldığında en çok bir ya da iki değişken dışında genel itibariyle karar değişkenlerin değerleri girdi kalemleri oranlarının alt veya üst sınırlarında çıkmaktadır. Fakat görülmektedir ki bu sınır değerleri formüllerin ideal girdi oranlarına, yani orta değerlere en uzak değerlerdir.

Bulanık modellerin sonuçlarına bakıldığında elde edilen parametrik çözümler karar vericiye birden çok karar alternatifi sunmaktadır. Tablo 14'te gösterilen sonuçlarda %10'luk hassasiyetlerde farklı θ değerleri için farklı amaç fonksiyonu değerleri sunulmaktadır.

Tablo 14: Bulanık Doğrusal Programlama Modelinin Çözüm Değerleri

			K1	**K2**	**K3**	**K4**	**P1**	**P2**
	θ	***α=1-θ***	***Z(θ)***	***Z(θ)***	***Z(θ)***	***Z(θ)***	***Z(θ)***	***Z(θ)***
Bulanık Model	0,0	1,0	112,53	107,06	97,81	93,61	77,84	71,66
	0,1	0,9	112,40	106,92	97,50	93,28	77,55	71,37
	0,2	0,8	112,27	106,79	97,19	92,95	77,26	71,08
	0,3	**0,7**	**112,14**	**106,65**	**96,89**	**92,62**	**76,97**	**70,78**
	0,4	0,6	112,01	106,51	96,57	92,29	76,67	70,49
	0,5	0,5	111,87	106,65	96,26	91,96	76,38	70,19
	0,6	**0,4**	**111,74**	**106,24**	**95,95**	**91,63**	**76,09**	**69,90**
	0,7	0,3	111,61	106,10	95,64	91,30	75,80	69,61
	0,8	0,2	111,48	105,96	95,33	90,97	75,50	69,31
	0,9	**0,1**	**111,35**	**105,83**	**95,02**	**90,64**	**75,21**	**69,02**
	1,0	0,0	111,22	105,69	94,72	90,31	74,92	68,72

SONUÇ VE ÖNERİLER

Belirsizlik içeren problemleri ele almada olasılık teorisinin yetersiz kaldığı noktalarda, diğer bir ifade ile ikili mantıktan ziyade çoklu mantığa dayalı belirsizlik durumlarını incelemede başvurulan bulanık yöntemler, günümüzde oldukça fazla kullanım alanına sahip hale gelmiştir. Bunun sebebi, bulanık modellerin klasik modellere göre gerçek hayat problemlerini aslına daha yakın ve kuvvetli temsil etme kabiliyetidir.

Bulanık küme teorisinin, belirsizliği derecelendirilerek modellere dâhil etmesi yoluyla doğrusal programlamaya önerdiği yaklaşımlar gerçek dünyanın karmaşık yapısının modellenmesinde daha başarılı olmuştur. Bazı yöntemlerle belirsizliği daha iyi ifade edebilme özelliğini kazanan ve artık bulanık doğrusal programlama olarak ifade edilen doğrusal programlama yöntemine literatürde pek çok farklı çözüm yaklaşımı önerilmiştir. Bunlardan kimisi hem amaç fonksiyonu hem de kısıt kümesinin bulanık olduğu durumlara çözüm önerirken, bazıları ya sadece amaç fonksiyonunun ya da sadece kısıt kümesinin bulanık olduğu durumlara çözüm yaklaşımı önermiştir.

Bu çalışmada Karaman’da üretim yapan bir işletmenin karşı karşıya kaldığı karar probleminin incelenmesinden yola çıkılarak modelin sadece kısıt kümesinde bulanıklık barındırdığına karar verilmiştir. Verilerin elde edilmesini takiben kurulan klasik ve bulanık modeller çalıştırılmış, Tablo 13 ve 14’teki sonuçlar elde edilmiştir.

Klasik model sonucu elde edilen 6 ürün grubundaki maliyetlerin mevcut maliyetlere göre farkları Tablo 15’te gösterilmiştir. Görüldüğü üzere en yüksek maliyete sahip K1 grup formülünden daha düşük maliyete sahip P1 grup formülüne doğru bir artış vardır. Burada genel itibariyle düşük maliyetli ürünlerde optimizasyon sonucu oluşabilecek kazanım miktarının daha fazla olduğu söylenebilir. Bu da, klasik modellere göre alınacak aksiyonlarda ucuz formüllerden başlamanın daha mantıklı olduğunu gösterir.

Tablo 15: Normal ve Klasik Optimum Maliyetlerin Karşılaştırması ($/100kg)

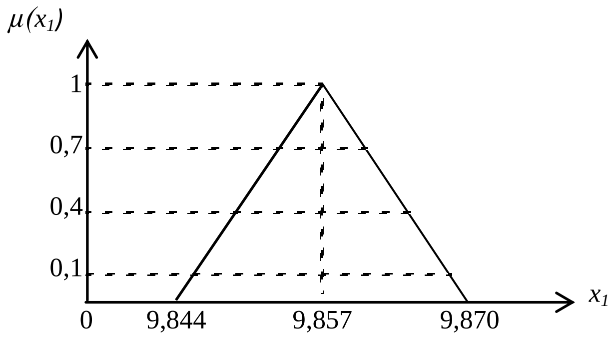
	K1	**K2**	**K3**	**K4**	**P1**	**P2**
Mevcut Maliyet	112,53	107,06	97,81	93,61	77,84	71,66
En az Maliyet	111,22	105,69	94,72	90,31	74,92	68,72
Fark	1,31	1,37	3,09	3,30	2,92	2,94

Bununla beraber üretilen ürünlerin klasik modelin çözüm değerlerine göre üretilmiş olması halinde oluşabilecek kazanımlar, 2011 yılı üretim miktarlarına göre Tablo 16'da verilmiştir. Üretim miktarları toplam olarak verildiğinden, ortalama bir değer olarak ifade edilen yıllık kazanç $1.294.800 olmaktadır ki çok hassas üst ve alt girdi sınırları ile üretilen ürünlerimiz de bile yüksek üretim tonajı nedeniyle maliyet kazancı kayda değer olmaktadır. Fakat daha önce de ifade edildiği gibi karar değişkenleri genelde alt ve üst sınır değerlerinde oluşmaktadır. Bu durumda bulanık model sonuçları ile, ürünlerin duyusal özellikleri de dikkate alınarak, daha gerçekçi kararlar verilebilir.

Tablo 16: Optimum Değerler ile Olası Yıllık Kazanım Miktarları

	K1	**K2**	**K3**	**K4**	**P1**	**P2**
Fark($/100kg)	1,31	1,37	3,09	3,3	2,92	2,94
2011 Üretim Miktarı(ton)	52.000					
Ortalama Kazanç($/yıl)	1.294.800					

Tablo 14'teki bulanık modellerin çözüm sonuçlarına bakıldığında farklı θ değerlerine göre çözüm kümesi farklı olmaktadır. Görüldüğü üzere hali hazırda hassas olan alt ve üst sınır değerlerine sahip modeldeki %10'luk θ değişimleri neticesinde maliyet kazanım değerleri arasındaki farklar sent düzeylerinde çıkmaktadır. Bu nedenle karar vericiye daha az hassas aralıklar içeren θ=0,3 θ=0,6 θ=0,9 yani düşük, orta ve yüksek tolerans düzeyleri için çözüm sonuçları sunulmuştur. Bu değerler sırasıyla ilgili bulanık kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonlarının α =0,7 α =0,4 ve α =0,1 kesim seviyeleri neticesinde elde edilmiştir. Şekil 31, birinci bulanık modelin ilk bulanık kısıtlayıcısı için verilmiştir. Diğer bulanık kısıtlar için de aynı ilişki geçerlidir.



Şekil 31: K1 Modeli için b_1 Bulanık Kısıtının Üyelik Fonksiyonu ile Gösterimi

Burada θ=0 için sapma, yani tolerans sıfır düzeyindedir ve memnuniyet derecesi bir tam değerine sahip olmaktadır. θ=1'e doğru gidildikçe sapma artmakta ve memnuniyet derecesi azalmaktadır.

Tablo 17: Düşük-Orta-Yüksek Tolerans Düzeylerindeki Kazanım Miktarları

θ=0,3	**α=0,7**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**P1**	**P2**
Mevcut Maliyet		112,53	107,06	97,81	93,61	77,84	71,66
Bulanık Modelin Çözümü		112,14	106,65	96,89	92,62	76,97	70,78
Fark($/100kg)		0,39	0,41	0,92	0,99	0,87	0,88
2011 Üretim Miktarı(ton)		52.000					
Ortalama Kazanç($/yıl)		386.533					
θ=0,6	**α=0,4**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**P1**	**P2**
Mevcut Maliyet		112,53	107,06	97,81	93,61	77,84	71,66
Bulanık Modelin Çözümü		111,74	106,24	95,95	91,63	76,09	69,90
Fark($/100kg)		0,79	0,82	1,86	1,98	1,75	1,76
2011 Üretim Miktarı(ton)		52.000					
Ortalama Kazanç($/yıl)		776.533					
θ=0,9	**α=0,1**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**P1**	**P2**
Mevcut Maliyet		112,53	107,06	97,81	93,61	77,84	71,66
Bulanık Modelin Çözümü		111,35	105,83	95,02	90,64	75,21	69,02
Fark($/100kg)		1,18	1,23	2,79	2,97	2,63	2,64
2011 Üretim Miktarı(ton)		52.000					
Ortalama Kazanç($/yıl)		1.164.800					

Tablo 17'ye göre karar vericiye üç farklı tolerans düzeyinde her ürün grubu için elde edeceği kazanım miktarları ve bunun yanında bu yöntemin kullanılmış olduğu düşünüldüğünde 2011 yılı üretim miktarlarına göre elde edilen yıllık ortalama kazanç miktarları verilmiştir. Buna göre düşük tolerans düzeyinde(θ=0,3) yıllık kazanç \$386.533 olmakta, orta tolerans düzeyinde(θ=0,6) kazanç artmakta ve \$776.533 olmaktadır. Yüksek tolerans düzeyinde(θ=0,9) ise kazanç \$1.164.800 ile en yüksek olmaktadır. Karar verici burada girdilerdeki değişiklik ile oluşacak yeni duyusal değerleri, girdi kalemlerinin piyasa ve stok gibi durumlarını, modelde yer almayan başka faktörleri ve beklentileri de göz önüne alarak ve farklı yorumları da değerlendirerek kararını verecektir.

İlgili işletmedeki yöneticilerin, üretimin önerilen yeni formüllere göre yapılmasına karar vermeleri halinde 2012 yılında daha yüksek kârlılık oranlarına ulaşabilecekleri beklenmektedir. Ayrıca işletmenin yöneticileri bu karar yöntemi ile (gerekli yazılım ve insan kaynağı desteğiyle) benzer problemlere daha uygun çözümler bulabileceklerdir.

Günümüzde işletme yöneticilerinin sayısal karar verme tekniklerinden daha fazla yararlanarak kararlarını şekillendirmeleri rekabet ortamında daha avantajlı hale gelmelerini sağlayabilir. Buradan hareketle yetişmiş insan kaynağı açısından bir eksiklikleri bulunmayan Karaman ili işletme yöneticileri(özellikle uygulama yapılan firma yetkilileri) karşılaştıkları problemleri çözmede halen kullandıkları geleneksel karar yöntemleri yerine çok fazla kullanmadıkları sayısal yöntemlere yer vermelidirler. Bu noktada, işletmeler üniversite ile işbirliği yaparak Karaman ekonomisine daha fazla katkı sağlayabilirler.

Bu çalışma bir adım ileri götürülmek istenirse; modele hammadde kısıtları yanında enerji kısıtları, işgücü kısıtları ve diğer kısıtlar eklenerek toplam kârı ençoklayacak yeni bir model belirlenebilir. Toplam kâra cevap arayacak bu problemde yeni formüller altında üretilecek yeni ürünlerin ne kadar üretileceği sorusuna cevap aranabilir.

KAYNAKÇA

Bandemer, H., & Gottwald, S. (1996). *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Fuzzy Methods with Applications.* Chichester: John Wiley&Sons.

Baykal, N., & Beyan, T. (2004). *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri.* Ankara: Bıçaklar Kitabevi.

Bellman, R. E., & Zadeh, L. A. (1970). Decision-Making in a Fuzzy Environment. *Management Science , 17,* B141-B164.

Bodjanova, S. (2003). Alpha- Bounds of Fuzzy Numbers. *Information Sciences , 152* (1), 237-266.

Bojadziev, G., & Bojadsiev, M. (1995). *Fuzzy Sets,Fuzzy Logic, Applications.* London: World Scientific.

Bojadziev, G., & Bojadziev, M. (2007). *Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management* (2 b.). New Jersey: World Scientific.

Buckley, J. J., & Feuring, T. (2000). Evolutionary Algorithm Solution to Fuzzy Problems: Fuzzy Linear Programming. *Fuzzy Sets and Systems* , 35-53.

Carlsson, C., & Korhonen, P. (1986). A Parametric Approach to Fuzzy Linear Programming. *Fuzzy Sets and Systems , 20,* 17-30.

Chanas, S. (1983). The Use of Parametric Programming in Fuzzy Linear Programming. *Fuzzy Sets and Systems , 11,* 243-251.

Chanas, S. Z. (2000). On the Equivalance of Two Optimization Methods for the Fuzzy Linear Programming Problems. *European Journal of operational Research* , 56-63.

Chen, C. T. (2000). Extensions of the TOPSIS for Group Decision-Making under Fuzzy Environment. *Fuzzy Sets and Systems , 114*, 3.

Chiang, J. (2001). Fuzzy Linear Programming Based on Statistical Confidence Interval and Interval-Valued Fuzzy Set. *European Journal of Operational Research* , 65-86.

Çelik, S.H. (2000). *Bulanık Rastgele Doğrusal Programlama* (Basılmamış Yüksek Lisans Tezi), Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Dai, L. v. (2003). Aggregate Production Planning Utilizing a Fuzzy Linear Programming. *Journal of Integrated Design and Process Science , 7*, 81-95.

Delgado, M. (1989). A General Model for Fuzzy Linear Programming. *Fuzzy Sets and Systems , 1*, 21-29.

Dombi, J. (1990). Membership function as an evaluation. *Fuzzy Sets and Systems , 35*, 1-21.

Dombi, J., & Gera, Z. (2005). The Approximation of Piecewise Linear Membership Functions and Lukasiewicz Operators. *Fuzzy Sets and Systems , 154*, 275-286.

Dubois, D., & Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets And Systems: Theory and Applications.* Massachusetts: Academic Press.

Ertuğrul, İ., & Tuş, A. (2007). Interactive fuzzy linear programming and an application at a textile firm. *Fuzzy Optim Decis Making , 6*, 29-49.

Gençer, M. (1991). Bulanık Kuram ve Uygulamalarında Gelişmeler. *Elektrik Mühendisliği Dergisi* , 239-242.

Güneş, M., & Yiğitbaşı, O. N. (2001). Türk Vergi Sisteminde Bulanık Mantık Uygulamaları. Adana.

Hannan, E. L. (1981). Linear programming with multiple fuzzy goals. *Fuzzy Sets and Systems , 6*, 235-248.

Hansen, B. K. (1996). *Fuzzy Logic and Linear Programming Find Optimal Solutions for Meteorological Problems.* Technical University of Nova Scotia: Term Paper for Fuzzy Logic Course.

Inuiguchi, M., & Sakawa, M. (1998). Robust Optimization Under Softness in a Fuzzy Linear Programming Problem. *Inernational Journel of Approximate Reasoning , 18*, 21-34.

Karadayı, T.(2007). *Bulanık doğrusal programlama kullanılarak yapısal sistemlerin boyutlandırılması,* Basılmamış yüksek lisans tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kaufmann, A., & Gupta, M. M. (1988). *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science.* North Holland: Elsevier Science Publishers.

Kaya, Ö.(2007). Bulanık Doğrusal Programlama ve Üretim Planlama Üzerine Bir Uygulama, Yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, s.17-18.

Kaymak, U., & Sousa, J. M. (2001). Weighted Constraints in Fuzzy Optimization. *ERIM Report Series Research in Management , ERS-2001-19-LIS,* 21.

Klir, G. J., & Folger, T. A. (1998). *Fuzzy Sets, Uncertainity and Information.* New Jersey: Printice Hall.

Klir, G. J., & Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications.* New Jersey: Prentice Hall.

Lai, Y.-J., & Hwang, C.-L. (1992). *Fuzzy Mathematical Programming: Methods and Applications.* Berlin: Springer-Verlag.

Leberling, H. (1983). On finding compromise solutions in multicriteria problems using the fuzzy min-operator. *Fuzzy Sets and Systems , 6*, 105-118.

Li, H. X., & Yen, C. V. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Decision Making.* Boca Raton: CRC Press.

Marler, R., Yang, J., & Rao, S. S. (2004). A Fuzzy Approach for Determining a Feasible Point in a Constrained Problem. *ASME/JSME 2004 Pressure Vessels and Piping Conference* (s. 115-124). California: American Society of Mechanical Engineers.

Negoita, C. V., & Sularia, M. (1976). On Fuzzy Programming and Tolerance in Planning. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research , 1*.

Nguyen, H. T., & Walker, E. A. (1999). *A First Course in Fuzzy Logic.* Florida: Chapman&Hall.

Öğütlü, A.S. (2002). *Bulanık Doğrusal Programlama ve Bir Yem Karışım Problemine Uygulanması,* Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Basılmamış Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir.

Özdemir, A. İ., & Seçme, G. (2009). Tedarik Zinciri Ağ Tasarımına Bulanık Ulaştırma Modeli Yaklaşımı. *Erciyes Üniversitesi İ.İ.B.F. Dergisi* , 219-237.

Özkan, M. M. (2002). Bulanık Hedef Programlama Modeli ve bir Uygulama Denemesi. *Review of Social, Economic and Business Studies , 2*, 265-301.

Özkan, M. M. (2003). *Bulanık Hedef Programlama.* Bursa: Ekin Kitabevi.

Öztürk, A., Ertuğrul, İ., & Karakaşoğlu, N. (2008). Nakliye Firması Seçiminde Bulanık AHP ve Bulanık TOPSIS Yöntemlerinin Karşılaştırılması. *Marmara Üniversitesi İ.İ.B.F. Dergisi , 25* (2), 785-824.

Paksoy, T. (2002). Bulanık Küme Teorisi ve Doğrusal Programlamada Kullanımı: Karşılaştırmalı Bir Analiz. *Selçuk Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi , 17* (1), 1-16.

Paksoy, T., & Atak, M. (2003). Etkileşimli Bulanık Çok Amaçlı Doğrusal Programlama ile Bütünleşik Üretim Planlama: Hidrolik Pompa İmalatçısı Firma Örnek Olayı. *Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi* , 457- 466.

Pedrycz, W. (1989). *Fuzzy Control and Fuzzy Systems.* Taunton: Research Studies Press.

Ramik, J., & Vlach, M. (2002). Fuzzy Mathematical Programming: A Unified Approach Based on Fuzzy Relations. *Fuzzy Optimization and Decision Making , 1*, 335-346.

Rommelfanger, H. (1996). Fuzzy linear programming and applications. *European Journal of Operational Research , 92*, 512-517.

Ross, T. J. (2010). *Fuzzy Logic with Engineering Applications* (3 b.). Chichester: Wiley Publication.

Ross, T. J., Booker, J. M., & Parkinson, W. J. (2002). *Fuzzy Logic and Probability Applications: Bridging the Gap.* Philadelphia: ASA-SIAM.

Russel, B. (1923). Vagueness. *The Australasian Journal of Philosophy and Psycology , 1*, 84-92.

Sakawa, M. (1983). Interactive computer programs for fuzzy linear programming with multiple objectives. *Internal Journal of Man-Machine Studies , 18,* 489-503.

Sakawa, M., & Kato, K. (2002). An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Multiobjective Stochastic Linear Programming Problems Using Chance Constrained Conditions. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis , 11,* 125-137.

Sakawa, M., Nishizaki, I., & Katagiri, H. (2011). *Fuzzy Stochastic Multiobjective Programming.* New York: Springer.

Seçme, N. Y. (2005). *Klasik Doğrusal Programlama ve Bulanık Doğrusal Programlamanın Karşılaştırmalı Bir Analizi: Üretim Planlama Örneği*, Erciyes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kayseri.

Sicat, R. S., Carranza, E. J., & Nidumolu, U. B. (2005). Fuzzy Modeling of Farmers' Knowledge for Land Suitability Classification. *Agricultural Systems , 83* (1), 49-75.

Smithson, M., & Verkuilen, J. (2006). *Fuzzy Set Theory: Applications in the Social Sciences.* California: Sage Publications.

Stanciulescu, C. v. (2003). Multiobjective Fuzzy Linear Programming Problems with Fuzzy Decision Variables. *European Journal of Operational Research , 149*, 654-675.

Şen, Z. (2004). *Mühendislikte Bulanık Mantık ile Modelleme Prensipleri.* İstanbul: Su Vakfı Yayınları.

Şen, Z. (2009). *Bulanık Mantık İlkeleri ve Modelleme.* İstanbul: Su Vakfı Yayınları.

Terano, T., Asai, K., & Sugeno, M. (1992). *Fuzzy Systems Theory and its Applications.* San Diego: Academic Press.

Tsoukalas, L. H., & Uhrig, R. E. (1997). *Fuzzy and Neural Approaches in Engineering.* New York: John Wiley&Sons.

Tulunay, Y. (1991). *Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları.* İstanbul: İstanbul Üniv. İşletme Fakültesi.

Tuncel, S. Ö. (1997). *Bulanık Doğrusal Programlama*, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi.

Tuş, A.(2006). *Bulanık Doğrusal Programlama ve Üretim Planlamasında Bir Uygulama Örneği*, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

Verdegay, J. L. (1984). A Dual Approach to Solve the Fuzzy Linear Programming Problem. *Fuzzy Sets and Systems , 14*, 131-141.

Wang, D. (1997). An inexact approach for linear programming problems with fuzzy objective and resources. *Fuzzy Sets and Systems , 89*, 61-68.

Wang, L. X. (1997). *A Course In Fuzzy Systems and Control.* New Jersey: Prentice Hall.

Werners, B. (1984). *Interaktive Entscheidungsunterstützung durch ein flexibles mathematisches Programmierungssystem.* München: Minerwa Publika.

Werners, B. (1987). An Interactive Fuzzy Programming System. *Fuzzy Sets and Systems , 23*, 131-147.

Wiedey, G., & Zimmermann, H.-J. (1978). Media Selection and Fuzzy Linear Programming. *The Journal of the Operational Research Society , 29*, 1071-1084.

Wu, H.-C. (2003). Duality Theory in Fuzzy Linear Programming Problems with Fuzzy Coefficients. *Fuzzy Optimization and Decision Making* , 61-73.

Xiaozhong, L. A. (1997). A General Model for Fuzzy Linear Programming Problems with Fuzzy Variables. *Journal of Liaocheng Teachers College* , 137-140.

Xu, J., & Zhou, X. (2011). *Fuzzy-Like Multiple Objective Decision Making.* Berlin: Springer-Verlag.

Yen, J., & Langari, R. (1999). *Fuzzy Logic, Intelligence, Control and Information.* New Jersey: Prentice Hall.

Yenilmez, K. (2001). *Bulanık Doğrusal Programlama Problemleri için Yeni Çözüm Yaklaşımları ve Duyarlılık Analizi,* Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayımlanmamış Doktora Tezi, Eskişehir.

Yıldırım, Y. (2008). *Bulanık Doğrusal Programlama ve Bir Uygulama*, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi.

Yılmaz, Ö.F. (1998). *Bulanık Doğrusal Programlama ile Asgari Ücretin Belirlenmesi,* Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control , 8,* 338-353.

Zadeh, L. A. (1975). The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning-I. *Information Sciences , 8*, 199-249.

Zhang, G. v. (2003). Formulation of Fuzzy Linear Programming Problems as Four-Objective Constrained Optimization Problems. *Applied Mathematics and Computation , 139*, 383-399.

Zhao, R. v. (1992). The Complete Decision Set of the Generalized Symmetrical Fuzzy Linear Programming. *Fuzzy Sets and Systems , 1,* 53-65.

Zimmermann, H.-J. (1975). Optimale Entscheidungen bei unscharfen Problembeschreibungen. *Zeitschrift für Betriebswirtschaftliche Forschung* , 785-795.

Zimmermann, H.-J. (1976). Description and optimization of fuzzy systems. *International Journal of General Systems , 2,* 209-215.

Zimmermann, H.-J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems , 1*, 45-55.

Zimmermann, H.-J. (1991). *Fuzzy Set Theory and Its Applications.* Massachusetts: Kluwer Academic.

EKLER

Ek 1: Klasik Modellerin Çözüm Değerleri

Ek 2: Bulanık Modellerin Çözüm Değerleri(θ=0,6 için)

Ek 1: Klasik Modellerin Çözüm Değerleri

K1

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	9,844	1,9	18,7036	0	basic	0,9	M
X2	25,502	1,7	43,3534	0	basic	0,9	M
X3	2,704	0,9	2,4336	0	basic	0,9	M
X4	0	0,4	0	0	basic	-M	M
X5	0,984	4,75	4,674	0	basic	0,9	M
X6	0,246	1	0,246	0	basic	0,9	M
X7	0,025	22	0,55	0	basic	0,9	M
X8	1,542	0,9	1,3878	0	basic	0,45	0,9
X9	0	2,1	0	1,2	at bound	0,9	M
X10	4,436	0,2	0,8872	0	basic	-M	0,9
X11	0,144	0,45	0,0648	0	basic	-M	0,9
X12	0,16	0,45	0,072	0	basic	-M	0,9
X13	0,278	0,1	0,0278	0	basic	-M	0,9
X14	0	0,5	0	0	basic	-M	M
X15	43,131	0,4	17,2524	0	basic	-M	0,9
X16	0,14	1,9	0,266	0	basic	0,9	M
X17	9,753	1,85	18,0431	0	basic	0,9	M
X18	0,024	1,6	0,0384	0	basic	0,9	M
X19	0,112	20	2,24	0	basic	0,9	M
X20	0,975	1	0,975	0	basic	0,9	M
X21	0	11	0	0	basic	-M	M
Objective	**Function**	**(Min.) =**	**111,2151**	**(Note:**	**Alternate**	**Solution**	**Exists!!)**

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	9,844	<=	9,87	0,026	0	9,844	M
C2	9,844	>=	9,844	0	1	8,922	9,87
C3	25,502	<=	25,546	0,044	0	25,502	M
C4	25,502	>=	25,502	0	0,8	24,58	25,546
C5	2,704	<=	2,716	0,012	0	2,704	M
C6	2,704	>=	2,704	0	0	1,782	2,716
C7	0	=	0	0	-0,5	0	1,542
C8	0,984	<=	1,01	0,026	0	0,984	M
C9	0,984	>=	0,984	0	3,85	0,062	1,01
C10	0,246	<=	0,272	0,026	0	0,246	M
C11	0,246	>=	0,246	0	0,1	0	0,272
C12	0,025	<=	0,027	0,002	0	0,025	M
C13	0,025	>=	0,025	0	21,1	0	0,027
C14	1,542	<=	2,464	0,922	0	1,542	M
C15	1,542	>=	0	1,542	0	-M	1,542
C16	0	<=	1,232	1,232	0	0	M
C17	0	>=	0	0	0	-M	0
C18	4,436	<=	4,436	0	-0,7	3,696	5,978
C19	4,436	>=	3,696	0,74	0	-M	4,436
C20	0,144	<=	0,144	0	-0,45	0,14	1,686
C21	0,144	>=	0,14	0,004	0	-M	0,144
C22	0,16	<=	0,16	0	-0,45	0,136	1,702
C23	0,16	>=	0,136	0,024	0	-M	0,16
C24	0,278	<=	0,278	0	-0,8	0,276	1,82
C25	0,278	>=	0,276	0,002	0	-M	0,278
C26	0	=	0	0	-0,4	0	1,542
C27	43,131	<=	43,131	0	-0,5	43,107	44,673
C28	43,131	>=	43,107	0,024	0	-M	43,131
C29	0,14	<=	0,144	0,004	0	0,14	M
C30	0,14	>=	0,14	0	1	0	0,144
C31	9,753	<=	9,771	0,018	0	9,753	M
C32	9,753	>=	9,753	0	0,95	8,831	9,771
C33	0,024	<=	0,026	0,002	0	0,024	M
C34	0,024	>=	0,024	0	0,7	0	0,026
C35	0,112	<=	0,132	0,02	0	0,112	M
C36	0,112	>=	0,112	0	19,1	0	0,132
C37	0,975	<=	0,977	0,002	0	0,975	M

C38	0,975	>=	0,975	0	0,1	0,053	0,977
C39	0	=	0	0	10,1	0	1,542
C40	100	=	100	0	0,9	98,458	100,922

K2

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	10,547	1,9	20,0393	0	basic	0,9	M
X2	22,98	1,7	39,066	0	basic	0,9	M
X3	2,897	0,9	2,6073	0	basic	0,9	M
X4	0	0,4	0	0	basic	-M	M
X5	0,852	4,75	4,047	0	basic	0,9	M
X6	0,264	1	0,264	0	basic	0,9	M
X7	0,024	22	0,528	0	basic	0,9	M
X8	1,645	0,9	1,4805	0	basic	0,45	0,9
X9	0	2,1	0	1,2	at bound	0,9	M
X10	4,752	0,2	0,9504	0	basic	-M	0,9
X11	0,154	0,45	0,0693	0	basic	-M	0,9
X12	0,171	0,45	0,0769	0	basic	-M	0,9
X13	0,298	0,1	0,0298	0	basic	-M	0,9
X14	0	0,5	0	0	basic	-M	M
X15	46,212	0,4	18,4848	0	basic	-M	0,9
X16	0,15	1,9	0,285	0	basic	0,9	M
X17	8,127	1,85	15,035	0	basic	0,9	M
X18	0,02	1,6	0,032	0	basic	0,9	M
X19	0,094	20	1,88	0	basic	0,9	M
X20	0,813	1	0,813	0	basic	0,9	M
X21	0	11	0	0	basic	-M	M

Objective Function (Min.) = 105,6883 (Note: Alternate Solution Exists!!)

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	10,547	<=	10,573	0,026	0	10,547	M
C2	10,547	>=	10,547	0	1	9,552	10,573
C3	22,98	<=	23,022	0,042	0	22,98	M
C4	22,98	>=	22,98	0	0,8	21,985	23,022
C5	2,897	<=	2,911	0,014	0	2,897	M
C6	2,897	>=	2,897	0	0	1,902	2,911
C7	0	=	0	0	-0,5	0	1,645
C8	0,852	<=	0,88	0,028	0	0,852	M
C9	0,852	>=	0,852	0	3,85	0	0,88
C10	0,264	<=	0,29	0,026	0	0,264	M
C11	0,264	>=	0,264	0	0,1	0	0,29
C12	0,024	<=	0,028	0,004	0	0,024	M
C13	0,024	>=	0,024	0	21,1	0	0,028
C14	1,645	<=	2,64	0,995	0	1,645	M
C15	1,645	>=	0	1,645	0	-M	1,645
C16	0	<=	1,32	1,32	0	0	M
C17	0	>=	0	0	0	-M	0
C18	4,752	<=	4,752	0	-0,7	3,96	6,397
C19	4,752	>=	3,96	0,792	0	-M	4,752
C20	0,154	<=	0,154	0	-0,45	0,15	1,799
C21	0,154	>=	0,15	0,004	0	-M	0,154
C22	0,171	<=	0,171	0	-0,45	0,145	1,816
C23	0,171	>=	0,145	0,026	0	-M	0,171
C24	0,298	<=	0,298	0	-0,8	0,296	1,943
C25	0,298	>=	0,296	0,002	0	-M	0,298
C26	0	=	0	0	-0,4	0	1,645
C27	46,212	<=	46,212	0	-0,5	46,186	47,857
C28	46,212	>=	46,186	0,026	0	-M	46,212
C29	0,15	<=	0,154	0,004	0	0,15	M
C30	0,15	>=	0,15	0	1	0	0,154
C31	8,127	<=	8,143	0,016	0	8,127	M
C32	8,127	>=	8,127	0	0,95	7,132	8,143
C33	0,02	<=	0,022	0,002	0	0,02	M
C34	0,02	>=	0,02	0	0,7	0	0,022

C35	0,094	<=	0,11	0,016	0	0,094	M
C36	0,094	>=	0,094	0	19,1	0	0,11
C37	0,813	<=	0,815	0,002	0	0,813	M
C38	0,813	>=	0,813	0	0,1	0	0,815
C39	0	=	0	0	10,1	0	1,645
C40	100	=	100	0	0,9	98,355	100,995

K3

Decision Variable	**Solution Value**	**Unit Cost or Profit c(j)**	**Total Contribution**	**Reduced Cost**	**Basis Status**	**Allowable Min. c(j)**	**Allowable Max. c(j)**
X1	7,592	1,9	14,4248	0	basic	-M	2,1
X2	19,195	1,7	32,6315	0	basic	-M	2,1
X3	3,715	0,9	3,3435	0	basic	-M	2,1
X4	0	0,4	0	0	basic	-M	M
X5	0	4,75	0	2,65	at bound	2,1	M
X6	0,244	1	0,244	0	basic	-M	2,1
X7	0,022	22	0,484	0	basic	2,1	M
X8	3,224	0,9	2,9016	0	basic	-M	2,1
X9	0,16	2,1	0,336	0	basic	1,9	4,75
X10	3,384	0,2	0,6768	0	basic	-M	2,1
X11	0,244	0,45	0,1098	0	basic	-M	2,1
X12	0,403	0,45	0,1813	0	basic	-M	2,1
X13	0,244	0,1	0,0244	0	basic	-M	2,1
X14	0	0,5	0	0	basic	-M	M
X15	48,372	0,4	19,3488	0	basic	-M	2,1
X16	0,115	1,9	0,2185	0	basic	-M	2,1
X17	7,231	1,85	13,3773	0	basic	-M	2,1
X18	0,044	1,6	0,0704	0	basic	-M	2,1
X19	0,028	20	0,56	0	basic	2,1	M
X20	5,783	1	5,783	0	basic	-M	2,1
X21	0	11	0	0	basic	-M	M

Objective Function (Min.) = 94,7158

Constraint	**Left Hand Side**	**Direction**	**Right Hand Side**	**Slack or Surplus**	**Shadow Price**	**Allowable Min. RHS**	**Allowable Max. RHS**
C1	7,592	<=	7,592	0	-0,2	7,56	7,752
C2	7,592	>=	7,56	0,032	0	-M	7,592
C3	19,195	<=	19,195	0	-0,4	19,149	19,355
C4	19,195	>=	19,149	0,046	0	-M	19,195
C5	3,715	<=	3,715	0	-1,2	3,699	3,875
C6	3,715	>=	3,699	0,016	0	-M	3,715
C7	0	=	0	0	-1,7	0	0,16
C8	0	<=	0	0	0	0	M
C9	0	>=	0	0	0	-M	0
C10	0,244	<=	0,244	0	-1,1	0,24	0,404
C11	0,244	>=	0,24	0,004	0	-M	0,244
C12	0,022	<=	0,024	0,002	0	0,022	M
C13	0,022	>=	0,022	0	19,9	0	0,024
C14	3,224	<=	3,224	0	-1,2	0	3,384
C15	3,224	>=	0	3,224	0	-M	3,224
C16	0,16	<=	4,836	4,676	0	0,16	M
C17	0,16	>=	0	0,16	0	-M	0,16
C18	3,384	<=	3,384	0	-1,9	2,418	3,544
C19	3,384	>=	2,418	0,966	0	-M	3,384
C20	0,244	<=	0,244	0	-1,65	0,24	0,404
C21	0,244	>=	0,24	0,004	0	-M	0,244
C22	0,403	<=	0,403	0	-1,65	0,241	0,563
C23	0,403	>=	0,241	0,162	0	-M	0,403
C24	0,244	<=	0,244	0	-2	0,24	0,404
C25	0,244	>=	0,24	0,004	0	-M	0,244
C26	0	=	0	0	-1,6	0	0,16
C27	48,372	<=	48,372	0	-1,7	48,34	48,532
C28	48,372	>=	48,34	0,032	0	-M	48,372
C29	0,115	<=	0,115	0	-0,2	0,111	0,275
C30	0,115	>=	0,111	0,004	0	-M	0,115
C31	7,231	<=	7,231	0	-0,25	7,215	7,391

C32	7,231	>=	7,215	0,016	0	-M	7,231
C33	0,044	<=	0,044	0	-0,5	0,042	0,204
C34	0,044	>=	0,042	0,002	0	-M	0,044
C35	0,028	<=	0,03	0,002	0	0,028	M
C36	0,028	>=	0,028	0	17,9	0	0,03
C37	5,783	<=	5,783	0	-1,1	5,775	5,943
C38	5,783	>=	5,775	0,008	0	-M	5,783
C39	0	=	0	0	8,9	0	0,16
C40	100	=	100	0	2,1	99,84	104,676

K4

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	8,098	1,9	15,3862	0	basic	-M	2,1
X2	17,295	1,7	29,4015	0	basic	-M	2,1
X3	3,963	0,9	3,5667	0	basic	-M	2,1
X4	0	0,4	0	0	basic	-M	M
X5	0	4,75	0	2,65	at bound	2,1	M
X6	0,26	1	0,26	0	basic	-M	2,1
X7	0,022	22	0,484	0	basic	2,1	M
X8	3,438	0,9	3,0942	0	basic	-M	2,1
X9	0,174	2,1	0,3654	0	basic	1,9	4,75
X10	3,611	0,2	0,7222	0	basic	-M	2,1
X11	0,26	0,45	0,117	0	basic	-M	2,1
X12	0,43	0,45	0,1935	0	basic	-M	2,1
X13	0,26	0,1	0,026	0	basic	-M	2,1
X14	0	0,5	0	0	basic	-M	M
X15	51,598	0,4	20,6392	0	basic	-M	2,1
X16	0,122	1,9	0,2318	0	basic	-M	2,1
X17	5,785	1,85	10,7022	0	basic	-M	2,1
X18	0,036	1,6	0,0576	0	basic	-M	2,1
X19	0,022	20	0,44	0	basic	2,1	M
X20	4,626	1	4,626	0	basic	-M	2,1
X21	0	11	0	0	basic	-M	M

Objective Function (Min.) = 90,3136

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	8,098	<=	8,098	0	-0,2	8,064	8,272
C2	8,098	>=	8,064	0,034	0	-M	8,098
C3	17,295	<=	17,295	0	-0,4	17,249	17,469
C4	17,295	>=	17,249	0,046	0	-M	17,295
C5	3,963	<=	3,963	0	-1,2	3,945	4,137
C6	3,963	>=	3,945	0,018	0	-M	3,963
C7	0	=	0	0	-1,7	0	0,174
C8	0	<=	0	0	0	0	M
C9	0	>=	0	0	0	-M	0
C10	0,26	<=	0,26	0	-1,1	0,256	0,434
C11	0,26	>=	0,256	0,004	0	-M	0,26
C12	0,022	<=	0,024	0,002	0	0,022	M
C13	0,022	>=	0,022	0	19,9	0	0,024
C14	3,438	<=	3,438	0	-1,2	0	3,612
C15	3,438	>=	0	3,438	0	-M	3,438
C16	0,174	<=	5,158	4,984	0	0,174	M
C17	0,174	>=	0	0,174	0	-M	0,174
C18	3,611	<=	3,611	0	-1,9	2,579	3,785
C19	3,611	>=	2,579	1,032	0	-M	3,611
C20	0,26	<=	0,26	0	-1,65	0,256	0,434
C21	0,26	>=	0,256	0,004	0	-M	0,26
C22	0,43	<=	0,43	0	-1,65	0,258	0,604
C23	0,43	>=	0,258	0,172	0	-M	0,43
C24	0,26	<=	0,26	0	-2	0,256	0,434
C25	0,26	>=	0,256	0,004	0	-M	0,26
C26	0	=	0	0	-1,6	0	0,174
C27	51,598	<=	51,598	0	-1,7	51,562	51,772
C28	51,598	>=	51,562	0,036	0	-M	51,598

C29	0,122	<=	0,122	0	-0,2	0,118	0,296
C30	0,122	>=	0,118	0,004	0	-M	0,122
C31	5,785	<=	5,785	0	-0,25	5,773	5,959
C32	5,785	>=	5,773	0,012	0	-M	5,785
C33	0,036	<=	0,036	0	-0,5	0,034	0,21
C34	0,036	>=	0,034	0,002	0	-M	0,036
C35	0,022	<=	0,024	0,002	0	0,022	M
C36	0,022	>=	0,022	0	17,9	0	0,024
C37	4,626	<=	4,626	0	-1,1	4,62	4,8
C38	4,626	>=	4,62	0,006	0	-M	4,626
C39	0	=	0	0	8,9	0	0,174
C40	100	=	100	0	2,1	99,826	104,984

P1

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	10,25	1,9	19,475	0	basic	0,9	M
X2	13,733	1,7	23,3461	0	basic	0,9	M
X3	3,466	0,9	3,1194	0	basic	0,9	M
X4	2,202	0,4	0,8808	0	basic	-M	0,9
X5	0	4,75	0	0	basic	-M	M
X6	0,211	1	0,211	0	basic	0,9	M
X7	0,017	22	0,374	0	basic	0,9	M
X8	2,718	0,9	2,4462	0	basic	0,5	0,9
X9	0	2,1	0	1,2	at bound	0,9	M
X10	10,819	0,2	2,1638	0	basic	-M	0,9
X11	0,193	0,45	0,0869	0	basic	-M	0,9
X12	0,651	0,45	0,293	0	basic	-M	0,9
X13	0,277	0,1	0,0277	0	basic	-M	0,9
X14	0,03	0,5	0,015	0	basic	-M	0,9
X15	55,264	0,4	22,1056	0	basic	-M	0,9
X16	0,163	1,9	0,3097	0	basic	0,9	M
X17	0	1,85	0	0	basic	-M	M
X18	0	1,6	0	0	basic	-M	M
X19	0	20	0	0	basic	-M	M
X20	0	1	0	0	basic	-M	M
X21	0,006	11	0,066	0	basic	0,9	M
Objective	**Function**	**(Min.) =**	**74,9201**	**(Note:**	**Alternate**	**Solution**	**Exists!!)**

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	10,25	<=	10,286	0,036	0	10,25	M
C2	10,25	>=	10,25	0	1	9,3	10,286
C3	13,733	<=	13,771	0,038	0	13,733	M
C4	13,733	>=	13,733	0	0,8	12,783	13,771
C5	3,466	<=	3,502	0,036	0	3,466	M
C6	3,466	>=	3,466	0	0	2,516	3,502
C7	2,202	<=	2,202	0	-0,5	2,198	4,92
C8	2,202	>=	2,198	0,004	0	-M	2,202
C9	0	=	0	0	3,85	0	2,718
C10	0,211	<=	0,229	0,018	0	0,211	M
C11	0,211	>=	0,211	0	0,1	0	0,229
C12	0,017	<=	0,019	0,002	0	0,017	M
C13	0,017	>=	0,017	0	21,1	0	0,019
C14	2,718	<=	3,668	0,95	0	2,718	M
C15	2,718	>=	0	2,718	0	-M	2,718
C16	0	<=	3,668	3,668	0	0	M
C17	0	>=	0	0	0	-M	0
C18	10,819	<=	10,819	0	-0,7	9,869	13,537
C19	10,819	>=	9,351	1,468	0	-M	10,819
C20	0,193	<=	0,193	0	-0,45	0,173	2,911
C21	0,193	>=	0,173	0,02	0	-M	0,193
C22	0,651	<=	0,651	0	-0,45	0,633	3,369
C23	0,651	>=	0,633	0,018	0	-M	0,651
C24	0,277	<=	0,277	0	-0,8	0,273	2,995
C25	0,277	>=	0,273	0,004	0	-M	0,277

C26	0,03	<=	0,03	0	-0,4	0,026	2,748
C27	0,03	>=	0,026	0,004	0	-M	0,03
C28	55,264	<=	55,264	0	-0,5	54,75	57,982
C29	55,264	>=	54,75	0,514	0	-M	55,264
C30	0,163	<=	0,167	0,004	0	0,163	M
C31	0,163	>=	0,163	0	1	0	0,167
C32	0	=	0	0	0,95	0	2,718
C33	0	=	0	0	0,7	0	2,718
C34	0	=	0	0	19,1	0	2,718
C35	0	=	0	0	0,1	0	2,718
C36	0,006	<=	0,008	0,002	0	0,006	M
C37	0,006	>=	0,006	0	10,1	0	0,008
C38	100	=	100	0	0,9	97,282	100,95

P2

Decision Variable	**Solution Value**	**Unit Cost or Profit c(j)**	**Total Contribution**	**Reduced Cost**	**Basis Status**	**Allowable Min. c(j)**	**Allowable Max. c(j)**
X1	8,639	1,9	16,4141	0	basic	0,9	M
X2	9,601	1,7	16,3217	0	basic	0,9	M
X3	6,523	0,9	5,8707	0	basic	0,9	M
X4	0,194	0,4	0,0776	0	basic	-M	0,9
X5	0	4,75	0	0	basic	-M	M
X6	0,287	1	0,287	0	basic	0,9	M
X7	0,018	22	0,396	0	basic	0,9	M
X8	3,095	0,9	2,7855	0	basic	0,5	0,9
X9	0	2,1	0	1,2	at bound	0,9	M
X10	12,121	0,2	2,4242	0	basic	-M	0,9
X11	0,271	0,45	0,1219	0	basic	-M	0,9
X12	0,964	0,45	0,4338	0	basic	-M	0,9
X13	0,291	0,1	0,0291	0	basic	-M	0,9
X14	0,036	0,5	0,018	0	basic	-M	0,9
X15	57,762	0,4	23,1048	0	basic	-M	0,9
X16	0,191	1,9	0,3629	0	basic	0,9	M
X17	0	1,85	0	0	basic	-M	M
X18	0	1,6	0	0	basic	-M	M
X19	0	20	0	0	basic	-M	M
X20	0	1	0	0	basic	-M	M
X21	0,007	11	0,077	0	basic	0,9	M

Objective Function (Min.) = 68,7243 (Note: Alternate Solution Exists!!)

Constraint	**Left Hand Side**	**Direction**	**Right Hand Side**	**Slack or Surplus**	**Shadow Price**	**Allowable Min. RHS**	**Allowable Max. RHS**
C1	8,639	<=	8,679	0,04	0	8,639	M
C2	8,639	>=	8,639	0	1	7,886	8,679
C3	9,601	<=	9,641	0,04	0	9,601	M
C4	9,601	>=	9,601	0	0,8	8,848	9,641
C5	6,523	<=	6,561	0,038	0	6,523	M
C6	6,523	>=	6,523	0	0	5,77	6,561
C7	0,194	<=	0,194	0	-0,5	0,19	3,289
C8	0,194	>=	0,19	0,004	0	-M	0,194
C9	0	=	0	0	3,85	0	3,095
C10	0,287	<=	0,291	0,004	0	0,287	M
C11	0,287	>=	0,287	0	0,1	0	0,291
C12	0,018	<=	0,02	0,002	0	0,018	M
C13	0,018	>=	0,018	0	21,1	0	0,02
C14	3,095	<=	3,848	0,753	0	3,095	M
C15	3,095	>=	0	3,095	0	-M	3,095
C16	0	<=	3,848	3,848	0	0	M
C17	0	>=	0	0	0	-M	0
C18	12,121	<=	12,121	0	-0,7	11,368	15,216
C19	12,121	>=	10,583	1,538	0	-M	12,121
C20	0,271	<=	0,271	0	-0,45	0,267	3,366
C21	0,271	>=	0,267	0,004	0	-M	0,271
C22	0,964	<=	0,964	0	-0,45	0,96	4,059
C23	0,964	>=	0,96	0,004	0	-M	0,964
C24	0,291	<=	0,291	0	-0,8	0,287	3,386

C25	0,291	>=	0,287	0,004	0	-M	0,291
C26	0,036	<=	0,036	0	-0,4	0,034	3,131
C27	0,036	>=	0,034	0,002	0	-M	0,036
C28	57,762	<=	57,762	0	-0,5	57,684	60,857
C29	57,762	>=	57,684	0,078	0	-M	57,762
C30	0,191	<=	0,193	0,002	0	0,191	M
C31	0,191	>=	0,191	0	1	0	0,193
C32	0	=	0	0	0,95	0	3,095
C33	0	=	0	0	0,7	0	3,095
C34	0	=	0	0	19,1	0	3,095
C35	0	=	0	0	0,1	0	3,095
C36	0,007	<=	0,009	0,002	0	0,007	M
C37	0,007	>=	0,007	0	10,1	0	0,009
C38	100	=	100	0	0,9	96,905	100,753

Ek 2: Bulanık Modellerin Çözüm Değerleri(θ=0,6 için)

K1

Decision Variable	**Solution Value**	**Unit Cost or Profit c(j)**	**Total Contribution**	**Reduced Cost**	**Basis Status**	**Allowable Min. c(j)**	**Allowable Max. c(j)**
X1	9,8492	1,9	18,7135	0	basic	0,9	M
X2	25,5108	1,7	43,3684	0	basic	0,9	M
X3	2,7136	0,9	2,4422	0	basic	-M	0,9
X4	0	0,4	0	0	basic	-M	M
X5	0,9892	4,75	4,6987	0	basic	0,9	M
X6	0,2512	1	0,2512	0	basic	0,9	M
X7	0,0254	22	0,5588	0	basic	0,9	M
X8	1,4108	0,9	1,2697	0	basic	0,9	1
X9	0,2464	2,1	0,5174	0	basic	0,9	M
X10	4,288	0,2	0,8576	0	basic	-M	0,9
X11	0,1432	0,45	0,0644	0	basic	-M	0,9
X12	0,1552	0,45	0,0698	0	basic	-M	0,9
X13	0,2776	0,1	0,0278	0	basic	-M	0,9
X14	0	0,5	0	0	basic	-M	M
X15	43,1262	0,4	17,2505	0	basic	-M	0,9
X16	0,1408	1,9	0,2675	0	basic	0,9	M
X17	9,7566	1,85	18,0497	0	basic	0,9	M
X18	0,0244	1,6	0,039	0	basic	0,9	M
X19	0,116	20	2,32	0	basic	0,9	M
X20	0,9754	1	0,9754	0	basic	0,9	M
X21	0	11	0	0	basic	-M	M
θ	0,6	0	0	0	basic	-M	M
Objective	**Function**	**(Min.) =**	**111,7417**	**(Note:**	**Alternate**	**Solution**	**Exists!!)**

Constraint	**Left Hand Side**	**Direction**	**Right Hand Side**	**Slack or Surplus**	**Shadow Price**	**Allowable Min. RHS**	**Allowable Max. RHS**
C1	9,8414	<=	9,857	0,0156	0	9,8414	M
C2	9,857	>=	9,857	0	1	9,2966	9,8726
C3	25,4976	<=	25,524	0,0264	0	25,4976	M
C4	25,524	>=	25,524	0	0,8	24,9636	25,5504
C5	2,71	<=	2,71	0	0	2,7028	3,628
C6	2,7172	>=	2,71	0,0072	0	-M	2,7172
C7	0	=	0	0	-0,5	0	0,918
C8	0,9814	<=	0,997	0,0156	0	0,9814	M
C9	0,997	>=	0,997	0	3,85	0,4366	1,0126
C10	0,2434	<=	0,259	0,0156	0	0,2434	M
C11	0,259	>=	0,259	0	0,1	0,0078	0,2746
C12	0,0248	<=	0,026	0,0012	0	0,0248	M
C13	0,026	>=	0,026	0	21,1	0,0006	0,0272
C14	0,6716	<=	1,232	0,5604	0	0,6716	M
C15	2,15	>=	1,232	0,918	0	-M	2,15
C16	-0,1232	<=	0,616	0,7392	0	-0,1232	M

C17	0,616	>=	0,616	0	1,2	0,3696	1,3552
C18	4,066	<=	4,066	0	-0,7	3,622	4,984
C19	4,51	>=	4,066	0,444	0	-M	4,51
C20	0,142	<=	0,142	0	-0,45	0,1396	1,06
C21	0,1444	>=	0,142	0,0024	0	-M	0,1444
C22	0,148	<=	0,148	0	-0,45	0,1336	1,066
C23	0,1624	>=	0,148	0,0144	0	-M	0,1624
C24	0,277	<=	0,277	0	-0,8	0,2758	1,195
C25	0,2782	>=	0,277	0,0012	0	-M	0,2782
C26	0	=	0	0	-0,4	0	0,918
C27	43,119	<=	43,119	0	-0,5	43,1046	44,037
C28	43,1334	>=	43,119	0,0144	0	-M	43,1334
C29	0,1396	<=	0,142	0,0024	0	0,1396	M
C30	0,142	>=	0,142	0	1	0,0012	0,1444
C31	9,7512	<=	9,762	0,0108	0	9,7512	M
C32	9,762	>=	9,762	0	0,95	9,2016	9,7728
C33	0,0238	<=	0,025	0,0012	0	0,0238	M
C34	0,025	>=	0,025	0	0,7	0,0006	0,0262
C35	0,11	<=	0,122	0,012	0	0,11	M
C36	0,122	>=	0,122	0	19,1	0,006	0,134
C37	0,9748	<=	0,976	0,0012	0	0,9748	M
C38	0,976	>=	0,976	0	0,1	0,4156	0,9772
C39	0	=	0	0	10,1	0	0,918
C40	0,6	=	0,6	0	-1,3167	0	1
C41	100	=	100	0	0,9	99,082	100,5604

K2

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	10,5522	1,9	20,0492	0	basic	0,9	M
X2	22,9884	1,7	39,0803	0	basic	0,9	M
X3	2,9082	0,9	2,6174	0	basic	-M	0,9
X4	0	0,4	0	0	basic	-M	M
X5	0,8576	4,75	4,0736	0	basic	0,9	M
X6	0,2692	1	0,2692	0	basic	0,9	M
X7	0,0248	22	0,5456	0	basic	0,9	M
X8	1,5066	0,9	1,3559	0	basic	0,9	1
X9	0,264	2,1	0,5544	0	basic	0,9	M
X10	4,5936	0,2	0,9187	0	basic	-M	0,9
X11	0,1532	0,45	0,0689	0	basic	-M	0,9
X12	0,1658	0,45	0,0746	0	basic	-M	0,9
X13	0,2976	0,1	0,0298	0	basic	-M	0,9
X14	0	0,5	0	0	basic	-M	M
X15	46,2068	0,4	18,4827	0	basic	-M	0,9
X16	0,1508	1,9	0,2865	0	basic	0,9	M
X17	8,1302	1,85	15,0409	0	basic	0,9	M
X18	0,0204	1,6	0,0326	0	basic	0,9	M
X19	0,0972	20	1,944	0	basic	0,9	M
X20	0,8134	1	0,8134	0	basic	0,9	M
X21	0	11	0	0	basic	-M	M
θ	0,6	0	0	0	basic	-M	M
Objective	**Function**	**(Min.) =**	**106,2378**	**(Note:**	**Alternate**	**Solution**	**Exists!!)**

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	10,5444	<=	10,56	0,0156	0	10,5444	M
C2	10,56	>=	10,56	0	1	9,9546	10,5756
C3	22,9758	<=	23,001	0,0252	0	22,9758	M
C4	23,001	>=	23,001	0	0,8	22,3956	23,0262
C5	2,904	<=	2,904	0	0	2,8956	3,8826
C6	2,9124	>=	2,904	0,0084	0	-M	2,9124
C7	0	=	0	0	-0,5	0	0,9786
C8	0,8492	<=	0,866	0,0168	0	0,8492	M
C9	0,866	>=	0,866	0	3,85	0,2606	0,8828
C10	0,2614	<=	0,277	0,0156	0	0,2614	M
C11	0,277	>=	0,277	0	0,1	0,0078	0,2926

C12	0,0236	<=	0,026	0,0024	0	0,0236	M
C13	0,026	>=	0,026	0	21,1	0,0012	0,0284
C14	0,7146	<=	1,32	0,6054	0	0,7146	M
C15	2,2986	>=	1,32	0,9786	0	-M	2,2986
C16	-0,132	<=	0,66	0,792	0	-0,132	M
C17	0,66	>=	0,66	0	1,2	0,396	1,452
C18	4,356	<=	4,356	0	-0,7	3,8808	5,3346
C19	4,8312	>=	4,356	0,4752	0	-M	4,8312
C20	0,152	<=	0,152	0	-0,45	0,1496	1,1306
C21	0,1544	>=	0,152	0,0024	0	-M	0,1544
C22	0,158	<=	0,158	0	-0,45	0,1424	1,1366
C23	0,1736	>=	0,158	0,0156	0	-M	0,1736
C24	0,297	<=	0,297	0	-0,8	0,2958	1,2756
C25	0,2982	>=	0,297	0,0012	0	-M	0,2982
C26	0	=	0	0	-0,4	0	0,9786
C27	46,199	<=	46,199	0	-0,5	46,1834	47,1776
C28	46,2146	>=	46,199	0,0156	0	-M	46,2146
C29	0,1496	<=	0,152	0,0024	0	0,1496	M
C30	0,152	>=	0,152	0	1	0,0012	0,1544
C31	8,1254	<=	8,135	0,0096	0	8,1254	M
C32	8,135	>=	8,135	0	0,95	7,5296	8,1446
C33	0,0198	<=	0,021	0,0012	0	0,0198	M
C34	0,021	>=	0,021	0	0,7	0,0006	0,0222
C35	0,0924	<=	0,102	0,0096	0	0,0924	M
C36	0,102	>=	0,102	0	19,1	0,0048	0,1116
C37	0,8128	<=	0,814	0,0012	0	0,8128	M
C38	0,814	>=	0,814	0	0,1	0,2086	0,8152
C39	0	=	0	0	10,1	0	0,9786
C40	0,6	=	0,6	0	-1,3736	0	1
C41	100	=	100	0	0,9	99,0214	100,6054

K3

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	7,5856	1,9	14,4126	0	basic	-M	2,1
X2	19,1858	1,7	32,6159	0	basic	-M	2,1
X3	3,7118	0,9	3,3406	0	basic	-M	2,1
X4	0	0,4	0	0	basic	-M	M
X5	0	4,75	0	0	basic	-M	M
X6	0,2432	1	0,2432	0	basic	-M	2,1
X7	0,0224	22	0,4928	0	basic	2,1	M
X8	2,5792	0,9	2,3213	0	basic	-M	2,1
X9	1,0632	2,1	2,2327	0	basic	1,9	20
X10	3,1908	0,2	0,6382	0	basic	-M	2,1
X11	0,2432	0,45	0,1094	0	basic	-M	2,1
X12	0,3706	0,45	0,1668	0	basic	-M	2,1
X13	0,2432	0,1	0,0243	0	basic	-M	2,1
X14	0	0,5	0	0	basic	-M	M
X15	48,3656	0,4	19,3462	0	basic	-M	2,1
X16	0,1142	1,9	0,217	0	basic	-M	2,1
X17	7,2278	1,85	13,3714	0	basic	-M	2,1
X18	0,0436	1,6	0,0698	0	basic	-M	2,1
X19	0,0284	20	0,568	0	basic	2,1	M
X20	5,7814	1	5,7814	0	basic	-M	2,1
X21	0	11	0	0	basic	-M	M
θ	0,6	0	0	0	basic	-M	M

Objective Function (Min.) = 95,9516

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	7,576	<=	7,576	0	-0,2	7,5568	7,672
C2	7,5952	>=	7,576	0,0192	0	-M	7,5952
C3	19,172	<=	19,172	0	-0,4	19,1444	19,268
C4	19,1996	>=	19,172	0,0276	0	-M	19,1996
C5	3,707	<=	3,707	0	-1,2	3,6974	3,803
C6	3,7166	>=	3,707	0,0096	0	-M	3,7166

C7	0	=	0	0	-1,7	0	0,096
C8	0	=	0	0	2,65	0	0,096
C9	0,242	<=	0,242	0	-1,1	0,2396	0,338
C10	0,2444	>=	0,242	0,0024	0	-M	0,2444
C11	0,0218	<=	0,023	0,0012	0	0,0218	M
C12	0,023	>=	0,023	0	19,9	0,0006	0,0242
C13	1,612	<=	1,612	0	-1,2	-0,3224	1,708
C14	3,5464	>=	1,612	1,9344	0	-M	3,5464
C15	-0,3876	<=	2,418	2,8056	0	-0,3876	M
C16	2,514	>=	2,418	0,096	0	-M	2,514
C17	2,901	<=	2,901	0	-1,9	2,3214	2,997
C18	3,4806	>=	2,901	0,5796	0	-M	3,4806
C19	0,242	<=	0,242	0	-1,65	0,2396	0,338
C20	0,2444	>=	0,242	0,0024	0	-M	0,2444
C21	0,322	<=	0,322	0	-1,65	0,2248	0,418
C22	0,4192	>=	0,322	0,0972	0	-M	0,4192
C23	0,242	<=	0,242	0	-2	0,2396	0,338
C24	0,2444	>=	0,242	0,0024	0	-M	0,2444
C25	0	=	0	0	-1,6	0	0,096
C26	48,356	<=	48,356	0	-1,7	48,3368	48,452
C27	48,3752	>=	48,356	0,0192	0	-M	48,3752
C28	0,113	<=	0,113	0	-0,2	0,1106	0,209
C29	0,1154	>=	0,113	0,0024	0	-M	0,1154
C30	7,223	<=	7,223	0	-0,25	7,2134	7,319
C31	7,2326	>=	7,223	0,0096	0	-M	7,2326
C32	0,043	<=	0,043	0	-0,5	0,0418	0,139
C33	0,0442	>=	0,043	0,0012	0	-M	0,0442
C34	0,0278	<=	0,029	0,0012	0	0,0278	M
C35	0,029	>=	0,029	0	17,9	0,0006	0,0302
C36	5,779	<=	5,779	0	-1,1	5,7742	5,875
C37	5,7838	>=	5,779	0,0048	0	-M	5,7838
C38	0	=	0	0	8,9	0	0,096
C39	0,6	=	0,6	0	-3,0895	0	1,0709
C40	100	=	100	0	2,1	99,904	102,8056

K4

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	8,0912	1,9	15,3733	0	basic	-M	2,1
X2	17,2858	1,7	29,3859	0	basic	-M	2,1
X3	3,9594	0,9	3,5635	0	basic	-M	2,1
X4	0	0,4	0	0	basic	-M	M
X5	0	4,75	0	0	basic	-M	M
X6	0,2592	1	0,2592	0	basic	-M	2,1
X7	0,0224	22	0,4928	0	basic	2,1	M
X8	2,7504	0,9	2,4754	0	basic	-M	2,1
X9	1,1356	2,1	2,3848	0	basic	1,9	20
X10	3,4046	0,2	0,6809	0	basic	-M	2,1
X11	0,2592	0,45	0,1166	0	basic	-M	2,1
X12	0,3956	0,45	0,178	0	basic	-M	2,1
X13	0,2592	0,1	0,0259	0	basic	-M	2,1
X14	0	0,5	0	0	basic	-M	M
X15	51,5908	0,4	20,6363	0	basic	-M	2,1
X16	0,1212	1,9	0,2303	0	basic	-M	2,1
X17	5,7826	1,85	10,6978	0	basic	-M	2,1
X18	0,0356	1,6	0,057	0	basic	-M	2,1
X19	0,0224	20	0,448	0	basic	2,1	M
X20	4,6248	1	4,6248	0	basic	-M	2,1
X21	0	11	0	0	basic	-M	M
θ	0,6	0	0	0	basic	-M	M
Objective	**Function**	**(Min.) =**	**91,6304**				

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	8,081	<=	8,081	0	-0,2	8,0606	8,185
C2	8,1014	>=	8,081	0,0204	0	-M	8,1014

C3	17,272	<=	17,272	0	-0,4	17,2444	17,376
C4	17,2996	>=	17,272	0,0276	0	-M	17,2996
C5	3,954	<=	3,954	0	-1,2	3,9432	4,058
C6	3,9648	>=	3,954	0,0108	0	-M	3,9648
C7	0	=	0	0	-1,7	0	0,104
C8	0	=	0	0	2,65	0	0,104
C9	0,258	<=	0,258	0	-1,1	0,2556	0,362
C10	0,2604	>=	0,258	0,0024	0	-M	0,2604
C11	0,0218	<=	0,023	0,0012	0	0,0218	M
C12	0,023	>=	0,023	0	19,9	0,0006	0,0242
C13	1,719	<=	1,719	0	-1,2	-0,3438	1,823
C14	3,7818	>=	1,719	2,0628	0	-M	3,7818
C15	-0,4118	<=	2,579	2,9908	0	-0,4118	M
C16	2,683	>=	2,579	0,104	0	-M	2,683
C17	3,095	<=	3,095	0	-1,9	2,4758	3,199
C18	3,7142	>=	3,095	0,6192	0	-M	3,7142
C19	0,258	<=	0,258	0	-1,65	0,2556	0,362
C20	0,2604	>=	0,258	0,0024	0	-M	0,2604
C21	0,344	<=	0,344	0	-1,65	0,2408	0,448
C22	0,4472	>=	0,344	0,1032	0	-M	0,4472
C23	0,258	<=	0,258	0	-2	0,2556	0,362
C24	0,2604	>=	0,258	0,0024	0	-M	0,2604
C25	0	=	0	0	-1,6	0	0,104
C26	51,58	<=	51,58	0	-1,7	51,5584	51,684
C27	51,6016	>=	51,58	0,0216	0	-M	51,6016
C28	0,12	<=	0,12	0	-0,2	0,1176	0,224
C29	0,1224	>=	0,12	0,0024	0	-M	0,1224
C30	5,779	<=	5,779	0	-0,25	5,7718	5,883
C31	5,7862	>=	5,779	0,0072	0	-M	5,7862
C32	0,035	<=	0,035	0	-0,5	0,0338	0,139
C33	0,0362	>=	0,035	0,0012	0	-M	0,0362
C34	0,0218	<=	0,023	0,0012	0	0,0218	M
C35	0,023	>=	0,023	0	17,9	0,0006	0,0242
C36	4,623	<=	4,623	0	-1,1	4,6194	4,727
C37	4,6266	>=	4,623	0,0036	0	-M	4,6266
C38	0	=	0	0	8,9	0	0,104
C39	0,6	=	0,6	0	-3,2921	0,0057	1,0724
C40	100	=	100	0	2,1	99,896	102,9908

P1

Decision Variable	**Solution Value**	**Unit Cost or Profit c(j)**	**Total Contribution**	**Reduced Cost**	**Basis Status**	**Allowable Min. c(j)**	**Allowable Max. c(j)**
X1	10,2572	1,9	19,4887	0	basic	0,9	M
X2	13,7406	1,7	23,359	0	basic	0,9	M
X3	3,4948	0,9	3,1453	0	basic	-M	0,9
X4	2,2012	0,4	0,8805	0	basic	-M	0,9
X5	0	4,75	0	0	basic	-M	M
X6	0,2146	1	0,2146	0	basic	0,9	M
X7	0,0174	22	0,3828	0	basic	0,9	M
X8	2,342	0,9	2,1078	0	basic	0,9	1
X9	0,7336	2,1	1,5406	0	basic	0,9	M
X10	10,5254	0,2	2,1051	0	basic	-M	0,9
X11	0,189	0,45	0,085	0	basic	-M	0,9
X12	0,6474	0,45	0,2913	0	basic	-M	0,9
X13	0,2762	0,1	0,0276	0	basic	-M	0,9
X14	0,0292	0,5	0,0146	0	basic	-M	0,9
X15	55,1612	0,4	22,0645	0	basic	-M	0,9
X16	0,1638	1,9	0,3112	0	basic	0,9	M
X17	0	1,85	0	0	basic	-M	M
X18	0	1,6	0	0	basic	-M	M
X19	0	20	0	0	basic	-M	M
X20	0	1	0	0	basic	-M	M
X21	0,0064	11	0,0704	0	basic	0,9	M
θ	0,6	0	0	0	basic	-M	M
Objective	**Function**	**(Min.) =**	**76,089**	**(Note:**	**Alternate**	**Solution**	**Exists!!)**

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	10,2464	<=	10,268	0,0216	0	10,2464	M
C2	10,268	>=	10,268	0	1	9,6756	10,2896
C3	13,7292	<=	13,752	0,0228	0	13,7292	M
C4	13,752	>=	13,752	0	0,8	13,1596	13,7748
C5	3,484	<=	3,484	0	0	3,4624	5,0924
C6	3,5056	>=	3,484	0,0216	0	-M	3,5056
C7	2,2	<=	2,2	0	-0,5	2,1976	3,8084
C8	2,2024	>=	2,2	0,0024	0	-M	2,2024
C9	0	=	0	0	3,85	0	1,6084
C10	0,2092	<=	0,22	0,0108	0	0,2092	M
C11	0,22	>=	0,22	0	0,1	0,0054	0,2308
C12	0,0168	<=	0,018	0,0012	0	0,0168	M
C13	0,018	>=	0,018	0	21,1	0,0006	0,0192
C14	1,2416	<=	1,834	0,5924	0	1,2416	M
C15	3,4424	>=	1,834	1,6084	0	-M	3,4424
C16	-0,3668	<=	1,834	2,2008	0	-0,3668	M
C17	1,834	>=	1,834	0	1,2	1,2416	3,4424
C18	10,085	<=	10,085	0	-0,7	9,4926	11,6934
C19	10,9658	>=	10,085	0,8808	0	-M	10,9658
C20	0,183	<=	0,183	0	-0,45	0,171	1,7914
C21	0,195	>=	0,183	0,012	0	-M	0,195
C22	0,642	<=	0,642	0	-0,45	0,6312	2,2504
C23	0,6528	>=	0,642	0,0108	0	-M	0,6528
C24	0,275	<=	0,275	0	-0,8	0,2726	1,8834
C25	0,2774	>=	0,275	0,0024	0	-M	0,2774
C26	0,028	<=	0,028	0	-0,4	0,0256	1,6364
C27	0,0304	>=	0,028	0,0024	0	-M	0,0304
C28	55,007	<=	55,007	0	-0,5	54,6986	56,6154
C29	55,3154	>=	55,007	0,3084	0	-M	55,3154
C30	0,1626	<=	0,165	0,0024	0	0,1626	M
C31	0,165	>=	0,165	0	1	0,0012	0,1674
C32	0	=	0	0	0,95	0	1,6084
C33	0	=	0	0	0,7	0	1,6084
C34	0	=	0	0	19,1	0	1,6084
C35	0	=	0	0	0,1	0	1,6084
C36	0,0058	<=	0,007	0,0012	0	0,0058	M
C37	0,007	>=	0,007	0	10,1	0,0006	0,0082
C38	0,6	=	0,6	0	-2,9224	0,0007	1
C39	100	=	100	0	0,9	98,3916	100,5924

P2

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	8,647	1,9	16,4293	0	basic	0,9	M
X2	9,609	1,7	16,3353	0	basic	0,9	M
X3	6,5306	0,9	5,8775	0	basic	0,9	M
X4	0,1932	0,4	0,0773	0	basic	-M	0,9
X5	0	4,75	0	0	basic	-M	M
X6	0,2878	1	0,2878	0	basic	0,9	M
X7	0,0184	22	0,4048	0	basic	0,9	M
X8	2,6266	0,9	2,3639	0	basic	0,5	0,9
X9	0,7696	2,1	1,6162	0	basic	0,9	M
X10	11,8134	0,2	2,3627	0	basic	-M	0,9
X11	0,2702	0,45	0,1216	0	basic	-M	0,9
X12	0,9632	0,45	0,4334	0	basic	-M	0,9
X13	0,2902	0,1	0,029	0	basic	-M	0,9
X14	0,0356	0,5	0,0178	0	basic	-M	0,9
X15	57,7464	0,4	23,0986	0	basic	-M	0,9
X16	0,1914	1,9	0,3637	0	basic	0,9	M
X17	0	1,85	0	0	basic	-M	M
X18	0	1,6	0	0	basic	-M	M
X19	0	20	0	0	basic	-M	M
X20	0	1	0	0	basic	-M	M
X21	0,0074	11	0,0814	0	basic	0,9	M
θ	0,6	0	0	0	basic	-M	M

Objective	Function	(Min.) =	69,9003	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
Constraint	**Left Hand Side**	**Direction**	**Right Hand Side**	**Slack or Surplus**	**Shadow Price**	**Allowable Min. RHS**	**Allowable Max. RHS**
C1	8,635	<=	8,659	0,024	0	8,635	M
C2	8,659	>=	8,659	0	1	8,2072	8,683
C3	9,597	<=	9,621	0,024	0	9,597	M
C4	9,621	>=	9,621	0	0,8	9,1692	9,645
C5	6,5192	<=	6,542	0,0228	0	6,5192	M
C6	6,542	>=	6,542	0	0	6,0902	6,5648
C7	0,192	<=	0,192	0	-0,5	0,1896	2,049
C8	0,1944	>=	0,192	0,0024	0	-M	0,1944
C9	0	=	0	0	3,85	0	1,857
C10	0,2866	<=	0,289	0,0024	0	0,2866	M
C11	0,289	>=	0,289	0	0,1	0,0012	0,2914
C12	0,0178	<=	0,019	0,0012	0	0,0178	M
C13	0,019	>=	0,019	0	21,1	0,0006	0,0202
C14	1,4722	<=	1,924	0,4518	0	1,4722	M
C15	3,781	>=	1,924	1,857	0	-M	3,781
C16	-0,3848	<=	1,924	2,3088	0	-0,3848	M
C17	1,924	>=	1,924	0	1,2	1,4722	3,781
C18	11,352	<=	11,352	0	-0,7	10,9002	13,209
C19	12,2748	>=	11,352	0,9228	0	-M	12,2748
C20	0,269	<=	0,269	0	-0,45	0,2666	2,126
C21	0,2714	>=	0,269	0,0024	0	-M	0,2714
C22	0,962	<=	0,962	0	-0,45	0,9596	2,819
C23	0,9644	>=	0,962	0,0024	0	-M	0,9644
C24	0,289	<=	0,289	0	-0,8	0,2866	2,146
C25	0,2914	>=	0,289	0,0024	0	-M	0,2914
C26	0,035	<=	0,035	0	-0,4	0,0338	1,892
C27	0,0362	>=	0,035	0,0012	0	-M	0,0362
C28	57,723	<=	57,723	0	-0,5	57,6762	59,58
C29	57,7698	>=	57,723	0,0468	0	-M	57,7698
C30	0,1908	<=	0,192	0,0012	0	0,1908	M
C31	0,192	>=	0,192	0	1	0,0006	0,1932
C32	0	=	0	0	0,95	0	1,857
C33	0	=	0	0	0,7	0	1,857
C34	0	=	0	0	19,1	0	1,857
C35	0	=	0	0	0,1	0	1,857
C36	0,0068	<=	0,008	0,0012	0	0,0068	M
C37	0,008	>=	0,008	0	10,1	0,0006	0,0092
C38	0,6	=	0,6	0	-2,9398	0	1
C39	100	=	100	0	0,9	98,143	100,4518