

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**$\Gamma_0(n)$ GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARINDAKİ \widehat{Q} KÖŞELİ
MİNİMAL UZUNLUKLU EĞRİLER**

DOKTORA TEZİ

Ali Hikmet DEĞER

**KASIM 2011
TRABZON**

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**$\Gamma_0(n)$ GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARINDAKİ \hat{Q} KÖŞELİ
MİNİMAL UZUNLUKLU EĞRİLER**

Ali Hikmet DEĞER

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 28.10.2011
Tezin Savunma Tarihi : 18.11.2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Trabzon 2011

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalında
Ali Hikmet DEĞER Tarafından Hazırlanan

**$\Gamma_0(n)$ GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARINDAKİ \mathbb{Q} KÖŞELİ
MİNİMAL UZUNLUKLU EĞRİLER**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 01/11/2011 gün ve 1428 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda**

DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
Üye : Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV
Üye : Prof. Dr. Ekrem YANMAZ
Üye : Prof.Dr. Abdullah ÇAVUŞ
Üye : Prof.Dr. Fatih NURAY

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Γ Modüler grubunun alt yörüngesel graflarının incelenmesi ve bu alt yörüngesel graflardan en temeli olan Farey grafinin bilgisayar programı vasıtası ile çizdirilmesi amacı ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora tez çalışması olarak yapılmıştır.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeğiyle, öneri ve yönlendirmeleriyle önemli katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ' a en içten dileklerle saygı ve şükranlarımı sunuyorum. Aynı zamanda bu tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım, Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV ve Prof. Dr. Ekrem YANMAZ' a teşekkürü bir borç bilirim. Yine öğrenim sürecinde katkı sağlayan matematik bölümündeki tüm değerli öğretim üyeleri ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Yetişmemizdeki katkısından dolayı Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim dalı başkanı sayın Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ' a ve çalışmanı olduğum "Karadeniz Teknik Üniversitesi BAP projesi; Minimal Uzunluklu Hiperbolik Devreler; Proje No:2008.111.03.1" adlı proje ile destek veren KTÜ BAP birimine ayrıca teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve sevgili eşim Kübra'ya çok teşekkür ederim.

Ali Hikmet DEĞER
Trabzon 2011

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “ $\Gamma_0(n)$ GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARINDAKİ \mathbb{Q} KÖŞELİ MİNİMAL UZUNLUKLU EĞRİLER” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ‘ ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 18/11/2011

Ali Hikmet DEĞER

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	III
TEZ BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
SEMBOLLER DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Sürekli Kesirler	2
1.3. Hiperbolik Geometri	6
1.3.1. Klein (veya Beltrami-Klein) Modeli	9
1.3.2. Poincare Daire Modeli.....	9
1.3.3. Poincare Yarı Düzlem Modeli	11
1.4. Grup Topolojisi	13
1.4.1. Tanım (Topolojik Grup)	13
1.4.2. Tanım (Topolojik Dönüşüm Grubu)	13
1.4.3. Tanım (Yörünge).....	13
1.4.4. Tanım (Sabitleyen)	14
1.5. Γ Modüler Grubu	15
1.6. Γ Modüler Grubunun Sayısal Özellikleri	17
1.7. Γ Modüler Grubunun $\hat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ Üzerindeki Hareketi	17
1.8. Graf Teorisi.....	24

1.9.	Γ Modüler Grubunun $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları	25
1.10.	Farey Grafi.....	30
1.11.	$\mathbf{G}_{u,n}$ ve $\mathbf{F}_{u,n}$ Grafları.....	32
1.12.	Sürekli Kesirlerin Temel Özellikleri	38
1.12.1.	Yakınsaklık	42
1.12.2.	Yinelenme Bağlıntıları	43
1.12.3.	Determinant Formülü	46
1.12.4.	Sürekli Kesirlerin Matris Bağlantısı.....	47
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR.....	49
2.1.	Farey Grafının Bilgisayar ile Çizdirilmesi	49
2.2.	$\Gamma_0(n)$ Grubunun Alt Yörüngesel Grafları ile Sürekli Kesirler	54
2.3.	Minimal Uzunluklu Hiperbolik Yollar ve Sürekli Kesirler	60
2.4.	Yinelenme Bağlıntıları ile Köşelerin Belirlenmesi	70
3.	İRDELEME	75
4.	SONUÇLAR	76
5.	ÖNERİLER.....	77
6.	KAYNAKLAR	78

ÖZGEÇMİŞ

Doktora Tezi

ÖZET

$\Gamma_0(n)$ GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARINDAKİ $\hat{\mathbb{Q}}$ KÖŞELİ MİNİMAL
UZUNLUKLU EĞRİLER

Ali Hikmet DEĞER

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2011, 80 Sayfa

Bu tezde esas amaç köşeleri genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinde olan minimal uzunluklu eğrileri veren sürekli kesirleri incelemek ve bu köşeleri sağlayan Möbiüs grup elemanlarının karakteri hakkında esaslı bilgi vermektir. Bu çalışma ile genel amaç ayrık grupların simgelerini bulma problemine, alt yörüngesel graflardaki devre uzunlukları ile çözüm bulmaktır.

Birinci bölümde konu ile ilgili genel bilgilerden bahsedilerek literatürdeki bazı önemli teorem ve sonuçların ispatları genişletilerek verilmiştir. Ayrıca, “sürekli kesir”, “hiperbolik geometri” ve “graf teorisi” kavramları ile ilgili temel bilgiler açıklayıcı örnekler ile verilmiştir.

İkinci bölümde ilk olarak Farey grafini bilgisayar programı ile çizmek için gereken programlama kodları ve grafiksel arayüz verilmiştir. Daha sonra minimal uzunluklu hiperbolik yolları elde etmek için Γ Modüler grubunun kongrüans alt grubu olan $\Gamma_0(n)$ alt grubunun alt yörüngesel grafları ile ilgili bazı önemli sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Farey grafi, Farey dizileri, Modüler grup, Hiperbolik geometri, Graf teorisi, Alt yörüngesel graflar, Sürekli kesirler

PhD. Thesis

SUMMARY

CURVES OF MINIMAL LENGTH WITH \mathbb{Q} VERTEX ON SUBORBITAL GRAPHS OF THE
GROUP $\Gamma_0(n)$

Ali Hikmet DEĞER

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2011, 80 Pages

Major aim of the present thesis is to investigate continued fractions given curves of minimal length which their vertices are on the set of extended rational numbers and to give detailed knowledge about characteristics of Möbius group elements provided these vertices. General aim with the study is to find solution to finding problem of signatures of discrete groups with circuit lengths on suborbital graphs.

In the first chapter, general informations about the subject were discussed and proofs of some important theorems and conclusions in the literature were given detailed. In addition, fundamental informations on concepts of “continued fractions”, “hyperbolic geometry” and “graph theory” were given with revealing examples.

In the second chapter, firstly, to draw the Farey graph with the computer program, required program codes and graphical user interface were given. Then, to have hyperbolic paths of minimal lengths, some important results about suborbital graphs for congruence subgroup $\Gamma_0(n)$ of the Modular group Γ were given.

Key Words: Farey graphs, Farey sequences, Modular group, Hyperbolic geometry, Graph theory, Suborbital graphs, Continued fractions

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.	Paralel ve ultra paralel doğrular [16]	8
Şekil 2.	Klein (açık) dairesi [16]	9
Şekil 3.	Poincare (açık) dairesi [16]	10
Şekil 4.	Escher in “Melekler&Şeytanlar” resmi [16]	10
Şekil 5.	Eşdeğer üçgenler [16]	11
Şekil 6.	Poincàre yarı düzlem modeli [16].....	11
Şekil 7.	Bir yarı düzlem döşemesi [16].....	12
Şekil 8.	$m = 4$ ‘e karşılık gelen $F = G_{1,1}$ Farey grafi [5]	31
Şekil 9.	$G_{1,2}$ grafi [5]	34
Şekil 10.	$F_{1,2}$ grafi [5]	35
Şekil 11.	$m = 4$ ‘e karşılık gelen $F = G_{1,1}$ Farey grafinin $[0,1]$ aralığındaki resmi.....	51
Şekil 12.	$m = 20$ ‘ye karşılık gelen $F = G_{1,1}$ Farey grafinin $[0,1]$ aralığındaki resmi.....	52
Şekil 13.	K kapalı hiperbolik eğrisi	60
Şekil 14.	$F_{u,n}$ grafinde minimal uzunluklu hiperbolik yollar.....	66

SEMBOLLER DİZİNİ

Gx	: x in G yörüngesi
S_x	: x noktasının sabitleyeni
Γ	: Modüler grup
$\Gamma_0(n)$: Modüler grubun $c \equiv 0 \pmod{n}$ olan alt grubu
\mathbb{Q}	: Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
\mathbb{H}	: Üst yarı düzlemi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{Z}	: Tam sayılar kümesi
∞	: sonsuz
Γ_∞	: ∞ un Γ Modüler grubundaki sabitleyeni
$PSL(2, \mathbb{R})$: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$SL(2, \mathbb{Z})$: Katsayıları tamsayı olan lineer matrislerin grubu
$[\alpha]$: Alfa bloğu
F	: Farey grafi
F_m	: Farey dizisi
$O(\alpha, \beta)$: (α, β) nın yörüngesi
$\gamma \rightarrow \delta$: γ dan δ ya (yönlendirilmiş) bir kenar
K	: Sürekli kesirler için toplam sembolü
$b_0 + \mathbf{K}(a_m/b_m)$: Sürekli kesirin toplamsal sembol ile gösterimi
$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$: Sürekli kesirin klasik gösterimi
f_n	: Sürekli kesir için klasik yaklaşım
F_n	: n . Fibonacci sayısı
\approx	: G-invaryant denklik bağıntısı
$[G, X]$: Topolojik dönüşüm grubu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

1967’ de Sims [1] bir Ω kümesi üzerinde hareket eden bir G grubunun alt yörüngesel graflarını araştırdı. Bu grafların G nin indirgenmiş otomorfizmaları üzerinde, Ω -köşe kümeli yönlendirilmiş graflar olduğunu gösterdi. Daha sonra Neumann [2] ve ayrıca Biggs ve White [3] bunu sonlu gruplara uyguladı. Öyle ki elde edilen hiperbolik eğriler, hatta hiperbolik poligonların, genişletilmiş rasyonel sayı köşeli minimal uzunluklu eğriler olup olmadığı ve bunun sürekli kesirlere genişletilebilme problemi ile karşı karşıya gelindi.

Özellikle 1973 yılında bağımsız olarak Bernd Fisher ve Robert L. Griess tarafından

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

mertebeli basit sonlu grubun varlığı tartışması ortaya atılmış ve varlığı 1982 yılında Robert L. Griess [4] tarafından ispatlanmıştır. Bu elde edilen bilgiler kongrüans alt grupların önemini arttırmıştır.

1988 yılında Jones, Singerman ve Wicks [5] modüler grup ve geliştirilmiş Farey graflarını inceledi. Bu çalışmada, Γ modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketini permütasyon grup teorisi açısından inceleyip, bu hareketten oluşan grafların, Farey grafi ve Farey dizileri ile ilişkisini ve bazı yüzey döşemeleriyle ilgisini araştırdılar. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde, transitif fakat imprimitif olarak hareket ettiğini gösterip, alt yörüngesel graflarını çalıştılar ve her $n \in \mathbb{N}$ ve her $u \in U_n$ birimi için Γ nın hareketi ile oluşan $\mathbf{G}_{u,n}$ grafini elde ettiler. Bu grafların en basiti olan $\mathbf{G}_{1,1} := \mathbf{F}$ Farey grafini incelediler. Daha sonra \mathbf{F} nin özelliklerinin diğer alt yörüngesel graflara nasıl genişletilebileceğini araştırdılar ve her bir $\mathbf{G}_{u,n}$ grafinin, $\psi(n)$ tane $\mathbf{F}_{u,n}$ alt grafinin izomorfik kopyalarının ayrık birleşimleri şeklinde olduğunu gösterdiler. Buradan \mathbf{F} nin bir alt grafına izomorf olan $\mathbf{F}_{u,n}$ grafinin, Γ modüler grubundaki indeksi $\psi(n)$ olan $\Gamma_0(n)$ kongrüans alt grubu altında invariant kalan $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ üst yarı düzleminin

bir $\mathbf{T}_{u,n}$ döşemesine indirgendigini gösterdiler. \mathbf{F} Farey grafi, üçgensel devreler ile yönlendirilmemiş bağlantılı bir graftır. Bununla birlikte $\mathbf{F}_{u,n}$ graflarının benzer özelliklerini bulmak kolay değildir. Fakat bu çalışmada, $\mathbf{F}_{u,n}$ grafi bağlantılıdır $\Leftrightarrow n \leq 4$; $\mathbf{F}_{u,n}$ grafi yönlendirilmemiştir $\Leftrightarrow u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ve $\mathbf{F}_{u,n}$ grafi üçgen içerir $\Leftrightarrow u^2 \pm u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ şartları ispatlanmıştır. Son olarak, $\mathbf{F}_{u,n}$ grafi bir ormandır $\Leftrightarrow u^2 \pm u + 1 \not\equiv 0 \pmod{n}$, yani, $\mathbf{F}_{u,n}$ grafi üçgen içermezse ormandır konjektürü M. Akbaş [6] tarafından ispatlandı. Bu makalede bir sonuç olarak elde edilen $\Gamma_0(n)$ nin özel bir elemanı vasıtasıyla bir sürekli kesir ortaya konulmuştur.

\mathbf{F} Farey grafinin kenarlarının \mathbb{H} üst yarı düzlemindeki hiperbolik geodezikler olarak gösterimi ile \mathbb{H} nin bir $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{1,1}$ Γ –invariant üçgensel döşemesi elde edilir ki bu ikili kvadratik formlarla ilişkili Hurwitz [12] tarafından verilen birim dairenin Farey döşemesine izomorftur. Singerman [13] \mathbf{T} nin yüzeyler üzerindeki üçgensel dönüşümler için evrensel bir nesne olduğu gösterdi ve ayrıca bu geodeziklerin ergodik özellikleri sürekli kesirler açısından Series’in [14] çalışmasında ve (\mathbf{T}^* duali üzerinden) büyük çevreli grafların inşası üzerine Biggs’in [15] çalışmasında önemli bir rol oynadı.

Bu tezde hiperbolik poligonlarla ilişkilendirilen Möbiüs grup elemanları yardımı ile elde edilebilecek, sayılar teorisinde genişçe yer tutan, sürekli kesirlerin(continued fractions) karakteri araştırılacak ve yardımcı olan Möbiüs grup elemanlarının cinsi hakkında bilgi verilecektir.

Aslında bu çalışmalar matematiğin pek çok dalının alışılmış olmayan bir bileşkesidir (örneğin; sayılar teorisi, grup teorisi, graf teorisi, hiperbolik geometri gibi). Dolayısıyla bu alanlarda üzerinde çalıştığımız konuyla ilgili temel bilgileri vermek yerinde olacaktır.

1.2. Sürekli Kesirler

Sürekli kesirlerin kökenini kesin olarak belirlemek zordur. Bu nedenle son iki bin yıldır matematikte bu kesirlerin örneklerini bulabiliriz, fakat gerçekte temellerinin bin altı yüzlü yılların sonu ve bin yedi yüzlü yılların başında atılmış olduğunu görebiliriz.

Bin yıldan daha uzun bir süre sürekli kesirleri kullanan herhangi bir çalışma ancak çok özel örneklerle sınırlı kalmıştır. Hintli matematikçi Aryabhata (ö. 550) lineer bilinmeyenli bir denklemi çözmek için bir sürekli kesir kullandı. Onun sürekli kesirleri kullanımı bu yöntemi genelleştirmekten ziyade özel örneklerle sınırlıdır. Yunanlıların

Öklid Algoritması ile ilgili bilgileri olduğu halde bunu sürekli kesirleri oluşturmakta kullandıklarına dair kanıt yoktur.

İlk bilinen sürekli kesirler 1572 de R. Bombelli (1526-1573) tarafından verilen $\sqrt{13}$ reel değerine yaklaşım ifadesi olan

$$3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}} \quad (1)$$

dir.

Bu ise

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \dots \quad (2)$$

ifadesinin özel bir halidir. (2) ifadesinin ikinci özel şekli 1613 de

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8}}} \quad (3)$$

olarak P. Cataldi (1548-1626) tarafından verildi. Bu ifadenin sadeleştirilmiş halini ise

$$4 + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} \quad (4)$$

olarak verdi. Ayrıca Cataldi (2) formulünü de tartıştı.

1625 de D. Schwenter ve onun ölümünden sonra yayımlanmış bir çalışmasında C. Huygens (1629-1695) küçük sayıları içeren kesirler vasıtası ile büyük kesirleri yaklaşık olarak ifade ederek sonlu düzgün sürekli kesirlerin yaklaşımlarını göz önüne aldılar. Dolayısıyla Schwenter (çok kullanışlı olmayan bir notasyonla)

$$\frac{177}{233} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \quad (5)$$

olduğunu gösterdi ve Huygens (dişli çarkların yapımı ile ilgili bir problemde)

$$\frac{77708431}{2640858} = 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \dots \quad (6)$$

olduğunu buldu. Huygens yaklaşımların sırasıyla bu sayıdan daha büyük ve daha küçük olduğu ve bunların en iyi rasyonel yaklaşımı sağladıklarından habersizdi.

İlk sonsuz sürekli kesir genişlemesi Londra Kraliyet Cemiyetinin ilk başkanı olan Lord W. Brouncker (1620-1688) den kaynaklanır. 1659 civarında ispatsız olarak

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)^2}{2} \right) \quad (7)$$

verdi. Brouncker muhtemelen bu formülü J. Wallis in (1616-1703) $\frac{\pi}{2}$ için sonsuz çarpım formülünden üretti. Wallis 1656 yılında *Arithmetica Infinitorum* adlı kitabında bu formülü

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \dots}$$

olarak vermiştir.

L. Euler (1707-1783) 1737 den başlayarak sürekli kesirlere sistematik bir gelişme sağladı. Çalışmasında sürekli kesirlerin hem sayılar teorisinde hem de analizde kullanılabileceğini açıkça gösterdi.

19. yüzyılda sonsuz işlemlerin yakınsaklık davranışına ait ciddi araştırmalara başlandı. Bir sürekli kesir için ilk kabul edilebilir yakınsaklık tanımını “Seidel, L., *Untersuchungen über die Konvergenz and divergenz der Kettenbrüche, Habilschrift München; 1846*” adlı çalışmasında Seidel yaptı.

“Stern, M. A., *Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung, J. Reine Angew. Math. 10,11; 1832*” adlı çalışmasında Stern, Seidel den önce sonlu sınırlar arasında salınan sürekli kesirlerin yakınsak olduğunun göz önüne alınması gerektiğini öne sürmüştü. Daha sonra “Stern, M. A., *Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruchs, J. Reine Angew. Math. 37; 1848*” adlı çalışmasında bunu Seidel’in formülüne uyguladı. Seidel ve Stern bundan sonra reel elemanları olan sürekli kesirlerin yakınsaklık ve ıraksaklık kriterlerini geliştirmeye devam ettiler.

Karmaşık elemanlı sürekli kesirler için Worpitzky'nin “Worpitzky, J., *Untersuchungen über die Entwicklung der monodromen und monogenen Funktionen durch Kettenbrüche, Friedrichs-Gymnasium und Realschule Jahresbericht, Berlin, 1865, pp.3-39.*” adlı çalışmasındaki

$$\text{“ } |a_n| \leq \frac{1}{4} \text{ ve } n \geq 1 \Rightarrow \mathbf{K}(a_n/b_n) \text{ yakınsaktır “}$$

sonucu ilktir. Worpitzky teoremi Berlin deki “*Friedrichs-Gymnasium und Realschule*” ‘nin yıllık programında basıldı ve bundan dolayı ilgi çekmemiş olması sürpriz değildir.

Bu teorem daha sonra Pringsheim tarafından “*Pringsheim, A., Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche, S.-B. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. 463,488; 1899*” adlı çalışmasında ve Van Vleck tarafından “*Van Vleck, E.B., On the convergence and Charecter of the Continued Fraction $a_1/z_1 + a_2/z_1 + a_3/z_1 + \dots$, Trans. Amer. Math. Soc. 2; 476-483; 1901*” adlı çalışmasında yeniden keşfedildi. 1905 de sadece Van Vleck in “*Van Vleck, E. B., Selected Topics in the Theory of Divergent Series and of Continued Fractions, Boston Colloquium, Macmillan, New York, 1905, pp. 75-187*” adlı çalışmasından Worpitzky nin makalesinden etkilendiği gözlemlenebilir. Bu makale açık bir şekilde Worpitzky nin tezi idi. Ayrıca Thomê nin sonucundan iki yıl önce açıklanan Gauss sürekli kesirlerinin yakınsaklığının ispatını da içerir.

Daha sonraki önemli katkılar A. Pringsheim (1850-1941) ve Van Vleck tarafından yapıldı. 1898 de Pringsheim

$$\text{“ } |b_n| \geq |a_n| + 1 \text{ ve } n \geq 1 \Rightarrow \mathbf{K}(a_n/b_n) \text{ yakınsaktır “}$$

olduğunu gösterdi. Bundan Worpitzky nin

$$\text{“ } |b_n| \geq 2 \text{ ve } n \geq 1 \Rightarrow \mathbf{K}(1/b_n) \text{ yakınsaktır”}$$

sonucu da çıkarılabilir. Daha zayıf bir sonuç Pincherle(1853-1936) tarafından “*Pincherle, S., Rend. Acad. dei Lincei, 4; 640; 1889*” adlı çalışmasında

“ $|b_n| \geq 2 + \varepsilon, \varepsilon > 0$ ve $n \geq 1 \Rightarrow \mathbf{K}(1/b_n)$ yakınsaktır”

şeklinde daha önceki yıllarda verilmişti. S. Pincherle sürekli kesir teorisine birçok katkıları olan matematikçidir. Bu katkılardan bir tanesi sürekli kesirlerle ilişkili yakınsaklıkta üç terimli yinelenme bağıntılarının çözümlerini veren bir sonuçtur.

Van Vleck “*Van Vleck, E. B., On the Convergence of Continued Fractions with Complex Elements, Trans. Amer. Math. Soc., 2; 215-233; 1901*” adlı çalışmasında

“ $|\arg b_n| \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \varepsilon > 0, n \geq 1$ ve $\sum |b_n| = \infty \Rightarrow \mathbf{K}(1/b_n)$ yakınsaktır”

olduğunu ispatladı.

Yakınsaklık teorisine, özellikle limit-periyodik sürekli kesirlere daha ileri katkılar Pringsheim ile, onun öğrencisi ve daha sonra Münihde Profesör olan O. Perron (1880-1973) ve O. Szasz (1884-1952) tarafından verildi. Özellikle Perron’un bu konuya orijinal katkıları daha ön plandaydı. Kitabının üç baskısı “*Die Lehre von den Kettenbrüchen [1913; 1929; 1954, 1957]*” sadece bu konudaki ilgili olan şeyleri belirtmekle kalmadı aynı zamanda açıklayıcı bir şekilde modelleme de sağladı.

1.3. Hiperbolik Geometri

1700 ün ortalarında Girolamo Saccheri Öklid in beşinci postülatını ispatlamak için dikdörtgenlerin mevcut olduğunu gösteremediğinde, farklı bir hipotez olarak, günümüzde Hiperbolik Paralel Postülatı olarak bilinen *çoklu paraleller hipotezi* ni keşfederek başlamaya karar verdi. Onun bu keşif ile amacı bu hipotezin ilk dört postülatından veya bundan ortaya çıkan teoremlerden biri ile bir çelişkisi olduğunu göstermekti (böylece Öklid in beşinci postülatı gerçek olmalı). Fakat ne yazık ki herhangi bir çelişki gösteremedi.

Saccheri nin çalışmasını gözden geçiren diğer matematikçiler, 1800 lü yılların ilk yarısında çoklu paraleller hipotezinden köken alan mükemmel varoluş sistemini keşfettiler ve böylece hiperbolik geometri nin ilk olarak çalışılması başlamış oldu. Karl Friedrich Gauss (Alman), Jonas Bolyai (Macar) ve Nicolai Lobachevski (Rus) gibi bilim adamlarının her biri bağımsız bir şekilde bu hipotezi keşfederek birçok benzer sonucu çıkardılar.

Kısa bir süre sonra Fransız matematikçi Poinçare ve İtalyan matematikçi Beltrami hiperbolik geometriyi görsel hale getirmeye yardımcı çeşitli modeller geliştirdiler. Her ikisine atfedilen bir model Beltrami-Poinçare üst yarı düzlem modelidir. Bu model hiperbolik paraleller postülatını destekler ve diğerleri tarafından geliştirilen sonuçları resimlemek için değerlidir.

İki temel Öklid-olmayan geometri şekli vardır: küresel ve hiperbolik. Küresel geometriyi resmetmek kolaydır. $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ küresini göz önüne alalım. Dolayısıyla geodezikler (yerel olarak uzaklığı minimum hale getiren yollar) basitçe büyük çemberlerdir. Diğer bir deyimle S^2 üzerindeki P ve Q noktaları için, bu noktalar arasındaki S^2 deki en kısa yol P ve Q yu birleştiren büyük bir çember üzerinde bulunan yaydır ($P \neq Q$ olmak üzere bu büyük çember tektir) ve S^2 deki P ve Q arasındaki uzaklık, bu yayın (Öklid) uzunluğudur.

Hiperbolik geometrinin resmedilmesi biraz daha zordur. Belki de başlangıçta hiperbolik düzlemi görsel yapmak için en kolay yol; iki yüzlü $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ hiperboloidinin bir yüzüdür. Ancak bu birçok amaçla çalışmak için en kolay model değildir. Öklid düzleminde olduğu gibi hiperbolik düzlemin de ötelenmeleri, dönmeleri ve yansımaları vardır. Kullanımdaki en yaygın iki model (Poinçare den sonra adlandırılan) Poinçare daire modeli (Beltrami ye göre) ve Poinçare üst yarı düzlem modeli (Riemann a göre) dir. Daire modelini daha kolay görsel yapmak için dönme avantajı ve üst yarı düzlem modelini ise daha kolay görsel yapmak için öteleme avantajı vardır. Modüler formlarla çalışırken daima üst yarı düzlem modeli kullanılır.

Öklid düzlemi ve hiperbolik düzlem uzaklık, açı ve süreklilik vb. gibi pek çok aynı kavrama sahiptir. Her ikisi de aşağıda sıralananlar gibi aynı özellikleri gösterir:

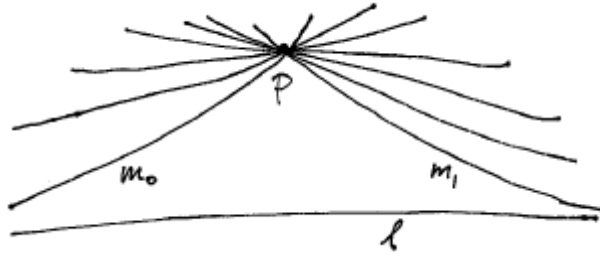
- İki farklı P ve Q noktası verildiğinde, her ikisinden geçen sadece bir doğru vardır.
- İki farklı P ve Q noktası verildiğinde P ve Q nun her ikisinden aynı uzaklıkta olan bütün noktalar dizisi bir doğrudur.
- Her ℓ doğrusu düzlemi iki bağlantılı bileşene böler. P ve Q , ℓ doğrusu üzerinde olmayan iki nokta olsun. PQ doğru parçası ℓ ile kesişmesi veya kesişmemesine göre, P ve Q nun ℓ nin zıt tarafları üzerinde veya aynı taraf üzerinde olduğunu söyleyebiliriz. ℓ nin aynı tarafı üzerinde olan iki noktanın bağıntısı, iki denklik sınıfı ile birlikte bir denklik bağıntısıdır.

- Benzer şekilde, ℓ doğrusu üzerindeki her P noktası ℓ nin diğer noktalarını iki sınıfa ayırır: P nin bir tarafı üzerinde olanlar ve P nin diğer tarafı üzerinde olanlar.
- ℓ doğrusu üzerindeki her bir P noktası ve $d > 0$ herhangi bir pozitif gerçel sayı olarak alındığında, ℓ üzerinde P den d uzaklığında tam iki nokta vardır, bunlardan her biri P nin bir tarafı üzerindedir.
- İki üçgenin aynı uzunlukta olan karşılıklı kenarları varsa, iki üçgen benzerdir ve bir üçgeni diğerine resmeden (ve karşılıklı kenarları koruyan) bir düzlem izometrisi mevcuttur.

Aşağıdaki aksiyom (Playfair aksiyomu olarak bilinen Öklid in 5. Postulat ın modern versiyonu) ise Öklid düzlemine göre sağlanırken Hiperbolik düzleme göre sağlanmaz:

- ℓ doğrusu üzerinde bir P noktası alındığında, P noktasından geçen ve ℓ den ayrık yalnızca bir m doğrusu vardır.

Hiperbolik düzlemde, böyle sonsuz sayıda m doğrusu vardır, bunların ikisi (aşağıda m_0 ve m_1 olarak resmedilen) ℓ ye paraleldir (asimptotik olarak) ve geriye kalan doğruların tümü de ℓ ye ultra paraleldir (bunların her biri ℓ den pozitif minimum uzaklığa sahiptir).



Şekil 1. Paralel ve ultra paralel doğrular [16]

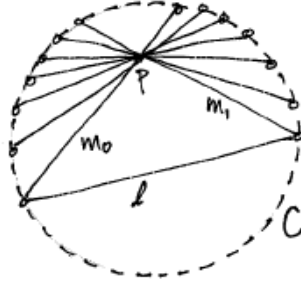
Hiperbolik düzlemi Öklid düzleminden ayırt eden diğer bazı özellikler de şunlardır:

- Üçgenin alanı π den küçüktür. İç açılarının toplamı da π den küçüktür. Aslında α, β ve γ açıları olan üçgen için alan tam olarak $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ dir.

- İki doğru ya kesişir, ya paraleldir (böylece birbirine asimptotiktirler) ya da ultra paraleldirler (bu durumda her bir doğrunun en yakın noktasını diğer doğruya birleştiren tek bir ortak dikmeye sahiptirler).
- r yarıçaplı çember $2\pi r$ den daha büyük çevreye sahiptir (ancak r küçükse $2\pi r$ ye yakındır). πr^2 den büyük alanı vardır (ancak r küçükse πr^2 ye yakındır).

1.3.1. Klein (veya Beltrami-Klein) Modeli

\mathbb{H} hiperbolik düzleminin noktalarını Öklid düzleminde açık daire noktaları olarak gösterelim. \mathbb{H} -doğruları bu diskin kirişleri olarak gösterilir. Klein resmi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir:

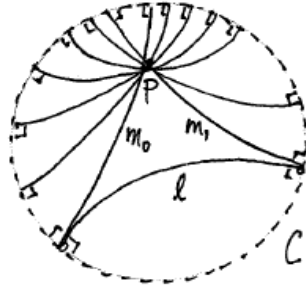


Şekil 2. Klein (açık) dairesi [16]

\mathbb{H} için bu model basittir ancak konformal değildir, yani açıları tam olarak göstermez (şüphesiz \mathbb{H} daki uzaklıkları da tam olarak göstermez).

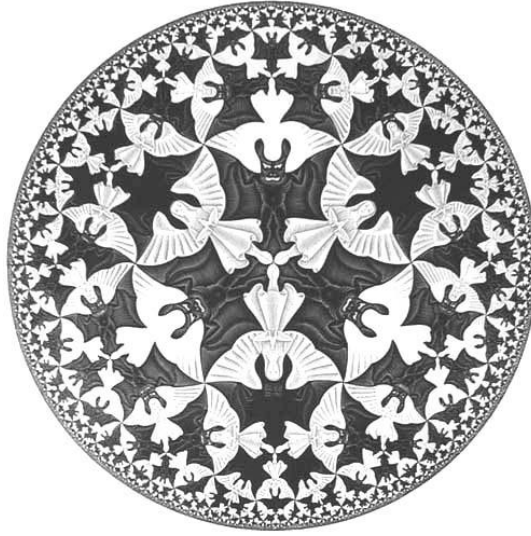
1.3.2. Poincare Daire Modeli

Bu modelde \mathbb{H} hiperbolik düzlemi için noktalar Öklid düzlemindeki açık daireleri kullanarak gösterilir (C çemberinin iç kısmı). Bu durum \mathbb{H} -doğruları içerde ve C ye dik çembersel yaylar ile gösterilir. Aşağıdaki şekilde Poincare dairesi gösterilmiştir:



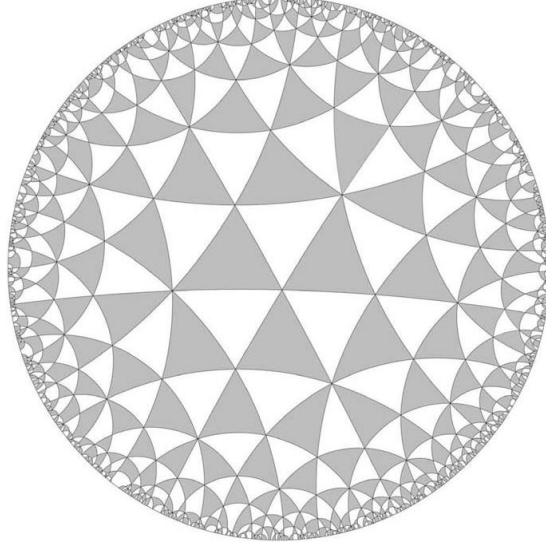
Şekil 3. Poincare (açık) daresi [16]

Bu model \mathbb{H} daki uzaklıkları tam olarak yansıtmaz, ancak açıları tam olarak temsil eder: bu model hiperbolik düzlemin konformal modelidir. Aşağıda Poincare daire modelinde pek çok eşdeğer büyüklükte melek ve şeytan hiperbolik düzlemin bir döşemesi olarak resmedilmiştir:



Şekil 4. Escher in "Melekler&Şeytanlar" resmi [16]

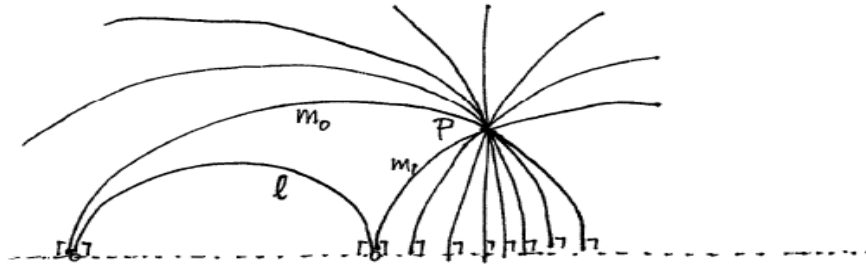
Aşağıda Poincare daire modelinde her biri 45° , 60° , 60° lik açıları olan birçok eşdeğer üçgen hiperbolik düzlemin bir döşemesi olarak resmedilmiştir:



Şekil 5. Eşdeğer üçgenler [16]

1.3.3. Poincare Yarı Düzlem Modeli

\mathbb{H} için bu modelde \mathbb{R}^2 de üst yarı düzlem noktalarını alıyoruz. \mathbb{H} -doğruları, \mathbb{H} üst yarı düzlemindeki $\{z \in \mathbb{H} : \text{Re}(z) = x_0\}$ dik doğruları ve $\{z \in \mathbb{H} : |z - z_0| = r\}$ yarı çemberleri gibi geodezikler olarak x -eksenine dik, üst yarı çemberler veya üst yarı doğrular ile gösterilir. Özellikle, herhangi iki $z, w \in \mathbb{H}$ için bu iki noktayı birleştiren yalnız bir tane geodezik vardır. Aşağıdaki şekilde bu durum gösterilmiştir:



Şekil 6. Poincaré yarı düzlem modeli [16]

Aşağıdaki Poincaré yarı düzlem modelinde eşit büyüklükteki sonsuz çoklukta yaratık (semenderler), mükemmel düz omurgaları ile birlikte hiperbolik düzlemin bir döşemesi olarak resmedilmiştir:



Şekil 7. Bir yarı düzlem döşemesi [16]

Şimdi bu modellerden üst yarı düzlem ve Poinçare daire modellerinin karşılaştırılmasını aşağıdaki şekilde yapalım:

	Üst Yarı Düzlem	Poinçare dairesi
Sınır	$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$	$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid z < 1\}$ $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 1\}$
Bir σ yolunun uzunluğu	$\int_a^b \frac{1}{\text{Im} \sigma(t)} \sigma'(t) dt$	$\int_a^b \frac{2}{1 - \sigma(t) ^2} \sigma'(t) dt$
Bir A alt kümesinin alanı	$\iint_A \frac{1}{(\text{Im}(z))^2} dz$	$\iint_A \frac{4}{(1 - z ^2)^2} dz$
Yön koruyan izometrilere	$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc > 0$ olmak üzere $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$	$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $ \alpha ^2 - \beta ^2 > 0$ olmak üzere $\gamma(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$
Geodezikler	$\partial\mathbb{H}$ a dik olan düşey yarı- doğrular ve yarı-çemberler	\mathbb{D} nin çapı ve $\partial\mathbb{D}$ ile dik olarak kesişen çemberlerin yayları
Açılar	Öklid açıları ile aynı	Öklid açıları ile aynı

Yukarıda verilen uzunluğa göre tanımlanan uygun hiperbolik metriğe göre yukarıda verilen döşemelerdeki tüm figürler aynı boyuttur.

1.4. Grup Topolojisi

1.4.1. Tanım (Topolojik Grup)

(G, \cdot) bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde,

$$M: G \times G \rightarrow G \quad \text{ve} \quad m: G \rightarrow G \\ (g, h) \rightarrow g \cdot h \quad \text{ve} \quad g \rightarrow g^{-1}$$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir *topolojik grup* adı verilir. Bundan sonra aksi söylenmedikçe, kolaylık açısından, $g \cdot h := gh$ alınacaktır.

1.4.2. Tanım (Topolojik Dönüşüm Grubu)

G bir topolojik grup ve X bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde,

$$\wedge: G \times X \rightarrow X \\ (g, x) \rightarrow \wedge(g, x) = g \wedge x$$

sürekli bir dönüşüm ve

- a) $\forall x \in X$ ve $\forall g, h \in G$ için $g \wedge (h \wedge x) = (gh) \wedge x$;
- b) $\forall x \in X$ için $\exists e \in G$ (birim elemanı): $e \wedge x = x$

şartları sağlanıyorsa $[G, X, \wedge]$ üçlüsüne veya kısaca $[G, X]$ ikilisine bir *topolojik dönüşüm grubu* adı verilir. Bu durumda G ye X üzerinde *hareket eder* veya G ye X üzerinde bir *hareket grubu* (*permutasyon grubu*) denir. Kolaylık olması bakımından $g \wedge x$ yerine gx yazacağız.

1.4.3. Tanım (Yörünge)

$[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$ olsun. Bu takdirde

$$"x \approx y: \Leftrightarrow \exists g \in G: gx = y"$$

şeklinde tanımlanan " \approx " bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının denklik sınıflarına *hareketin yörüngeleri* denir ve $x \in X$ noktasını içeren yörünge

$$Gx := \{gx \mid g \in G\}$$

kümesidir. Bu kümeye x in G -*yörüngesi* (veya kısaca x in *yörüngesi*) denir. Eğer X in bütün noktaları bir denklik sınıfına aitse, yani bir tek yörünge varsa $[G, X]$ topolojik dönüşüm grubuna *transitif* (*geçişlidir*) denir. Bütün yörüngelerden oluşan kümeyi X/G ile göstereceğiz.

Yani,

$$X/G := \{Gx \mid x \in X\}.$$

yörünge uzayı ve X/G üzerindeki topoloji

$$\Phi: X \rightarrow X/G \\ x \mapsto \Phi(x) := Gx$$

fonksiyonu nu sürekli yapan topolojidir. Bu topoloji,

$$\tau_\Phi := \{U \subset X/G \mid \Phi^{-1}(U) \text{ } X \text{ de açık}\}$$

ile verilir. Yani, $(X/G, \tau_\Phi)$ bir topolojik uzaydır.

1.4.4. Tanım (Sabitleyen)

$[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x \in X$ olsun. Bu takdirde

$$S_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

kümesine x noktasının *sabitleyeni* denir.

1.5. Γ Modüler Grubu

\mathbb{H} ile, \mathbb{C} karmaşık düzlemin üst yarı düzlemini ve $ad - bc = 1$ olmak üzere reel katsayılı $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrislerinin grubunu da $SL(2, \mathbb{R})$ ile göstereceğiz. Bu durumda, $g := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ ve $z \in \widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere $SL(2, \mathbb{R})$ grubu $\widehat{\mathbb{C}}$ genişletilmiş karmaşık düzlemi üzerinde

$$gz = \frac{az + b}{cz + d} \quad (8)$$

şeklinde hareket eder. Burada dikkat edilirse $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ile $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ matrislerinin hareketi aynıdır. Ayrıca,

$$Im(gz) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2} \quad (9)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Bu ise \mathbb{H} nin $SL(2, \mathbb{R})$ grubunun hareketi altında değişmez kaldığını gösterir. $PSL(2, \mathbb{R}) := SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ olarak tanımlarsak, elde edilen grubun elemanları $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki dönüşümlerdir. Diğer taraftan katsayıları tamsayı olan matrislerden oluşan $SL(2, \mathbb{Z})$ grubu, $SL(2, \mathbb{R})$ grubunun ayrık bir alt grubudur. Böylece $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm I\}$ modüler grubu,

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \quad (10)$$

elemanları tarafından oluşan ve üst yarı düzlemde

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (11)$$

dönüşümü ile hareket eden Möbiüs dönüşümlerinin bir grubudur. Burada \pm sembolü gözardı edilip herbir matris negatifi ile eş alınacaktır. Dolayısıyla

$$SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm I\} := \{(\pm I)A : A \in SL(2, \mathbb{Z})\} \quad (12)$$

bölüm grubu olmak üzere

$$\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}) \quad (13)$$

dir. Ayrıca

$$\Gamma = \langle X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

dir. Yani, Γ modüler grubu X ve Y matrisleri tarafından üretilir. Burada $X^2 = Y^3 = I$ dir. (Örnek için, bkz. [10, §6.8], [11, §1.4]). Buradan (11) dönüşümü Γ nın diğer kümelerdeki hareketini tanımlamak için de kullanılabilir. En uygun seçim rasyonel projektif doğrusu olan $\widehat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesidir.

Burada $a \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{0}$, ∞ a karşılık getirilecektir. ∞ un (11) dönüşümü altındaki görüntüsünü limit ile tanımlayacağız. Yani, $A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ olmak üzere

$$A(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$$

olarak bulunur. $ad - bc \neq 0$ olduğundan a ve c den en az biri sıfırdan farklıdır. Yani, $A(\infty)$ iyi tanımlıdır. Buradan $A(\infty) = \infty \Leftrightarrow c = 0$ ve $A(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

$PSL(2, \mathbb{Z})$ nin elemanları $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ olarak göz önüne alınır ve ayrıca $PSL(2, \mathbb{Z})$ üzerinde özdeşleştirme ile (a, b, c, d) ile $(-a, -b, -c, -d)$ özdeşleştirilerek bir topoloji tanımlanabilir. Bu durumda $A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümüne $\pm(a, b, c, d)$ dörtlüsü karşılık gelir. $M := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \mid ad - bc = 1\}$ kümesini tanımlarsak $PSL(2, \mathbb{Z})$ üzerindeki topolojiyi M/\sim üzerindeki topoloji olarak alacağız. Yani, $(a, b, c, d) \in M$ olmak üzere $(a, b, c, d) \sim (-a, -b, -c, -d)$ dir.

$$p: \quad M \quad \rightarrow \quad M/\sim \\ (a, b, c, d) \quad \rightarrow \quad [a, b, c, d] := \{\pm(a, b, c, d)\}$$

projeksiyon dönüşümünü göz önüne alalım. Burada

$U \subset M/\sim$ açıktır $\Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset M$ açıktır.

Dolayısı ile p dönüşümü süreklidir ve bu topoloji ile $PSL(2, \mathbb{Z})$ bir topolojik gruptur. Böylece de $[PSL(2, \mathbb{Z}), \mathbb{H}]$ bir topolojik dönüşüm grubudur.

1.6. Γ Modüler Grubunun Sayısal Özellikleri

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ modüler grubun bir elemanı ve p/q kesri indirgenmiş olsun, yani $(p, q) = 1$ olsun. Bu takdirde, $\frac{ap+bq}{cp+dq}$ kesiri de indirgenmiştir.

1.7. Γ Modüler Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ Üzerindeki Hareketi

Burada $\infty = \frac{1}{0} = -\frac{1}{0}$ dir. $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın elemanlarının gösterimi tek değildir. Böylece Γ $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1$$

elemanları tarafından

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \rightarrow \frac{a\frac{x}{y} + b}{c\frac{x}{y} + d} = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

dönüşümü ile hareket eder. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki bu hareketi iyi tanımlıdır. Gerçekten, $A \in \Gamma$ ise

$$A(x/y) = \frac{a\frac{x}{y} + b}{c\frac{x}{y} + d} = \frac{ax + by}{cx + dy} = \frac{-ax - by}{-cx - dy} = \frac{a\frac{-x}{-y} + b}{c\frac{-x}{-y} + d} = A(-x/-y).$$

1.7.1. Lemma [5]

- i. Γ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.
- ii. Bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirlidir.

İspat

i. Burada aslında $\infty = \frac{1}{0}$ noktasını içeren yörüngenin $\widehat{\mathbb{Q}}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Eğer $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ (indirgenmiş formda) ise buradan $(x, y) = 1$ ise $ux - vy = 1$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{Z}$ tamsayıları vardır. Dolayısı ile $A := \begin{pmatrix} x & v \\ y & u \end{pmatrix} \in \Gamma$ elemanı ∞ u $\frac{x}{y}$ ye resmeder. Yani,

$$[\infty] := \{A(\infty) : A \in \Gamma\} = \widehat{\mathbb{Q}}.$$

ii. (i)'den $\widehat{\mathbb{Q}}$ daki herhangi iki noktanın sabitleyenleri Γ modüler grubunda eşleniktir. Gerçekten; $p, q \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun. Bu durumda;

$$S_p := \{T_1 \in \Gamma : T_1 p = p\}, S_q := \{T_2 \in \Gamma : T_2 q = q\}$$

olmak üzere S_p ve S_q nun Γ da eşlenik olduklarını gösterelim. Yani $S_p = T_3 S_q T_3^{-1}$ olacak şekilde $T_3 \in \Gamma$ elemanının varlığını gösterelim. $p, q \in \widehat{\mathbb{Q}}$ ve Γ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan $Lp = q$ olacak şekilde $L \in \Gamma$ vardır. $T \in S_p$ keyfi olsun. $T = LSL^{-1}$ olacak şekilde $S \in S_q$ bulmalıyız. $LTL^{-1}q = q$ olduğundan $LTL^{-1} \in S_q$ ve $S := L^{-1}TL$ dir. Buradan $LSL^{-1} = T \in LS_qL^{-1}$ ve dolayısıyla $S_p \subseteq LS_qL^{-1}$ dir. Benzer şekilde $LS_qL^{-1} \subseteq S_p$ olduğu görülebilir. Dolayısıyla $S_p = LS_qL^{-1}$ elde edilir. Böylece ∞ un Γ_∞ sabitleyenini göz önüne almak yeterlidir. $b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere bu sabitleyenin $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şeklindeki elemanlardan oluştuğu kolayca görülür. Dolayısı ile Γ_∞ , $Z = XY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanı tarafından üretilen sonsuz devirli alt gruptur. ■

Şimdi Γ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki imprimitif hareketini inceleyelim. Bunun için aşağıdaki genel durumu verelim:

$[G, \Omega]$ G grubunun Ω kümesi üzerindeki hareketi ile oluşan permütasyon grubu ve " \approx " Ω üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde

$$“\forall g \in G \text{ ve } \forall \alpha, \beta \in \Omega \text{ için } \alpha \approx \beta \Rightarrow g(\alpha) \approx g(\beta)”$$

bağıntısına Ω üzerinde bir G -invariant denklik bağıntısı adı verilir. Bu bağıntının denklik sınıflarına ise *bloklar* denir. Ayrıca, Ω üzerinde

a) $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (özdeşlik bağıntısı)

b) $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$ (evrensel bağıntı)

bağıntıları dışında bir " \approx " G -invariant denklik bağıntısı mevcut ise $[G, \Omega]$ ikilisine *imprimitiftir* denir, aksi halde *primitiftir* diyeceğiz.

1.7.2. Lemma [5]

$[G, \Omega]$ bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde, $[G, \Omega]$ primitiftir $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \Omega$ noktasının

$$G_\alpha = \{g \in G \mid g(\alpha) = \alpha\}$$

sabitleneni, G nin bir maksimal bir alt grubudur. ■

Bir $\alpha \in \Omega$ için $G_\alpha \cong H \cong G$ ise $[G, \Omega]$ permütasyon grubu primitif değildir. Ayrıca G_α G 'nin bir maksimal alt grubudur $\Leftrightarrow G_\alpha \leq H \leq G$ olduğunda $H = G_\alpha$ veya $H = G$ dir. $G_\alpha < H < G$ olduğunu farzedelim. G transitif olarak hareket ettiğinden Ω kümesinin her elemanı bir $g \in G$ için $g(\alpha)$ biçimindedir.

Bu Lemma bize aşağıdaki gibi, imprimitif hareketin varlığını verir:

1.7.3. Lemma

Ω üzerinde

$$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH \quad (14)$$

ile verilen “ \approx ” denklik bağıntısı iyi tanımlı bir G -invariant denklik bağıntısıdır.

İspat $h \in H$ keyfi olsun. Buradan önce,

$$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow h(g(\alpha)) \approx h(g'(\alpha))$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH \Leftrightarrow hg' \in hgH \quad (15)$$

$$h(g(\alpha)) \approx h(g'(\alpha)) \Leftrightarrow hg(\alpha) \approx hg'(\alpha) \Leftrightarrow hg' \in hgH \quad (16)$$

(15) ve (16)' dan istenen sonuç elde edilir. ■

1.7.4. Lemma

$G_\alpha \not\cong H$ olduğundan (14) bağıntısı özdeşlik veya evrensel bağıntı değildir.

İspat Farzedelim ki özdeşlik bağıntısı olsun. Bu durumda

$$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g(\alpha) = g'(\alpha)$$

olur. Buradan $g'g^{-1}(\alpha) = \alpha$ yani, $g'g^{-1} \in G_\alpha$ dolayısı ile de $g' \in gG_\alpha$ dır. $G_\alpha \not\cong H$ olduğundan $h_0 \notin G_\alpha$ olan $h_0 \in H$ vardır. Böylece $h_0\alpha \neq \alpha = e(\alpha)$ ve $e(\alpha) \approx h_0\alpha$ dır. Çünkü, $h_0 \in eH = H$ dır. Buradan $e(\alpha) = h_0\alpha$ yani, $h_0 \in eG_\alpha = G_\alpha$ olup bu ise $h_0 \notin G_\alpha$ olması ile çelişir. Şimdi de farzedelim ki evrensel bağıntı olsun. $H \not\cong G$ olduğundan

$g_0 \notin H$ olan $g_0 \in H$ vardır. Bu durumda $e(\alpha) \approx g_0\alpha$ dır. Fakat bu ancak $g_0 \in eH = H$ olması ile mümkündür. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısı ile evrensel bağıntı da olamaz. ■

1.7.5. Sonuç

1.7.4 Lemma dan " \approx " bağıntısı G -invariant denklik bağıntısı olup özdeşlik veya evrensel bağıntı değildir. Buradan (G, Ω) imprimitiftir. ■

1.7.6. Sonuç

Eğer $\beta \in \Omega$ ise $\beta = g(\alpha)$ olan $g \in G$ vardır. Böylece β yı içeren $[\beta]$ bloğu $M := \{gh(\alpha) \mid h \in H\}$ kümesi ile verilir.

İspat $[\beta] := \{\gamma \in \Omega : \gamma \approx \beta\}$ ve $g \in G$ için $\beta = g(\alpha)$ dır. $\gamma \in \Omega$ olup buradan $\gamma = s(\alpha)$ olacak şekilde $s \in G$ mevcuttur. Buradan $\gamma \approx \beta$ olup $s(\alpha) \approx g(\alpha)$ ve dolayısı ile de $g \in sH$ dır. Böylece $g = sh$ olacak şekilde $h \in H$ vardır. Buradan $s = \frac{g}{h}$ olup $s = gh^{-1}$ ve $\gamma = s(\alpha) = gh^{-1}(\alpha) \in M$ olup $[\beta] \subseteq M$ elde edilir.

Tersine, $gh(\alpha) \in M$ olmak üzere, $gh(\alpha) \approx \beta$ olduğunu göstermeliyiz. $\beta = g(\alpha)$ olduğundan $gh(\alpha) \approx g(\alpha)$ yani, $g \in ghH = gH$ ve $gh(\alpha) \in [\beta]$ olup $M \subseteq [\beta]$ elde edilir. Sonuç olarak $M = [\beta]$ dır. ■

Özellikle de $[\alpha]$ bloğu $H(\alpha) := \{h(\alpha) \mid h \in H\}$ H -yörüngesidir. Gerçekten, $\alpha = e(\alpha)$ alınırsa $[\alpha] = [e(\alpha)] = \{eh(\alpha) \mid h \in H\} = \{h(\alpha) \mid h \in H\} = H(\alpha)$ elde edilir.

Eğer $\{l_i \mid i \in I\}$, H nın G deki sol yan sınıf gösterimlerinin bir kümesi ise, buradan, $i \in I$ olmak üzere, bloklar, $H(\alpha)$ nın $l_i H(\alpha)$ görüntüleridir. Böylece blokların sayısı H nın G deki $|I| := |G:H|$ indeksine eşittir. Blokların Ω/\approx kümesi üzerinde, G nin bir aşıkâr indirgenmiş hareketi vardır. $[\alpha]$ bloğunun sabitleyeni H alt grubunu meydana getirir.

Şimdi $G := \Gamma$ ve $\Omega := \hat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere 1.7.2 Lemma'yı kullanalım. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ keyfi alınsın. Buradan $\infty = \frac{1}{0}$ olup $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eşitliğinden $a = 1$ ve $c = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $d = 1$ dir ve böylece $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ olur. Sonuç olarak ∞ un Γ modüler

grubundaki Γ_∞ sabitleyeni $\Gamma_\infty = \langle Z := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ olarak elde edilir. Böylece Γ_∞ sabitleyenini içeren (veya denk olarak Z 'yi içeren) Γ nın H alt gruplarını bularak $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ -invariant denklik bağıntıları üretebiliriz. $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olduğundan, H için, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

kongrüans alt grupları uygun bir seçimdir. Açıkça $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $n > 1$ ise $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) < \Gamma$ dir. \approx_n (veya basitçe \approx) ile $\Gamma_0(n)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde indirgenmiş Γ -invariant denklik bağıntısını göstereyim. Bu durumda $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir Γ -invariant denklik bağıntısı aşağıdaki gibi verilebilir:

Γ modüler grubu $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olduğundan $\frac{r}{s} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere $\frac{r}{s} = T \left(\frac{1}{0} \right)$ olacak şekilde bir $T \in \Gamma$ vardır. Böylece $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde

$$T(\infty) = \frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} = S(\infty) \Leftrightarrow T^{-1}S \in H := \Gamma_0(n) \quad (17)$$

dir. Dolayısı ile kolayca görülebilir ki

$$\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{n} \quad (18)$$

dir. Gerçekten;

$$\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow T^{-1}S \in \Gamma_0(n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ry - sx & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$$

$$\Leftrightarrow n|ry - sx \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{n}$$

elde edilir. Bir başka ifade ile $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow$ aynı $modn$ kısaltmasına sahiptirler. Yani,

$$\exists u \in U_n := \{u \mid (u, n) = 1, u \leq n\} : x \equiv ur \pmod{n} \text{ ve } y \equiv us \pmod{n} \quad (19)$$

Bunu görmek için, (18) ve (19) ile verilen iki denklemin de $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ -invariant denklik bağıntısı olarak tanımlandığı dikkate alınmalıdır. ∞ u içeren,

$$[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} \mid y \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

ile verilen blok her iki durumda da aynıdır. Böylece bu iki bağıntı eşittir. Dolayısıyla 1.7.2 Lemma ve 1.7.4 Lemma'dan $[\Gamma, \widehat{\mathbb{Q}}]$ imprimitiftir. Yani, Γ $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde imprimitif olarak hareket eder.

Blokların sayısı ise

$$\psi(n) := |\Gamma : \Gamma_0(n)| = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \quad (20)$$

dir.

Özellikle n değeri p asal sayısına eşit ise

$$\psi(p) = p + 1$$

tane blok vardır ve bu bloklar

$$[j] = \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} \mid x \equiv jy \pmod{p} \right\}, j \neq \infty$$

$$[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} \mid y \equiv 0 \pmod{p} \right\}$$

olmak üzere

$$[0], [1], \dots, [p-1], [\infty]$$

dur. Örneğin, $p = 2$ için bu bloklar

$$[0] = \left\{ \frac{\text{çift}}{\text{tek}} \right\}, [1] = \left\{ \frac{\text{tek}}{\text{tek}} \right\}, [\infty] = \left\{ \frac{\text{tek}}{\text{çift}} \right\}$$

şeklindedir.

1.8. Graf Teorisi

Kombinatorik, genellikle sonlu soyut nesnelere konu alan pür matematik dalıdır. Dalla ilgilenen matematikçilere *kombinatorialist* veya *kombinatorist* denir. Matematiğin, cebir, olasılık kuramı, ergodik teori ve geometri gibi farklı dallarıyla da ilgili olan kombinatorik ayrıca bilgisayar bilimi ve istatistiksel fizik gibi dallarda uygulanmıştır. Kombinatorik dahilindeki konulardan bazıları; belirli kriterleri karşılayan nesnelere "sayılması", kriterlerin ne zaman karşılanmış olacağına karar vermek, kriterleri karşılayan nesnelere inşaa edilmesi ve analiz edilmesi, "en büyük", "en küçük" veya "optimal" nesnelere bulmak ve bu nesnelere sahip olabileceği cebirsel yapıları bulmaktır.

Kombinatorik ile ilgili çeşitli kuramlar ve problemler Orta Çağ'da ve hatta antik çağlarda Hindistan ve Çin gibi medeniyetlerde mevcuttur. Her ne kadar özellikle 20. yüzyılın sonlarına doğru birçok güçlü teori ortaya konmuşsa da, kombinatorik problemi çözmekle ne kadar ilgiliyse teori oluşturmakla da o kadar ilgilidir. Kombinatoriğin en eski ve erişilebilir konularından birisi de graf teorisidir ki bu teorisinin diğer birçok alanla da (doğal olarak) ilişkisi mevcuttur.

Ω sonlu bir küme, E , $\Omega \times \Omega$ nın bir alt kümesi ve $E' := \{(\alpha, \beta) | (\beta, \alpha) \in E\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $E \cap E' = \emptyset$ olmak üzere (Ω, E) çiftine $(\Omega$ kümesi üzerinde) *yönlendirilmiş bir graf* ve ayrıca E , Ω nın iki elemanlı alt kümeleri yani, $E(\Omega) := \{\{\alpha, \beta\} | \alpha, \beta \in \Omega, \alpha \neq \beta\}$ olmak üzere (Ω, E) çiftine $(\Omega$ kümesi üzerinde) *yönlendirilmemiş bir graf* denir. Böylece bir graf ya yönlendirilmiş ya da yönlendirilmemiştir. Eğer (Ω, E) bir graf ise E nin elemanlarına *kenarlar* ve Ω nın elemanlarına da *köşeler* (noktalar) adı verilir. Bu takdirde noktalar, bir Öklid uzayında, yönlendirilmiş veya yönlendirilmemiş doğru parçaları tarafından birleştirildiğinde kenarlar oluşur. Yönlendirilmiş durumda (α, β) kenarını α dan β ya gider, yönlendirilmemiş durumda ise $\{\alpha, \beta\}$ kenarını α dan β ya veya β dan α ya gider şeklinde ve α dan β ya veya β dan α ya bir kenar varsa bu durumda α ve β noktaları bir kenar tarafından birleştirilir şeklinde adlandıracağız. $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s = \beta$ noktaların (köşelerin) bir dizisi olsun. Bu takdirde $0 \leq i < s$ olmak üzere α_i ve α_{i+1} noktaları bir kenar tarafından bağlanıyor ise α dan β ya s uzunluklu bir yol vardır denir. Eğer bir grafta herhangi iki α ve β noktası için α dan β ya bir yol varsa bu grafa *bağlantılıdır* denir.

1.8.1. Önerme [1]

Eğer (Ω, E) grafi bağlantılı ve Ω üzerinde transitif olan otomorfizmaların bir grubuna sahip olsun. Bu takdirde, $0 \leq s < i$ olmak üzere, herhangi iki α ve β noktası için, α_i den α_{i+1} e bir kenar mevcut olacak şekilde bir $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s = \beta$ yolu vardır. ■

1.9. Γ Modüler Grubunun $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

$[G, \Omega]$ bir transitif permütasyon grubu ise $[G, \Omega]$ aynı zamanda bir topolojik dönüşüm grubudur. Bu takdirde $G, \Omega \times \Omega$ üzerinde “ $g \in G$ ve $\alpha, \beta \in \Omega$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \wedge: G \times (\Omega \times \Omega) &\rightarrow \Omega \times \Omega \\ (g, (\alpha, \beta)) &\rightarrow \wedge(g, (\alpha, \beta)) := g \wedge (\alpha, \beta) := (g(\alpha), g(\beta)) \end{aligned} \quad (21)$$

şeklinde hareket eder. Bu hareketin yörüngelerine G nin Alt Yörüngeleri denir ve (α, β) yı içeren yörünge $((\alpha, \beta)$ nın yörüngesi) $O(\alpha, \beta)$ ile gösterilir. ($O(\alpha, \beta) := \{g(\alpha, \beta) \mid g \in G\}$). Buradan,

$$(x, y) \in O(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \exists g \in G : (x, y) = g(\alpha, \beta) = (g(\alpha), g(\beta))$$

dır. $O(\alpha, \beta)$ dan hareketle $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafini oluşturacağız. Burada $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$ nin köşeleri Ω nin elemanları ve $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise γ dan δ ya (yönlendirilmiş) bir kenar vardır denir ve bu durum $\gamma \rightarrow \delta$ ile gösterilir.

Açıkça $O(\beta, \alpha)$ da bir yörünge ve ya $O(\alpha, \beta)$ ya eşittir ya da $O(\alpha, \beta)$ dan farklıdır. Bu takdirde; $O(\alpha, \beta) \neq O(\beta, \alpha)$ ise $\mathbf{G}(\beta, \alpha)$, $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$ nin kenarları ters yönlendirilmişinden ibarettir ve bu durumda $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$ ile $\mathbf{G}(\beta, \alpha)$ ya eşleşmiş alt yörüngesel graflar denir. Eğer $O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$ ise $\mathbf{G}(\beta, \alpha) = \mathbf{G}(\alpha, \beta)$ dir ve bu graf karşılıklı yönlendirilmiş kenarlardan oluşur. Bu durumda $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$ yönlendirilmiş olmayan bir graf olarak düşünülebilir ve $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$ ya kendisiyle eşleşmiş alt yörüngesel graf denir. Yani, $\gamma \rightarrow \delta$ ise $\delta \rightarrow \gamma$ veya bu durum $\gamma \rightleftharpoons \delta \Leftrightarrow \gamma - \delta$ ile gösterilir.

Bu tanımlar ilk kez Sims [1] tarafından ortaya atıldı ve ayrıca Neumann [2] , Biggs ve White [3] ve Tsukuzu [7] nun çalışmalarında bu konulara değinildi ve sonlu gruplara uygulanmasında büyük önem kazandı.

1.9.1. Önerme [5]

\mathbf{G} , bir (G, Ω) transitif permütasyon grubu için bir alt yörüngesel graf olsun. Bu takdirde;

- (i) G , \mathbf{G} nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder;
- (ii) G , \mathbf{G} nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder;
- (iii) Eğer \mathbf{G} kendisiyle eşleşmiş ise bu takdirde G , \mathbf{G} nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder;
- (iv) \mathbf{G} kendisiyle eşleşmiş değil ise bu takdirde G , \mathbf{G} nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder. ■

$O(\alpha, \alpha) = \{(\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \Omega\}$ $\Omega \times \Omega$ nin köşegenidir. Her $\alpha \in \hat{\mathbb{Q}}$ köşesi için $\mathbf{G}(\alpha, \alpha)$ alt yörüngesel grafi sadece bir düğüm içerir. Bu graf kendisiyle eşleşmiştir. Buna *aşıkâr alt yörüngesel graf* denir. Biz genel olarak aşıkâr olmayan alt yörüngesel graflar ile çalışacağız.

Şimdi Γ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi için alt yörüngesel grafları inceleyelim. Γ , $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden, herbir alt yörünge, bir $v \in \hat{\mathbb{Q}}$ için (∞, v) çiftini içerir; $n \geq 0$ ve $(u, n) = 1$ olmak üzere

$$v = \frac{u}{n}$$

şeklinde yazarsak, bu alt yörüngeyi $O_{u,n}$ ve buna karşılık gelen $\mathbf{G}(\infty, v)$ alt yörüngesel grafini da $\mathbf{G}_{u,n}$ ile göstereceğiz. Eğer $v = \infty$ ise bu, $\mathbf{G}_{1,0} = \mathbf{G}_{-1,0}$ aşıkâr alt yörüngesel grafidir. Böylece $v \in \hat{\mathbb{Q}}$ olduğunu kabul edebiliriz.

1.9.2. Lemma

Eğer $v, v' \in \mathbb{Q}$ ise bu takdirde

$$O(\infty, v) = O(\infty, v') \Leftrightarrow v \text{ ve } v' \Gamma_\infty \text{ un aynı yörüngesindedir;}$$

Γ_∞ , $Z : v \rightarrow v + 1$ ile üretildiğinden, bu durum $u \equiv u' \pmod{n}$ olmak üzere $v' = \frac{u'}{n}$ ifadesine denktir.

İspat $O(\infty, v) = O(\infty, v')$ olsun. Bu takdirde $(\infty, v) \in O(\infty, v')$ dür. Buradan $T(\infty, v) = (\infty, v')$ olacak şekilde $T \in \Gamma$ vardır. Böylece, $(T(\infty), T(v)) = (\infty, v')$ olup $T(\infty) = \infty$ ve $T(v) = v'$ dür. Dolayısıyla, $T \in \Gamma_\infty$ dur.

Tersine v ve $v' \Gamma_\infty$ un aynı yörüngesinde, yani, $T(v) = v'$ olacak şekilde $T \in \Gamma_\infty$ vardır. $T(\infty) = \infty$ olduğundan $T(\infty, v) = (T(\infty), T(v)) = (\infty, v') \in O(\infty, v')$ ve buradan da $(\infty, v) \in O(\infty, v')$ olup $O(\infty, v') = O(\infty, v)$ elde edilir.

Ayrıca, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+n \\ n \end{pmatrix}$ den $u+n = u'$ olup $u \equiv u' \pmod{n}$ ve $n = n'$ bulunur. ■

Böylece,

$$\mathbf{G}_{u,n} = \mathbf{G}_{u',n'} \Leftrightarrow n \equiv n' \text{ ve } u \equiv u' \pmod{n}$$

dir. Dolayısıyla $\forall n \geq 1$ tamsayısı için $\Phi(n) = |U_n| = n \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ tane farklı $\mathbf{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafi vardır.

1.9.3. Teorem

$\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbf{G}_{u,n}$ de bir kenardır \Leftrightarrow

- $x \equiv ur \pmod{n}, y \equiv us \pmod{n}$ ve $ry - sx = n$ veya,
- $x \equiv -ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$.

İspat $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbf{G}_{u,n}$ olsun. Bu takdirde bir $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ elemanı $\infty = \frac{1}{0}$ 1 $\frac{r}{s}$ ye ve $\frac{u}{n}$ yi $\frac{x}{y}$ ye resmeder. Böylece,

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix} \quad (22)$$

matris denklemi elde edilir. Burada,

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\}$$

dir. Eğer (22) denkleminde + işareti alınırsa buradan,

$$a = r, c = s, au + bn = u \text{ ve } cu + dn = y$$

elde edilir. Böylece $x \equiv ur$ ve $y \equiv us \pmod{n}$ elde edilir. (22) de determinantları alırsak $ry - sx = n$ olduğu görülür, dolayısıyla a) sağlanır. Benzer şekilde eğer - işareti alınırsa b) elde edilir.

Tersine, eğer a) sağlanıyor ise buradan $\exists b, d \in \mathbb{Z} : x = ur + bn, y = us + dn$ dir. Böylece,

$$\pm \begin{pmatrix} r & b \\ s & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix} \quad (23)$$

dir. $ry - sx = n$ olduğundan $rd - bs = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} r & b \\ s & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve buradan $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbf{G}_{u,n}$ dir. Eğer b) sağlanırsa, x ve y , $-x$ ve $-y$ ile değiştirilerek (23) elde edilir. Böylece $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} \in \mathbf{G}_{u,n}$ bulunur. ■

1.9.4. Sonuç [5]

$\bar{u}, u\bar{u} \equiv 1 \pmod{n}$ kongrüans denklemini sağlamak üzere, $\mathbf{G}_{u,n}$ ile eşleşmiş alt yörüngesel graf $\mathbf{G}_{-\bar{u},n}$ dir. ■

1.9.5. Sonuç

$\mathbf{G}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2 \equiv -1 \pmod{n}$

İspat Her $n \geq 1$ tamsayısı için $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde

$$\frac{r}{s} \approx_n \frac{x}{y} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{n}$$

Γ -invariant denklik bağıntısı vardır. Eğer $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbf{G}_{u,n}$ ise bu takdirde 1.9.3 Teorem den $ry - sx = \overline{r}n$ ve böylece $\frac{r}{s} \approx_n \frac{x}{y}$ dir. Bu yüzden bir tek blokta $\mathbf{G}_{u,n}$ nin $\Psi(n)$ tane bağlantılı bileşeni vardır.

$\mathbf{G}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş olsun. Bu takdirde $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = O\left(\frac{u}{n}, \infty\right)$ ve buradan $T(\infty) = \frac{u}{n}$ ve $T\left(\frac{u}{n}\right) = \infty$ olacak şekilde $T \in \Gamma$ mevcuttur. Böylece,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & au + bn \\ c & cu + dn \end{pmatrix}$$

olup $a = u, c = n, au + bn = 1, cu + dn = 0$ elde edilir. Böylece, $n \geq 1$ olduğundan $n(u + d) = 0$ ve buradan $d = -u$ olarak bulunur. Dolayısıyla $T = \begin{pmatrix} u & -b \\ n & -u \end{pmatrix} \in \Gamma$ olup $\det T = -u^2 - bn = 1$ den $u^2 \equiv -1 \pmod{n}$ elde edilir.

Tersine $u^2 \equiv -1 \pmod{n}$ olsun. Bu takdirde, $u^2 = -1 - bn$ olacak şekilde $b \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $-u^2 - bn = 1$ olup $T = \begin{pmatrix} u & b \\ n & -u \end{pmatrix} \in \Gamma$ dir. Böylece;

$$\begin{pmatrix} u & b \\ n & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & b \\ n & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + bn \\ un - nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan $T(\infty) = \frac{u}{n}$ ve $T\left(\frac{u}{n}\right) = \infty$ ve dolayısıyla da $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = O\left(\frac{u}{n}, \infty\right)$ olup $\mathbf{G}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir. ■

1.9.6. Sonuç

$\mathbf{G}_{u,n}$ en az $\psi(n)$ tane bağlantılı bileşene sahiptir; özellikle eğer $n > 1$ ise $\mathbf{G}_{u,n}$ bağlantılı değildir. ■

1.10. Farey Grafi

$\mathbf{G}_{1,1}$ grafinin köşelerinin kümesi $\hat{\mathbb{Q}}$ dir. 1.9.5 Sonuç dan bu graf kendisiyle eşleşmiştir, böylece $\mathbf{G}_{1,1}$ i yönlendirilmemiş bir graf olarak kabul edebiliriz. 1.9.3 Teorem den $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ köşeleri komşudur $\Leftrightarrow ry - sx = \mp 1$ dir. Örneğin ∞ a komşu olan köşeler tamsayılardır. 1.9.1 Önerme den Γ , köşeler ve kenarlar üzerinde transitif olarak hareket eden $\mathbf{G}_{1,1}$ in otomorfizmalarının bir grubudur. Aslında gösterebiliriz ki $Aut\mathbf{G}_{1,1}$ (10) deki $ad - bc = \pm 1$ koşulunu sağlayan elemanların oluşturduğu $PGL(2, \mathbb{Z})$ genişletilmiş modüler grubudur.

$\mathbf{G}_{1,1}$ i Farey dizileriyle olan ilişkisinden dolayı *Farey grafi* olarak adlandıracağız ve \mathbf{F} ile göstereceğiz. Her $m \geq 1$ tamsayısı için m mertebeli \mathbf{F}_m -Farey dizisi, $|y| \leq m$ olmak üzere kesin artan bir şekilde sıralanan bütün $\frac{x}{y} \in \hat{\mathbb{Q}}$ rasyonel sayılarından oluşur. Örneğin,

$$\mathbf{F}_4 : \dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$$

dir. Burada kolaylık açısından \mathbf{F}_m -Farey dizisinin elemanları $[0,1]$ veya $[-m, m] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralıklarına kısıtlanabilir. Açıkça, $\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F}_2 \subset \mathbf{F}_3 \subset \dots$ ve $\bigcup_{m \geq 1} \mathbf{F}_m = \mathbb{Q}$ dur.

1.10.1. Lemma

$\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ indirgenmiş rasyoneller olsun. Bu takdirde aşağıdaki üç koşul denktir;

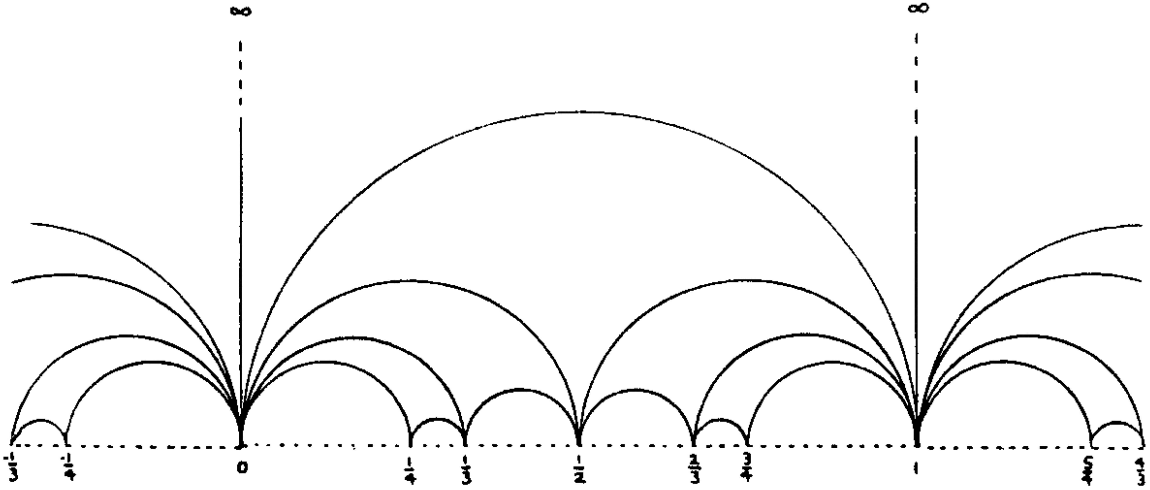
- $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, \mathbf{F} de komşu köşelerdir;
- $ry - sx = \pm 1$;
- Bir $m \in \mathbb{N}$ için $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, \mathbf{F}_m de komşu terimlerdir.

İspat $u = n = 1$ olduğundan ve 1.9.3 Teoremden a) ve b) denktir. b) ve c) nin denkliği sayılar teorisinin standart bir neticesidir. m nin uygun değerleri

$$\max(|s|, |y|) \leq m < |s| + |y|$$

ile verilir. ■

Buradan artık \mathbf{F} nin basit bir yapısını oluşturmak mümkündür. Her bir terime hemen öncesindeki ve sonrasındaki terimleri ekleyerek, her bir \mathbf{F}_m , 2 değerli bir ağaç (içerisinde devre bulundurmayan bağlantılı graf) olur; yukarıdaki Lemma dan bu ağaçların birleşimi \mathbf{F} nin \mathbb{Q} üzerinde indirgenmiş alt grafıdır. Böylece ∞ ile işaretlenmiş bir köşe ekleyerek ve bunu tamsayılar ile birleştirerek \mathbf{F} yi oluşturabiliriz.



Şekil 8. $m = 4$ 'e karşılık gelen $\mathbf{F} = \mathbf{G}_{1,1}$ Farey grafi [5]

Bu yapı Şekil 8 de gösterilmiştir. Şekil, kenarların ∞ ile ortak olduğunu veya \mathbf{F}_4 ün elemanlarının birleşmesiyle meydana geldiğini gösterir. Bu örnek 1 periyotlu olup periyodiktir. Yani, $x \rightarrow y$ $[0,1]$ aralığında ise $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $x + k \rightarrow y + k$ $[k, k + 1]$ aralığındadır. Görsel uygunluk açısından \mathbf{F} nin kenarlarını \mathbb{H} üst yarı düzlemindeki Öklid yarı-çemberleri veya \mathbb{R} ye dik olan Öklid yarı-doğruları şeklindeki hiperbolik geodezikler olarak gösterebiliriz. Alışıldığı üzere, yarı-doğruları “ ∞ ile birleşmiş” olarak kabul edeceğiz. (11) ü \mathbb{H} nin hiperbolik izometrilерinin bir grubu olarak, Γ ile bir hareketi

tanımlamak için kullanabiliriz. Bu hareket altında geodezikler geodeziklere resmedilir. Böylece \mathbb{H} daki \mathbf{F} gösterimimiz Γ altında invaryanttır.

1.10.2. Sonuç

\mathbf{F} nin kenarları \mathbb{H} da kesişmez.

İspat Farzedelim ki iki kenar \mathbb{H} da kesişsin. 1.9.1 Önerme (iii) den bunlardan bir tanesinin 0 ve ∞ u birleştiren $Re(z) = 0$ kenarı ve böylece diğerinin

$$v := \frac{r}{s} < 0 < w := \frac{x}{y}$$

olacak şekilde v ve w rasyonellerini birleştiren kenar olduğunu kabul edebiliriz. 1.10.1 Lemma dan herhangi bir \mathbf{F}_m de, v ve w ardışıktır. Fakat 0 arada bulunacağı için bu imkansızdır. Çünkü $ry - sx = \mp 1$ ve $x < 0, r, y, s > 0$ olduğundan $1 = ry - sx \geq 2$ çelişkisi elde edilir. ■

1.11. $\mathbf{G}_{u,n}$ ve $\mathbf{F}_{u,n}$ Grafları

Şimdi $\mathbf{F} = \mathbf{G}_{1,1}$ in özelliklerinin diğer $\mathbf{G}_{u,n}$ alt yörüngesel graflarına nasıl genişletilebileceğine bakalım. Her bir $\mathbf{G}_{u,n}$ en az $\psi(n)$ tane alt grafın ayrık birleşimi olduğundan; her bir alt grafın köşeleri $ry - sx \equiv 0 \pmod{n}$ ile tanımlanan $\approx_n \Gamma$ -invariant denklik bağıntısına göre tek blok oluşturur. $\Gamma \hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olduğundan, bu blokları transitif olarak permüte eder. Böylece alt grafların hepsi izomorfiktir.

$\mathbf{F}_{u,n}$ köşeleri ∞ u içeren

$$[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : y \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

bloğundan oluşan $\mathbf{G}_{u,n}$ nin bir alt grafi olsun. Böylece $\mathbf{G}_{u,n}, \mathbf{F}_{u,n}$ nin $\psi(n)$ tane ayrık kopyasından oluşur. 1.9.3 Teorem den aşağıdaki teorem elde edilir:

1.11.1. Teorem

$\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbf{F}_{u,n}$ bir kenardır \Leftrightarrow

- a) $x \equiv ur \pmod{n}$ ve $ry - sx = n$ veya,
- b) $x \equiv -ur \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$. ■

Yukarıda incelenen Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde imprimitif hareketinin genel olarak irdelenmesinden, Γ nın $\mathbf{F}_{u,n}$ yi invaryant bırakan alt grubu $\Gamma_0(n)$ kongrüans alt grubudur. Böylece, $\Gamma_0(n) \leq \text{Aut}\mathbf{F}_{u,n}$ dir.

1.11.2. Tanım

$v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbf{F}_{u,n}$ de farklı köşelerin bir dizisi olmak üzere, $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ ve $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots$ yapılandırılmalarına sırası ile $\mathbf{F}_{u,n}$ de bir *yol* ve bir *sonsuz yol* adı verilir.

$m \geq 3$ ve v_1, v_2, \dots, v_m farklı köşelerin bir dizisi olmak üzere, $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m \rightarrow v_1$ şeklindeki bir yapılandırma bir yönlü (yönlendirilmiş) devre, en az bir ok (hepsi değil) ters ise ters yönlendirilmiş devre adını alır.

Eğer $m = 3$ ise, yönlendirilmiş olsun veya olmasın devreye bir *üçgen* denir. Eğer $m = 2$ ise, $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$ yapılandırılmasını kendisiyle eşleşmiş bir kenar olarak adlandıracağız.

Eğer bir graf herhangi bir devre içermiyor ise bu grafa bir *orman* denir.

$v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbf{F}_{u,n}$ de farklı köşelerin bir dizisi olmak üzere, $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ yoluna *minimal uzunlukludur* denir : $\Leftrightarrow t \geq 2$ olmak üzere, $v_l \leftrightarrow v_{l+t}$ olacak şekilde $l \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ yoktur.

1.11.3. Teorem [5]

$\Gamma_0(n)$, $\mathbf{F}_{u,n}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder. ■

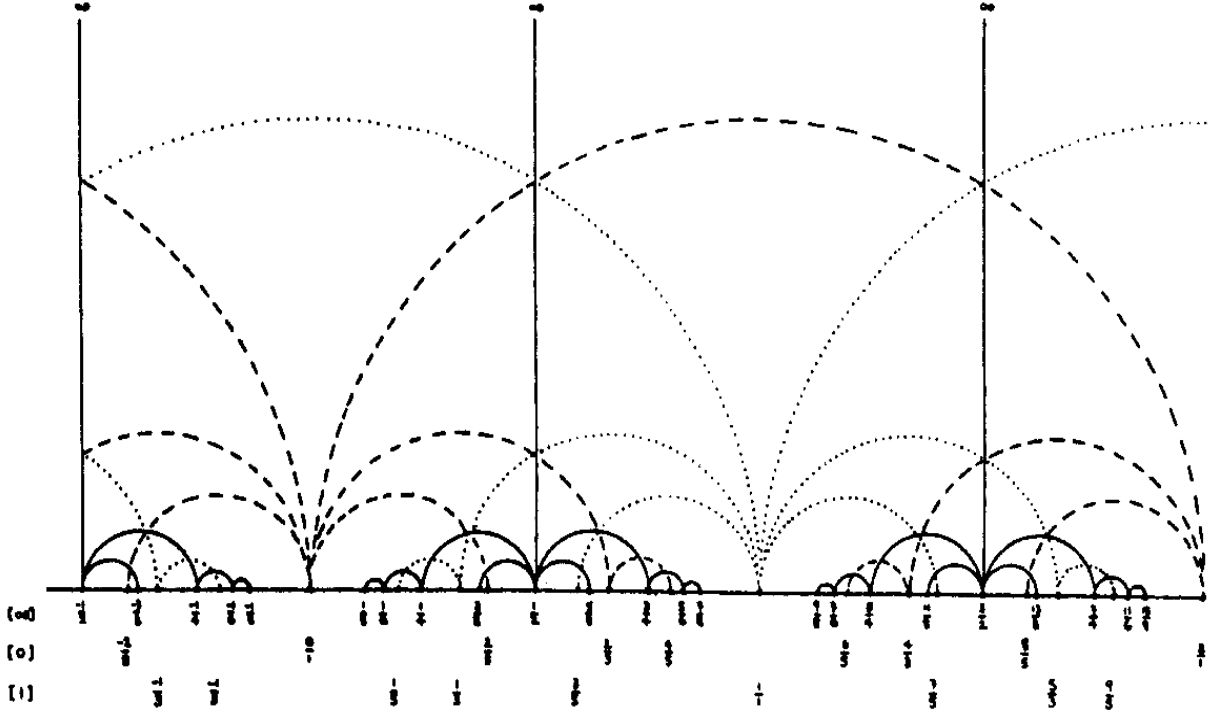
1.11.4. Lemma [5]

- (i) $\mathbf{F}_{u,n}$ nin bütün v köşeleri için $v \rightarrow -v$ ile verilen $\mathbf{F}_{u,n} \rightarrow \mathbf{F}_{-u,n}$ izomorfizmi vardır;
- (ii) Eğer $m|n$ ise buradan, $\mathbf{F}_{u,n}$ nin bütün v köşeleri için $\mathbf{F}_{u,n}$ den bir $\mathbf{F}_{u,m}$ alt grafına, $v \rightarrow \frac{nv}{m}$ ile verilen $\mathbf{F}_{u,n} \rightarrow \mathbf{F}_{u,m}$ izomorfizmi vardır. ■

(ii) de $m = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

1.11.5. Sonuç [5]

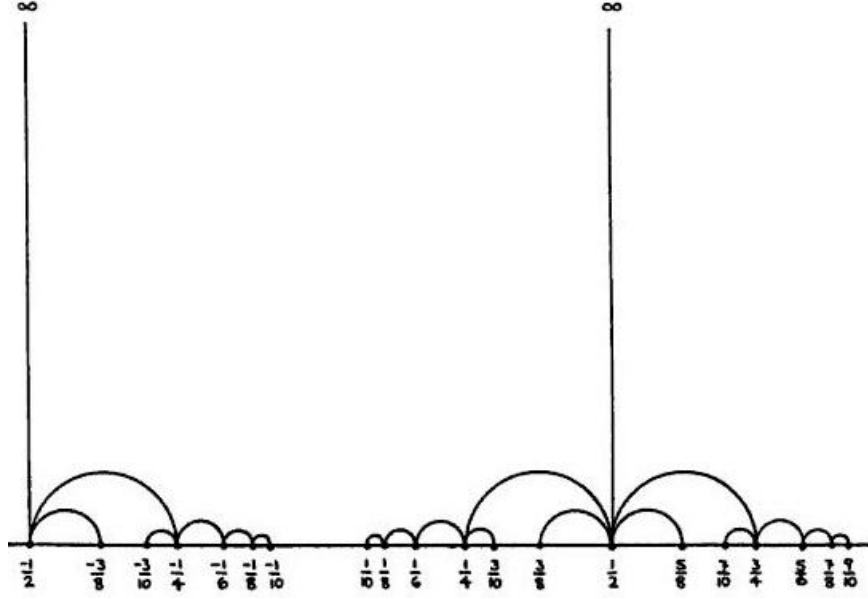
$\mathbf{F}_{u,n}$ nin bütün v köşeleri için $f: v \rightarrow nv$ ile verilen, $\mathbf{F}_{u,n}$ den bir \mathbf{F} alt grafına, $\mathbf{F}_{u,n} \rightarrow \mathbf{F}_{-u,n}$ izomorfizmi vardır. ■



Şekil 9. $\mathbf{G}_{1,2}$ grafi [5]

Şimdi Şekil 9 da gösterilen $\mathbf{G}_{1,2}$ grafına bakalım. s çift, r çift veya her ikisi tek olmak üzere, $\frac{r}{s} \in \hat{\mathbb{Q}}$ elemanlarını içeren, $[\infty]$, $[0]$ ve $[1]$ bloklarını gösteren sırasıyla kesik

olmayan, kesik ve noktalı (\mathbb{H} daki hiperbolik geodezikler ile gösterilen) biçimindeki kenarlar ile $\mathbf{F}_{1,2}$ nin $\psi(2) = 3$ tane izomorfik kopyasından oluşur. 1.9.5 Sonuç dan $\mathbf{G}_{1,2}$ ve böylece de $\mathbf{F}_{1,2}$ yönlendirilmemiştir. Şekil 10 da gösterilen bu graf, s çift olmak üzere r/s köşelerine sahiptir: r/s ve x/y arasında bir kenar vardır $\Leftrightarrow ry - sx = \pm 2$ dir.



Şekil 10. $\mathbf{F}_{1,2}$ grafi [5]

Şimdi $\mathbf{F}_{u,n}$ grafiındaki devreleri düşünelim. $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{1,1}$ Farey grafi üçgenler içerirken (bkz. Şekil 8), $\mathbf{F}_{1,3}$ yönlendirilmiş grafi

$$\infty \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \infty$$

şeklinde yönlendirilmiş üçgenler içerir.

1.11.6. Teorem

- (i) $\mathbf{F}_{u,n}$ yönlendirilmiş üçgen içerir $\Leftrightarrow u^2 \pm u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$;
- (ii) Eğer $n > 1$ ise bu takdirde $\mathbf{F}_{u,n}$ ters yönlendirilmiş üçgen içermez.

İspat

(i) Farzedelim ki, $\mathbf{F}_{u,n}$ yönlendirilmemiş bir üçgen içersin. 1.11.2 Teorem den $\mathbf{F}_{u,n}$ nin bir v köşesi için bu üçgenin

$$\infty \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow v \rightarrow \infty$$

şeklinde olduğunu varsayabiliriz. $v \rightarrow \infty$ kenarına 1.11.1 Teoremi uygulanırsa, bir $r \in \mathbb{Z}$ için $v = \frac{r}{n}$ şeklinde olduğunu görürüz. Gerçekten, $v := \frac{r}{s}$ şeklinde tanımlanırsa $\frac{r}{s} \xrightarrow{<} \frac{1}{0}$ kenarı için $r \cdot 0 - s \cdot 1 = -n \Rightarrow s = n$ elde edilir. Tekrar 1.11.1 Teorem ini $\frac{u}{n} \rightarrow v = \frac{r}{n}$ kenarına uygularsak, ya $r \equiv u^2 \pmod{n}$ ve $u - r = 1$ olup

$$u^2 - u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

veya $r \equiv -u^2 \pmod{n}$ ve $u - r = -1$ olup

$$u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

elde edilir. Gerçekten, birinci durumda kongrüans denkleminde $r = u^2 + bn$ olacak şekilde $b \in \mathbb{Z}$ mevcuttur ve $u - (u^2 + bn) = 1$ den $u^2 - u + 1 = -bn$ olup $u^2 - u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ve benzer şekilde ikinci durumda, $r = -u^2 + cn$ olacak şekilde $c \in \mathbb{Z}$ mevcuttur ve $u - (-u^2 + cn) = -1$ den $u^2 + u + 1 = cn$ olup $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ elde edilir.

Tersine, $u^2 \pm u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ise 1.11.1 Teorem den $\mathbf{F}_{u,n}$ de

$$\infty \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{u \pm 1}{n} \rightarrow \infty$$

şeklinde yönlendirilmiş bir üçgen vardır. Gerçekten, 1.11.1 Teorem den $\mathbf{F}_{u,n}$ de $\frac{u}{n} \xrightarrow{<} \frac{u+1}{n}$ ise; $u + 1 \equiv -u^2 \pmod{n}$ ve $un - (n(u + 1)) = -n$ olup $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$

elde edilir. Diğer taraftan, $\frac{u}{n} \rightarrow \frac{u-1}{n}$ ise; $u - 1 \equiv u^2 \pmod{n}$ ve $un - (n(u - 1)) = n$ olup $u^2 - u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ şartları sağlanır.

(ii) (i) de olduğu gibi bir $r \in \mathbb{Z}$ için

$$\infty \rightarrow \frac{u}{n} \leftarrow \frac{r}{n} \rightarrow \infty$$

şeklinde bir ters yönlendirilmiş üçgen olduğunu farzedelim. Ortadaki kenara 1.11.1 Teoremi uygularsak, ya $r \equiv 1 \pmod{n}$ ve $r - u = 1$ veya $r \equiv -1 \pmod{n}$ ve $r - u = -1$ bulunur. Gerçekten, 1.11.1 Teorem den $\mathbf{F}_{u,n}$ de $\frac{r}{n} \rightarrow \frac{u}{n}$ ise; $u \equiv ur \pmod{n}$ ve $rn - un = n$ olup $r \equiv 1 \pmod{n}$ ve $r - u = 1$ elde edilir. Diğer taraftan, $\frac{r}{n} \leftarrow \frac{u}{n}$ ise; $u \equiv -ur \pmod{n}$ ve $rn - un = -n$ olup $r \equiv -1 \pmod{n}$ ve $r - u = -1$ elde edilir. Her iki durumda da $u \equiv 0 \pmod{n}$ bulunur ki, $n > 1$ için u, \pmod{n} birimi olduğundan bu imkânsızdır. Çünkü birinci durumda kongrüans denkleminde $r = 1 + bn$ olacak şekilde $b \in \mathbb{Z}$ vardır ve buradan $r - u = 1 + bn - u = 1$ olduğundan $u = bn$ olup $u \equiv 0 \pmod{n}$ bulunur ki bu $(u, n) = 1$ olması ile çelişir. Benzer şekilde, ikinci durumda ise, $r = -1 + cn$ olacak şekilde $c \in \mathbb{Z}$ vardır ve buradan $r - u = -1 + cn - u = -1$ olduğundan $u = cn$ olup $u \equiv 0 \pmod{n}$ bulunur ki bu da $(u, n) = 1$ olması ile çelişir. ■

Kendisiyle eşleşmiş bir $\mathbf{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafi $u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ yi sağladığından 1.11.6 Teorem e göre $n > 1$ için üçgen içermez.

1.11.7. Teorem

$n > 1$ ise bu durumda tüm kendisiyle eşleşmiş $\mathbf{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafları birer ormandır.

İspat $\mathbf{G}_{u,n}, \mathbf{F}_{u,n}$ nin izomorfik kopyalarının ayrık bir birleşimi olduğundan, $\mathbf{F}_{u,n}$ nin hiçbir devre içermediğini göstermek yeterlidir. Eğer bir devre varsa 1.11.2 Teoremden bunu

$$\infty \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow \infty$$

şeklinde farzedebiliriz (bütün $k + 1$ köşeleri farklı). $\mathbf{F}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş olduğundan 1.11.1 Teorem ve 1.9.5 Sonuç a göre, $a_1, a_k \equiv u \pmod{n}$ olmak üzere $v_1 = \frac{a_1}{n}$ ve $v_k = \frac{a_k}{n}$ elde edilir. Böylece $v_1 - v_k \in \mathbb{Z}$ dir. $n > 1$ olduğundan $v_1, v_k \notin \mathbb{Z}$ ve böylece v_1 ile v_k arasında bir $m \in \mathbb{Z}$ elemanı vardır. Buradan $\mathbf{F}_{u,n}$ nin $v_i \rightarrow v_{i+1}$ kenarı \mathbb{H} da $Re(z) = m$ doğrusu ile kesişir. Böylece 1.11.5 Sonuç a göre \mathbf{F} nin $nv_i \rightarrow nv_{i+1}$ kenarı $Re(z) = nm$ ile kesişir. Ancak $Re(z) = nm$ \mathbf{F} nin kenarı olduğundan bu durum 1.10.2 Sonuç ile çelişir. ■

1.11.8. Sonuç

$\mathbf{G}_{1,2}$ bir ormandır. ■

1.11.9. Sonuç

Eğer n çift ise $\mathbf{G}_{u,n}$ bir ormandır

İspat 1.11.8 Sonuç ve 1.11.4 Lemma (ii) den ($m = 2$) sonuç aşikârdır. ■

1.11.10. Teorem: [5]: $n > 1$ herhangi bir tamsayı olsun. Bu takdirde,

$\mathbf{G}_{u,n}$ bir ormandır $\Leftrightarrow \mathbf{G}_{u,n}$ üçgen içermez; yani, $u^2 \pm u + 1 \not\equiv 0 \pmod{n}$. ■

1.12. Sürekli Kesirlerin Temel Özellikleri

Bir sürekli kesir $a_m \neq 0$ olmak üzere a_1, a_2, a_3, \dots ve b_0, b_1, b_2, \dots karmaşık sayıları ile, $\{f_n\}$ genişletilmiş karmaşık düzlemde

$$T_0(z) = t_0(z); T_n(z) := T_{n-1}(t_n(z)), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

ve

$$t_0(z) = b_0 + z; t_n(z) = \frac{a_n}{b_n + z}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

ve ayrıca

$$f_n = T_n(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

olarak verilen bir dizi olmak üzere

$$\langle\langle \{a_m\}, \{b_m\} \rangle, \{f_n\} \rangle$$

sıralı ikilisidir.

Sürekli kesir algoritması her bir

$$\langle \{a_m\}, \{b_m\} \rangle$$

sıralı ikilisini (26) ile tanımlanan $\{f_n\}$ dizisine karşılık getiren \mathbf{K} fonksiyonudur. Bu \mathbf{K} sembolü bir Alman kelimesi olan *Kettenbruch* dan gelmektedir ve (sonsuz) toplamlar için gösterilen Σ sembolü ile benzerdir. a_m ve b_m sayılarına sırası ile sürekli kesirin *m. kısmi pay* ve *m. kısmi paydası* adı verilir. Bazen bunlara kısaca *elemanlar* denir ve f_n ye de *n. yaklaşım* adı verilir. Bazı kaynaklarda yaklaşım yerine yakınsak da kullanılır.

$T_n(z)$ lineer kesirli dönüşümü

$$T_n(z) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n + z}}}} \quad (27)$$

veya daha kullanışlı bir şekilde

$$T_n(z) = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a_n}{b_n + z} \quad (28)$$

şeklinde ifade edilir.

Buna denk olarak

$$T_n(z) = t_0 \circ t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_n(z) \quad (29)$$

dir. Burada “o” ile *bileşke* işlemi

$$t_0 \circ t_1(z) := t_0(t_1(z))$$

olarak verilir. Özellikle

$$t^n(z) := \underbrace{t \circ t \circ \cdots \circ t}_n(z)$$

dir.

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $\{z_n\}$ dizisi verilsin. Bu takdirde

$$T_n(z_n) \in \hat{\mathbb{C}} \quad (30)$$

sayısına *n. değiştirilmiş yaklaşım* denir.

Eğer $\{a_m\}$ ve $\{b_m\}$ dizileri sonlu değilse

$$\langle\langle \{a_m\}, \{b_m\} \rangle\rangle, \{f_n\}$$

ifadesine *sonsuz (veya yok edilemeyen) sürekli kesir*, aksi halde; yani, $\{a_m\}$ ve $\{b_m\}$ dizileri a_1, a_2, \dots, a_t ve b_0, b_1, \dots, b_t gibi sonlu terimlere sahip ise *sonlu sürekli kesir* denir. Bundan sonra bir sürekli kesir aksi belirtilmedikçe sonsuz olarak kabul edilecektir. Bir sürekli kesiri, (24), (25) ve (26) denklemleri anlamında tanımlamak için kesirli lineer dönüşümlerin önemli bir rolü vardır. Görülebilir ki *n. yaklaşım*

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}} \quad (31)$$

ile verilir. Böylece $\langle\langle\{a_m\}, \{b_m\}\rangle\rangle, \{f_n\}$ sürekli kesiri genellikle

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \quad (32)$$

sembolü ile gösterilir.

Uygunluk açısından bir $\langle\langle\{a_m\}, \{b_m\}\rangle\rangle, \{f_n\}$ sürekli kesirini aşağıdaki sembollerden biri ile göstereceğiz:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots \quad (33)$$

$$b_0 + \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_m} \right) \text{ veya kısaca } b_0 + \mathbf{K}(a_m/b_m) \text{ veya } b_0 + \mathbf{K}\left(\frac{a_m}{b_m}\right) \quad (34)$$

Benzer şekilde (31) denkleminin yerine $f_n = T_n(0)$ n . yaklaşımı

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \quad (35)$$

veya

$$f_n = b_0 + \prod_{m=1}^n \left(\frac{a_m}{b_m} \right) \quad (36)$$

ile gösterilebilir. Ayrıca

$$b_0 + \frac{(-a_1)}{b_1} + \frac{(-a_2)}{b_2} + \frac{(-a_3)}{b_3} + \dots \quad (37)$$

sürekli kesiri

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} - \dots \quad (38)$$

ile gösterilecektir. (32),(33) ve (34) sembollerine ek olarak literatürde 1898 de Pringsheim tarafından verilen

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1|} + \frac{a_2|}{|b_2|} + \frac{a_3|}{|b_3|} + \dots \quad (39)$$

notasyonu da vardır.

1.12.1. Yakınsaklık

Bir $b_0 + \mathbf{K}(a_m/b_m)$ sürekli kesiri *yakınsaktır* denir $\Leftrightarrow \{f_n\} = \{T_n(0)\}$ yaklaşımlar dizisi bir $f \in \hat{\mathbb{C}}$ değerine yakınsar. Bu durumda f ye bu sürekli kesirin *değeri* denir. Burada ∞ a yakınsamanın kabul edildiğine dikkat edilmelidir. Buradan

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(0) = b_0 + \mathbf{K}_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_m} \right) \quad (40)$$

yazılır. Buna *klasik yakınsaklık* adı verilir.

Örneğin;

$$\frac{-1}{-3 + \frac{-1}{-3 + \frac{-1}{-3 + \dots}}} = \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \dots}}}$$

sürekli kesiri için

$$\frac{1}{3 - T_{n-1}(0)} = T_n(0)$$

olup

$$T_n(0)[3 - T_{n-1}(0)] = 1$$

dir. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n-1}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(0) = f$$

olduğundan

$$f(3 - f) = 1 \text{ olup } f^2 - 3f + 1 = 0 \text{ ve buradan da } f = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

elde edilir. Buradan ise $|f| \leq 1$ olup bu sürekli kesir için

$$f = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(0)$$

değeri bulunur. Bu durumda $\mathbf{K}(-1/-3)$ sürekli kesiri f değerine yakınsar.

1.12.2. Yinelenme Bağlıları

Bir $b_0 + \mathbf{K}(a_m/b_m)$ sürekli kesirinin n . pay A_n ve n . paydası B_n değerleri aşağıdaki yinelenme bağıntıları (ikinci mertebeden lineer fark denklemleri) ile bulunur.

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} := b_n \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} + a_n \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

Burada başlangıç koşulları ise

$$A_{-1} := 1, B_{-1} := 0, A_0 := b_0, B_0 := 1 \quad (42)$$

olarak tanımlanır.

(30) ile verilen $T_n(z_n)$ değiştirilmiş yaklaşımı

$$T_n(z_n) = \frac{A_n + A_{n-1} z_n}{B_n + B_{n-1} z_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (43)$$

olarak yazılabilir ve böylece f_n n . yaklaşımı

$$f_n = T_n(0) = \frac{A_n}{B_n}, \quad f_{n-1} = T_n(\infty) = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} \quad (44)$$

olarak elde edilir.

Örneğin;

$$\frac{2}{1} + \frac{1}{1} + \frac{-1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{1}{1} + \frac{-1}{1} + \dots \quad (45)$$

sürekli kesiri için (41) ve (42) yinelenme bağıntıları kullanılarak $\forall n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} A_{3n-2} &= 2^n, & A_{3n-1} &= 2^n, & A_{3n} &= 0 \\ B_{3n-2} &= 2^{n+1} - 3, & B_{3n-1} &= 2^{n+1} - 2, & B_{3n} &= 1. \end{aligned} \quad (46)$$

elde edilir. Buradan (45) sürekli kesiri için

$$t_0(z) = b_0 + z = 0 + z = z,$$

$$t_1(z) = \frac{a_1}{b_1 + z} = \frac{2}{1 + z}, \quad t_2(z) = \frac{a_2}{b_2 + z} = \frac{1}{1 + z}, \quad t_3(z) = \frac{a_3}{b_3 + z} = \frac{-1}{1 + z}, \dots$$

$$T_0(z) := t_0(z) = z$$

$$T_1(z) = T_0(t_1(z)) = T_0\left(\frac{2}{1+z}\right) = \frac{2}{1+z}$$

$$T_2(z) = T_1(t_2(z)) = T_1\left(\frac{1}{1+z}\right) = \frac{2}{1 + \frac{1}{1+z}}$$

$$T_3(z) = T_2(t_3(z)) = T_2\left(\frac{-1}{1+z}\right) = \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{-1}{1+z}}}$$

⋮

olup $f_n = T_n(0) \left(= \frac{A_n}{B_n}\right)$ olduğundan

$$f_1 = T_1(0) = 2$$

$$f_2 = T_2(0) = \frac{2}{1 + \frac{1}{1}} = 1$$

$$f_3 = T_3(0) = \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{-1}{1}}} = 0$$

⋮

elde edilir. Dolayısıyla $f_{3n-2}, f_{3n-1}, f_{3n}$ yaklaşımları sırasıyla

$$\frac{2^n}{2^{n+1} - 3}, \quad \frac{2^n}{2^{n+1} - 2}, \quad 0$$

olarak bulunur.

Örneğin (45) sürekli kesirinin klasik gösterimi

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{-1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{-1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}$$

olmak üzere 4. yaklaşım

$$f_4 = \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{-1}{1 + \frac{2}{1}}}} = \frac{4}{5}$$

olup, $n = 2$ için yinelenme bağıntılarından

$$f_{3n-2} = \frac{A_{3n-2}}{B_{3n-2}} = f_4 = \frac{A_4}{B_4} = \frac{2^2}{2^3 - 3} = \frac{4}{5}$$

elde edilir.

1.12.3. Determinant Formülü

Burada n . pay A_n ve n . payda B_n

$$\begin{vmatrix} A_n & A_{n-1} \\ B_n & B_{n-1} \end{vmatrix} = A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \prod_{m=1}^n a_m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

determinant formülünü sağlarlar.

Örneğin, (45) sürekli kesirini göz önüne alırsak; $n = 2$ için $A_4 = 4$, $B_4 = 5$ ve $n = 1$ için $A_3 = 0$, $B_3 = 1$ olup determinant formülünü hesaplırsak

$$(-1)^3 \prod_{m=1}^4 a_m = (-1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 4$$

bulunur. Gerçekten, $\begin{vmatrix} A_4 & A_3 \\ B_4 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4$ dür.

1.12.4. Sürekli Kesirlerin Matris Bağlantısı

n . payı A_n ve n . paydası B_n olan $\mathbf{K}(a_m/b_m)$ sürekli kesiri verilsin ve

$$t_m(z) := \frac{a_m}{b_m + z}, x_m := \begin{pmatrix} 0 & a_m \\ 1 & b_m \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (48)$$

olsun. Bu durumda (29) ve (43) ile verilen $T_n(z)$ lineer kesirli dönüşümü

$$X_n := x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (49)$$

matrisine karşılık gelir.

Böylece 2x2 lik bu matrislerin çarpımı $\{A_n\}, \{B_n\}$ ile (26) ve (44) ile verilen f_n n . yaklaşımının $\{f_n\}$ dizilerinin oluşumunda kullanılabilir.

Daha genel bir ifadeyle eğer

$$t_m(z) := \frac{a_m + c_m z}{b_m + d_m z}, y_m := \begin{pmatrix} c_m & a_m \\ d_m & b_m \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (50)$$

ise buradan

$$T_n(z) := t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ \dots \circ t_n(z) = \frac{A_n + C_n z}{B_n + D_n z}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (51)$$

ve

$$Y_n := y_1 y_2 y_3 \dots y_n = \begin{pmatrix} C_n & A_n \\ D_n & B_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (52)$$

dir.

Örneğin, (45) sürekli kesirinin matris bağlantısını incelersek;

$$T_3(z) = t_1 \circ t_2 \circ t_3(z) ;$$

$$t_3(z) = \frac{-1}{1+z}, t_2(z) = \frac{1}{1+z}, t_1(z) = \frac{2}{1+z}, t_0(z) = z \text{ ve}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$T_3(z) = \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{-1}{1+z}}} = \frac{2z}{1+2z}$$

$$\left\{ = \frac{A_3 + A_2z}{B_3 + B_2z} \right\}$$

lineer kesirli dönüşümüne

$$X_3 = x_1 x_2 x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ = \begin{pmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} \right\}$$

matrisi karşılık gelir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. Farey Grafının Bilgisayar ile Çizdirilmesi

1.10. Bölüm de değindiğimiz $\mathbf{F} = \mathbf{G}_{1,1}$ Farey grafi için örnek olarak verilen Şekil 8. deki grafi bir algoritma oluşturarak ve MATLAB bilgisayar programı ile programlayarak çizmeye çalışalım. Burada öncelikle, \mathbf{F}_m -Farey dizilerine ($m \geq 1$) karşılık gelen \mathbf{F} -Farey grafları, 1-periyotlu olup, her bir parçasının izomorfik kopyalarının ayrık birleşimi şeklinde oluşur. Dolayısı ile bu grafi $[0,1]$ kapalı aralığında çizmemiz yeterli olacaktır. Ayrıca burada ∞ ile işaretlenmiş bir köşe ekleyerek bunu 0 ve 1 ile birleştireceğiz. Böylece 1.10.1. Lemma dan $\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ indirgenmiş rasyoneller olmak üzere

$$0 \leq \frac{r}{s}, \frac{x}{y} \leq 1 \Rightarrow \mathbf{F}_m \cap [0,1]$$

yani, \mathbf{F}_m -Farey dizilerini $[0,1]$ aralığına kısıtlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 \cap [0,1] : & \quad 0 \overset{\sim}{,} 1 \\ \mathbf{F}_2 \cap [0,1] : & \quad 0 \overset{\sim}{,} \frac{1}{2} \overset{\sim}{,} 1 \\ \mathbf{F}_3 \cap [0,1] : & \quad 0 \overset{\sim}{,} \frac{1}{3} \overset{\sim}{,} \frac{1}{2} \overset{\sim}{,} \frac{2}{3} \overset{\sim}{,} 1 \\ \mathbf{F}_4 \cap [0,1] : & \quad 0 \overset{\sim}{,} \frac{1}{4} \overset{\sim}{,} \frac{1}{3} \overset{\sim}{,} \frac{1}{2} \overset{\sim}{,} \frac{2}{3} \overset{\sim}{,} \frac{3}{4} \overset{\sim}{,} 1 \\ \mathbf{F}_5 \cap [0,1] : & \quad 0 \overset{\sim}{,} \frac{1}{5} \overset{\sim}{,} \frac{1}{4} \overset{\sim}{,} \frac{1}{3} \overset{\sim}{,} \frac{2}{5} \overset{\sim}{,} \frac{1}{2} \overset{\sim}{,} \frac{2}{3} \overset{\sim}{,} \frac{3}{5} \overset{\sim}{,} \frac{3}{4} \overset{\sim}{,} \frac{4}{5} \overset{\sim}{,} 1 \\ & \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

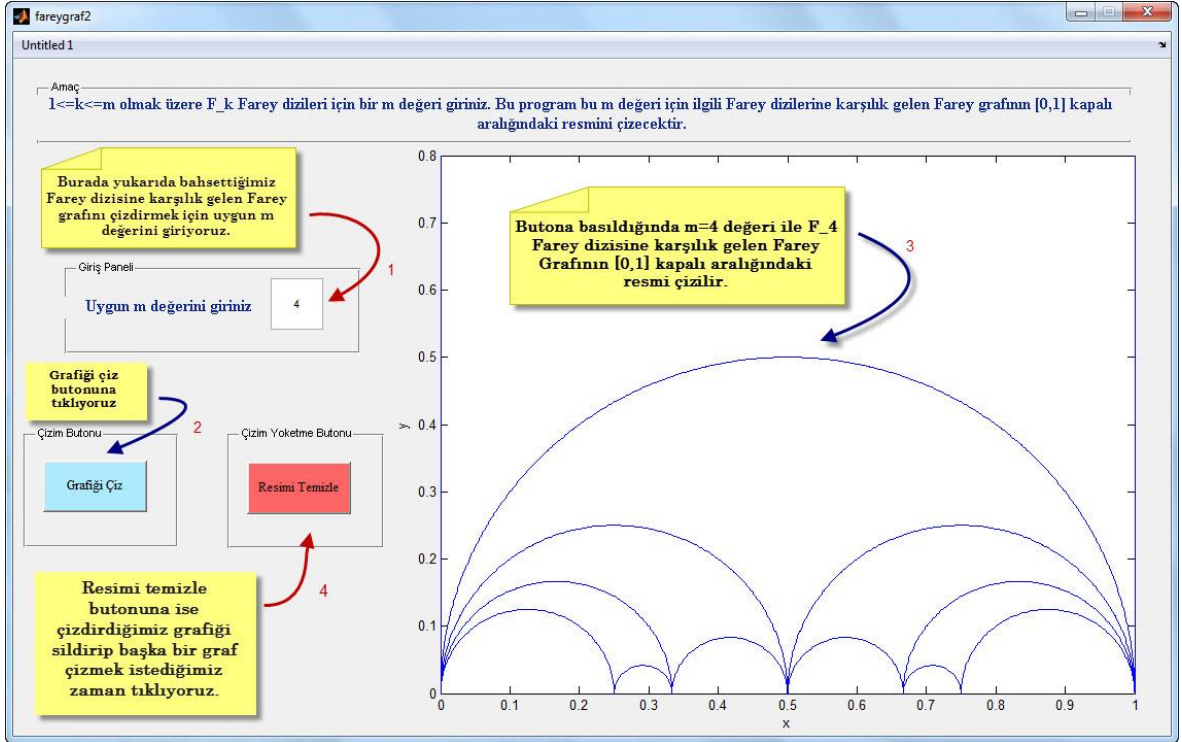
Farey dizileri elde edilir. Burada program şu şekilde çalışmaktadır: örneğin $m = 4$ değeri girildiğinde program ilk olarak 0 ve 1 i ∞ a bağlayacaktır. Daha sonra \mathbf{F}_1 -Farey dizisinin elemanlarını oluşturup bu elemanları yani, 0 ve 1 i bu diziye karşılık gelen \mathbf{F} -Farey grafının $[0,1]$ kapalıaralığındaki köşeleri olarak alıp, bu dizideki komşu terimleri birbirine bağlayarak ilk kenarı oluşturacaktır ($0 \rightarrow 1$). İkinci olarak \mathbf{F}_2 -Farey dizisinin elemanlarını oluşturup, bu elemanları yani, $0, \frac{1}{2}$ ve 1 i bu diziye karşılık gelen \mathbf{F} -Farey grafının $[0,1]$

kapalı aralığındaki köşeleri olarak alıp bu dizideki komşu terimleri birbirine bağlayarak iki kenar daha oluşturacaktır ($0 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 1$). Benzer şekilde \mathbf{F}_3 ve \mathbf{F}_4 -Farey dizilerinin elemanları ile geriye kalan kenarlar $0 \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow 1$ ve $0 \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{4} \rightarrow 1$ şeklinde oluşturulacak ve sonuç olarak istenen graf çizdirilecektir. Daha önce değindiğimiz gibi bu kenarlar \mathbb{H} üst yarı düzlemindeki Öklid yarı-çemberleri veya \mathbb{R} ye dik olan Öklid yarı-doğruları şeklindeki hiperbolik geodezikler olarak gösterilecektir.

Şimdi m nin değerlerine bağlı olarak \mathbf{F}_m -Farey dizilerine karşılık gelen Farey graflarını çizmek için $1 \leq k \leq m$ olmak üzere yukarıda elde edilen monoton artan \mathbf{F}_k -Farey dizilerini oluşturan ve buna bağlı olarak ilişkili Farey grafını çizdiren MATLAB programlama kodunu verelim:

```
function fareygraf(m)
F=0;
format rat
for i=1:m
    for x=0:i
        for y=0:i
            if x/y<=1
                F=[F;x/y];
            end
        end
    end
end
F=sort(F);
n=length(F);
syms x y
ezplot('x+0*y=0',[0,1,0,1])
hold on
ezplot('x+0*y=1',[0,1,0,1])
for i=1:n-1
    A=(F(i)+F(i+1))/2;
    B=abs(F(i)-A);
    y=strcat(' (x-', 'a' ^', '2+', 'y^', '2=', 'b^2');
    yg=subs(y,{'a','b'},[A,B]);
    ylim([0 0.8])
    ezplot(yg,[0,1,0,1])
    title('')
    hold on
    pause(0.005)
end
end
```

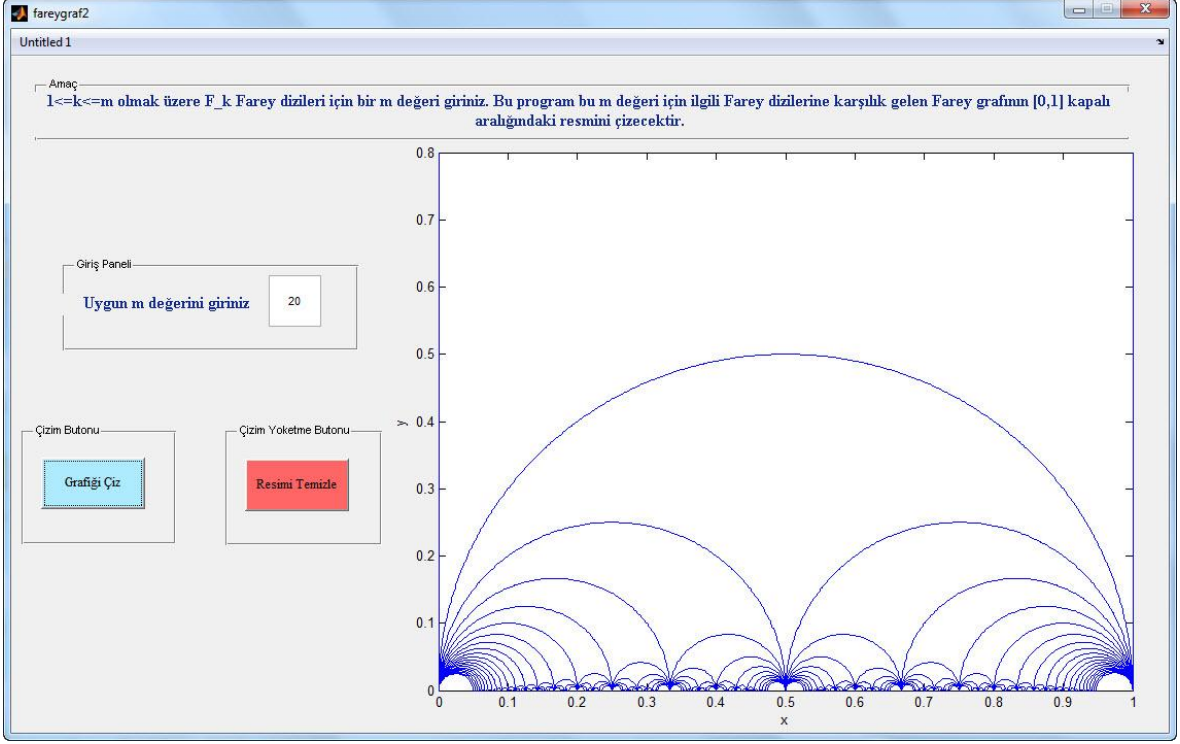
Burada dikkat edilirse yukarıda verilen F_k -Farey dizi elemanları otomatik olarak $ry - sx = \pm 1$ şartını sağladıklarından, bu şart ile birlikte r ve s değerleri programlama kodunda kullanılmamıştır. Bu şartlar azaldığı için programı çalıştırdığımızda hız konusunda avantaj sağlayacaktır. Yani, graf daha hızlı çizdirilmiştir. Şimdi bu noktadan sonra MATLAB programının GUI (Graphical User Interface) sini yani, grafiksel arayüzünü hazırlamak görselliği sağlayacaktır.



Şekil 11. $m = 4$ 'e karşılık gelen $F = G_{1,1}$ Farey grafinin $[0,1]$ aralığındaki resmi

Şekil 11 de bu grafiksel arayüzün kullanımı ile ilgili bilgiler verilmiştir. Bu arayüz yukarıda verilen MATLAB programlama kodu ile çalışmaktadır.

m değerine göre bu GUI ile birlikte programın çizdiği şekillere bakarak bazı yorumlar getirebiliriz. Örneğin, m değerini giderek arttırdığımızda çizilen graflara bakarsak bu graflardaki kenarların da giderek daha çok sıklaştığını ve boyut olarak daha küçük bir hal aldıklarını gözlemleyebiliriz.



Şekil 12. $m = 20$ 'ye karşılık gelen $F = G_{1,1}$ Farey grafının $[0,1]$ aralığındaki resmi

Şekil 11 ve Şekil 12 de sırasıyla, arayüz ile çizdirdiğimiz, $m = 4$ e karşılık Şekil 8 de verilen grafın $[0,1]$ kapalı aralığındaki resmi ve $m = 20$ ye karşılık gelen Farey grafının yine $[0,1]$ kapalı aralığındaki resmi verilmiştir.

Burada Matlab GUI programlama kodunu verelim:

```
function varargout = fareygraf2(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                  'gui_Singleton',   gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @fareygraf2_OpeningFcn,
                  ...
                  'gui_OutputFcn',  @fareygraf2_OutputFcn,
                  ...
                  'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                  'gui_Callback',    []);

if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
```

```

if nargin
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State,
varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function fareygraf2_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles,
varargin)

handles.output = hObject;

guidata(hObject, handles);

function varargout = fareygraf2_OutputFcn(hObject, eventdata,
handles)

varargout{1} = handles.output;

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)

m=str2double(get(handles.edit1,'String'));
F=0;
format rat
for i=1:m
    for x=0:i
        for y=0:i
            if x/y<=1
                F=[F;x/y];
            end
        end
    end
end
F=sort(F);
n=length(F);
syms x y
ezplot('x+0*y=0',[0,1,0,1])
hold on
ezplot('x+0*y=1',[0,1,0,1])
for i=1:n-1
    A=(F(i)+F(i+1))/2;
    B=abs(F(i)-A);
    y=strcat('(x-', 'a' ^', '2+', 'y^', '2=', 'b^2');

```



```

yg=subs(y,{'a','b'},[A,B]);
    ylim([0 0.8])
    ezplot(yg,[0,1,0,1])
    title('')
    hold on
    pause(0.005)
end
end

function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)

axes(handles.axes1); cla reset;

function text1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
function slider1_Callback(hObject, eventdata, handles)
function slider1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor',[.9 .9 .9]);
end

function Untitled_1_Callback(hObject, eventdata, handles)
function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

1.10.2. Sonuç dan biliyoruz ki \mathbf{F} nin kenarları \mathbb{H} üst yarı düzleminde kesişmez. Dolayısı ile dikkat edilirse \mathbf{F}_k -Farey dizileri için $m = 20$ değeri büyük bir değer olmasına ve mesafeler iyice daralmasına rağmen Şekil 14. de verilen \mathbf{F} Farey grafının kenarları kesişmez.

2.2. $\Gamma_0(n)$ Grubunun Alt Yörüngesel Grafları ile Sürekli Kesirler

2.2.1. Sonuç

$(u, n) = 1$ ise $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ olan bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

İspat $(u, n) = 1$ olduğundan $ux + ny = 1$ olan $x, y \in \mathbb{Z}$ elemanları vardır. Buradan $ux \equiv 1 \pmod{n}$ dir. Böylece $ux(-u^2 - 1) \equiv -u^2 - 1 \pmod{n}$ dir. $k := x(-u^2 - 1)$ alınırsa $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ elde edilir. ■

2.2.2. Teorem $F_{u,n}$ grafi için $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ve $1 \leq k \leq n$ olsun.

Buradan;

- a) $\frac{u}{n}$ köşesinin gideceği en uzak köşe $\frac{u+\frac{1}{k}}{n} = \frac{ku+1}{kn}$ ve $\frac{u}{n}$ köşesinin gittiği en yakın köşe yoktur;
- b) $\frac{u+\frac{1}{k}}{n}$ köşesinin gideceği en uzak köşe $\frac{u+\frac{1}{k-\frac{1}{k}}}{n} = \frac{(k^2-1)u+k}{(k^2-1)n}$ ve $\frac{u+\frac{1}{k}}{n}$ köşesinin gittiği en yakın köşe yoktur.

İspat

a) $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ve $\frac{u}{n} \in \mathbb{Q}$ noktası $[\infty] = \{c/d \in \mathbb{Q} : d \equiv 0 \pmod{n}\}$ bloğunda olduğundan, $\frac{u}{n} \in F_{u,n}$ grafında bir köşedir. Farzedelim ki,

$$\frac{u}{n} < \frac{u + \frac{a}{b}}{n} = \frac{bu + a}{n}$$

olsun. Bu takdirde 1.11.1. Teoremindeki kenar şartından;

$$ub + a \equiv -uu \pmod{n} \text{ ve } ubn - n(bu + a) = -n$$

dir. Buradan $a = 1$ elde edilir. Bu durumda

$$\frac{u}{n} < \frac{ub + a}{bn}$$

için 1.11.1. Teoremindeki kenar şartından elde edilen $a = 1$ eşitliğini yerine yazarsak, $ub + 1 \equiv -u^2 \pmod{n}$ olup $u^2 + ub + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ elde edilir. Böylece sonuç olarak

$u^2 + 1 \equiv -ku \pmod{n}$ kongrüans denkleminde $-ku + ub \equiv 0 \pmod{n}$ ve buradan da $b \equiv k \pmod{n}$ elde edilir. Dolayısı ile $b := k + nx$, $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dir. Böylece de

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{k + nx}$$

dir. Bu takdirde;

$$f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{u + \frac{1}{k + nx}}{n} = \frac{uk + unx + 1}{kn + n^2x}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu kesin azalan bir fonksiyondur. Gerçekten, bu fonksiyonun türevine bakacak olursak

$$f'(x) = -\frac{un}{n^2x + kn} - \frac{unx + ku + 1}{(nx + k)^2} = \frac{-1}{(k + nx)^2} < 0$$

dir. Bu yüzden f fonksiyonunun alabileceği en büyük değer $x = 0$ noktasındaki değerdir ki bu değerde $\frac{u + \frac{1}{k}}{n}$ dir. Yani,

$$\frac{u}{n} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k}}{n} = \frac{ku + 1}{kn}$$

dir. Ayrıca burada

$$(ku + 1, kn) = 1$$

dir. Gerçekten, $(ku + 1, k) = 1$ olduğu aşikârdır. Diğer taraftan $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ve $(u, n) = 1$ olduğundan

$$(ku + 1, n) = 1$$

olup $\frac{u+\frac{1}{k}}{n}$ $F_{u,n}$ grafında bir köşedir ve $\frac{u}{n}$ köşesinin gittiği en uzak köşedir.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{uk+unx+1}{kn+n^2x} \right) = \frac{u}{n}$ olduğundan $\frac{u}{n}$ köşesinin gittiği en yakın köşe sözkonusu olamaz. Çünkü $\frac{u}{n}$ köşesinin gittiği köşeden daha küçük sonsuz köşe vardır.

b) $\frac{ku+1}{kn} \in \mathbb{Q}$ noktası $F_{u,n}$ grafında bir köşedir. Farzedelim ki,

$$\frac{u + \frac{1}{k}}{n} = \frac{ku + 1}{kn} < \frac{u + \frac{t}{s}}{n} = \frac{su + t}{sn}$$

olsun. Bu takdirde 1.11.1. Teoremin deki kenar şartından;

$$us + t \equiv -u(ku + 1) \pmod{n} \text{ ve } (ku + 1)sn - kn(us + t) = -n$$

dir. Buradan $s = kt - 1$ elde edilir. Bu durumda

$$\frac{ku + 1}{kn} < \frac{us + t}{sn}$$

için 1.11.1. Teoremin deki kenar şartından elde edilen $s = kt - 1$ eşitliğini yerine yazarsak $u(kt - 1) + t \equiv -ku^2 - u \pmod{n}$ kongrüans denkleminde $ktu - u + t \equiv -ku^2 - u \pmod{n}$ ve buradan da $ktu + t + ku^2 \equiv 0 \pmod{n}$ olup $t(ku + 1) + ku^2 \equiv 0 \pmod{n}$ bulunur. Böylece sonuç olarak $ku + 1 \equiv -u^2 \pmod{n}$ olduğundan $-tu^2 + ku^2 \equiv 0 \pmod{n}$ ve buradan da $t \equiv k \pmod{n}$ elde edilir. Dolayısı ile $t := k + ny, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dir. Böylece de

$$\frac{t}{s} = \frac{k + ny}{k(k + ny) - 1}$$

dir. Bu takdirde;

$$g: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(y) := \frac{u + \frac{k + ny}{k(k + ny) - 1}}{n} = \frac{uk(ny + k) - u + k + ny}{nk(k + ny) - n}$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonu kesin azalan bir fonksiyondur. Gerçekten,

$$g'(y) = -\frac{k(ny + k)}{[k(k + ny) - 1]^2} + \frac{1}{k(ny + k) - 1} = \frac{-1}{[k(k + ny) - 1]^2} < 0$$

dir. Bu yüzden g fonksiyonunun alabileceği en büyük değer $y = 0$ noktasındaki değerdir

ki bu değer de $\frac{u + \frac{k}{k^2 - 1}}{n}$ dir. Yani,

$$\frac{ku + 1}{kn} \rightarrow \frac{u + \frac{k}{k^2 - 1}}{n} = \frac{(k^2 - 1)u + k}{(k^2 - 1)n}$$

dir. Ayrıca burada

$$((k^2 - 1)u + k, (k^2 - 1)n) = 1$$

dir. Geçekten, ilk önce $((k^2 - 1)u + k, k^2 - 1) = 1$ olduğunu gösterelim. Farzedelim ki $((k^2 - 1)u + k, k^2 - 1) = m$ olsun. Buradan $m|k^2 - 1$ olduğundan $m|u(k^2 - 1)$ ve $m|(k^2 - 1)u + k$ d $m|k$ elde edilir. $m|k^2 - 1$ olduğundan $m|-1$ olup $m = \mp 1$ dir.

Şimdi $((k^2 - 1)u + k, n) = 1$ olup olmadığını kontrol edelim:

$n_0 \neq 1$ olmak üzere $((k^2 - 1)u + k, n) = n_0$ olsun. Buradan

$$(k^2 - 1)u + k = k(ku + 1) - u \equiv 0 \pmod{n_0}; n \equiv 0 \pmod{n_0} \quad (53)$$

ve $ku + 1 \equiv -u^2 \pmod{n}$ olduğundan

$$ku + 1 = -u^2 + nb \equiv -u^2 \pmod{n_0} \quad (54)$$

olacak şekilde $b \in \mathbb{Z}$ mevcut olup $k(-u^2) - u \equiv 0 \pmod{n_0}$ kongrüans denkleminde $-ku - 1 \equiv 0 \pmod{n_0}$, yani $ku + 1 \equiv 0 \pmod{n_0}$ çelişkisi elde edilir. Çünkü (53) ve (54) den $u^2 \equiv 0 \pmod{n_0}$ denklemi elde edilir. Bu durumda $n_0 | u^2$ ve $(u, n) = 1$ olduğundan, $(u, n_0) = 1$ olup sonuç olarak $n_0 = 1$ dir. Buradan

$$((k^2 - 1)u + k, (k^2 - 1)n) = 1$$

olup $\frac{u + \frac{k}{k^2 - 1}}{n}$ $F_{u,n}$ grafında bir köşedir ve $\frac{ku+1}{kn}$ köşesinin gittiği en uzak köşedir.

$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{uk(ny+k) - u + k + ny}{nk(k+ny) - n} \right) = \frac{u + \frac{1}{k}}{n}$ olduğundan $\frac{ku+1}{kn}$ köşesinin gittiği en yakın köşe söz konusu olamaz. Çünkü $\frac{ku+1}{kn}$ köşesinin gittiği köşeden daha küçük sonsuz köşe vardır. ■

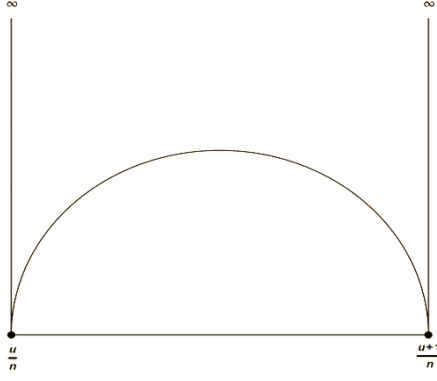
2.2.3. Teorem Aşağıdaki sonuçlar birbirine denktir:

- (i) $F_{u,n}$ grafında bir K kapalı eğrisi vardır
- (ii) K kapalı eğrisi bir üçgendir
- (iii) $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$.

İspat 2.2.2. Teorem den

$$\frac{1}{0} \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k}}{n} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k}}{k - \frac{1}{k}}$$

dir. Buradan $k = 1$ olduğunda yani, $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ise $\infty \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{u+1}{n} \rightarrow \infty$ üçgeni elde edilir. Ayrıca 1.11.10. Teorem den ve $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ kongrüans denkleminde $F_{u,n}$ grafi orman değildir. Yani, $F_{u,n}$ grafında bir K kapalı eğrisi vardır ve bu K kapalı eğrisi bir üçgendir.



Şekil 13. K kapalı hiperbolik eğrisi

2.3. Minimal Uzunluklu Hiperbolik Yollar ve Sürekli Kesirler

Bu bölümde sürekli kesirler ile alt yörüngesel grafların minimal uzunluklu hiperbolik yolları arasındaki ilişki verilecektir.

2.3.1. Teorem $k \in \mathbb{N}$ ve $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ olsun. Bu takdirde;

- $1 < k < n$ için $\mathbf{F}_{u,n}$ grafindaki her yol minimal uzunlukludur;
- $k = 1$ için $\mathbf{F}_{u,n}$ grafindaki herhangi bir yolun minimal uzunluklu olması gerekmez.

İspat

a) Farzedelim ki $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_n$ yolu minimal uzunluklu olmasın. Bu durumda $m + 1 < l \leq n$ olmak üzere $a_m \rightarrow a_l$ olan $m, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vardır. Buradan $a_m \rightarrow a_{m+1} \rightarrow \dots \rightarrow a_l \leftarrow a_m$ kapalı hiperbolik yolu elde edilir. Bu ise 2.2.3. Teorem ile çelişir. Sonuç olarak $\mathbf{F}_{u,n}$ grafindaki bütün yollar minimal uzunlukludur.

b) $u = 2$ ve $n = 7$ alınırsa $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ dir. Bu durumda 1.11.1. Teorem den $\frac{1}{7} \rightarrow \frac{5}{4.7} \rightarrow \frac{4}{3.7} \rightarrow \frac{1}{7}$ dir. $\frac{1}{7} \leftarrow \frac{4}{3.7}$ $\mathbf{F}_{2,7}$ de bir hiperbolik yol olduğundan $\frac{1}{7} \rightarrow \frac{5}{4.7} \rightarrow \frac{4}{3.7}$ minimal uzunluklu bir yol değildir. Diğer taraftan 1.11.1. Teorem den $\frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{64}{245}$ olamayacağından $\frac{2}{7} \rightarrow \frac{11}{42} \rightarrow \frac{64}{245}$ $\mathbf{F}_{2,7}$ grafinda minimal uzunlukludur. ■

Möbiüs dönüşümlerinin bir sürekli kesiri $a_m \neq 0$ olmak üzere;

$$t_m(z) = \frac{a_m}{b_m + z} \quad (55)$$

şeklinde tanımlanan bir $\{t_m\}$ Möbiüs dönüşümleri dizisi ile veriliyor idi. Bu dönüşümler genişletilmiş karmaşık düzlemi kendi üzerine resmederler.

$$t_1(0), t_1 t_2(0), t_1 t_2 t_3(0), \dots \quad (56)$$

değerleri ile

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \quad (57)$$

gibi sürekli bir kesire ulaşıldığı açıktır. (57) ifadesi, eğer mevcut ise, $t_1 t_2 \dots t_m(0)$ ifadesinin limit değeridir. Bu tanım yakınsaklığın klasik tanımından başka bir şey değildir. (57) ifadesinde her $m \geq 1$ için $a_m \neq 0$ kabul etmek üzere;

$$T_m(z) := t_1 t_2 \dots t_m(z) \quad (58)$$

notasyonunu kullanacağız. Burada T_0 ı birim dönüşüm olarak alacağız. (57) ifadesinin yakınsaklığı ile $\{T_m(0)\}$ dizisinin yakınsaklığının denk olduğu aşikârdır.

$z = \infty$ için $T_m(\infty) = T_{m-1}(0)$ dır. Sonuç olarak $\{T_m\}$ dizisi bir $v \in \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ değerine yakınsıyor ise $\mathbf{K}(a_m/b_m)$ sürekli kesiri de bu v değerine yakınsar. Bunu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_m(0) = v = \mathbf{K}(a_m/b_m) \quad (59)$$

ile göstereyim.

2.3.2. Teorem (Pringsheim Teoremi) [9]

Farzedelim ki her m için $|b_m| \geq 1 + |a_m|$ olsun. Bu takdirde (57) sürekli kesiri $|v| \leq 1$ olan bir v değerine yakınsar. ■

1.11.10. Teorem' in ispatı M. Akbaş [6] tarafından yapılmıştır. Bu ispatta φ dönüşümü $\mathbf{F}_{u,n}$ grafindaki sonsuz yolda minimal uzunluklu devreleri verecek şekilde bulunmuştur.

2.3.3. Sonuç

$$\varphi = \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2 + ku + 1}{n} \\ -n & u + k \end{pmatrix}$$

dir.

İspat

$$\varphi(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

olsun. Bu dönüşüm için 2.2.2. Teorem' den $\infty \rightarrow \frac{u}{n}$ ve $\frac{u}{n} \rightarrow \frac{u+\frac{1}{k}}{n}$ olduğundan;

$$\varphi(\infty) = \frac{a}{c} = \frac{u}{n} \Rightarrow a = \pm u \text{ ve } c = \pm n$$

dir. Burada genelliği bozmadan $a := -u$ ve $c := -n$ alalım. Ayrıca buradan;

$$\varphi\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{a\frac{u}{n} + b}{c\frac{u}{n} + d} = \frac{au + bn}{cu + dn} = \frac{u + \frac{1}{k}}{n} = \frac{ku + 1}{kn}$$

ve $\det[\varphi] = -ud + bn = 1$ olduğundan $d = \frac{bn-1}{u}$ ve dolayısıyla

$$\frac{-u^2 + bn}{-un + \frac{(bn-1)n}{u}} = \frac{ku+1}{kn} \Rightarrow \frac{-u^3 + ubn}{-u^2n + bn^2 - n} = \frac{ku+1}{kn}$$

dir. Böylece

$$-u^3kn + ubkn^2 = -u^3kn - u^2n + bn^2ku + bn^2 - kun - n$$

ve buradan da

$$b = \frac{u^2 + ku + 1}{n}$$

elde edilir. $-ud + bn = 1$ ' den $d = u + k$ bulunur. Sonuç olarak aranılan dönüşüm

$$\varphi(z) := \frac{-uz + \frac{u^2 + ku + 1}{n}}{-nz + u + k}$$

olarak elde edilir. ■

2.3.4. Sonuç

$\varphi \in \Gamma_0(n)$ olup $\varphi(\infty) =: v_1, \varphi(v_1) =: v_2$ ve bu şekilde devam edilirse, eğer $\frac{u+x}{n} \mathbf{F}_{u,n}$ grafindaki minimal uzunluklu yolları sağlayan bir köşe ise bu köşenin gidebileceği en uzak köşe

$$\varphi\left(\frac{u + \frac{x}{y}}{n}\right) := \frac{u + \frac{y}{ky - x}}{n} \quad (60)$$

dir. ■

2.3.5. Sonuç

$1 \leq i \leq s$ ve $v_1 = \frac{u}{n}$ olmak üzere bu yoldaki tüm köşeler için $v_i = \varphi^{i-1}(v_1)$ dir. ■

2.3.6. Sonuç

Sürekli kesirler ile alt yörüngesel grafların hiperbolik yolları arasındaki ilişkiyi görmek için; 2.2.2. Teorem ve 2.3.4. Sonuçtan

$$\infty \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k}}{n} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}{n} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}}{n} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}}}{n} \rightarrow \dots \quad (61)$$

sonsuz yolu verilir. ■

2.3.7. Sonuç

$\varphi := \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2+ku+1}{n} \\ -n & u+k \end{pmatrix}$ olup $\varphi \in \Gamma_0(n)$ ve $k = 1$ ise φ dönüşümü 3. mertebeden

eliptik, $k = 0$ ise φ dönüşümü 2. mertebeden eliptik ve $k = 2$ ise φ dönüşümü parabolik dönüşümdür. Gerçekten; $0 \leq iz^2\varphi < 4$ olup φ dönüşümü eliptik ve $iz^2\varphi = 4$ olup φ paraboliktir. ■

2.3.8. Sonuç $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ise

$$\varphi\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u + \frac{1}{k}}{n} \text{ ve } \varphi\left(\frac{u + \frac{1}{k}}{n}\right) = \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}{n}$$

dir. ■

2.3.9. Sonuç

(61) sonsuz yolu için sürekli kesir yapısını sağlayan dönüşüm

$$t(z) := \frac{-1}{z-k} = \frac{1}{-z+k}$$

dir.

İspat

$$t(z) := \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

olsun. Bu dönüşüm için $\infty \rightarrow 0$ ve $0 \rightarrow \frac{1}{k}$ olduğundan;

$$t(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma} = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{ve} \quad t(0) = \frac{\beta}{\delta} = \frac{1}{k} \Rightarrow \delta = \beta k$$

dir. Buradan;

$$t(z) = \frac{0z + \beta}{\gamma z + \beta k} \quad \text{ve} \quad \det[t(z)] = 0 - \beta\gamma = 1 \Rightarrow \beta\gamma = -1 \Rightarrow \beta = \pm 1 \quad \text{ise} \quad \gamma = \pm 1$$

dir. Buradan da $\delta = \mp k$ olur. Dolayısıyla bu dönüşüm

$$t(z) := \frac{-1}{z-k} = \frac{1}{-z+k} \tag{62}$$

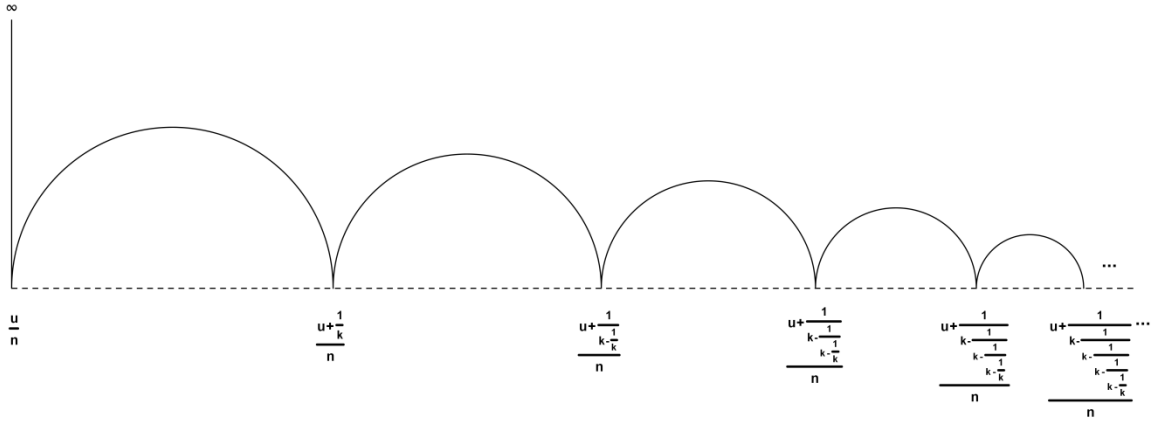
olarak elde edilir. ■

2.3.10. Sonuç

Böylece eğer

$$M := \bigcup_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{u + T_m(0)}{n} : T_m(z) = t_1, t_2, \dots, t_m(z) = \frac{1}{k-z} \right\} \cup \left\{ \infty = \frac{1}{0} \right\}$$

kümesi (60) deki sonsuz hiperbolik yolun köşelerinin kümesi olarak tanımlanırsa, köşeleri M kümesinde olan hiperbolik yollar minimal uzunlukludur. ■



Şekil 14. $F_{u,n}$ grafında minimal uzunluklu hiperbolik yollar

Bu tezde özel olarak $\forall m \in \mathbb{N}$ için $a_m := -1$ ve $b_m := -k$ alınacaktır. Yani,

$$t_m(z) = \frac{-1}{-k+z} := t(z) \quad (63)$$

lineer kesirli dönüşümü kullanılacaktır.

(57) sürekli kesirini her m için

$$|b_m| \geq 1 + |a_m|$$

koşulunu sağlıyorsa “Pringsheim Kesiri” olarak adlandıracağız.

2.3.11. Sonuç

(63) dönüşümü $k \geq 2$ için Pringsheim teoreminin koşullarını sağlar ve bir Pringsheim kesiridir.

İspat

$a_m = -1 \neq 0, b_m = -k$ ve $|b_m| \geq 1 + |a_m|$ olduğundan

$$|-k| \geq 1 + |-1| = 2 \Rightarrow |k| \geq 2 \Rightarrow k \geq 2$$

elde edilir. ■

Burada her m için

$$T_m(z) = t_1 t_2 \dots t_m(z) = \underbrace{tt \dots t}_{m \text{ tane}}(z) = t^{(m)}(z)$$

olarak alınacaktır. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} T_m(0) = t^{(m)}(0) &= \underbrace{tt \dots t}_{m \text{ tane}}(0) = \underbrace{t \dots t}_{m-1 \text{ tane}}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k - \dots - \frac{1}{k}}}}}} \\ &= \frac{1}{k - T_{m-1}(0)} \end{aligned} \quad (64)$$

dır.

Şimdi $\{T_m(0)\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyelim.

2.3.12. Sonuç $k \geq 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_m(0) = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \leq 1$$

dir.

İspat Pringsheim teoreminde böyle bir dizinin $|v| \leq 1$ olan bir v değerine yakınsadığı verilmiştir. Buradaki v değerini belirleyelim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_m(0) = v$$

olsun. (64) denkleminde

$$T_m(0)[k - T_{m-1}(0)] = 1$$

dir. Buradan $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m(0) = v = \lim_{m \rightarrow \infty} T_{m-1}(0)$ olduğundan

$$v(k - v) = 1$$

dir. Bu quadratik denklemden $v_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ elde edilir. $|v| \leq 1$ olduğundan

$$\frac{|k \pm \sqrt{k^2 - 4}|}{2} \leq 1$$

olmalıdır. Her m için $T_m(0) > 0$ dir ($k \geq 2$). Bu takdirde;

$$k = 2 \text{ ise } v_{1,2} = v = 1 \text{ ve } k > 2 \text{ ise } v_{1,2} = v = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

dir. $v = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ olamaz. Çünkü $|v| \leq 1$ olduğundan

$$v = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2} \leq 1 \text{ olsa } k + \sqrt{k^2 - 4} \leq 2$$

olup $k^2 - 4 \leq 4 + k^2 - 4k \Rightarrow k \leq 2$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Şimdi de $|v| = \left| \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right| \leq 1$ olup olmadığına bakalım. Farzedelim ki bir an için

$|v| = \left| \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right| > 1$ olsun. Bu durumda

$$\left| k - \sqrt{k^2 - 4} \right| > 2 \quad \stackrel{k \geq 2 \text{ olup } k > \sqrt{k^2 - 4}}{\Leftrightarrow} \quad k - \sqrt{k^2 - 4} > 2 \Rightarrow k < 2$$

elde edilir ki bu da bir çelişkidir.

Sonuç olarak $\{T_m(0)\}$ dizisi yakınsaktır ve limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_m(0) = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

dir. $k = 2$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} T_m(0) = 1$ aksi halde $\lim_{n \rightarrow \infty} T_m(0) = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} < 1$ dir. ■

2.3.13. Sonuç

$n < m$ ise $t^n(0) < t^m(0)$ dir. Yani, $\{t^n(0)\}$ dizisi artandır.

İspat

$$t(z) = \frac{1}{-z + k} \Rightarrow t'(z) = \frac{1}{(z - k)^2} > 0$$

olduğundan $z \neq k, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere t fonksiyonu kesin artandır. Dolayısı ile

$$0 < \frac{1}{k} \Rightarrow t(0) < t\left(\frac{1}{k}\right) = t^{(2)}(0) \Rightarrow t^{(2)}(0) < t^{(3)}(0) \Rightarrow \dots \Rightarrow t^{(n)}(0) < t^{(n+1)}(0)$$

dır. Böylece $\{t^n(0)\}$ dizisi kesin artan bir dizidir. ■

Burada daha önce gösterdiğimiz gibi özel olarak $k = 1$ olması durumunda yani, $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ olduğunda $\mathbf{F}_{u,n}$ grafında minimal uzunluklu hiperbolik devre olarak bir üçgen elde edilir. Fakat bu durumda $\mathbf{F}_{u,n}$ grafi için orman olma durumu kalkacağından ve sürekli kesir yapısı kesileceğinden bunu göz ardı edeceğiz.

2.4. Yinelenme Bağıntıları ile Köşelerin Belirlenmesi

$T_m(z) = t^{(m)}(z)$ olmak üzere $\forall m \geq 1$ için $a_m := -1 \neq 0$ ve $b_m := -k, k \geq 2$ olduğunda

$$T_1(z) = \frac{-1}{-k+z}, T_2(z) = \frac{-1}{-k + \frac{-1}{-k+z}}, T_3(z) = \frac{-1}{-k + \frac{-1}{-k + \frac{-1}{-k+z}}}, \dots$$

dir. Dolayısı ile (41) yinelenme bağıntılarından başlangıç koşulları,

$$A_{-1} := 1, B_{-1} := 0, A_0 := b_0, B_0 := 1$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} A_m \\ B_m \end{bmatrix} := b_m \begin{bmatrix} A_{m-1} \\ B_{m-1} \end{bmatrix} + a_m \begin{bmatrix} A_{m-2} \\ B_{m-2} \end{bmatrix}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

olduğundan

$$A_1 = b_1 A_0 + a_1 A_{-1} = (-k).0 + (-1).1 = -1$$

$$B_1 = b_1 B_0 + a_1 B_{-1} = (-k).1 + (-1).0 = -k$$

$$A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0 = (-k).(-1) + (-1).0 = k$$

$$B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0 = (-k).(-k) + (-1).1 = k^2 - 1$$

$$A_3 = b_3 A_2 + a_3 A_1 = (-k).k + (-1).(-1) = -k^2 + 1$$

$$B_3 = b_3 B_2 + a_3 B_1 = (-k).(k^2 - 1) + (-1).(-k) = -k^3 + 2k$$

$$A_4 = b_4 A_3 + a_4 A_2 = (-k).(-k^2 + 1) + (-1).(k^2 - 1) = k^3 - 2k$$

$$B_4 = b_4 B_3 + a_4 B_2 = (-k).(-k^3 + 2k) + (-1).(k^2 - 1) = k^4 + 3k^2 - 1$$

⋮

olarak bulunur. Buradan her $m \geq 1$ için

$$B_m = -A_{m+1}$$

dir. Biliyoruz ki $\forall m \geq 1$ için $f_m = T_m(0) = \frac{A_m}{B_m}$ olup Şekil 14 de verilen hiperbolik yol için p . köşe

$$\frac{u + T_{p-1}(0)}{n} = \frac{A_p u - A_{p-1}}{A_p n} \quad (65)$$

dir.

Şimdi özel olarak $k = 2$ ve $k = 3$ alınması durumunda köşeleri belirleyecek formülü düzenlemeye çalışalım. Buradan $k = 2$ için

$$A_1 = (-2).0 + (-1).1 = -1$$

$$A_2 = (-2).(-1) + (-1).0 = 2$$

$$A_3 = (-2).2 + (-1).(-1) = -3$$

$$A_4 = (-2).(-2^2 + 1) + (-1).(2^2 - 1) = 4$$

$$A_5 = (-2).((-2)^3 - 2.(-2)) + (-1).(-2^2 + 1) = -5$$

$$A_6 = (-2).(-2^4 + 3.(-2)^2 - 1) + (-1).((-2)^3 - 2.(-2)) = 6$$

⋮

olarak elde edilir. Bu durumda her $m \geq 1$ için,

$$A_m = (-1)^m . m$$

yazılır. Dolayısı ile $k = 2$ için ilgili $\mathbf{F}_{u,n}$ grafindaki p . köşe (65) den

$$\frac{(-1)^p p u - (-1)^{p-1} (p-1)}{(-1)^p p n}$$

dir.

2.4.1. Sonuç

$$kA_p + A_{p+1} + A_{p-1} = 0$$

İspat

$$\varphi\left(\frac{u+\frac{x}{y}}{n}\right) := \frac{u+\frac{y}{ky-x}}{n} \text{ olarak verilmiş idi. Burada } x = A_{p-1} \text{ ve } y = B_{p-1} = -A_p$$

olmak üzere $\mathbf{F}_{u,n}$ grafiindeki p . köşe

$$\frac{u + \frac{A_{p-1}}{B_{p-1}}}{n} = \frac{u - \frac{A_{p-1}}{A_p}}{n}$$

dir ve bu köşenin gidebileceği en uzak köşe yani $(p + 1)$. köşe

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{u - \frac{A_{p-1}}{A_p}}{n}\right) &= \frac{u - \frac{A_p}{k(-A_p) - A_{p-1}}}{n} = \frac{-ukA_p - uA_{p-1} - A_p}{-nkA_p - nA_{p-1}} \\ &= \frac{ukA_p + uA_{p-1} + A_p}{nkA_p + nA_{p-1}} \stackrel{(65)}{=} \frac{A_{p+1}u - A_p}{A_{p+1}n} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$uknA_pA_{p+1} + uA_{p-1}A_{p+1} + nA_pA_{p+1} = uknA_pA_{p+1} - nkA_p^2 + uA_{p-1}A_{p+1} - nA_pA_{p-1}$$

ve dolayısıyla $\forall p \geq 1$ için $A_p \neq 0$ olduğundan sonuç olarak

$$kA_p + A_{p+1} + A_{p-1} = 0$$

bulunur. ■

Şimdi $k = 3$ için durumu inceleyelim. Burada

$$A_1 = (-3).0 + (-1).1 = -1$$

$$A_2 = (-3).(-1) + (-1).0 = 3$$

$$A_3 = (-3).3 + (-1).(-1) = -8$$

$$A_4 = (-3).(-8) + (-1).3 = 21$$

$$A_5 = (-3).(21) + (-1).(-8) = -55$$

$$A_6 = (-3).(-55) + (-1).21 = 144$$

$$A_7 = (-3).144 + (-1).(-55) = -377$$

$$A_8 = (-3).(-377) + (-1).144 = 987$$

⋮

elde edilir.

Fibonacci dizisi sayıları

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \dots$$

şeklinde devam eder. Her sayı kendisinden önce gelen iki sayının toplamıdır. Bu durumda genel olarak n . Fibonacci sayısı F_n şu şekilde ifade edilir:

$$F_n = F(n) = \begin{cases} 0, n = 0 \\ 1, n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), n > 1 \end{cases} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Burada $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ile altın oran olarak tanımlanan ifade aslında

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

sürekli kesirinin değeridir. Buradan ise $k = 3$ durumunda her $m \geq 1$ için

$$A_m := (-1)^m F_{2m}$$

olarak verilir. Dolayısı ile $k = 3$ için ilgili $\mathbf{F}_{u,n}$ grafiindeki p . köşe

$$\frac{(-1)^p F_{2p} u - (-1)^{p-1} F_{2p-2}}{(-1)^p F_{2p} n}$$

dir.

Diğer taraftan, sürekli kesirlerin matris bağlantısını kullanalım. Buradan $\forall m \geq 1$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} A_{m-1} & A_m \\ B_{m-1} & B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{m-1} & A_m \\ -A_m & -A_{m+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

elde edilir. (65) den, $\frac{A_p u - A_{p-1}}{A_p n}$ olduğundan, p . köşe

$$\frac{a_{1,2} u - a_{1,1}}{a_{1,2} n}$$

olarak verilir. Dolayısı ile $(p + 1)$. köşe hemen

$$\frac{-a_{2,2} u - a_{1,2}}{-a_{2,2} n}$$

olarak bulunur.

3. İRDELEME

Charles C. Sims 1967 de yayınlanan “Graphs and Finite Permutation Groups” adlı makalesinde, bir Ω kümesi üzerinde hareket eden bir G grubunun alt yörüngesel graflarını ve bu graflardaki devre uzunluklarını inceledi. Daha sonra bu sonuçlardan yola çıkarak 1988 de Gareth A. Jones, David Singerman ve Keith Wicks $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerinde hareket eden Γ Modüler grubunun alt yörüngesel graflarını araştırdılar. Bu çalışmada $\mathbf{G}_{u,n}$ graflarının bazı özellikleri ile birlikte, bir $\mathbf{G}_{u,n}$ grafinin bir orman olabilmesi için gerek ve yeter şartın üçgen içermemesi olduğu yani, $u^2 \pm u + 1 \not\equiv 0 \pmod{n}$ olduğu konjektürü verildi. Bu konjektür ise 2001 de M. Akbas tarafından “On Suborbital Graphs for the Modular Group” adlı çalışmasında ispatlandı. Bu makalede bir sonuç olarak elde edilen Γ Modüler grubunun bir alt grubu olan $\Gamma_0(n)$ grubunun özel bir elemanı kullanılarak bir sürekli kesir ortaya konulmuştur. Daha sonra 2011 de Ali H. Değer (Murat Beşenk ve Bahadır Ö. Güler ile birlikte) “On Suborbital Graphs and Related Continued Fractions” adlı çalışmasında $\Gamma_0(n)$ kongrüans alt grubunun alt yörüngesel graflarını araştırarak minimal uzunluklu hiperbolik yollar ile ilgili bazı sonuçlar elde etti. Bu graflardan özel olarak ortaya konulan bir sürekli kesir ile ilgili sonuçları “Pringsheim teoremini” kullanarak verdi.

Bu tez çalışmasında öncelikle \mathbf{F} Farey grafi bilgisayar ortamında çizdirilmiş ve daha sonra sürekli kesirler kullanılarak $\mathbf{G}_{u,n}$ grafinin bir alt grafi olan $\mathbf{F}_{u,n}$ grafindaki minimal uzunluklu eğriler kavramı tanımlanarak bununla ilgili önemli teorem ve sonuçlar verilmiştir.

4. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen başlıca önemli sonuçlar şu şekilde verilebilir:

1. Genel özellikleri girişte verilen \mathbf{F} Farey grafinin $[0,1]$ kapalı aralığında kalan kısmı MATLAB bilgisayar programı vasıtası ile çizdirilmiştir (Şekil 11-12).

2. $\Gamma_0(n)$ kongrüans alt grubunun alt yörüngesel grafları incelenerek sürekli kesirler ile bağlantısı verildi.

3. $k = x(-u^2 - 1)$ tamsayısı bulundu (2.2.1 Sonuç).

4. $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,n}$ grafindaki bir köşenin gidebileceği en uzak köşenin belirlenmesi için önemli bir teorem verildi (2.2.2 Teorem).

5. $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,n}$ grafinda bir üçgenin mevcut olduğu bulundu (2.2.3 Teorem).

6. $1 < k < n$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,n}$ grafinda her yolun minimal uzunluklu olduğu ve $k = 1$ için $\mathbf{F}_{u,n}$ grafinda herhangi bir yolun minimal uzunluklu olması gerekmediği bulundu (2.3.1 Teorem).

7. $\{T_m(0)\}$ dizisinin yakınsaklığı incelendi. (2.3.12 Sonuç).

8. Yinelenme bağıntıları kullanılarak $\mathbf{F}_{u,n}$ grafindaki köşeler belirlendi. Özel olarak $k = 2$ ve $k = 3$ durumları için köşelerin bulunması ile ilgili formüller verildi.

9. Yinelenme bağıntıları ve k tamsayısı kullanılarak $kA_p + A_{p+1} + A_{p-1} = 0$ sonucu bulundu (2.4.1 Sonuç).

5. ÖNERİLER

1. $F_{u,n}$ grafindaki yolların köşeleri ve yakınsaklık durumları, verilen u ve n ler için uygun k ları belirleyen bir MATLAB programı ile birlikte bulunarak bir arayüz hazırlanabilir.

2. Yinelenme bağıntıları kullanılarak $K(-1/-k)$ sürekli kesirinin yakınsama durumu ile ilgili sonuçlar genişletilebilir.

3. Determinant formülü ile birlikte $K(-1/-k)$ sürekli kesirinin matris bağlantıları araştırılarak Pringsheim teoreminin sonuçları bu sürekli kesirlere uygulanabilir.

4. $u^2 - pu + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ kongrüans denklemini sağlayan bir $p \in \mathbb{Z}$ sayısı bulunarak elde edilen sonuçlar genişletilebilir.

5. Özel olarak $t(z) = \frac{1}{-z+k}$ lineer kesirli dönüşümü sürekli kesir yapısına uygun olduğundan; literatürdeki $t_m(z) = \frac{a_m}{b_m+z}$ dönüşümü ile ilgili sonuçlar bu Pringsheim kesirine uygulanabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Sims, C.C., Graphs and Finite Permutation Groups, Math. Zeitschr., 95 (1967) 76-86.
2. Neumann, P.M., Finite Permutation Groups, Edge-Coloured Graphs and Matrices, Topics in Group Theory and Computation, Academic Press, London, 1977.
3. Biggs, N.L. ve White, A.T., Permutation Groups and Combinatorial Structures, London Mathematical Society Lecture Note Series 33, CUP, Cambridge, 1979.
4. Griess, R.L., The Friendly Giant, Invent. Math., 69 (1982) 1-102.
5. Jones, G.A., Singerman, D. ve Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 160 (1991) 316-338.
6. Akbaş, M., On Suborbital Graphs for The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33 (2011) 647-652.
7. Tsuzuku, T., Finite Groups and Finite Geometries. (translated from the 1976 Japanese version by A. Sevenster and T. Okuyama), Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 78, Cambridge University Press, 1982, 328 pp.
8. Değer, A.H., Beşenk, M. ve Güler, B.Ö., On Suborbital Graphs and Related Continued Fractions, Applied Mathematics and Computation, 218,3 (2011) 746-750.
9. Beardon, A.F., The geometry of Pringsheim's Continued Fractions, Geometriae Dedicata, 84 (2001) 125-134.
10. Jones, G.A. ve Singerman, D., Complex Functions:an Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
11. Schoeneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
12. Hurwitz, A., Über die Reduktion der binären quadratischen Formen, Math. Ann., 45 (1894) 85-117.
13. Singerman, D., Universal Tessellations, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, 1 (1988) 111-123.
14. Series, C., The Geometry of Markoff Numbers, Math. Intelligencer, 7 (1985) 20-29.
15. Biggs, N.L., Graphs with Large Girth, Ars Combinatoria, 25-C (1988) 73-80.
16. <http://www.uwoy.edu/moorhouse/courses/5640/hyperbolic.pdf> 27.10.2011.

17. <http://tr.wikipedia.org/wiki/Kombinatorik> 27.10.2011
18. Wilkie, H.C., On Non-Euclidean Crystallographic Groups, Math. Zeitschr., 91,2 (1966) 87-102.
19. Akbaş, M. ve Başkan, T., Suborbital Graphs for The Normalizer of $\Gamma_0(N)$, Tr. J. Of Math., 20 (1996) 379-387.
20. Singerman, D., Subgroups of Fuchsian Groups and Finite Permutation Groups, Bull. London Math. Soc., 2 (1970) 319-323.
21. Hardy, G.H. ve Wright, E.M., An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press, Oxford, 1979.
22. Leveque, W.J., Fundamentals of Number Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.
23. Cuyt, A., Petersen, V.B., Verdonk, B., Waadeland, H. ve Jones, W.B., Handbook of Continued Fractions for Special Functions, SpringerScience, Netherlands, 2008.
24. Jones, W.B. ve Thron, W.J., Continued Fractions Analytic Theory and Applications, Encyclopedia of Mathematics and It's Applications, Volume 11, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1980.
25. Sims, C.C., Graphs and Finite Permutation Groups. II, Math. Zeitschr., 95 (1968) 276-281.
26. Jacobsen, L., Thron, W.J. ve Waadeland, H., Some Observations on the Distribution of Values of Continued Fractions, Numerische Mathematik, 55 (1989) 711-733.
27. Hillam, K. L. ve Thron, W.J., A General Convergence Criterion for Continued Fractions $K(an/bn)$, Proceedings of the American Mathematical Society, 16 (1965) 1256-1262.
28. Jacobsen, L., Thron, W.J. ve Waadeland, H., Some Observations on the Distribution of Values of Continued Fractions, Numerische Mathematik, 55 (1989) 711-733.
29. Jacobsen, L., Thron, W.J. ve Waadeland, H., Julius Worpitzky, His Contributions to the Analytic Theory of Continued Fractions and His Times, Analytic Theory of Continued Fractions, 1406 (1989) 27-47.
30. Jones, W.B. ve Thron, W.J., Convergence of Continued Fractions, Canadian Journal of Mathematics, 20 (1968) 1037.
31. Beardon, A. ve Lorentzen, L., Approximants of Sleszynski-Pringsheim continued fractions, Journal of Computational and Applied Mathematics, 132 (2001) 467-477.

32. Beardon, A.F. ve Carne, T.K., Euclidean and hyperbolic lengths of images of arcs, Proceedings of the London Mathematical Society, 97 (2008) 183-208.
33. Beardon, A. ve Lorentzen, L., Approximants of Sleszynski-Pringsheim continued fractions, Journal of Computational and Applied Mathematics, 132 (2001) 467-477.
34. Beardon, A.F., Worpitzky's Theorem on continued fractions, Journal of Computational and Applied Mathematics, 131 (2001) 143-148.
35. Beardon, A.F., The Worpitzky-Pringsheim theorem on continued fractions, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 31 (2001) 389-399.
36. Beardon, A.F., Continued fractions, Mobius transformations and Clifford algebras. Bulletin of the London Mathematical Society, 35 (2003) 302-308.
37. Beardon, A.F., The pointwise convergence of Mobius maps, Michigan Mathematical Journal, 52 (2004) 483-489.
38. Beardon, A.F. ve Lorentzen, L., Continued fractions and restrained sequences of Mobius maps, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 34 (2004) 441-466.
39. Beardon, A.F. ve Short, I., The Seidel, Stern, Stolz and Van Vleck Theorems on continued fractions, Bulletin of the London Mathematical Society, 42 (2010) 457-466.

ÖZGEÇMİŞ

Ali Hikmet DEĞER 1980 yılında Trabzon da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Trabzon da tamamladı. 2003 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. 2006 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalından Yüksek Lisans derecesini aldı ve aynı yerde Doktora programında eğitime başladı. 2004 de Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat fakültesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir. Evli olup, iyi derecede İngilizce bilmektedir.

Değer, A.H., Beşenk, M. ve Güler, B.Ö., On suborbital graphs and related continued fractions, Applied Mathematics and Computation, 218,3 (2011) 746-750.